

# ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

## ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Β΄

ΥΠΟ  
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ  
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ  
ΑΘΗΝΑΙ 1973

18/76/9814 (4)-2

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ

# ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ β' τόμου

ἐπεμελήθη

ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ



# ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

## ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Β΄

ΥΠΟ  
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ  
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ  
ΑΘΗΝΑΙ 1973

18176/98 14 (4) -2



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίς
Πρόλογος Ε. Σ. Σταμάτη .....	VII
Πρόλογος I. L. Heiberg .....	XV
Πίναξ προτάσεων τόμου Β' .....	XIX
Περὶ ἐλίκων .....	1
Μηχανικὰ α' (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν βιβλίον α'). .....	107
Μηχανικὰ β' (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν βιβλίον β'). .....	142
Ψαμμίτης .....	179
Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (Τετρ. παραβολῆς). .....	217
Ὅχουμένων βιβλίον α' .....	267
Ὅχουμένων βιβλίον β' .....	294
Στομάχιον .....	369
Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος. ....	383
Πρόβλημα βοεικὸν .....	467
Σχόλιον .....	467
Ἐπεξηγήσεις .....	479
Ἐπίμετρον .....	507
Προσθήκη μαρτυριῶν .....	557
Προσθήκη βιβλιογραφίας .....	565
Εὐρετήριον .....	573



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

I. Εἰς τὸν Β' τόμον τῶν Ἀπάντων τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περιλαμβάνονται τὰ ὑπόλοιπα εἰς τὴν ἑλληνικὴν διασωθέντα ἔργα αὐτοῦ, τὰ περιεχόμενα καὶ εἰς τὸν Β' τόμον τῆς ἐκδόσεως I. L. Heiberg τοῦ 1913.

Τὰ ἔργα ταῦτα εἶναι :

1. Περὶ ἐλίκων
2. Μηχανικά α', β' (ἢ Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων, βιβλία α', β')
3. Ψαμμίτης
4. Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (ἢ Τετραγωνισμὸς παραβολῆς)
5. Ὀχουμένων α', β'
6. Στομάχιον
7. Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος (= μέθοδος)
8. Πρόβλημα βοεικόν.

II. Ἀντὶ τοῦ τίτλου Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. τῆς δευτέρας, ὥς ἄνω, πραγματείας, τοῦ ὑπάρχοντος εἰς τὴν ἔκδοσιν Heiberg, ἐθέσαμεν τὸν ἀληθῆ τίτλον, Μηχανικά, τὸν ὅποιον ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιοεῖ εἰς τὴν πραγματείαν του Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἀναφερόμενος ἐκεῖ εἰς τὰ κέντρα τοῦ βάρους τριγώνου (θ. 6 σελ. 228,1) καὶ τραπεζίου (θ. 10, 232,18), λέ-

γων, «δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς». Καὶ τὸ μὲν κέντρον τοῦ βάρους τριγώνου ἀποδεικνύεται εἰς τὰ θεωρήματα 13 καὶ 14 τῆς φερομένης ὑπὸ τὸν τίτλον Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. πραγματείας, τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τραπεζίου ἀποδεικνύεται εἰς τὸ θεώρημα 15 τῆς αὐτῆς πραγματείας. Ἐπίσης, εἰς τὸ β' βιβλίον, (θ. 2 σελ. 298,10) τῆς πραγματείας Ὀχουμένων, λέγει «δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχανικῶν» ἀναφερόμενος εἰς τὸ θεώρημα 8 τοῦ α' βιβλίου τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. φερομένης πραγματείας.

Ὅθεν εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ τίτλος Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. ἔχει τεθῆ ὑπὸ μεταγενεστέρων.

Εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα 2 τοῦ β' βιβλίου τῶν Ὀχουμένων (σελ. 298, 4) γράφεται «δέδεικται γὰρ ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις, ὅτι παντὸς ὀρθογωνίου κωνοειδὸς τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος διηρημένου οὕτως, ὥστε τὸ ποτὶ τῇ κορυφῇ τοῦ ἄξονος τμήμα διπλάσιον εἴμεν τοῦ λοιποῦ». Ὅπως φαίνεται ἐκ τούτου, ὑπῆρχε πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τὸν τίτλον Ἰσορροπίαι, ἡ ὁποία ἀφεώρα εἰς τὴν εὔρεσιν τοῦ κέντρου βάρους στερεῶν ἐκ περιστροφῆς, τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστόν, ὀνομάζει κωνοειδῆ (=παραβολοειδῆ καὶ ὑπερβολοειδῆ ἐκ περιστροφῆς). Ἡ πραγματεία αὕτη δὲν διεσώθη.

Εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος (θ. 1 σελ. 394,22), γράφεται διὰ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου «δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς». Ἀλλὰ καὶ ἐνταῦθα εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ λέξις «Ἰσορροπικοῖς» ἔχει τεθῆ ὑπὸ μεταγενεστέρων ἀντὶ τοῦ τίτλου Μηχανικά. Εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὴ ὀνομάζεται μίαν φοράν «παραβολή» (σελ. 392,20). Ἀλλὰ εἰς ὅλον τὸ κείμενον τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον

«Τετραγωνισμός παραβολῆς» φερομένης πραγματείας, ἡ παραβολὴ ὀνομάζεται «ὀρθογωνίου κώνου τομὴ». Εἶναι δὲ γνωστὸν ἐκ τοῦ Πάππου (II Ζ', σελ. 672, 24. F. Hultsch) ὅτι πρῶτος ὁ Ἀπολλώνιος, ὅστις ἔζησε 30 περίπου ἔτη μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη, ὠνόμασε τὴν ὀρθογωνίου κώνου τομὴν, παραβολήν.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἐθέσαμεν ὡς τίτλον τῆς πραγματείας, Τετραγωνισμός παραβολῆς, τὸν Ἀρχιμήδειον τίτλον *Τετραγωνισμός ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*.

III. Ἐκ τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ α' βιβλίου τῶν Ὀχουμένων (Ὑδροστατικῆς) μέρος ἔχει διασωθῇ εἰς τὴν λατινικὴν καὶ ἔχει μεταφρασθῇ εἰς τὰς κυριωτέρας εὐρωπαϊκὰς γλώσσας, ἐκ τῶν ὁποίων μετεγλωττίσαμεν τοῦτο εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν. Τοιαύτη μεταγλώττισις ἔγινε καὶ διὰ τὰ θεωρήματα 4, 5, 6, 9, 10 τοῦ β' βιβλίου τῶν Ὀχουμένων. Ἐκ τούτων ὅμως τὰ ὑπ' ἀριθμ. 5 καὶ 6 διεσώθησαν ὁλόκληρα μόνον εἰς τὴν λατινικὴν. Γενικῶς, αἱ περισωθεῖσαι πραγματεῖαι : Μηχανικά, Ὀχουμένων, Στομάχιον, Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, θεωροῦνται ὅτι ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν ἑλλιπεῖς.

Ἡ πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον, Λήμματα, περιέχουσα 15 πρό-  
τάσεις ἐπιπέδου γεωμετρίας, διεσώθη εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ περι-  
λαμβάνεται ὑπὸ τοῦ Heiberg εἰς τὸν II τόμον τῶν ΑΠΑΝΤΩΝ  
ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Liber  
Assumptorum = Βιβλίον Λημμάτων. Ταύτην, ὡς καὶ τὰς μέχρι  
τοῦδε περισωθείσας πραγματείας εἰς τὴν ἀραβικὴν, περιελάβομεν  
εἰς τὸν ἀκολουθοῦντα Γ' τόμον τῶν ΑΠΑΝΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗ-  
ΔΟΥΣ.

Αἱ εἰς τὴν ἀραβικὴν περισωθεῖσαι, γνωσταὶ μέχρι σήμερον, πρα-  
γματεῖαι, αἵτινες περιλαμβάνονται εἰς τὸν ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδόμενον

Γ' τόμον τῶν ΑΠΑΝΤΩΝ, αἱ περισσότεραι τῶν ὁποίων θεωροῦνται ἔλλιπεῖς, εἶναι αἱ ὑπὸ τοὺς τίτλους:

1. Λήμματα
2. Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων
3. Περὶ κύκλων
4. Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου
5. Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων (ἐφαπτομένων) κύκλων
6. Εὗρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ
7. Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας
8. Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου
9. Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους

Εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ Γ' τόμου γίνεται εἰδικωτέρα μνεία περὶ τῶνπραγματειῶν αὐτῶν.

IV. Ὡς ἐπίμετρον παρετέθησαν εἰς τὸν παρόντα τόμον :

1. Ποίημα τοῦ Γερμανοῦ ποιητοῦ Φρειδερίκου φὸν Σίλλερ (Friedrich von Schiller, 1759 - 1805) ὑπὸ τὸν τίτλον «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΚΑΙ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ». Θεωροῦμεν πιθανόν, ὅτι ὁ Σίλλερ ἐνεπνεύσθη τὸ ποίημα ἐκ παρομοίου ποιήματος ἀναφερομένου εἰς τὸν Εὐκλείδην (Euclides I, Elementa I - IV, post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B.G. Teubner, Lipsiae 1969, Testimonium 45, p. XVI).

2. Δύο μικραὶ πραγματεῖαι δημοσιευθεῖσαι τὸ πρῶτον εἰς τὸ περιοδικὸν «Πλάτων» ὑπὸ τοὺς τίτλους «Δυνάμεις μὲ κλασματικούς ἐκθέτας παρ' Ἀρχιμήδει» καὶ «Γενίκευσις ἑνὸς θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους».



3. Ἐκθέσεις: τοῦ Δανοῦ καθηγητοῦ H. G. Zeuthen (1839-1920), τῆς Ῥωσίδος καθηγητρίας I. G. Bachmakova καὶ τοῦ Γάλλου καθηγητοῦ Charles Mugler, ἐνθα ἀναφέρονται θεωρήματά τινα, εἰς τὰ ὅποια ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ Διαφορικὸν καὶ Ὀλοκληρωτικὸν Λογισμόν. Δέον νὰ προστεθῇ ἐνταῦθα, ὅτι τὸ θέμα τοῦτο δὲν ἔχει ἐξαντληθῇ καὶ ὅτι ἡ συναφὴς περαιτέρω ἔρευνα παρουσιάζει πολὺ ἐνδιαφέρον.

4. Προσθήκη μαρτυριῶν περὶ τοῦ Ἀρχιμήδους

5. Προσθήκη βιβλιογραφίας

6. Εὐρετήριον

V. Ὡς πρῶτος ἀνακαλύψας τὰς ἀρχὰς τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὀλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ θεωρεῖται ὁ ἐφοπλιστὴς καὶ μαθηματικὸς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περὶ τὸ 440-430 π.Χ.), εἰς τὸν ὅποιον ἀποδίδεται ἡ ἀποδείξις τοῦ θεωρήματος τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου XII, 2, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. [Simplicii in Aristotelis Physicorum I 2 (Arist. p. 185 a14-17)], C.A.G., ed. H. Diels, Berolini 1822, S. 54-69).

Ὁ Εὐδόξος, μαθηματικὸς τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, ἐχρησιμοποίησε τὰς ἀρχὰς αὐτὰς διὰ τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων περὶ κώνου καὶ κυλίνδρου, ὡς μνημονεύει ὁ Ἀρχιμήδης (Ἄπαντα Ἀρχιμήδους, τόμος Α' μέρος Β', Ἀθῆναι 1970, σελ. 2-4), ὁ δὲ Ἀρχιμήδης ἀνέπτυξεν αὐτὰς ἔτι περισσότερον.

Μαθηματικοὶ τινες, φρονοῦντες ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Wilhelm Leibniz (1646-1716) καὶ τοῦ Isaac Newton (1643-1727) ὑποτιμᾶται ἐκ τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἀρχῶν τοῦ Ὀλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐβάπτισαν τὰς ἀρχὰς αὐτὰς τῶν Ἑλλήνων εἰς «μέθοδον ἐξαντλήσεως» (Exhaustionsverfahren). Τὴν ταυτότητα ὅμως τῆς λεχθείσης μεθόδου ἐξαντλήσεως πρὸς τὸν Ὀλο-

κληρωτικὸν Λογισμὸν πρῶτος ἐτόνισεν ὁ Ἕλληνας μαθηματικὸς John Wallis (1616-1703) (Max Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909, S. 264-265).

Τὴν γνώμην αὐτὴν τοῦ Wallis ὑπεστήριξαν, μετὰξὺ ἄλλων, ἐκ θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους

1) Ὁ Δανὸς καθηγητὴς Hier. Zeuthen, εἰς Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886, σελ. 440-455, ἀνατύπωσις Hildesheim 1965.

2) Ὁ Ὀλλανδὸς καθηγητὴς O. Dijksterhuis, ὅστις εἰς δύο πραγματείας του μὲ λύπην σημειώνει, ὅτι «δυστυχῶς, ἐσφαλμένως ἡ μέθοδος ὁλοκληρώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους λέγεται ἔξαντλητικὴ μέθοδος» (O. Dijksterhuis, 1) Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft, Gesell. für die internat. Wiss. Geschichte, Bremen, Sonderdruck 1952, 1, S. 15, und 2) Die Integrationsmethoden des Archimedes, Nordisk Mathematisk Tidskrift, Band 2, Oslo 1954, S. 5-23) (1. Ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ἡ σπουδαιότης του διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης, 2. Αἱ μέθοδοι Ὀλοκληρώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους).

3) Ἡ Ῥωσὶς καθηγήτρια τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Μόσχας Isabella Grigorievna Bachmakova, εἰς «Les méthodes différentielles d'Archimède, Arch. f. Hist. of Exact Sciences 1964, 2 p. 87 - 107» (Springer-Verlag, Berlin· Göttingen· Heidelberg).

4) Ὁ Γάλλος καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Nice, Charles Mugler, εἰς τὴν ἐκδοσὶν του τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, ARCHIMÈDE, tom. I, II, III, IV Paris 1970-1972, Les Belles Lettres καὶ ἄλλοι.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

VI. Καὶ ἡ ἔκδοσις τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου τόμου τῶν Ἀπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους θὰ ᾔτο ἀνέφικτος, ἐὰν δὲν ἐξεδηλοῦτο ἀμέριστον τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ Προέδρου τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος καθηγητοῦ τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου κ. Ἀλεξάνδρου Σφήκα. Τόσον πρὸς τὸν Πρόεδρον καθηγητὴν κ. Ἀλέξανδρον Σφήκαν, ὅσον καὶ πρὸς τὴν Διοικοῦσαν Ἐπιτροπὴν τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος ἐκφράζω εὐγνωμόνως τὰς ἀπείρους εὐχαριστίας μου.

Ἐγγραφον ἐν Ἀθήναις κατ' Ἰούνιον 1971

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

I. L. Heiberg

Εἰς τὸν τόμον τοῦτον ἔλαβον ὑπ' ὄψιν τοὺς κώδικας :

A = *cod. Georgii Vallae* (Γεώργιος Βάλλας) ἀποκατασταθεὶς ἐκ τοῦ

D = *cod. Laurent.* (Κῶδιξ Λαυρεντιανός) XXVIII 4 s. XV

E = *cod. Marcian.* (Μαρκιανός) 305 s. XV

G = *cod. Paris.* (Παρισινός) 2360 s. XVI

H = *cod. Paris.* (Παρισινός) 2361 scr. a 1544

B = *cod. Ottobon. lat.* 1850 s. XIII *Guilelmi di Moerbeka* B<sup>1</sup>

τοῦ κώδικος τούτου μέρος ἐξ ἄλλου ἐλληνικοῦ κώδικος ληφθέν, B<sup>2</sup> τοῦ κώδικος τούτου διορθωτῆς s. XV - XVI.

C = *cod. ἀντίγραφον* τοῦ ἐν Κωνσταντινουπόλει Μετοχίου, Ἱεροῦ

Μνήματος τοῦ μοναστηρίου τῶν Ἱεροσολύμων 355 s. X.

Σπανίως ἐμνημόνευσα τὸν F = *cod. Paris.* 2359 s. XVI

J = *cod. Paris.* 2362 s. XVI

Εἰς τὸ βιβλίον τὸ ἐπιγραφόμενον *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων* πρὸς Ἑρατοσθένη ἔφοδος, ὅτι ἀπὸ τῆς πρώτης ἐκδόσεως τοῦ 1907 εἴτε διαφέρει εἴτε πρὸς αὐτὴν συμφωνεῖ, εἰς νέας μελέτας δεφείλεται, τὰς ὁποίας κατὰ τὸ ἔτος 1908 εἰς τὸν κώδικα θὰ χρησιμοποιήσω, ἀλλὰ πλέον οἱ ὀφθαλμοί μου δὲν ἐπαρκοῦν διὰ περισσοτέρας ἐρεῦνας. Ἐκ τῶν νέων γραφῶν ἐξέδωκα μερικὰς εἰς τὸν τόμον τὸν ἐκδοθέντα πρὸς τιμὴν τοῦ H. G. Zeuthen (Κοπεγχάγη 1909), σελῆς 63 καὶ ἐξῆς. Διὰ τὴν συμπλήρωσιν τῶν κενῶν ἠκολούθησα τὰς

συμβουλὰς τοῦ Ἱερωνύμου Τσόιτεν (*H. G. Zeuthen*) καὶ συνε-  
βουλεύθην τὴν μετάφρασιν τοῦ Θεοδώρου Reinach (*Archimède,  
Des théorèmes mécaniques ou de la methode, Paris 1907 = Revue  
générale des sciences 1907, 30. Nov. et 15 Dec.*). Τὴν γερμανικὴν  
μετάφρασιν ἔδωκα εἰς *Biblioth. <sup>3</sup>VII p. 321* καὶ ἐξῆς μετὰ σχολίων  
τοῦ Ἱερωνύμου Τσόιτεν (*Hieronymi Zeuthen*). Ἡ ἀγγλικὴ ἐξε-  
δόθη μετ' εἰσαγωγῆς τοῦ Δαβὶδ Ε. Σμιθ (*Davidi E. Schmith,  
Chicago 1909 (=The monist XIX p. 202 sqq.)* καὶ νεωστὶ ὑπὸ  
τοῦ Th. L. Heath (*The method of Archimedes, Cambridge 1912*).

Ἐκ τοῦ κώδικος *C* τώρα πρῶτον ἐξεδόθη τὸ ἐλληνικὸν ἀπόσπασμα τοῦ Στομαχίου, εἰς τὸ ὁποῖον προσέθεσα τὸ ὑπὸ τοῦ Ἑρρίκου Suter ἐκδοθὲν ἐκ δύο ἀραβικῶν κωδίκων (σελ. 420 ὑποσημ.) καὶ τὸ ἐλληνικὸν κείμενον τῶν βιβλίων περὶ Ὀχουμένων, τὸ ὁποῖον τῇ βο-  
θείᾳ τοῦ ἡμετέρου κώδικος βάλει ὀρθότερον ἐκείνων τῶν περιφημῶν βιβλίων, τὰ ὅποια ἀπέδωκεν ἡ μετάφρασις τοῦ Γουλιέλμου ντὲ Μέρμπεκε (*Guilelmi di Moerbeke*). Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ὁμοία πρὸς τὸν ἐλληνικὸν κώδικα, τὰς γραφὰς ταύτης τὰς διαφερούσας τοῦ κώδικος *C* ἔθεσα εἰς τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα καὶ ὁπουδῆποτε ἡ ἀνάγνωσις τοῦ κώδικος *C* εἶναι ἀβεβαία, ταύτην παρέσχον πρὸς βεβαίαν ἀποκατάστασιν, ὅπου ὁ *C* εἶναι παντελῶς ἐλλιπής, καὶ ἐδέχθη μόνην τὴν μετάφρασιν ἐν τῷ κειμένῳ διὰ κεκλιμένων γραμμάτων, ἀκολουθήσας πιστῶς τὸν κώδικα *B*, ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἥλλαξα ὀρθογρα-  
φικά τινα (ἦτοι ἀντὶ  $\bar{e}$  ἔθεσα *ae*). Τὰ σχήματα ἔλαβον ἐκ τοῦ *B*, ὅταν εἰς τὸν *C* μόλις ἀνεγνωρίζοντο. Τὰ ἀντίστοιχα γράμματα τούτων ἀποδίδονται εἰς τὰ ἐλληνικὰ ὡς ἐξῆς :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
A	B	T	A	E	Φ	Γ	H	I	K	Λ	M	N	O	Π	X	P	Σ	Θ	—	—	Ξ	Υ	Z

Πρὸς τούτοις ὁ Γουλιέλμος εἰς τὸν κώδικά του ἔχει τὰ γράμματα Ψ, ω, ζ, ς, λ πολλάκις παραπεποιημένα (παράβαλε πρὸς τούτοις

σελ. 394, 18. 412, 10 τοῦ κριτικοῦ ὑπομνήματος). Ἐν πρώτοις δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ *T* εἰς τὰ σχήματα εἶναι *Θ*, τὸ δὲ *C* εἶναι τὸ *T*, τὸ ὁποῖον ἐνίοτε παρέχει δυσκολίας, ὅπως εἰς τὴν σελ. 389, ὑποσημείωσις).

Τὴν μετάφρασιν τοῦ Γουλιέλμου, τοῦ πρώτου βιβλίου, ἐξέδωκεν ὁ *N. Tartalea* (*Opera Archimedis Syracusani*, Venet. 1543). Τούτου τὴν ἔκδοσιν ἐπανάλαβεν ὁ *Troianus Curtius* (Venet. 1565) προσθέσας δεύτερον βιβλίον.

Καὶ τὰ δύο βιβλία διορθώσας καὶ σχολιάσας ἐξέδωκεν ὁ *F. Commandinus* (Bonon. 1565). Περὶ τῆς ἀραβικῆς μεταφράσεως ἰδὲ *H. Zotenberg*, *Journal asiatique* 1879 σελ. 509 κ.έ. καὶ *E. Wiedemann* Πρακτικὰ τῆς Φυσικο-ιατρικῆς Ἑταιρείας τοῦ *Erlangen XXXVIII* (1906) σελ. 152 κ.έ. Τὴν ἐλληνικὴν ἀποκατάστασιν τοῦ πρώτου βιβλίου ἐπεχείρησεν ὁ *Mélanges Graux* (Paris 1884) σελ. 689 κ.έ. Τὴν ὁμοίαν σύντονον σπουδὴν τοῦ σοφοῦ ἀνδρὸς μὴ περαιωθεῖσαν ἐξέδωκεν ὁ *Angelus Mai*, *Classici auctores I* σελ. 427-30. Τὸ ἀπόσπασμα τοῦτο, τὴν προέλευσιν τοῦ ὁποίου πρὸ πολλοῦ εἶχον ὑποπτευθῇ (*Oversigt over d. Kgl. danske Vidensk. Selskabs Forhandl.* 1884 σελ. 25 κ.έ.) εἶναι ὀρθὸν (ἐναντίον τῆς γνώμης τοῦ Φρειδερίκου Χούλτς (*Fr. Hultsch, Pauly - Wissowa II* p. 530), ἔθεσα δὲ κατωτέρω εἰς τὴν θέσιν τοῦ παραρτήματος διὰ νὰ μὴ λείψῃ τίποτε.

Τὰ βοηθήματα τῶν ὁποίων ἕκαμα χρῆσιν εἰς τὰ Ἐπιγράμματα καὶ εἰς τὰ Λήμματα, θὰ ἀναφέρω εἰς τὰ οἰκεῖα χωρία.

Σφάλματα ἀνεῦρον τὰ κάτωθι :

*I* σελ. 362,3 εἰς τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα, ἀντὶ *Torellius* γραπτέον *Basil*.

*I* σελ. 440, 22 ἐγγεγραμμένον ἔχει *Basil* κ.λπ.

Πρὸς τούτοις εἰς τὸ Περὶ Ὀχουμένων *I*, 2 προσθετέον : παρά-

βαλε Στράβων I σελ. 54 τὴν Ἀρχιμήδους βεβαιοῖ δόξαν, ὅτι φησὶν ἐκεῖνος ἐν τοῖς περὶ τῶν ὀχουμένων, παντὸς ὑγροῦ καθεστηκός καὶ μένοντος τὴν ἐπιφάνειαν σφαιρικὴν εἶναι σφαίρας ταῦτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ γῇ. Ὁ Vitruvius VIII, 6, 3, ὅστις ἴσως ἀνέγνωσε τὰ βιβλία τοῦ Ἀρχιμήδους, λέγει, ὅτι δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀληθὴς ἐκ τοῦ ὕδατος ἰσορροπία (σημ. ἐπίπεδος ἐπιφάνεια), διότι οὗτος νομίζει, ὅτι τὸ ὕδωρ δὲν ἰσορροπεῖ, ἀλλ' ἔχει σχῆμα σφαιροειδές καὶ ἔχει τὸ κέντρον ἐκεῖ ὅπου ἀντιστοιχεῖ τὸ κέντρον τῆς γῆς.

Ἔγραφον ἐν Κοπεγχάγῃ μηνὶ Ὀκτωβρίῳ 1912

I. L. HEIBERG



# ΠΙΝΑΞ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Τόμου Β'

## Περὶ ἐλίκων

Ὅρισμοι	7
Λαμβανόμενα	1
Θεωρήματα	28
Πορίσματα	5

(ἀξιώμα)

## Μηχανικὰ α' (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν α')

Αἰτήματα	7
Θεωρήματα	15
Πορίσματα	2

(ἀξιώματα)

## Μηχανικὰ β' (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν β')

Θεωρήματα	10
-----------	----

## Τετραγωνισμός ὀρθογωνίου κώνου τομῆς

(Τετραγωνισμός παραβολῆς)

Λαμβανόμενα	1
Θεωρήματα	24
Πόρισμα	1

(ἀξιώμα)

## Ὅχουμένων α'

Θεωρήματα	9
-----------	---

## Ὅχουμένων β'

Θεωρήματα	10
-----------	----

## Στομάχιον

Θεωρήματα	1
-----------	---

## Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος

Λήμματα	10
Θεωρήματα	15

## Πρόβλημα βοεικόν

Πρόβλημα	1
----------	---



## ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ  
 ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράφαι, τῶν μὲν πλεί-  
 στων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσσιν ἔχεις γεγραμ-  
 5 μένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἐπι-  
 στέλλω τοι. μὴ θαυμάσης δέ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες  
 ἐκδίδομες τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν· συμβαίνει γὰρ τοῦτο γε-  
 γενῆσθαι διὰ τὸ βούλεσθαι με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ  
 μαθήματα πραγματευομένοις καὶ μαστεύειν αὐτὰ προαιρου-  
 10 μένοις. πόσα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέ-  
 θοδα ἐν ἀρχῇ φανέντα χρόνῳ τὰν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι;  
 Κόνων μὲν οὖν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν ἐς τὰν μάστευσιν αὐτῶν  
 χρόνον μετέλλαξεν τὸν βίον· ἥ δὴλα ἐποίησέν κα ταῦτα πάντα  
 εὐρὼν καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρὼν καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγεν  
 15 γεωμετρίαν· ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ  
 τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλου-  
 σαν. μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγε-  
 νημένων οὐδ' ὕφ' ἐνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανό-  
 μεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ' ἐν ἑκαστον αὐτῶν προ-  
 20 ἐνέγκασθαι· καὶ γὰρ συμβαίνει, δύο τινὰ τῶν ἐμαντῶ μήπω  
 πεπερασμένων διὰ τέλους ποτιτεθῆμεν, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν  
 πάντα εὐρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδεμίαν ἐκφέροντες,  
 H 4 ἐλέγχονται ποθωμολογηκότες εὐρίσκειν τὰ ἀδύνατα. ταῦτα  
 δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας  
 25 ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζο-  
 μες, δοκιμάζομες ἐμφανίξαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλη-  
 μάτων ἦν· σφαίρας δοθείσας ἐπίπεδον χωρίον εὐρεῖν ἴσον

### Ἀρχιμήδης Δοσιθέω χαίρειν

Τῶν πρὸς τὸν Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων περὶ τῶν ὁποίων πάντοτε μὲ παρώτρυνες νὰ γράψω τὰς ἀποδείξεις, τῶν μὲν περισσοτέρων τὰς ἔχεις δημοσιευμένας εἰς ὅσα σοῦ ἀπέστειλα μὲ τὸν Ἡρακλείδην, μερικὰς δὲ ἐξ αὐτῶν γράψας καὶ εἰς αὐτὸ τὸ βιβλίον σοῦ τὰς ἀποστέλλω. Μὴ ἀπορήσῃς δέ, ἐὰν ἐχρειάσθῃμεν πολὺν χρόνον διὰ νὰ δημοσιεύσωμεν τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν· διότι τοῦτο συνέβη ἐπειδὴ ἤθελον νὰ τὰς δώσω πρότερον εἰς τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὰ μαθηματικά καὶ ἐπιθυμοῦντας νὰ τὰς διερευνήσωσι. Διότι πόσα γεωμετρικὰ θεωρήματα φαινόμενα κατ' ἀρχὰς δύσκολα δὲν ἔγιναν διὰ τοῦ χρόνου κατανοητά; Ὁ Κόνων μὲν λοιπὸν μὴ λαβὼν ἱκανὸν χρόνον διὰ τὴν διερεύνησιν αὐτῶν ἀπέθανε· ὁ ὁποῖος ὅλα αὐτὰ θὰ τὰ εἶχεν εὖρει καὶ πολλὰ ἄλλα ἀκόμῃ, ὥστε νὰ ἀναπτύξῃ πολὺ περισσότερο τὴν γεωμετρίαν· διότι γνωρίζομεν καλῶς, ὅτι ὑπῆρξεν σύनेσις εἰς αὐτὸν οὐχὶ ἢ τυχοῦσα περὶ τὰ μαθηματικά καὶ ὅτι εἶχεν ὑπερβάλλουσαν φιλοπονίαν. Μετὰ δὲ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος, ἀφοῦ παρῆλθον πολλὰ ἔτη, δὲν ἐπληροφορήθημεν, ὅτι ἐπελήφθη κανεὶς κανενὸς ἐκ τῶν προβλημάτων. Ἐπιθυμῶ δὲ νὰ σοῦ ἐξηγήσω ἐν ἑκαστον ἐξ αὐτῶν· καὶ διότι συμβαίνει δύο ἐκ τῶν θεωρημάτων μου νὰ τὰ ἔχω προσθέσει ἐδῶ ἀτελῇ, ἵνα οἱ λέγοντες μὲν, ὅτι τὰ εὐρίσκουσιν ὅλα, χωρὶς ὅμως νὰ ἐκφέρωσιν ἀπόδειξιν τινά, ἐλέγχωνται ὅτι εὐρίσκουσιν τὰ ἀδύνατα. Ποῖα δὲ εἶναι τὰ προβλήματα αὐτὰ καὶ ποίων τὰς ἀποδείξεις σοῦ ἔχομεν ἀποστείλει, καὶ ποίων αἱ ἀποδείξεις περιλαμβάνονται εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ σοῦ τὰ ἀποστέλλομεν. Πρῶτον λοιπὸν τῶν προβλημάτων ἦτο· δοθείσης σφαίρας νὰ εὐρεθῇ ἐπίπεδος

τῇ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. ὁ δὲ καὶ πρῶτον ἐγένετο φανερόν  
ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὰν σφαῖραν βιβλίον· δειχθέντος γάρ,  
ὅτι πάσας σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ με-  
γίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, δηλόν, ὡς δυνατόν ἐστι  
5 χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύ-  
τερον δέ· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν ἴσαν  
τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δέ· τὰν δοθείσαν σφαῖραν  
ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν  
ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δέ· τὰν δοθείσαν σφαῖραν  
10 ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν τα-  
χθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δέ· τὸ δοθὲν τμᾶ-  
μα σφαίρας τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὁμοιώσαι. ἕκτον  
δέ· δύο δοθέντων τμαμάτων σφαίρας εἴτε τᾶς αὐτᾶς εἴτε  
ἄλλας εὑρεῖν τι τμᾶμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὁμοῖον  
15 τῷ ἑτέρῳ τῶν τμαμάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἔξει τῇ  
ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμήματος. ἑβδομον· ἀπὸ τᾶς δοθείσας  
σφαίρας τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμᾶμα ποτὶ  
τὸν κώνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος  
ἴσον τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μείζονα τοῦ, ὃν ἔχει τὰ τρία  
20 ποτὶ τὰ δύο. τούτων μὲν οὖν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀπο-  
δείξιας Ἡρακλείδας ἐκόμιξεν· τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρι-  
σμένον ψευδὸς ἦν. ἔστι δέ· εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ  
εἰς ἄνισα, τὸ μείζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λό-  
H<sup>6</sup> γον ἔξει ἢ ἡ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ  
25 τοῦτο ψευδὸς ἐστὶ, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι·  
κεχώριται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε· εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμα-  
θῇ εἰς ἄνισα ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ  
τᾶς μὲν ἐπιφανείας τὸ μείζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν  
αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ μείζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ  
30 τὸ ἔλασσον, τὸ δὲ μείζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον  
ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ μείζων  
ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα δὲ ἢ ἡμίολιον. ἦν δὲ

ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καὶ πρῶτον ἔγινε φανερόν ἐκδοθέντος τοῦ βιβλίου περὶ σφαίρας· διότι ἀφοῦ ἀποδείχθη, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τετραπλασία ἐνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Δεύτερον δὲ πρόβλημα ἦτο· δοθέντος κῶνου ἢ κυλίνδρου νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα ἴση πρὸς τὸν κῶνον ἢ πρὸς τὸν κύλινδρον. Τρίτον δὲ ἦτο· ἡ δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα νὰ ἔχωσι τὸν δοθέντα λόγον. Τέταρτον δέ· ἡ δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου, ὥστε τὰ τμήματα τῆς ἐπιφανείας νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὸν δοθέντα λόγον. Πέμπτον δέ· τὸ δοθὲν τμήμα σφαίρας νὰ γίνῃ ὅμοιον πρὸς δοθὲν τμήμα σφαίρας. Ἑκτον δέ· δοθέντων δύο τμημάτων σφαίρας, εἴτε τῆς αὐτῆς εἴτε ἄλλης, νὰ εὑρεθῇ τμημά τι σφαίρας, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι αὐτὸ μὲν ὅμοιον πρὸς τὸ ἄλλο τῶν τμημάτων, νὰ ἔχῃ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἄλλου τμήματος. Ἑβδομον· ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ ἀποτμηθῇ δι' ἐπιπέδου τμήμα, ὥστε τὸ τμήμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος ἴσον, νὰ ἔχῃ τὸν ταχθέντα λόγον μεγαλύτερον τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσι τὰ τρία πρὸς τὰ δύο. Τούτων μὲν λοιπὸν τῶν εἰρημένων προβλημάτων ὅλων σοῦ ἔφερεν τὰς ἀποδείξεις ὁ Ἡρακλείδης· τὸ ἐπόμενον δὲ μετὰ ταῦτα πρόβλημα ἦτο ψευδές. Τοῦτο δὲ ἦτο· ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου εἰς ἄνισα, τὸ μεγαλύτερον τμήμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς μεγαλυτέρας ἐπιφανείας πρὸς τὴν μικροτέραν. Ὅτι δὲ τοῦτο εἶναι ψευδές, εἶναι φανερόν διὰ τῶν προαπεσταλμένων· διότι μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει τὸ ἐξῆς· ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου εἰς ἄνισα καθέτως πρὸς διάμετρόν τινα τῆς σφαίρας, τῆς μὲν ἐπιφανείας τὸ μεγαλύτερον τμήμα πρὸς τὸ μικρότερον θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ μεγαλύτερον τμήμα τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ μικρότερον, τὸ δὲ μεγαλύτερον τμήμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ μικρότερον θὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ μεγαλυτέρα ἐπιφάνεια πρὸς τὴν μικρο-

καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι,  
 εἴ κα σφαίρας τινὸς ἅ διάμετρος τμαθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μεί-  
 ζονος τμάματος τετράγωνον τριπλάσιον εἴμεν τοῦ τετραγώ-  
 νου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, καὶ διὰ τοῦ σαμείου  
 5 ἐπίπεδον ἄχθὲν ποτ' ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ τέμνη τὰν σφαῖραν,  
 τὸ τοιοῦτον τῷ εἶδει σχῆμα, οἷόν ἐστι τὸ μείζον τῆς σφαίρας  
 τμᾶμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμαμάτων τῶν ἔχόντων  
 ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον διὰ τῶν  
 προαπεσταλμένων θεωρημάτων· δέδεικται γάρ, ὅτι τὸ ἡμι-  
 10 σφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφα-  
 νείας σφαίρας τμαμάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προ-  
 βεβλημένα ἐστὶ τάδε· εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενού-  
 σας τῆς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥστε εἴμεν ἄξονα τὸν διάμε-  
 τρον, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου  
 15 τομᾶς κωνοειδὲς καλείσθω, καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος σχή-  
 ματος ἐπίπεδον ἐπιπαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιπαῦον ἐπίπεδον ἄλλο  
 ἐπίπεδον ἄχθὲν ἀποτέμῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀπο-  
 τμαθέντος τμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπί-  
 πεδον, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἐπιπαύει τὸ ἔτερον ἐπί-  
 Η 8 πεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δὴ κα τὸ εἰρημένον σχῆμα ἐπιπέδῳ  
 τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἅ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται,  
 δῆλον, ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ  
 κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος  
 ἴσον, δεῖξαι δεῖ. καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος δύο τμάματα ἀπο-  
 25 τμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ  
 ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, δῆλον, εἴ κα τὰ ἀποτέ-  
 μνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα, ὅτι δὲ τὰ τμά-  
 ματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἐξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχοντι δυ-  
 νάμει ποτ' ἄλλάλας αἱ ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτῶν ἀγμεῖναι παρὰ  
 30 τὸν ἄξονα μέχρι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ· τού-  
 των δ' αἱ ἀποδείξεις οὕτω τοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα  
 περὶ τῆς ἑλικὸς ἦν προβεβλημένα ταῦτα· ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο



τέραν, μεγαλύτερον δὲ τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ λόγου τούτου. Ἦτο δὲ καὶ τὸ τελευταῖον ἀκολουθοῦν πρόβλημα ψευδές, ὅτι, ἐὰν σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμηθῇ, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου τμήματος, καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς ἀφοῦ ἀχθῇ ἐπίπεδον νὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν καθέτως πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς, τὸ τοιοῦτον κατὰ τὸ εἶδος σχῆμα, οἷον εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμήμα τῆς σφαίρας, εἶναι τὸ μέγιστον ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων τμημάτων τῶν ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην. "Οτι δὲ τοῦτο ἦτο ψευδές, εἶναι φανερόν διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων· διότι ἀποδείχθη, ὅτι ἐκ τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν ἐχόντων ἴσην ἐπιφάνειαν μέγιστον εἶναι τὸ ἡμισφαίριον. Μετὰ δὲ ταῦτα τὰ περὶ τοῦ κώνου προβλήματα εἶναι τὰ ἐξῆς· ἐὰν παραβολή, μενούσης τῆς διαμέτρου ἀκινήτου, περιστραφῇ περὶ αὐτήν, ὥστε νὰ εἶναι ἄξων ἡ διάμετρος, τὸ περιγραφέν ὑπὸ τῆς παραβολῆς σχῆμα ὡς καλεῖται κωνοειδές, καὶ ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηται τοῦ κωνοειδοῦς σχήματος, ἀχθῇ δὲ ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον καὶ ἀποτέμνῃ τμήμα τι τοῦ κωνοειδοῦς, τοῦ ἀποτμηθέντος τμήματος βάσις μὲν ὡς καλεῖται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφή δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται τὸ ἄλλο ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδοῦς. Ἐὰν δὲ τὸ εἰρημένον σχῆμα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ὅτι μὲν ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος, εἶναι φανερόν, ὅτι δὲ τὸ ἀποτμηθὲν τμήμα θὰ εἶναι τρία δεύτερα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος ἴσον, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ. Καὶ ἐὰν δύο τμήματα τοῦ κωνοειδοῦς ἀποτμηθῶσι δι' ἐπιπέδων ἀχθέντων καθ' οἷονδῆποτε τρόπον, ὅτι μὲν αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἐλλείψεις, εἶναι φανερόν, ἐὰν τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα δὲν εἶναι κάθετα πρὸς τὸν ἄξονα, ὅτι δὲ τὰ τμήματα πρὸς ἄλληλα θὰ ἔχωσι τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὅποῃαι ἔχουσιν ἀχθῇ ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μέχρι τὰ τέμνοντα ἐπίπεδα παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ. Τούτων αἱ ἀποδείξεις δὲν σοῦ ἀποστέλλονται τώρα. Μετὰ δὲ ταῦτα ἦσαν ἐκτεθειμένα περὶ τῆς ἑλικος τὰ ἐξῆς· ἀποτελοῦσι δὲ αὐτὰ ἄλλο εἶδος προβλημάτων οὐδε-

τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνέοντα τοῖς προειρη-  
 μένοις· ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφή-  
 καμές τοι. ἔστιν δὲ τάδε· εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μέ-  
 νοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκα-  
 5 τασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τῇ γραμμᾷ περιφε-  
 ρομένη φέρεται τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τὰς  
 εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον  
 ἔλικα γράφει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαι δὴ τὸ περιλαφθὲν χω-  
 ρίον ὑπὸ τε τὰς ἔλικος καὶ τὰς εὐθείας τὰς ἀποκατασταθεί-  
 10 σας, ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γρα-  
 φέντος κέντρῳ μὲν τῷ μένοντι σαμεῖῳ, διαστήματι δὲ τῇ  
 εὐθείᾳ τῇ διανυσθείσῃ ὑπὸ τοῦ σαμεῖου ἐν τῇ μιᾷ περιφορᾷ  
 τὰς εὐθείας. καὶ εἴ κα τὰς ἔλικος ἐπυρᾷ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ  
 πέρας τὰς ἔλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον, ἄλλα δὲ τις εὐθεῖα  
 15 τῇ περιαχθείσῃ καὶ ἀποκατασταθείσῃ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς  
 Η 10 ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος αὐτᾶς, ὥστε ἐμπεσεῖν τῇ  
 ἐπιφανούσῃ, φαι τὰν ποταχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τῇ  
 τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. καὶ εἴ κα ἡ περιαγομμένα γραμμὰ  
 καὶ τὸ σαμεῖον τὸ φερόμενον κατ' αὐτὰς πλείονας περι-  
 20 φορὰς περιενεχθέντι καὶ ἀποκατασταθέντι πάλιν, ὅθεν  
 ὥρμασεν, φαι τοῦ χωρίου τοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ  
 ποτιλαφθέντος ὑπὸ τὰς ἔλικος τὸ μὲν ἐν τῇ τρίτῃ ποτιλα-  
 φθὲν διπλάσιον ἐσσεῖσθαι, τὸ δὲ ἐν τῇ τετάρτῃ τριπλάσιον,  
 τὸ δὲ ἐν τῇ πέμπτῃ τετραπλάσιον, καὶ αἰ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον  
 25 περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς  
 πολλαπλάσια ἐσσεῖσθαι τοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτι-  
 λαφθέντος, τὸ δὲ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ περιλαφθὲν χωρίον  
 ἕκτον μέρος εἶμεν τοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος  
 χωρίου· καὶ εἴ κα ἐπὶ τὰς ἔλικος τὰς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γε-  
 30 γραμμένας δύο σαμεῖα λαφθέντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιξε-  
 χθέντι εὐθεῖα ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τὰς περιενεχθεί-  
 σας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γραφέντι κέντρῳ μὲν τῷ

μίαν σχέσιν ἔχον πρὸς τὰ προειρημένα· τὰς ἀποδείξεις δὲ αὐτῶν περιλαμβάνομεν εἰς τοῦτο τὸ βιβλίον. Εἶναι δὲ τὰ ἐξῆς· ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ εὐρισκομένη εἰς ἐπίπεδον, διατηρουμένου τοῦ ἐνὸς ἄκρου σταθεροῦ, ἀφοῦ περιστραφῇ ἰσοταχῶς, ἀποκατασταθῇ πάλιν ἐκεῖ, ὅπου ἀνεχώρησε, συγχρόνως δὲ ἐν ᾧ περιφέρεται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ κινεῖται σημεῖόν τι ἰσοταχῶς ἐπ' αὐτῆς ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ μένοντος ἄκρου, τὸ σημεῖον θὰ γράψῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἔλικοι. Λέγω δέ, ὅτι τὸ χωρίον τὸ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς ἔλικος καὶ τῆς ἀποκατασταθείσης εὐθείας, ὁπόθεν ἀνεχώρησε, εἶναι τὸ ἐν τρίτον τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος μὲ κέντρον μὲν τὸ σταθερὸν σημεῖον, ἀκτῖνα δὲ τὴν εὐθεῖαν τὴν διανυσθεῖσαν ὑπὸ τοῦ σημείου κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν τῆς εὐθείας. Καὶ ἐὰν ἐφάπτηται τῆς ἔλικος εὐθεῖα τις εἰς τὸ πέρας τῆς ἔλικος τὸ γραφέν τελευταῖον, ἄλλη δὲ τις εὐθεῖα ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν περιαχθεῖσαν καὶ ἀποκατασταθεῖσαν γραμμὴν, εἰς τὸ σταθερὸν παραμεῖναν ἄκρον αὐτῆς, ὥστε νὰ τμήσῃ τὴν ἐφαπτομένην, λέγω, ὅτι ἡ ἀχθεῖσα ( κάθετος ) εὐθεῖα εἶναι ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Καὶ ἐὰν ἡ περιαγομένη γραμμὴ καὶ τὸ σημεῖον τὸ φερόμενον ἐπ' αὐτῆς περιστραφῶσι περισσοτέρας φορὰς καὶ ἀποκατασταθῶσι πάλιν, ἐκεῖ ὅπου ἀνεχώρησαν, λέγω, ὅτι τοῦ χωρίου τοῦ περιληφθέντος ὑπὸ τῆς ἔλικος κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν, τὸ μὲν περιληφθὲν κατὰ τὴν τρίτην περιφορὰν θὰ εἶναι διπλάσιον, τὸ δὲ κατὰ τὴν τετάρτην τριπλάσιον, τὸ δὲ κατὰ τὴν πέμπτην τετραπλάσιον, καὶ πάντοτε τὰ χωρία τὰ περιλαμβανόμενα κατὰ τὰς ἐπομένους περιφορὰς θὰ εἶναι πολλαπλάσια κατὰ τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμούς τοῦ περιληφθέντος κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν, τὸ δὲ περιληφθὲν κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν χωρίον, εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τοῦ κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν περιληφθέντος χωρίου. Καὶ ἐὰν ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς ἔλικος τῆς γραφείσης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν δύο σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὸ σταθερὸν παραμεῖναν ἄκρον τῆς περιστροφείσης εὐθείας, καὶ γραφῶσι δύο

μεμενακότι σαρμείω, διαστημάτεσσι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις  
ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἃ ἐλάσσων τᾶν ἐπι-  
ζευχθεῖσάν ἐπεκβληθῇ, φανί τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε  
τᾶς τοῦ μείζοντος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ  
5 ἔλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειῶν ἐούσας καὶ τᾶς ἔλικος καὶ τᾶς  
εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε  
τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς αὐτᾶς ἔλικος  
καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν τοῦ-  
H 12 τον ἔξω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἃ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος  
10 κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ἃ ὑπερέχει ἃ  
ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ  
ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος  
κύκλου μετὰ ἐνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τού-  
των δὴ μοι καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἔλικος αἱ ἀποδείξεις ἐν τῷ-  
15 δε τῷ βιβλίῳ γράφονται, πρόκειται δέ, ὥς καὶ τῶν ἄλλων  
τῶν γεωμετρουμένων, τὰ χρεῖαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν  
αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον  
ἐκδεδομένοις βιβλίοις λῆμμα τόδε· τᾶν ἀνισῶν γραμμῶν καὶ  
τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ἃ ὑπερέχει τὸ μείζον τοῦ  
20 ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμένην δυνατὸν εἶμεν παντὸς  
ὑπερίσχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

α'

Εἴ κα κατὰ τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σαρμεῖον ἰσοταχέως  
αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαί,  
25 αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον ποτ' ἄλλάλας, ὃν-  
περ οἱ χρόνοι, ἐν οἷς τὸ σαρμεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη.

ἐννεχθῶ γάρ τι σαρμεῖον κατὰ τᾶς AB γραμμᾶς ἰσοτα-  
χέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, ἔστω  
δὲ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν ΓΔ γραμμᾶν τὸ σαρμεῖον διεπορεύθη,  
ὁ ΖΗ, ἐν ᾧ δὲ τὰν ΔΕ, ὁ ΗΘ. δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι

κύκλοι με κέντρον μὲν τὸ σταθερὸν σημεῖον ( ἄκρον ), ἀκτῖνας δὲ τὰς ἀχθείσας εὐθείας πρὸς τὸ σταθερὸν ἄκρον, καὶ ἡ μικροτέρα τῶν ἀχθείσων εὐθειῶν προεκβληθῇ, λέγω, ὅτι τὸ περιληφθὲν χωρίον ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τοῦ κειμένου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἑλικος, μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ τῆς ἑλικος καὶ τῆς εὐθείας τῆς προεκβληθείσης πρὸς τὸ περιληφθὲν χωρίον ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μικροτέρου κύκλου καὶ τῆς αὐτῆς ἑλικος καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ πέρατα, θὰ ἔχῃ αὐτὸν τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τῆς ἀκτίνος τοῦ μικροτέρου κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὸ ἓν τρίτον τῆς εἰρημένης ὑπεροχῆς. Τῶν προτάσεων τούτων, ὡς καὶ ἄλλων περὶ τῆς ἑλικος, γράφονται αἱ ἀποδείξεις εἰς αὐτὸ ἐδῶ τὸ βιβλίον, προτάσσονται δέ, ὡς καὶ εἰς τὰ ἄλλα θεωρήματα, τὰ χρειαζόμενα διὰ τὰς ἀποδείξεις. Λαμβάνω δὲ καὶ εἰς αὐτὰ τὸ ἐξῆς λῆμμα, τὸ ὅποῖον ἔλαβα καὶ εἰς τὰ προηγουμένως ἐκδεδομένα βιβλία· τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ μεγαλύτερον μέγεθος τοῦ μικροτέρου, λαμβανομένη πολλακίς εἶναι δυνατόν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς μεγέθους ἐκ τῶν πρὸς ἄλληλα συγκρινομένων ( Ἀξίωμα τῆς συνεχείας ).

1

Ἐὰν ἐπὶ τινος γραμμῆς σημείον τι κινῆται ἰσοταχῶς, καὶ ληφθῶσιν εἰς αὐτὴν δύο γραμμαὶ, αἱ ληφθεῖσαι γραμμαὶ θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἔχουσιν οἱ χρόνοι, καθ' οὓς τὸ σημεῖον διήνυσε τὰς γραμμάς.

Ἄς κινήθῃ λοιπὸν σημείον τι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ ἰσοταχῶς, καὶ ἄς ληφθῶσιν εἰς αὐτὴν δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, ἔστω δὲ ὁ χρόνος καθ' ὃν τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΓΔ, ὁ ΖΗ, ὁ χρόνος δέ, καθ' ὃν διήνυσε τὴν ΔΕ, ὁ ΗΘ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γραμμὴ ΓΔ

λόγον ἃ  $\Gamma\Delta$  γραμμὰ ποτὶ τὰν  $\Delta\epsilon$  γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ  $ZH$  ποτὶ τὸν  $H\Theta$ .

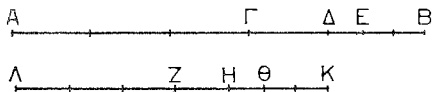
συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τῶν  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta\epsilon$  γραμμῶν αἱ  $ΑΔ$ ,  $ΑΒ$  γραμμαὶ καθ' ἀντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥστε ὑπερ-  
 5 ἔχειν τὰν  $ΑΔ$  τᾶς  $ΑΒ$ , καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἃ  $\Gamma\Delta$  γραμμὰ ἐν τῇ  $ΑΔ$ , τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ  $ZH$  ἐν τῷ χρόνῳ τῷ  $ΑΗ$ , ὁσάκις δὲ σύγκειται ἃ  $\Delta\epsilon$  γραμμὰ ἐν τῇ  $ΑΒ$ , τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ  $\ThetaΗ$  χρόνος ἐν τῷ  $KH$  χρό-  
 Η 14 νῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σαμεῖον ἰσοταχέως ἐννήχθαι  
 10 κατὰ τᾶς  $ΑΒ$  γραμμᾶς, δηλόν, ὥς, ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν  $\Gamma\Delta$  ἐν-  
 ἤνκεται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἐκάσταν ἐνήνκεται τὰν ἰσᾶν τῇ  $\Gamma\Delta$ ·  
 φανερόν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν  $ΑΔ$  γραμμὴν ἐν το-  
 σούτῳ χρόνῳ ἐνήνκεται, ὅσος ἐστὶν ὁ  $ΑΗ$  χρόνος, ἐπειδὴ  
 τοσαυτάκις σύγκειται ἃ τε  $\Gamma\Delta$  γραμμὰ ἐν τῇ  $ΑΔ$  γραμμῇ  
 15 καὶ ὁ  $ZH$  χρόνος ἐν τῷ  $ΑΗ$  χρόνῳ. διὰ ταῦτά δὴ καὶ τὰν  $ΒΔ$   
 γραμμὴν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σαμεῖον ἐνήνκεται, ὅσος ἐστὶν  
 ὁ  $KH$  χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἃ  $ΑΔ$  γραμμὰ τᾶς  $ΒΔ$ ,  
 δηλόν, ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὰν  $ΑΔ$  διαπρεσέεται  
 γραμμὴν ἢ τὰν  $ΒΔ$ . ὥστε ὁ χρόνος ὁ  $ΑΗ$  μείζων ἐστὶ τοῦ  
 20  $KH$  χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἐκ τῶν χρόνων  
 τῶν  $ZH$ ,  $H\Theta$  συντεθέωντι χρόνοι καθ' ἀντινοῦν σύνθεσιν,  
 ὥστε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ τᾶν ἐκ τῶν  
 γραμμῶν τῶν  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta\epsilon$  κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντεθεισᾶν  
 ὑπερέξει ἃ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ· δηλόν οὖν, ὅτι  
 25 τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ἃ  $\Gamma\Delta$  ποτὶ τὰν  $\Delta\epsilon$ , ὃν ὁ χρόνος ὁ  $ZH$   
 ποτὶ τὸν χρόνον τὸν  $H\Theta$ .

β'

Εἴ κα δύο σαμείων ἐκατέρου κατὰ τινος γραμμᾶς ἐνε-  
 χθέντος μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτοῦ ἐναντῷ φερομένου

πρὸς τὴν γραμμὴν ΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ χρόνος ΖΗ πρὸς τὸν ΗΘ.

Διότι ἂς συντεθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΑΔ, ΔΒ ἐκ τῶν γραμμῶν ΓΔ, ΔΕ ἀντιστοίχως καθ' οἷονδῆποτε τρόπον οὕτως, ὥστε ἡ ΑΔ νὰ ὑπερέχη τῆς ΔΒ, καὶ ὅσας φοράς ἔχει ληφθῇ ἡ ΓΔ εἰς τὴν ΑΔ, τόσας



φοράς ἂς ἔχη ληφθῇ ὁ χρόνος ΖΗ εἰς τὸν χρόνον ΛΗ, ὅσας δὲ φορές ἔχει ληφθῇ ἡ γραμμὴ ΔΕ εἰς τὴν γραμμὴν ΔΒ, τόσας φορές ἂς ἔχη ληφθῇ ὁ χρόνος ΘΗ εἰς τὸν χρόνον ΚΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι τὸ σημεῖον ἐκινήθη ἰσοταχῶς ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ, εἶναι φανερόν, ὅτι, εἰς ὅσον χρόνον διήνυσε τὴν ΓΔ, εἰς τόσον διήνυσε καὶ ἐκαστην τῶν ἴσων πρὸς τὴν ΓΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διαστημάτων, ἡ ΑΔ γραμμὴ, θὰ διηνύθῃ εἰς τόσον χρόνον, ὅσος εἶναι ὁ χρόνος ΛΗ, ἐπειδὴ ὅσας φορές περιλαμβάνεται ἡ γραμμὴ ΓΔ εἰς τὴν γραμμὴν ΑΔ, τόσας φορές περιλαμβάνεται ὁ χρόνος ΖΗ εἰς τὸν χρόνον ΛΗ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ σημεῖον διήνυσε καὶ τὴν γραμμὴν ΒΔ εἰς τόσον χρόνον, ὅσος εἶναι ὁ χρόνος ΚΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΔ γραμμὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΔ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΔΑ εἰς μεγαλύτερον χρόνον ἢ τὴν ΒΔ· ὥστε ὁ χρόνος ΛΗ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ χρόνου ΚΗ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν καθ' οἷονδῆποτε τρόπον συντεθῶσιν οἱ χρόνοι ΖΗ, ΗΘ, ὥστε ὁ εἷς χρόνος νὰ ὑπερέχη τοῦ ἄλλου, ὅτι, ἐὰν καὶ αἱ γραμμαὶ ΓΔ, ΔΕ συντεθῶσι κατὰ τὸ αὐτὸν τρόπον θὰ ὑπερέχη ἡ ὁμόλογος κατὰ τὸν ὑπερέχοντα χρόνον· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ θὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν θὰ ἔχη ὁ χρόνος ΖΗ πρὸς τὸν χρόνον ΗΘ (Εὐκλ. V, ὁρισ. 5).

Ἐὰν ἐν ᾧ δύο σημεῖα κινῶνται ἐπὶ τινος γραμμῆς, μὴ τῆς αὐτῆς, ἰσοταχῶς, ληφθῶσιν εἰς ἑκατέραν τῶν γραμμῶν δύο γραμμαὶ, ἐκ

λαφθέωντι ἐν ἑκατέρῃ τῶν γραμμῶν δύο γραμμαί, ἅν' αἱ τε  
 πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὸ τῶν σαμείων διανυέσθων καὶ  
 αἱ δευτέραι, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λα-  
 φθεῖσαι γραμμαί.

- 5 ἔστω κατὰ τῆς  $AB$  γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον ἰσο-  
 ταχέως αὐτὸ ἐαντῷ καὶ ἄλλο κατὰ τῆς  $ΚΑ$ , λελάφθωσαν  
 H 16 δὲ ἐν τῇ  $AB$  δύο αἱ  $ΓΔ$ ,  $ΔΕ$  γραμμαί, καὶ ἐν τῇ  $ΚΑ$  αἱ  $ΖΗ$ ,  
 $ΗΘ$ , ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ κατὰ τῆς  $AB$  γραμμᾶς ἐνηνεγμέ-  
 νον σαμεῖον τὰν  $ΓΔ$  γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον  
 10 κατὰ τῆς  $ΚΑ$  ἐνηνεγμένον τὰν  $ΖΗ$ , ὁμοίως δὲ καὶ τὰν  $ΔΕ$   
 γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτε-  
 ρον τὰν  $ΗΘ$ . δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἅ  $ΓΔ$  ποτὶ  
 τὰν  $ΔΕ$ , ὃν ἅ  $ΖΗ$  ποτὶ τὰν  $ΗΘ$ .

- ἔστω δὴ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν  $ΓΔ$  γραμμὰν διεπορεύετο τὸ  
 15 σαμεῖον, ὁ  $MN$ . ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον  
 διαπορεύεται τὰν  $ΖΗ$ . πάλιν δὴ καί, ἐν ᾧ τὰν  $ΔΕ$  γραμμὰν  
 διεπορεύετο τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ  $ΝΞ$  χρόνος. ἐν τούτῳ δὴ καὶ  
 τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν  $ΗΘ$ . τὸν αὐτὸν δὴ λό-  
 γον ἐξοῦντι ἅ τε  $ΓΔ$  ποτὶ τὰν  $ΔΕ$  γραμμὰν, ὃν ὁ χρόνος ὁ  
 20  $MN$  ποτὶ  $ΝΞ$ , καὶ ἅ  $ΖΗ$  ποτὶ τὰν  $ΗΘ$ , ὃν ὁ χρόνος ὁ  $MN$   
 ποτὶ τὸν  $ΝΞ$ . δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἅ  $ΓΔ$   
 ποτὶ τὰν  $ΔΕ$ , ὃν ἅ  $ΖΗ$  ποτὶ τὰν  $ΗΘ$ .

γ'

- Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει δυνατόν ἐστίν  
 25 εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἐοῦσαν τῶν τῶν κύκλων περιφε-  
 ρειᾶν.

περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου  
 δῆλον, ὥς ἅ ἐκ πασῶν συγκειμένα τῶν περιμέτρων εὐθεῖα  
 μείζων ἐσσεῖται πασῶν τῶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.



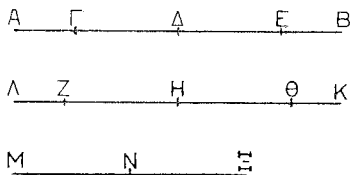
τῶν ὁποίων καὶ αἱ πρῶται νὰ ἔχωσι διανυθῇ ὑπὸ τῶν σημείων εἰς ἴσους χρόνους καὶ αἱ δευτεραι, αἱ ληφθεῖσαι γραμμαὶ θὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἐστω ὅτι ἐκινήθη ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB σημεῖόν τι ἰσοταχῶς καὶ ἄλλο ἐπὶ τῆς ΚΛ, ἃς ληφθῶσι δὲ εἰς τὴν AB δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ εἰς τὴν ΚΛ αἱ ΖΗ, ΗΘ, εἰς ἴσον δὲ χρόνον τὸ σημεῖον τὸ διανύσαν τὴν ΓΔ γραμμὴν ἐπὶ τῆς εὐθείας AB νὰ ἐκινήθη, ὅσος εἶναι ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὅποιον διήνυσε τὴν ΖΗ ἐπὶ τῆς ΚΛ τὸ ἄλλο σημεῖον, ὁμοίως δὲ ἃς ἔξη διανύσει τὸ πρῶτον σημεῖον τὴν γραμμὴν ΔΕ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον κατὰ τὸν ὅποιον τὸ ἄλλο διήνυσε τὴν ΗΘ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐστω λοιπὸν ὁ χρόνος, καθ’

ὃν τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΓΔ, ὁ MN· εἰς τὸν αὐτὸν δὲ χρόνον τὸ ἄλλο σημεῖον διανύει τὴν ΖΗ. Πάλιν δὲ ἔστω ὁ χρόνος

ΝΞ, καθ’ ὃν τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΔΕ· εἰς τὸν αὐτὸν δὲ χρόνον καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον διανύει τὴν ΗΘ· τὸν αὐτὸν λοιπὸν λόγον θὰ ἔχωσι καὶ ἡ γραμμὴ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ὃν ὁ χρόνος MN πρὸς τὸν ΝΞ, καὶ ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ, ὃν ἔχει ὁ χρόνος MN πρὸς τὸν ΝΞ ( θ. 1 ). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ.



3

Ἐὰν δοθῶσι κύκλοι ὅσοιδήποτε κατὰ τὸ πλῆθος εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων.

Διότι ἐὰν περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων περιγραφῇ πολύγωνον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων.

δ'

Δύο γραμμῶν δοθεῖσᾶν ἀνισᾶν, εὐθείας τε καὶ κύκλον περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεῖσᾶν γραμμῶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα.

- Η 18 δσάκις γὰρ ἂ ὑπεροχά, ᾧ ὑπερέχει ἂ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος, αὐτὰ ἐαντᾷ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, εἰς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας τὸ ἐν τμᾶμα ἔλασσον ἐσσεῖται τᾶς ὑπεροχᾶς. εἰ μὲν οὖν κα ἧ ἂ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἐνὸς τμᾶματος ποτιτεθέντος ποτὶ  
10 τὰν εὐθεῖαν τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεῖσᾶν δῆλον ὡς μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων· εἰ δὲ κα ἐλάσσων, ἐνὸς τμᾶματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν περιφέρειαν ὁμοίως τᾶς μὲν ἐλάσσονος μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων· καὶ γὰρ ἂ ποτικειμένα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

15

ε'

- Κύκλου δοθέντος καὶ εὐθείας ἐπιφανούσας τοῦ κύκλου δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιφανούσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιφανούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ  
20 κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἧ ἂ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἂ μεταξὺ τᾶς ἀφᾶς καὶ τᾶς διαχθείσας ποτὶ τὰν δοθεῖσαν ὁποιοοῦν κύκλου περιφέρειαν.

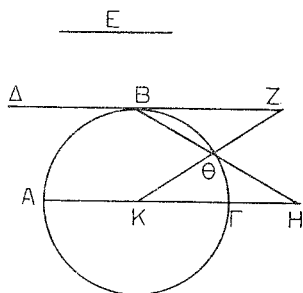
- δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἐπιφανέτω τοῦ κύκλου ἂ ΔΖ κατὰ τὸ Β, δεδόσθω δὲ καὶ κύ-  
25 κλου περιφέρεια ὁποιαοῦν· δυνατόν δὲ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινα εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἂ Ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας· ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Κ  
Η 20 κέντρου παρὰ τὰν ΔΖ ἂ ΑΗ, καὶ κείσθω ἂ ΗΘ ἴσα τᾷ Ε

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι γραμμαί, εὐθεῖα καὶ τόξον κύκλου, εἶναι δυνατόν νὰ λάβωμεν εὐθεῖαν μικροτέραν μὲν τῆς μεγαλυτέρας τῶν δοθεισῶν γραμμῶν, μεγαλυτέραν δὲ τῆς μικροτέρας.

Διότι ἐὰν ὅσας φορὰς ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ἡ μεγαλυτέρα γραμμὴ ὑπερέχει τῆς μικροτέρας ἐπαναληφθῇ, ὥστε νὰ ὑπερέχη τῆς εὐθείας ( τῆς μικροτέρας ), εἰς τόσα ἴσα μέρη διαιρεθῇ αὕτη, τὸ ἐν τμῆμα θὰ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ τόξον εἶναι μεγαλύτερον τῆς εὐθείας, καὶ προστεθῇ εἰς τὴν εὐθεῖαν ἐν τμῆμα, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι ἡ προκύπτουσα εὐθεῖα μεγαλυτέρα τῆς μικροτέρας τῶν δοθεισῶν, τῆς δὲ μεγαλυτέρας θὰ εἶναι μικροτέρα· ἐὰν δὲ εἶναι μικρότερον, ἀφοῦ προστεθῇ ἐν τμῆμα εἰς τὸ τόξον, ὁμοίως θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μικροτέρας, τῆς δὲ μεγαλυτέρας μικροτέρα· διότι ἡ προστιθεμένη εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπεροχῆς.

Ἐὰν δοθῇ κύκλος καὶ εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθεῖα πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου νὰ ἔχη λόγον μικρότερον ἢ τὸ τόξον τοῦ κύκλου τὸ μεταξὺ τῆς ἐπαφῆς καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀχθείσης πρὸς τὸ δοθὲν τυχὸν τόξον κύκλου.

Ἄς δοθῇ ὁ κύκλος ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἄς ἐφάπτηται τοῦ κύκλου ἡ ΔΖ κατὰ τὸ Β, ἄς δοθῇ δὲ καὶ τυχὸν τόξον κύκλου· εἶναι δὲ δυνατόν νὰ ληφθῇ εὐθεῖα τις μεγαλυτέρα τοῦ δοθέντος τόξου ( θ. 3 ) καὶ ἔστω ἡ εὐθεῖα Ε μεγαλυτέρα τοῦ δοθέντος τόξου· ἄς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ ἢ ΑΗ, καὶ ἄς ληφθῇ



νεύονσα ἐπὶ τὸ  $B$ . ἀπὸ δὴ τοῦ  $K$  κέντρου ἐπὶ τὸ  $\Theta$  ἐπιζευ-  
χθεῖσα ἐκβεβλήσθω τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἡ  $\Theta Z$  ποτὶ τὰν  
 $\Theta K$ , ὃν ἡ  $B\Theta$  ποτὶ τὰν  $\Theta H$ . ἡ ἄρα  $Z\Theta$  ποτὶ τὰν  $\Theta K$  ἐλάσ-  
σωνα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἡ  $B\Theta$  περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν  
5 περιφέρειαν, διότι ἡ μὲν  $B\Theta$  εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς  $B\Theta$   
περιφερείας, ἡ δὲ  $\Theta H$  μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας·  
ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἡ  $Z\Theta$  ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου  
ἢ ἡ  $B\Theta$  περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

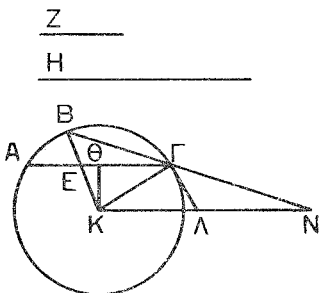
5'

- 10 Κύκλου δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος  
τᾶς διαμέτρου δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ  
τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰν  
ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένην γραμμάν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν  
εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ  
15 κύκλῳ δεδομένης ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος  
τᾶς ποτιπεσοῦσας τοῦ ἐπὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὸ ἕτερον  
πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένης εὐθείας τὸν ταχθέντα λό-  
γον ἔχειν, εἴ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἢ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  
ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένης ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέν-  
20 τρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένην.

δεδοσθὼ κύκλος ὁ  $AB\Gamma$ , κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ  $K$ , καὶ ἐν  
αὐτῷ δεδοσθὼ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἡ  $\Gamma A$ , καὶ  
λόγος, ὃν ἔχει ἡ  $Z$  ποτὶ  $H$ , ἐλάσσων τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  $\Gamma\Theta$  ποτὶ  
H 22 τὰν  $K\Theta$ , καθέτου ἐούσας τᾶς  $K\Theta$ , ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου  
25 παρὰ τὰν  $A\Gamma$  ἡ  $KN$  καὶ τῇ  $K\Gamma$  ποτ' ὀρθᾶς ἡ  $\Gamma A$ · ὁμοῖα δὴ  
ἐστὶ τὰ  $\Gamma\Theta K$ ,  $\Gamma K A$  τρίγωνα. ἐστὶν οὖν, ὥς ἡ  $\Gamma\Theta$  ποτὶ τὰν  
 $\Theta K$ , οὕτως ἡ  $K\Gamma$  ποτὶ τὰν  $\Gamma A$ · ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει  
ἡ  $Z$  ποτὶ τὰν  $H$  ἢ ἡ  $K\Gamma$  ποτὶ τὰν  $\Gamma A$ . ὃν δὴ λόγον ἔχει ἡ  
 $Z$  ποτὶ τὰν  $H$ , τοῦτον ἐχέτω ἡ  $K\Gamma$  ποτὶ μείζονα τᾶς  $\Gamma A$ .

ἢ  $H\Theta$  ἴση πρὸς τὴν  $E$  διευθυνομένη πρὸς τὸ  $B$ . Ἀφοῦ δὲ ἀχθῆναι ἀπὸ τοῦ κέντρου  $K$  εὐθεῖα πρὸς τὸ  $\Theta$  ἃς προεκβληθῇ· τὸν αὐτὸν λοιπὸν λόγον ἔχει ἢ  $\Theta Z$  πρὸς τὴν  $\Theta K$ , ὃν ἔχει ἢ  $B\Theta$  πρὸς τὴν  $\Theta H$ . Ἡ  $Z\Theta$  ἄρα πρὸς τὴν  $\Theta K$  ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τόξον  $B\Theta$  πρὸς τὸ δοθὲν τόξον, διότι ἡ μὲν εὐθεῖα  $B\Theta$  εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου  $B\Theta$ , ἡ δὲ  $\Theta H$  εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ δοθέντος τόξου· ἔχει λοιπὸν μικρότερον λόγον καὶ ἡ  $Z\Theta$  πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἢ τὸ τόξον  $B\Theta$  πρὸς τὸ δοθὲν τόξον.

Ἐὰν δοθῇ κύκλος καὶ εἰς τὸν κύκλον χορδὴ μικροτέρα τῆς διαμέτρου εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖα τέμνουσα τὴν εἰς τὸν κύκλον δεδομένην χορδὴν, ὥστε τὸ τμήμα τῆς λαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τῆς περιφερείας ( τοῦ τόξου ) καὶ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ( ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ) ἀχθείσης εὐθείας μέχρι τοῦ ἑνὸς πέρατος τῆς χορδῆς νὰ ἔχη τὸν ταχθέντα λόγον, ἔαν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἐπ' αὐτῆς ἀχθεῖσαν κάθετον.

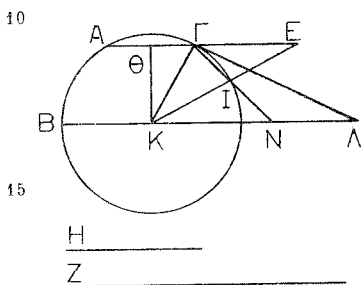


Ἄς δοθῇ ὁ κυκλος ΑΒΓ, κέντρον  
δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ εἰς αὐτὸν ἄς δοθῇ εὐθεῖα (χορδὴ) μικροτέρα τῆς  
διαμέτρου ἢ ΓΑ, καὶ ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, νὰ εἶναι μι-  
κρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΚΘ, ἡ ὁποία ΚΘ εἶναι  
κάθετος, ἄς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἢ  
ΚΝ καὶ πρὸς τὴν ΚΓ ἄς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΓΛ· εἶναι λοιπὸν ὅμοια τὰ  
τρίγωνα ΓΘΚ, ΓΚΛ. Εἶναι λοιπὸν, ὡς ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως  
ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ (Εὐκλ. VI, 4)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ Ζ  
πρὸς τὴν Η ἢ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ. Ὅν λόγον λοιπὸν ἔχει ἡ Ζ πρὸς

ἔχέτω ποτὶ τὰν  $BN$ , κείσθω δὲ ἡ  $BN$  μεταξὺ τῶν περιφερειᾶς καὶ τῶν εὐθειᾶς διὰ τοῦ  $\Gamma$ . δυνατόν δὲ ἔστιν οὕτως τέμνειν καὶ πεσεῖται ἐκτός, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν τῆς  $ΓΑ$ . ἐπεὶ οὖν ἡ  $KB$  ποτὶ  $BN$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ  $Z$  ποτὶ  $H$ , καὶ ἡ  $EB$  ποτὶ  $B\Gamma$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ  $Z$  ποτὶ  $H$ .

5'

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβε-  
βλημένης δυνατόν ἐστίν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν  
ἐκβεβλημένην, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκ-



βεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευ-  
χθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς  
ἐναπολαφθείσας ποτὶ τὸ πέρας  
τᾶς ἐκβεβλημένας τὸν ταχθέν-  
τα λόγον ἔχειν, εἴ καὶ ὁ δοθείς  
λόγος μεῖζων ἢ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  
ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδο-  
μένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου  
κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένην.

δεδόσθω τὰ αὐτά, καὶ ἔστω ἡ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβε-  
 20 βλημένα, ὃ δὲ δοθείς λόγος ἔστω, ὃν ἔχει ἡ  $Z$  ποτὶ τὰν  $H$ ,  
 μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  $\Gamma\Theta$  ποτὶ τὰν  $\Theta\mathcal{K}$ . μείζων οὖν ἔσσεύται  
 Η 24 καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  $K\Gamma$  ποτὶ  $\Gamma\Lambda$ . ὃν δὴ λόγον ἔχει ἡ  $Z$  ποτὶ  $H$ ,  
 τοῦτον ἔξει ἡ  $K\Gamma$  ποτὶ ἐλάσσονα τῆς  $\Gamma\Lambda$ . ἐχέτω ποτὶ  $IN$   
 νεύουσιν ἐπὶ τὸ  $\Gamma$ . δυνατόν δὲ ἔστιν οὕτως τέμνειν καὶ  
 25 πεσεῖται ἐντὸς τῆς  $\Gamma\Lambda$ , ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς  $\Gamma\Lambda$ . ἐπεὶ  
 οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ  $K\Gamma$  ποτὶ  $IN$ , ὃν ἡ  $Z$  ποτὶ  $H$ , καὶ  
 ἡ  $EI$  ποτὶ  $IF$  τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν ἡ  $Z$  ποτὶ τὰν  $H$ .

 $\eta'$ 

Κύκλον δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος

τὴν  $H$ , τοῦτον ἄς ἔχη ἡ  $K\Gamma$  πρὸς μεγαλυτέραν τῆς  $\Gamma\Lambda$ . Ἄς ἔχη αὐτὸν τὸν λόγον πρὸς τὴν  $BN$ , ἄς κῆται δὲ ἡ  $BN$  μεταξὺ τοῦ τόξου ( $ΑΓ$ ) καὶ τῆς διὰ τοῦ  $\Gamma$  εὐθείας· εἶναι δὲ δυνατόν νά γίνη αὕτη ἡ τομή· καὶ θὰ πέσῃ ἐκτὸς ἐπειδὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς  $\Gamma\Lambda$  (Εὐκλ. V, 10). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ  $KB$  πρὸς  $BN$  ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ  $Z$  πρὸς τὴν  $H$ , καὶ ἡ  $EB$  πρὸς  $B\Gamma$  θὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ  $Z$  πρὸς τὴν  $H$  (Εὐκλ. VI, 2).

## 7

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ ἐὰν ἡ δοθεῖσα χορδὴ τοῦ κύκλου προεκβληθῇ εἶναι δυνατόν νά ἀχθῇ ἀκτὶς καὶ νά προεκταθῇ μέχρι τῆς προεκβληθείσης, ὥστε τὸ τμήμα τῆς εὐθείας τὸ μεταξὺ τῆς περιφέρειας καὶ τῆς προεκβληθείσης πρὸς τὴν ἀχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἀκτίνος μέχρι τοῦ πέρατος τῆς χορδῆς, ἀπὸ τοῦ ὁποίου αὕτη προεξεβλήθη, νά ἔχη τὸν ταχθέντα λόγον, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀχθεῖσαν ἐπ' αὐτήν.

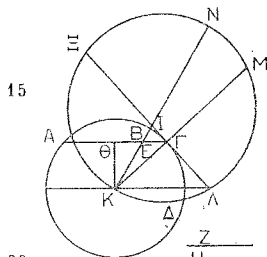
Ἄς εἶναι δεδομένα τὰ αὐτὰ καὶ ἔστω ἡ χορδὴ τοῦ κύκλου προεκβεβλημένη, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω, ὃν ἔχει ἡ  $Z$  πρὸς τὴν  $H$ , μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ  $\Gamma\Theta$  πρὸς τὴν  $\Theta K$ · θὰ εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερος καὶ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ  $K\Gamma$  πρὸς  $\Gamma\Lambda$ . Ὅν λόγον λοιπὸν ἔχει ἡ  $Z$  πρὸς τὴν  $H$ , τοῦτον θὰ ἔχη ἡ  $K\Gamma$  πρὸς μικροτέραν τῆς  $\Gamma\Lambda$  (Εὐκλ. V, 10). Ἄς ἔχη πρὸς τὴν (μικροτέραν)  $IN$  διευθυνομένην πρὸς τὸ  $\Gamma$ · εἶναι δὲ δυνατόν νά γίνη ἡ τομή αὕτη· καὶ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς  $\Gamma\Lambda$ , ἐπειδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς  $\Gamma\Lambda$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ  $K\Gamma$  πρὸς  $IN$  ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ  $Z$  πρὸς τὴν  $H$ , θὰ ἔχη καὶ ἡ  $EI$  πρὸς  $I\Gamma$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ  $Z$  πρὸς τὴν  $H$ .

## 8

Κύκλου δοθέντος καὶ εἰς τὸν κύκλον γραμμῆς μικροτέρας τῆς

τᾷ διαμέτρῳ καὶ ἄλλας ἐπιφανοῦσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾷ ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινα εὐθεΐαν ποτὶ τὰν εὐθεΐαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιφανοῦσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθείς λόγος ἐλάσσων ἢ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἡμίσεια τᾷ ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κείμενον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένην.

10 ἔστω κύκλος δεδομένος ὁ  $AB\Gamma\Delta$ , καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐ-  
θεῖα δεδóσθω ἐλάσσων τῆς διαμέτρου ἡ  $\Gamma\Delta$ , καὶ ἡ  $\Xi\Lambda$  ἐπι-



20 H γεγράφθω κύκλου περιφέρεια περὶ  
τὰ  $K, \Lambda, \Xi$ . ἐπεὶ οὖν ἐστὶ μείζων

ἃ  $\Xi\Gamma$  τᾶς  $\Gamma\Lambda$ , καὶ ποτ' ὀρθὰς ἐντι ἀλλάλαις αἱ  $K\Gamma$ ,  $\Xi\Lambda$ ,  
 δυνατόν ἐστι τᾷ  $M\Gamma$  ἴσαν ἄλλαν θέμεν τὰν  $IN$  νεύουσαν ἐπὶ  
 Η 26 τὸ  $K$ . τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν  $\Xi\Lambda$  ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν  $KE$ ,  
 25  $\Lambda$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἃ  $\Xi I$  ποτὶ  $KE$ , καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν  
 $KIN$  ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν  $KI$ ,  $\Gamma\Lambda$ , τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἃ  
 $IN$  ποτὶ  $\Gamma\Lambda$ . ὥστε καὶ ἃ  $IN$  ποτὶ  $\Gamma\Lambda$  ἐστίν, ὡς ἃ  $\Xi I$  ποτὶ  
 $KE$ . ὥστε καὶ ἃ  $\Gamma M$  ποτὶ  $\Gamma\Lambda$  καὶ ἃ  $\Xi\Gamma$  ποτὶ  $K\Gamma$  καὶ ποτὶ  
 $KB$  ἐστίν, ὡς ἃ  $\Xi I$  ποτὶ  $KE$ , καὶ λοιπὰ ἃ  $I\Gamma$  ποτὶ  $BE$  τὸν  
 30 αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἃ  $\Xi\Gamma$  ποτὶ τὰν  $\Gamma K$ , καὶ ὃν ἃ  $H$  ποτὶ  $Z$ .  
 πέπτωκεν οὖν ἃ  $KN$  ποτὶ τὰν ἐπιφαύουσαν, καὶ ἔχει ἃ με-  
 ταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας ἃ  $BE$  ποτὶ τὰν ἀπο-



διαμέτρου καὶ ἄλλης ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου εἰς τὸ πέρας τῆς εἰς τὸν κύκλον δεδομένης εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὥστε ἡ ἀποληφθεῖσα ἀπ' αὐτῆς μεταξὺ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς εἰς τὸν κύκλον δεδομένης γραμμῆς πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης νὰ ἔχη τὸν ταχθέντα λόγον, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς εἰς τὸν κύκλον δεδομένης πρὸς τὴν ἀχθεῖσαν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Ἐστω δεδομένος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἃς ἔχη δοθῇ εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα (χορδῇ) μικροτέρα τῆς διαμέτρου ἡ ΓΑ, καὶ ἡ ΕΛ ἃς ἐφάπτηται τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Γ, καὶ ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, ἃς εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ· θὰ εἶναι λοιπὸν μικρότερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΓΛ, ἐὰν ἡ ΚΛ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΓ. Ἄς ἔχη λοιπὸν ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΕ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η· εἶναι λοιπὸν μεγαλυτέρα ἡ ΕΓ τῆς ΓΛ (Εὐκλ. V, 10). Ἄς γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Κ, Λ, Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΛ, καὶ αἱ ΚΓ, ΕΛ εἶναι μεταξύ των κάθετοι, εἶναι δυνατὸν νὰ θέσωμεν πρὸς τὴν ΜΓ ἄλλην ἴσην τὴν ΙΝ διευθυνομένην πρὸς τὸ Κ. Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν πλευρῶν ΕΙ, ΙΛ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΕ, ΙΛ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΙ πρὸς τὴν ΚΕ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΙΝ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΓΛ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΙΝ πρὸς τὴν ΓΛ· ὥστε καὶ ἡ ΙΝ πρὸς τὴν ΓΛ εἶναι, ὡς ἡ ΕΙ πρὸς ΚΕ· ὥστε καὶ ἡ ΓΜ πρὸς ΓΛ καὶ ἡ ΕΓ πρὸς ΚΓ καὶ πρὸς ΚΒ εἶναι, ὡς ἡ ΕΙ πρὸς ΚΕ, καὶ ἡ ὑπόλοιπος ΙΓ πρὸς ΒΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΚ, καὶ ὃν ἔχει ἡ Η πρὸς Ζ. Τέμνει λοιπὸν ἡ ΚΝ τὴν ἐφαπτομένην, καὶ ἔχει ἡ μεταξύ τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας (χορδῆς) ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ἐφαπτομέ-

λαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιφανοῦσας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἂ  $Z$   
ποτὶ τὰν  $H$ .

 $\theta'$ 

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένης 5 γραμμᾶς ἐκβεβλημένης δυνατόν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὴν ἐκβεβλημένην εὐθεΐαν, ὥστε τὴν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένης ποτὶ τὴν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιφανούσας ποτὶ τὴν ἄφ᾽ ἂν τὸν ταχθέντα

λόγον ἔχειν, εἴ καὶ ὁ δοθεὶς λό-  
γος μείζων ἢ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἡ-  
μίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδο-  
μένης ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέν-  
τρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγο-  
μένην.

δεδοσθω κύκλος  $\delta$   $AB\Gamma\Delta$ ,  
καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσ-  
σων τᾶς διαμέτρου  $\alpha$   $\Gamma\Delta$  διό-  
γθω, καὶ ἐπιφανέτω τοῦ κύ-

Η 28 κλον ἃ ΕΓ κατὰ τὸ Γ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἃ Ζ ποτὶ τὰν Η,  
 20 μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἃ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ· ἐσσεῖται δὴ μείζων  
 καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἃ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ. ἐχέτω οὖν ἃ ΚΓ ποτὶ  
 τὰν ΓΞ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἃ Ζ ποτὶ τὰν Η· ἐλάσσων ἄρα  
 ἐστὶν αὐτὰ τὰς ΓΛ. πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν Ξ,  
 Κ, Λ σαμείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἃ ΕΓ τὰς ΓΛ, καὶ  
 25 ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ ἀλλήλαις αἱ ΚΜ, ΕΓ, δυνατόν τῃ ΓΜ ἴσαν  
 θέμεν τὰν ΙΝ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τὰν ΕΙΑ  
 ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΛΙ, ΚΕ ἐστίν, ὥς ἃ ΕΙ ποτὶ ΚΕ, ἀλλὰ τῷ  
 μὲν ὑπὸ τὰν ΕΙΑ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙΝ, τῷ δὲ ὑπὸ τὰν  
 ΛΙ, ΚΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙ, ΓΛ διὰ τὸ εἶμεν, ὥς τὰν  
 30 ΚΕ ποτὶ ΙΚ, οὕτως τὰν ΛΓ ποτὶ ΛΙ, καὶ ὥς ἄρα ἃ ΕΙ ποτὶ  
 ΚΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙΝ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙ, ΓΛ, του-  
 τέστιν ὥς ἃ ΝΙ ποτὶ ΓΛ, τουτέστιν ἃ ΓΜ ποτὶ ΓΛ. ἐστίν

νης τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Z πρὸς τὴν H.

## 9

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ εἰς τὸν κύκλον δεδομένη γραμμὴ εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖα πρὸς τὴν ἐκβληθεῖσαν, ὥστε ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἐκβληθείσης πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης μέχρι τοῦ σημείου ἐπαφῆς νὰ ἔχῃ τὸν ταχθέντα λόγον, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσαν κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Ἄς δοθῇ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ ἄς ἀχθῇ εὐθεῖα (χορδὴ) εἰς τὸν κύκλον μικροτέρα τῆς διαμέτρου ἢ ΓΑ, καὶ ἄς ἐφάπτηται τοῦ κύκλου ἡ ΕΓ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ Z πρὸς τὴν H, ἄς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ· θὰ εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ. Ἄς ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΕ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Z πρὸς τὴν H· εἶναι ἄρα αὕτη (ἡ ΓΕ) μικροτέρα τῆς ΓΛ (Εὐκλ. V, 10). Πάλιν τώρα ἄς γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν σημείων Ε, Κ, Λ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι μικροτέρα, ἡ ΕΓ τῆς ΓΛ, καὶ εἶναι κάθετοι μεταξὺ τῶν αἰ ΚΜ, ΕΓ, εἶναι δυνατόν νὰ θέσωμεν πρὸς τὴν ΓΜ ἴσην τὴν ΙΝ διευθυνομένην πρὸς τὸ Κ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΙ, ΙΛ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΛΙ, ΚΕ, εἶναι ὡς ἡ ΕΙ πρὸς ΚΕ, ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΙ, ΙΛ εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΙΝ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 35), πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΛΙ, ΚΕ εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΓΛ, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΙΚ, οὕτως ἡ ΛΓ πρὸς ΛΙ, καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΕΙ πρὸς ΚΕ, οὕτως εἶναι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΙΝ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΓΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΝΙ πρὸς ΓΛ, τουτέστιν ἡ ΓΜ πρὸς ΓΛ. Εἶναι δὲ καί, ὡς ἡ ΓΜ πρὸς

δὲ καί, ὥς ἡ  $ΓΜ$  ποτὶ  $ΓΛ$ , ἡ  $ΞΓ$  ποτὶ  $ΚΓ$ , τουτέστι ποτὶ  $ΚΒ$ · ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ  $ΞΙ$  ποτὶ  $ΚΕ$ , ἡ  $ΞΓ$  ποτὶ  $ΚΒ$ , καὶ λοιπὰ ἡ  $ΙΓ$  ποτὶ λοιπὰν τὰν  $ΒΕ$  ἔστιν, ὥς ἡ  $ΞΓ$  ποτὶ  $ΓΚ$ . ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ  $ΞΓ$  ποτὶ  $ΓΚ$ , τοῦτον ἔχει ἡ  $Η$  ποτὶ  $Ζ$ · ποτιπέ-  
 5 πτωκεν δὴ ἡ  $ΚΕ$  ποτὶ τὰν ἐκβεβλημένων, καὶ ἡ μεταξὺ τῆς ἐκβεβλημένης καὶ τῆς περιφερείας ἡ  $ΒΕ$  ποτὶ τὰν  $ΓΙ$  τὰν ἀπὸ τῆς ἐπιφανούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ  $Ζ$  ποτὶ τὰν  $Η$ .

Η 30

ι'

10  $Εἴ$  κα γραμμαὶ ἐξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ἧ δὲ ἡ ὑπεροχὰ ἴσα τῇ ἐλαχίστῃ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέ-  
 θει ἐκάστα τῇ μεγίστῃ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἴσῶν τῇ  
 15 μεγίστῃ ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τῆς μεγίστης τετράγω-  
 νον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς ἐλαχίστης καὶ τῆς ἴσας  
 πάσαις ταῖς τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχούσαις τριπλάσια ἐσ-  
 σοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλ-  
 λαλᾶν ὑπερεχουσῶν.

ἔστων γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλ-  
 20 λαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ  $A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ$ , ἡ δὲ  $Θ$  ἴσα  
 ἔστω τῇ ὑπεροχῇ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν  $B$  ἴσα τῇ  $Θ$  ἡ  $I$ ,  
 ποτὶ δὲ τὰν  $Γ$  ἡ  $K$  ἴσα τῇ  $H$ , ποτὶ δὲ τὰν  $Δ$  ἡ  $Λ$  ἴσα τῇ  $Z$ ,  
 ποτὶ δὲ τὰν  $E$  ἡ  $M$  ἴσα τῇ  $E$ , ποτὶ δὲ τὰν  $Z$  ἡ  $N$  ἴσα τῇ  $Δ$ ,  
 ποτὶ δὲ τὰν  $H$  ἡ  $Ξ$  ἴσα τῇ  $Γ$ , ποτὶ δὲ τὰν  $Θ$  ἡ  $O$  ἴσα τῇ  
 25  $B$ · ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ μεγίστῃ.  
 δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασῶν τῆς τε  $A$  καὶ  
 τῶν γενομενῶν ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τῆς  $A$  τετράγωνον  
 καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς  $Θ$  καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς  
 $A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ$  τριπλάσιά ἐντι τῶν τετραγώνων

ΓΑ, ἡ ΞΓ πρὸς ΚΓ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 35), τουτέστι πρὸς ΚΒ· εἶναι ἄρα, ὥς ἡ ΕΙ πρὸς ΚΕ, ἡ ΞΓ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΙΓ πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν ΒΕ εἶναι, ὥς ἡ ΞΓ πρὸς ΓΚ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΞΓ πρὸς ΓΚ, τοῦτον ἔχει ἡ Η πρὸς Ζ· διότι συναντᾷ ἡ ΚΕ τὴν ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἡ μεταξὺ τῆς ἐκβληθείσης καὶ τῆς περιφερείας ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΓΙ, ἡ ὁποία εἶναι ἀποληφθεῖσα ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η.

10

Ἐὰν ληφθῶσιν ὁσαιοῖς ποτε γραμμαὶ ὑπερέχουσαι ἴσον πρὸς ἀλλήλας, εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ ἴση πρὸς τὴν ἐλαχίστην, καὶ ληφθῶσιν ἄλλαι γραμμαὶ ἴσαι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς ταύτας, κατὰ τὸ μέγεθος δὲ ἐκάστη νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν μεγίστην σὺν τὸ τετράγωνον τῆς μεγίστης σὺν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ἐλαχίστην καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσον ὑπερεχουσῶν πρὸς ἀλλήλας θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστωσαν γραμμαὶ ὁσαιοῖς ποτε ὑπερέχουσαι διαδοχικῶς ἴσον ἀλλήλων αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ἡ δὲ Θ ἔστω ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἧς προστεθῇ δὲ εἰς τὴν Β ἴση πρὸς τὴν Θ ἡ Ι, εἰς τὴν Γ δὲ ἡ Κ ἴση πρὸς τὴν Η, εἰς δὲ τὴν Δ ἡ Λ ἴση πρὸς τὴν Ζ, εἰς δὲ τὴν Ε ἡ Μ ἴση πρὸς τὴν Ε, εἰς δὲ τὴν Ζ ἡ Ν ἴση πρὸς τὴν Δ, εἰς δὲ τὴν Η ἡ Ξ ἴση πρὸς τὴν Γ, εἰς δὲ τὴν Θ ἡ Ο ἴση πρὸς τὴν Β· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ προκύψασαι εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὧν, καὶ τοῦ τῆς Α καὶ τοῦ τετραγώνου ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς Α, σὺν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν Θ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τριπλάσιον



πάντων τῶν ἀπὸ τῶν  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ .

- ἔστιν δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς  $BI$  τετραγώνου ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν  $I, B$  τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν  $B, I$  περιεχομένοις,  
H 32 τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς  $KI'$  ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν  $K, \Gamma$  τετραγώνοις καὶ  
5 δύο τοῖς ὑπὸ τῶν  $K, \Gamma$  περιεχομένοις· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἄλλων τῶν ἰσῶν τῇ  $A$  τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τριγώνων τετραγώνοις καὶ δυοὶ τοῖς ὑπὸ τῶν τριγώνων περιεχομένοις. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τῶν  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$  καὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O$  ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς  
10  $A$  τετραγώνου διπλάσιά ἐντι τῶν ἀπὸ τῶν  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$  τετραγώνων· λοιπὸν δὲ ἐπιδειξοῦμες, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων τῶν ἐν ἐκάστῃ γραμμῇ τῶν ἰσῶν τῇ  $A$  ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς  $\Theta$  καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$   
15 ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ . καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ  $B, I$  περιεχόμενα ἴσα δυοὶ τοῖς ὑπὸ τῶν  $B, \Theta$  περιεχομένοις, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν  $K, \Gamma$  ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς  $\Theta$  καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς  $\Gamma$  διὰ τὸ τὰν  $K$  διπλασίονα εἶμεν τᾶς  $\Theta$ , δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν  $\Delta, \Lambda$  ἴσα τῷ ὑπὸ  
20 τᾶς  $\Theta$  καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς  $\Delta$  διὰ τὸ τὰν  $\Lambda$  τριπλασίονα εἶμεν τᾶς  $\Theta$ , ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τριγώνων ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς  $\Theta$  καὶ τᾶς πολλαπλασίας αἰεὶ κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἐπομένης γραμμᾶς, τὰ οὖν σύμπαντα  
25 ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς  $\Theta$  καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$  ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς  $\Theta$  καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῇ τε  $A$  καὶ  
H 34 τῇ τριπλασίᾳ τᾶς  $B$  καὶ τῇ πενταπλασίᾳ τᾶς  $\Gamma$  καὶ αἰεὶ τῇ [περισσῇ] κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς περισσοῦς πολλαπλα-  
30 σία τᾶς ἐπομένης γραμμᾶς. ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$  τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν αὐτῶν γραμμῶν. ἔστι γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς  $A$  τετραγώνου ἴσον τῷ

τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

Εἶναι δὲ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς Β σὺν Ι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τοῦ Β καὶ τοῦ Ι σὺν τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον πλευρῶν Β καὶ Ι, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Κ σὺν Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τοῦ Κ καὶ τοῦ Γ σὺν τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον πλευρῶν Κ καὶ Γ· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἴσων πρὸς τὴν Α εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων καὶ πρὸς δύο ὀρθογώνια τῶν ὁποίων πλευραὶ εἶναι τὰ τμήματα. Τὰ μὲν λοιπὸν τετράγωνα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο προσλαβόντα τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ· ὑπολείπεται δὲ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ διπλάσια ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰ ἐν ἐκάστη γραμμῇ τμήματα τὰ ἴσα πρὸς τὴν Α προσλαβόντα τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Θ καὶ τοῦ ἄθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπειδὴ δύο μὲν ὀρθογώνια πλευρῶν Β καὶ Ι εἶναι ἴσα πρὸς δύο ὀρθογώνια πλευρῶν Β καὶ Θ, δύο δὲ πλευρῶν Κ καὶ Γ εἶναι ἴσα πρὸς ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τετραπλασίας τῆς Γ, ἐπειδὴ ἡ Κ εἶναι διπλασία τῆς Θ, δύο δὲ ὀρθογώνια πλευρῶν Δ καὶ Λ εἶναι ἴσα πρὸς ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τῆς ἑξαπλασίας τῆς Δ, ἐπειδὴ ἡ Λ εἶναι τριπλασία τῆς Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰ τμήματα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὸ πολλαπλάσιον πάντοτε τῆς ἐπομένης γραμμῆς κατὰ τὴν ἐν συνεχείᾳ ἀρτίαν ἀρίθμησιν, τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τετραγώνων προσλαβὼν τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τοῦ ἄθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τοῦ ἄθροίσματος τῆς Α καὶ τοῦ τριπλασίου τῆς Β καὶ τοῦ πενταπλασίου τῆς Γ καὶ πάντοτε τοῦ περιττοῦ, κατὰ τοὺς ἐν συνεχείᾳ περιττοὺς ἀριθμοὺς πολλαπλασίου τῆς ἐπομένης γραμμῆς. Εἶναι δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς αὐτὰς γραμμάς. Διότι τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν Θ καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς ἴσης πρὸς

περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας [πάσαις] τᾷ τε Α  
 καὶ τᾷ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ἅν ἐκάστα ἴσα τᾷ Α· ἰσάκεις γὰρ  
 μετρεῖ ἃ τε Θ τὰν Α καὶ ἃ Α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας σὺν τᾷ Α·  
 ὥστε ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Α τετράγωνόν τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ  
 5 τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ Α καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Β, Γ, Δ, Ε,  
 Ζ, Η, Θ· αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ Α πᾶσαι χωρὶς τᾶς Α διπλάσιαί  
 ἐντι τᾶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς Β  
 τετράγωνον ἴσον ἐντι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς  
 ἴσας τᾷ τε Β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ πάλιν  
 10 τὸ ἀπὸ τᾶς Γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας  
 τᾷ τε Γ καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὁμοίως δὲ καὶ  
 τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλῶν τετράγωνα ἴσα ἐντι τοῖς περιεχομένοις ὑπὸ  
 τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν λοιπῶν.  
 δῆλον οὖν, ὅτι τὰ ἀπὸ πασῶν τετράγωνα ἴσα ἐντι τῷ περιε-  
 15 χομένῳ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε Α καὶ τᾷ  
 τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ τᾷ κατὰ τοὺς  
 ἐξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἐπομένης.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου οὖν φανερόν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ  
 Η 36 τᾶν ἰσῶν τᾷ μεγίστῳ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ  
 ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσῶν ἐλάσσονά ἐστιν ἢ τριπλάσια, ἐ-  
 πειδὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσιά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν χω-  
 ρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστης τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλά-  
 σια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τοῦ  
 25 ἀπὸ τᾶς μεγίστης τετραγώνου. καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα εἶδεα  
 ἀναγραφέντων ἀπὸ πασῶν, ἀπὸ τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερ-  
 εχουσῶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσῶν τᾷ μεγίστῳ, τὰ εἶδεα τὰ ἀπὸ τᾶν  
 ἰσῶν τᾷ μεγίστῳ τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχου-



τὴν Α καὶ τῆς ἴσης πρὸς τὰς λοιπὰς, ἐκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α· διότι ἰσάκεις μετρεῖ καὶ ἡ Θ τὴν Α καὶ ἡ Α τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων πρὸς αὐτὴν σὺν τὴν Α· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὴν Α καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων πρὸς τὴν Α χωρὶς τὴν Α εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄθροίσματος τῶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὴν Β καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ πάλιν τὸ τετράγωνον τῆς Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὴν Γ καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ἄλλων εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς αὐτὴν καὶ τὴν διπλασίαν τῶν λοιπῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων πρὸς τὴν Α ὅλων σὺν τὸ τριπλάσιον τῆς Β, σὺν τὸ πενταπλάσιον τῆς Γ, σὺν τὴν ἐπομένην ἐκάστην φορὰν, πολλαπλάσιον οὕσαν κατὰ τὴν ἐν συνεχείᾳ περιττὴν ἀρίθμῳ.

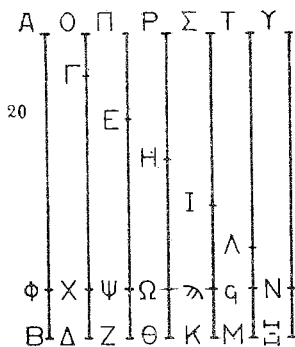
#### ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μεγίστην, τοῦ μὲν ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν τὴν ἴσην πρὸς ἀλλήλας ὑπερέχουσιν, εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου, ἐπειδὴ ( τὰ πρῶτα ) προσλαβόντα τινὰ γίνονται τριπλάσια, τῶν ἄλλων δὲ ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου, ἐπειδὴ τὰ προσληφθέντα εἶναι μικρότερα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν μεγίστην. Καὶ συνεπῶς, ἐὰν ὅμοια σχήματα ἀναγραφῶσιν ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, καὶ ἐξ ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἀλλήλων ἴσον καὶ ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην, τὰ σχήματα τὰ ἀναγραφέντα ἐκ τῶν

σᾶν εἰδέων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν  
χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἵδεος μείζονα ἢ τριπλάσια·  
τὸν γὰρ αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἶδεα τοῖς τετραγώνοις.

ια'

5 Εἴ κα γραμμαὶ ἐξῆς τεθέωντι ὅποσαι οὖν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν  
ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει  
μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσᾶν, τῷ δὲ με-  
γέθει ἐκάστα ἴσα τᾷ μεγίστῳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ  
10 τᾶν ἰσῶν τᾷ μεγίστῳ ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ  
ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα  
λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ  
ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς μεγίστας  
καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπερο-  
χᾶς τετραγώνου, ᾧ ὑπερέχει ἡ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ  
H 38 δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσᾶν  
χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα τοῦ αὐ-  
τοῦ λόγου.



ἔστωσαν γὰρ γραμμαὶ ὅποσαι οὖν  
τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι ἐξῆς  
κείμεναι, ἡ μὲν ΑΒ τᾶς ΓΔ, ἡ δὲ  
ΓΔ τᾶς ΕΖ, ἡ δὲ ΕΖ τᾶς ΗΘ, ἡ δὲ  
ΗΘ τᾶς ΙΚ, ἡ δὲ ΙΚ τᾶς ΑΜ, ἡ δὲ  
ΑΜ τᾶς ΝΞ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ μὲν  
τὰν ΓΔ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἡ ΓΟ, ποτὶ  
δὲ τὰν ΕΖ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς ἡ  
ΕΠ, ποτὶ δὲ τὰν ΗΘ ἴσα τρισὶν  
ὑπεροχαῖς ἡ ΗΡ, καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας  
τὸν αὐτὸν τρόπον ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι  
καὶ ἐκάστα τᾷ μεγίστῳ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ ἀπὸ πασῶν  
30 τᾶν γενομενᾶν τετράγωνα ποτὶ μὲν πάντα τὰ τετράγωνα τὰ  
ἀπὸ πασῶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ

ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην θὰ εἶναι τῶν μὲν ἀναγραφέντων ἐκ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν μικρότερα τοῦ τριπλασίου, τῶν ἄλλων δὲ ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τετραγώνου θὰ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τριπλασίου· διότι τὰ ὅμοια σχήματα θὰ ἔχωσι πρὸς τὰ τετράγωνα τὸν αὐτὸν λόγον ( Εὐκλ. VI, 20 ).

## 11

Ἐὰν ληφθῶσιν ὅσαιδήποτε γραμμαὶ ἐν συνεχείᾳ, ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος νὰ εἶναι κατὰ μίαν μικρότερον τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν, ἐκάστη δὲ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἑκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μεγίστην, πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἴσων ἀλλήλων ὑπερεχουσῶν ἄνευ τῶν τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην, καὶ τοῦ ἐνὸς τρίτου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῆς ἐλαχίστης, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῶν ἴσων ἀλλήλων ὑπερεχουσῶν ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης, μεγαλύτερον τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Διότι ἕστωσαν ἐν συνεχείᾳ ὅσαιδήποτε γραμμαὶ ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, ἡ μὲν  $AB$  τῆς  $\Gamma\Delta$ , ἡ δὲ  $\Gamma\Delta$  τῆς  $EZ$ , ἡ δὲ  $EZ$  τῆς  $H\Theta$ , ἡ δὲ  $H\Theta$  τῆς  $IK$ , ἡ δὲ  $IK$  τῆς  $\Lambda M$ , ἡ δὲ  $\Lambda M$  τῆς  $NΞ$ , ἃς προστεθῇ δὲ εἰς μὲν τὴν  $\Gamma\Delta$  ἴση γραμμὴ πρὸς μίαν ὑπεροχὴν ἡ  $\Gamma O$ , πρὸς δὲ τὴν  $EZ$  ἴση γραμμὴ πρὸς δύο ὑπεροχὰς ἡ  $E\Pi$ , πρὸς δὲ τὴν  $H\Theta$  ἴση πρὸς τρεῖς ὑπεροχὰς ἡ  $HP$ , καὶ πρὸς τὰς ἄλλας ἃς γίνηται πρόσθεσις γραμμῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ προκύπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, ἑκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἐκάστην προκύψασαν ὥς ἂν εὐθεῖαν πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἴσων ἀλλήλων ὑπερεχουσῶν,

τᾷς ΝΞ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ τᾷς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΝΞ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾷς ΝΥ τετραγώνου, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτῶν χωρὶς τοῦ  
5 ἀπὸ τᾷς ΑΒ τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

ἀπολελάφθω ἀφ' ἐκάστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχῇ· ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾷς ΑΒ ποτὶ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ  
10 τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾷς ΑΦ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τε ἀπὸ τᾷς ΟΔ τετράγωνον ποτὶ τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΟΔ, ΔΧ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾷς ΧΟ τετραγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾷς ΠΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΠΖ, ΨΖ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾷς  
15 ΨΠ τετραγώνου καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλῶν τετράγωνα ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία· καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασῶν  
H 40 τᾶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ ποτὶ τε πάντα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τε τᾷς ΝΞ καὶ τᾷς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν  
20 ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τζ, ΥΝ τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾷς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΦΑ τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τὸ τε περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾷς ΝΞ καὶ τᾷς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ,  
25 ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τζ, ΥΝ, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ ἐλάττονα, τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ, ΝΞ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν.

30 ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾷς ΝΞ καὶ τᾷς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τζ, ΥΝ

ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς ΝΞ, ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄθροίσματος καὶ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ, ΝΞ, καὶ τοῦ ἐνὸς τρίτου τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΝΥ, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν πλευρῶν ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ, ἔχει μεγαλύτερον λόγον τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἄς ληφθῇ ἐξ ἐκάστης ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν τμήμα ἴσον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν· ὃν λόγον λοιπὸν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ, ΦΒ καὶ τοῦ ἐνὸς τρίτου τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΦ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΟΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΟΔ, ΔΧ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΧΟ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΠΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΖ, ΨΖ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΨΠ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίως λαμβανομένων χωρίων· καὶ τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν τὴν ΝΞ καὶ ἐκάστην ὅλων τῶν εἰρημένων γραμμῶν σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τς, ΥΝ θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ, ΦΒ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΦΑ (Εὐκλ. V, 12). Ἐὰν λοιπὸν δειχθῇ, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΝΞ καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὸ ἐν τρίτον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τς, ΥΝ εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ, τὸ ζητούμενον θὰ ἔχη ἀποδειχθῇ.

Εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν ὀρθογώνιον τὸ ἔχον μίαν πλευρὰν τὴν ΝΞ καὶ ἄλλην τὸ ἄθροισμα τῶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ,

- ἴσα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ  $ΧΔ$ ,  $ΨΖ$ ,  $ΩΘ$ ,  $λΚ$ ,  $ςΜ$ ,  $ΝΞ$   
καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς  $ΝΞ$  καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς  
 $ΟΧ$ ,  $ΠΨ$ ,  $ΡΩ$ ,  $Σλ$ ,  $Τς$ ,  $ΥΝ$  καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τε-  
τραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν  $ΟΧ$ ,  $ΠΨ$ ,  $ΡΩ$ ,  $Σλ$ ,  $Τς$ ,  $ΥΝ$ , τὰ δὲ  
5 ἀπὸ τᾶν  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ ,  $ΕΖ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΙΚ$ ,  $ΛΜ$  τετράγωνα ἴσα τοῖς  
ἀπὸ τᾶν  $ΒΦ$ ,  $ΧΔ$ ,  $ΨΖ$ ,  $ΩΘ$ ,  $λΚ$ ,  $ςΜ$  τετραγώνοις καὶ τοῖς  
ἀπὸ τᾶν  $ΑΦ$ ,  $ΓΧ$ ,  $ΕΨ$ ,  $ΗΩ$ ,  $Γλ$ ,  $Λς$  καὶ τῷ περιεχομένῳ  
ὑπὸ τᾶς  $ΒΦ$  καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν  $ΑΦ$ ,  $ΓΧ$ ,  $ΕΨ$ ,  $ΗΩ$ ,  $Γλ$ ,  
H 42  $Λς$ . κοινὰ μὲν οὖν ἐντι ἐκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν  
10 ἴσῃν τῇ  $ΝΞ$ , τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς  $ΝΞ$  καὶ τᾶς ἴσας  
ταῖς  $ΟΧ$ ,  $ΠΨ$ ,  $ΩΡ$ ,  $λΣ$ ,  $ςΤ$ ,  $ΥΝ$  ἔλασσόν ἐστι τοῦ περι-  
εχομένου ὑπὸ τε τᾶς  $ΒΦ$  καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν  $ΑΦ$ ,  $ΓΧ$ ,  
 $ΕΨ$ ,  $ΗΩ$ ,  $Γλ$ ,  $Λς$  διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς  
μὲν  $ΓΟ$ ,  $ΕΠ$ ,  $ΡΗ$ ,  $ΙΣ$ ,  $ΛΤ$ ,  $ΥΝ$  ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπῶν  
15 μείζοντας, καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν  $ΑΦ$ ,  $ΓΧ$ ,  $ΕΨ$ ,  
 $ΗΩ$ ,  $Γλ$ ,  $Λς$  μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρους τῶν ἀπὸ τᾶν  
 $ΟΧ$ ,  $ΠΨ$ ,  $ΡΩ$ ,  $Σλ$ ,  $Τς$ ,  $ΥΝ$ . δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς  
ἐπάνω· ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώ-  
νων τῶν ἀπὸ τᾶν  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ ,  $ΕΖ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΙΚ$ ,  $ΛΜ$ .
- 20 λοιπὸν δὲ δεῖξομες, ὅτι μείζονά ἐντι τῶν τετραγώνων  
τῶν ἀπὸ τᾶν  $ΓΔ$ ,  $ΕΖ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΙΚ$ ,  $ΛΜ$ ,  $ΝΞ$ . πάλιν δὴ τὰ  
τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν  $ΓΔ$ ,  $ΕΖ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΙΚ$ ,  $ΛΜ$ ,  $ΝΞ$  ἴσα ἐντὶ  
τοῖς τε ἀπὸ τᾶν  $ΧΓ$ ,  $ΕΨ$ ,  $ΗΩ$ ,  $Γλ$ ,  $Λς$  καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν  
 $ΧΔ$ ,  $ΨΖ$ ,  $ΩΘ$ ,  $λΚ$ ,  $ςΜ$ ,  $ΝΞ$  καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε  
25 τᾶς  $ΝΞ$  καὶ τᾶς διπλασίας πασῶν τᾶν  $ΓΧ$ ,  $ΕΨ$ ,  $ΗΩ$ ,  $Γλ$ ,  
 $Λς$ . καὶ ἐστι κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν  $ΧΔ$ ,  $ΨΖ$ ,  $ΩΘ$ ,  $λΚ$ ,  $ςΜ$ ,  
 $ΝΞ$ , μείζον δὲ τὸ ὑπὸ τε τᾶς  $ΝΞ$  καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς  
 $ΟΧ$ ,  $ΠΨ$ ,  $ΡΩ$ ,  $Σλ$ ,  $Τς$ ,  $ΥΝ$  τοῦ ὑπὸ τᾶς  $ΝΞ$  καὶ τᾶς δι-  
πλασίας πασῶν τᾶν  $ΓΧ$ ,  $ΕΨ$ ,  $ΗΩ$ ,  $Γλ$ ,  $Λς$ , ἐντὶ δὲ καὶ τὰ

Τρ, ΥΝ ἴσα πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΖΚ, ςΜ, ΝΞ σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΞ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΖ, Τρ, ΥΝ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΖ, Τρ, ΥΝ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΖΚ, ςΜ σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΖ, Ας σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς ΒΦ καὶ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΖ, Ας ( Εὐκλ. ΙΙ, 4 ). Διότι καὶ τῶν δύο ἰσοτήτων εἶναι κοινὰ τὰ τετράγωνα τῶν ἴσων πρὸς τὴν ΝΞ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΞ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ΖΣ, ςΤ, ΥΝ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΒΦ καὶ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΖ, Ας, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τώρα εἰρημένων γραμμῶν πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΑΤ, ΥΝ εἶναι ἴσον, πρὸς τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ἄλλων εἶναι μεγαλύτερον, καὶ τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τετραγώνων τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΖ, Ας εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐνὸς τρίτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΖ, Τρ, ΥΝ· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα ( θ. 10 πόρ. )· εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων χωρίων μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ.

Ὑπολείπεται δὲ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων χωρίων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ, ΝΞ. Πάλιν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ, ΝΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΖ, Ας σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΖΚ, ςΜ, ΝΞ σὺν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΝΞ καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΖ, Ας. Καὶ εἶναι κοινὸν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΖΚ, Μς, ΝΞ, μεγαλύτερον δὲ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον μιᾶς πλευρᾶς ΝΞ καὶ ἄλλης τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΖ, Τρ, ΥΝ τοῦ ὀρθογωνίου μιᾶς πλευρᾶς ΝΞ καὶ ἄλλης

τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν  $XO$ ,  $\Psi\Pi$ ,  $\Omega P$ ,  $\lambda\Sigma$ ,  $\varsigma T$ ,  $YN$  τῶν ἀπὸ τῶν  $ΓX$ ,  $E\Psi$ ,  $H\Omega$ ,  $Γ\lambda$ ,  $A\varsigma$  μείζονα ἢ τριπλάσια· δέ-  
 Η 44 δεικναι γὰρ καὶ τοῦτο· μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν  $ΓΔ$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $IK$ ,  $AM$ ,  $NΞ$ .

5

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασῶν, ἀπό-  
 τε τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσῶν καὶ ἀπὸ τῶν ἰσῶν τᾷ  
 μεγίστῃ, εἶδεα, πάντα τὰ ἀπὸ τῶν ἰσῶν τᾷ μεγίστῃ ποτὶ τὰ  
 ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς  
 10 ἐλαχίστας εἶδεος ἐλάσσονα λόγον ἐξοῦντι ἢ τὸ τετράγωνον  
 τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιε-  
 χομένῳ ὑπὸ τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ  
 μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἡ μεγίστα τᾶς ἐλα-  
 χίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν εἶδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς  
 15 μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγον· τὸν αὐτὸν γὰρ ἐξοῦντι  
 λόγον τὰ ὁμοῖα εἶδεα τοῖς τετραγώνοις.

ΟΡΟΙ

α'. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μέ-  
 νοντος τοῦ ἐτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα  
 20 ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ  
 γραμμᾷ περιαγομένῃ φέρεται τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ  
 ἐαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρα-  
 τος, τὸ σαμεῖον ἔλικα γράφει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

β'. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον πε-  
 25 ριαγομένης αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶς ἔλικος.

γ'. ἡ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ' ἧς ἄρξατο ἡ εὐθεῖα πε-



## ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

ΐσης πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΔ, Ας, εἶναι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ΔΣ, ςΤ, ΥΝ μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΔ, Ας· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 10, πόρις.)· εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων χωρίων μεγαλύτερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ, ΝΞ.

### ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου λοιπὸν (ἔπεται), ἐὰν ἀναγραφῶσιν ὅμοια σχήματα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, καὶ ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἴσον ἀλλήλων καὶ ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς τὴν μεγίστην, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀναγραφέντων ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀναγραφέντων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης σχήματος θὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς μεγίστης πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῆς ἐλαχίστης, πρὸς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν γραμμῶν ἀναγραφόμενα σχήματα ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης θὰ ἔχῃ λόγον μεγαλύτερον τοῦ αὐτοῦ λόγου· διότι θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ὅμοια σχήματα πρὸς τὰ τετράγωνα (Εὐκλ. VI, 20).

### ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἐν ᾧ τὸ ἐν ἄκρον αὐτῆς μένει ἀκίνητον, ἀφοῦ περιστραφῇ αὕτη ἰσοταχῶς ἀποκατασταθῇ πάλιν, ἐκεῖ ὅπου ἐξεκίνησεν, συγχρόνως δὲ πρὸς τὴν περιστρεφομένην γραμμὴν κινῆται σημεῖόν τι ἐπ' αὐτῆς ἰσοταχῶς ἀρχίσαν τὴν κίνησιν ἀπὸ τοῦ ἀκινήτου ἄκρου, τὸ σημεῖον θὰ γράψῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑλικά.

2. Ἄς καλῆται λοιπὸν τὸ μένον κατὰ τὴν περιφορὰν τῆς εὐθείας ἀκίνητον ἄκρον αὐτῆς ἀρχὴ τῆς ἑλικος.

3. Ἡ δὲ θέσις τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἀφ' ἧς ἤρχισε νὰ περιστρέ-

ριφύρεσθαι, ἀρχὰ τὰς περιφορᾶς.

Η 46 δ'. εὐθεΐα, ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτῃ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ  
 σαμεῖον τὸ κατὰ τὰς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω,  
 ἂν δ' ἐν τᾷ δευτέρῃ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευ-  
 5 τέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφο-  
 ραῖς καλείσθωσαν.

ε'. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος τὰς ἐν  
 τᾷ πρώτῃ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τὰς εὐθείας, ἃ ἔστιν πρῶ-  
 τα, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος  
 10 τὰς ἐν τᾷ δευτέρῃ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τὰς εὐθείας τὰς  
 δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ ἄλλα ἐξῆς οὕτω κα-  
 λείσθω.

ς'. καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὃ ἔστιν ἀρχὰ τᾶς ἑλικος,  
 ἀχθῇ τις εὐθεΐα γραμμή, τὰς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτά,  
 15 ἐφ' ἃ κα ἡ περιφορὰ γένηται, προαγόμενα καλείσθω, τὰ δὲ  
 ἐπὶ θάτερα ἐπόμενα.

ζ'. ὅ τε γραφεῖς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὃ ἔστιν ἀρχὰ  
 τᾶς ἑλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ, ἃ ἔστιν πρῶτα, πρῶ-  
 τος καλείσθω, ὃ δὲ γραφεῖς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι  
 20 δὲ τᾷ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ  
 ἐξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

ιβ'

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἑλικά τὰν ἐν μιᾷ περιφορᾷ ὁποιοῦν γε-  
 γραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἑλικος εὐθεΐαι ἐμπεσῶντι  
 25 ὅποσαι οὖν ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑ-  
 περέχοντι ἀλλήλων.

ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς αἱ  $AB$ ,  $AF$ ,  $AD$ ,  $AE$ ,  $AZ$  ἴσας γωνίας  
 ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. δεικτέον, ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἡ  
 $AF$  τᾶς  $AB$  καὶ ἡ  $AD$  τᾶς  $AF$  καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως.

Η 48 ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἡ περιαγομὲνα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς  $AB$  ἐπὶ  
 τὰν  $AF$  ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ

φεται ἡ εὐθεΐα, ἃς καλῆται ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς.

4. Ἡ εὐθεΐα γραμμὴ, τὴν ὁποίαν διανύει τὸ σημεῖον τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας κινούμενον κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν, ἃς καλῆται πρώτη, ἐκεῖνη δὲ τὴν ὁποίαν θὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν ἃς καλῆται δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ἃς καλῶνται ὁμωνύμως πρὸς τὰς περιφοράς.

5. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς ἑλικος τῆς γραφείσης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι πρώτη, ἃς καλῆται πρῶτον, τὸ δὲ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς ἑλικος τῆς γραφείσης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας ἃς καλῆται δεύτερον καὶ τὰ ἄλλα ἐν συνεχείᾳ ἃς καλῶνται οὕτω ( ὁμωνύμως ).

6. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἀχθῇ εὐθεΐά τις γραμμὴ, τὰ μέρη τὰ κείμενα πρὸς ἐκεῖνα καθ' ἃ γίνεται καὶ ἡ περιφορὰ ἃς καλῶνται προηγούμενα, τὰ δὲ κείμενα πρὸς τὰ ἄλλα ἃς καλῶνται ἐπόμενα.

7. Καὶ ὁ γραφεὶς κύκλος μὲ κέντρον μὲν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἀκτῖνα δὲ τὴν εὐθεΐαν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτη, ἃς καλῆται πρῶτος, ὁ δὲ γραφεὶς μὲ κέντρον μὲν τὸ αὐτό, ἀκτῖνα δὲ τὴν διπλασίαν εὐθεΐαν ἃς καλῆται δεύτερος, καὶ οἱ ἄλλοι κύκλοι ἐν συνεχείᾳ ἃς καλῶνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

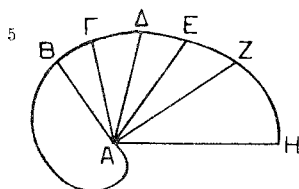
## 12

Ἐὰν εἰς ἑλικά γεγραμμένην κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν ἀχθῶσιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος ὅσαιδήποτε εὐθεΐαι σχηματίζουσαι ἴσας γωνίας πρὸς ἀλλήλας, αἱ εὐθεΐαι ὑπερέχουσιν ἀλλήλων ἴσον.

Ἐστω ἑλιξ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται αἱ εὐθεΐαι AB, AF, AD, AE, AZ, σχηματίζουσαι μεταξύ των γωνίας ἴσας. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ὑπερέχει ἴσον ἡ AF τῆς AB, καὶ ἡ AD τῆς AF καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως.

Διότι εἰς ὃν χρόνον ἡ περιφερομένη γραμμὴ ἀπὸ τῆς AB φθάνει εἰς τὴν AF, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ σημεῖον τὸ κινούμενον ἐπὶ τῆς

τῆς εὐθείας φερόμενον τὴν ὑπεροχὴν διαπορεύεται, ἧ ὑπερέχει ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὴν ὑπεροχάν, ἧ ὑπερέχει ἡ ΑΔ τῆς



10

ΑΓ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἡ περιεχομένη γραμμὰ ἀπὸ τε τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΑΓ ἀφικνεῖται καὶ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τῆς εὐθείας φερόμενον σαιμεῖον διαπορεύεται τὴν ὑπεροχάν, ἧ ὑπερέχει ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, καὶ τὴν ὑπεροχάν, ἧ ὑπερέχει ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἡ τε ΑΓ τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ, καὶ αἱ λοιπαί.

ιγ'

15 Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ τῆς ἑλικος ἐπιφανύη, καθ' ἐν μόνον ἐπιφανύσει σαιμεῖον.

ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τῆς ἑλικος τὸ Α σαιμεῖον, ἀρχὰ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ ἐπιφανέτω τῆς ἑλικος εὐθεῖα τις ἡ ΖΕ. φανί δὴ καθ'

20 ἐν μόνον σαιμεῖον ἐπιφανύειν αὐτᾶς.

ἐπιφανέτω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ δύο σαιμεῖα τὰ Γ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΗ, καὶ ἡ γωνία δίχα τετμάσθω ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΑΓ, καθ' ὃ δὲ σαιμεῖον ἡ δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν τῇ ἑλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ Θ. τῷ

25 δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἡ τε ΑΗ τῆς ΑΘ καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΑΓ, ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ποτ' ἀλλάλας· ὥστε διπλάσιαί ἐντι

Η 50 αἱ ΑΗ, ΑΓ τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τῆς ἐν τῷ τριγώνῳ [τῆς ΑΘ] δίχα τεμνούσας τὴν γωνίαν μείζονες ἐντι ἢ διπλάσιαι· δηλον οὖν, ὅτι, καθ' ὃ συμπίπτει σαιμεῖον τῇ ΓΗ εὐθείᾳ ἡ ΑΘ, μεταξὺ

30 τῶν Θ, Α ἐντι σαιμείων· τέμνει ἄρα ἡ ΕΖ τὴν ἑλικά, ἐπειδὴ

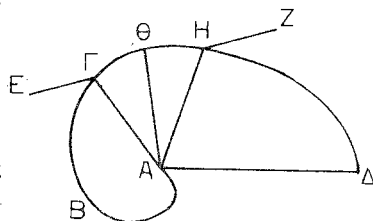
εὐθείας διανύει τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, εἰς ὃν δὲ χρόνον φθάνει ἡ περιφερομένη γραμμὴ ἀπὸ τῆς ΑΓ εἰς τὴν ΑΔ, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διανύει τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. Εἰς ἴσον δὲ χρόνον φθάνει ἡ περιφερομένη γραμμὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εἰς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῆς ΑΓ εἰς τὴν ΑΔ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· εἰς ἴσον ἄρα χρόνον τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας κινούμενον σημεῖον διανύει τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, καὶ τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. Ἰσον ἄρα ὑπερέχει καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ, ὥς καὶ αἱ ὑπόλοιποι.

13

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται τῆς ἑλικος θὰ ἐφάπτηται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἐστω ἑλιξ ἐφ' ἧς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ἔστω δὲ ἀρχὴ μὲν τῆς ἑλικος τὸ σημεῖον Α, ἀρχὴ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ εὐθεῖα ΑΔ, καὶ ἄς ἐφάπτηται τῆς ἑλικος εὐθεῖα τις ἡ ΖΕ. Λέγω ὅτι εἰς ἓν μόνον σημεῖον ἐφάπτεται αὐτῆς.

Διότι ἄς ἐφάπτηται, εἰ δυνατόν, κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Η, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΑΗ, καὶ ἄς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΑΓ, τὸ σημεῖον δὲ ὅπου ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας συναντᾷ τὴν ἑλικά, ἔστω τὸ Θ. Ὑπερέχει λοιπὸν ἡ ΑΗ τῆς ΑΘ ἴσον, ὅσον ὑπερέχει ἡ ΑΘ τῆς ΑΓ, ἐπειδὴ περιέχουσι μεταξύ των ἴσας γωνίας (θ. 12). ὥστε εἶναι  $ΑΗ + ΑΓ = 2 ΑΘ$ . Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι



μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τῆς διχοτόμου [ τῆς ΑΘ ] τῆς γωνίας (ΓΑΗ) τοῦ τριγώνου (ΓΑΗ). εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι, τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ΑΘ συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΓΗ θὰ κῆται μεταξύ τῶν σημείων Θ, Α· τέμνει ἄρα ἡ ΕΖ τὴν ἑλικά, ἐπειδὴ σημείον τι ἐκ τῶν

τι τῶν ἐν τῇ ΓΘΗ σαμείων ἐντός ἐστι τᾶς ἑλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιπαύουσα καθ' ἑν ἄρα μόνον ἄπτεται ἡ ΕΖ τᾶς ἑλικος.

ιδ'

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἑλικά τὰν ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμ-  
 5 μέναν ποτισπесῶντι δύο εὐθειᾶι ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὃ ἐστὶν  
 ἀρχὰ τᾶς ἑλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου  
 κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον αἱ ποτὶ τὰν  
 ἑλικά ποτισπύπτονσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ  
 κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἑλικος καὶ τῶν περάτων  
 10 τᾶν ἐκβληθεισῶν εὐθειῶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων,  
 ἐπὶ τὰ προαγόμενα λαμβανομενῶν τᾶν περιφερειῶν ἀπὸ  
 τοῦ πέρατος τᾶς ἑλικος.

ἔστω ἑλιξ ἡ ΑΒΓΔΕΘ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμ-  
 μένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἑλικος ἔστω τὸ Α σαμεῖον, ἡ δὲ ΘΑ  
 15 εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς ἔστω, καὶ κύκλος ὁ ΘΚΗ ἔστω  
 ὁ πρώτος, ποτισπύπτοντων δὲ ἀπὸ τοῦ Α σαμείου ποτὶ τὰν  
 ἑλικά αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου πε-  
 ριφέρειαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον  
 ἡ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἡ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΗ  
 20 περιφέρειαν.

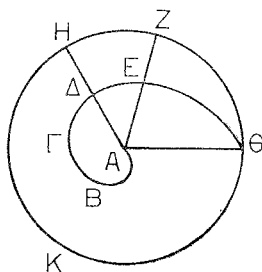
Η 52 περιαγομένης γὰρ τᾶς ΑΘ γραμμᾶς δῆλον, ὥς τὸ μὲν Θ  
 σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείας ἐνηνεγμέ-  
 νον ἐστὶν ἰσοταχέως, τὸ δὲ Α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον  
 τὰν ΑΘ γραμμὰν πορεύεται, καὶ τὸ Θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ  
 25 κύκλου περιφερείας φερόμενον τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν, τὸ  
 δὲ Α τὰν ΑΕ εὐθείαν, καὶ πάλιν τό τε Α σαμεῖον τὰν ΑΔ  
 γραμμὰν καὶ τὸ Θ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν, ἐκάτερον ἰσο-  
 ταχέως αὐτὸ ἐαυτῷ φερόμενον δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔ-  
 χοντι λόγον ἡ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἡ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ

τοῦ τμήματος ΓΘΗ κεῖται ἐντὸς τῆς ἑλικος. Εἶχε δὲ ληφθῆ ὡς ἐφαπτομένη· εἰς ἓν ἄρα μόνον σημεῖον ἐφάπτεται ἡ ΕΖ τῆς ἑλικος.

14

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν προσπέσωσιν ἐκ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἑλικος, δύο εὐθεῖαι, καὶ προεκβληθῶσιν αὗται μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ πρώτου κύκλου, αἱ πρὸς τὴν ἑλικά προσπίπτουσαι εὐθεῖαι θὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τόξα τὰ μεταξὺ τοῦ πέρατος τῆς ἑλικος καὶ τῶν περάτων τῶν προεκβληθεισῶν εὐθειῶν τῶν διηκουσῶν μέχρι τῆς περιφερείας, τῶν τόξων λαμβανομένων ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἑλικος μετὰ διεύθυνσιν καθ' ἣν γράφεται ἡ ἑλιξ.

Ἔστω ἡ ἑλιξ ΑΒΓΔΕΘ γεγραμμένη ἐκ τῆς πρώτης περιφορᾶς, ἀρχὴ δὲ τῆς μὲν ἑλικος ἔστω τὸ σημεῖον Α, ἡ δὲ εὐθεῖα ΘΑ ἔστω ἡ ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, καὶ ἔστω πρῶτος κύκλος ὁ ΘΚΗ, προσπίπτουσαι δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν ἑλικά εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ καταλήγουσαι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΔ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ.



Διότι περιφερομένης τῆς γραμμῆς ΑΘ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μὲν σημεῖον Θ ἔχει διανύσει ἰσοταχῶς τὸ τόξον ΘΚΗ, τὸ δὲ σημεῖον Α κινούμενον εὐθυγράμμως διανύει τὴν γραμμὴν ΑΘ, καὶ τὸ σημεῖον Θ κινούμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου διανύει τὸ τόξον ΘΚΖ, ἐν ᾧ τὸ Α διανύει τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, καὶ πάλιν καὶ τὸ σημεῖον Α διανύει τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΔ καὶ τὸ σημεῖον Θ διανύει τὸ τόξον ΘΚΗ, ἐκάτερον κινούμενον ( εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ) ἰσοταχῶς· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΑΕ πρὸς τὴν

τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν [δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς  
πρώτοις].

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἅ ἑτέρα τῶν ποτιπι-  
πτουσῶν ἐπὶ τὸ πέρας τῆς ἑλικος ποτιπίπτῃ, ὅτι τὸ αὐτὸ  
5 συμβαίνει.

ιε'

Εἰ δὲ κα ποτὶ τὰν ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένην  
ἑλικά ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος, τὸν  
αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρη-  
10 μέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας  
λαμβάνομένας.

ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ ΑΒΓΔΘ, ἡ μὲν ΑΒΓΔΘ ἐν τῇ πρώτῃ  
περιφορᾷ γεγραμμένα, ἡ δὲ ΘΑΕΜ ἐν τῇ δευτέρᾳ, καὶ πο-  
τιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΛ. δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν  
15 ἔχοντι λόγον ἡ ΑΛ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἡ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ'  
ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ ΘΚΗ μεθ' ὅλας τῆς  
τοῦ κύκλου περιφερείας.

ἐν ἴσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ Α σαμεῖον κατὰ τῆς εὐθείας φερόμενον  
τὰν ΑΛ γραμμὴν διαπορεύεται, καὶ τὸ Θ σαμεῖον κατὰ τῆς  
20 τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου  
περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ  
H 54 πάλιν τὸ Α σαμεῖον τὰν ΑΕ εὐθεῖαν καὶ τὸ Θ ὅλαν τε τὰν  
τοῦ κύκλου περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν ΘΚΗ, ἑκάτερον ἰσο-  
ταχέως αὐτὸ ἐαυτῷ φερόμενον· δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν  
25 ἔχοντι λόγον ἡ ΑΛ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἡ ΘΚΖ περι-  
φέρεια μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΚΗ  
περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ποτὶ τὰν ἐν  
τῇ τρίτῃ περιφορᾷ γεγραμμένην ἑλικά ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι,  
30 ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἐξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι



ΑΔ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ [ διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς τὰ προηγούμενα ], ( θεώρ. 2 ).

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι συμβαίνει τὸ αὐτό, ἂν ἡ μία τῶν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν προσπίπτῃ εἰς τὸ πέρασ τῆς ἑλικος.

## 15

Ἐὰν δὲ εὐθεῖαι προσπέσωσιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος εἰς τὴν ἐκ δευτέρας περιφορᾶς γεγραμμένην ἑλικά, θὰ ἔχωσιν τὸν αὐτὸν λόγον αἱ εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἔχουσι τὰ εἰρημένα τόξα εἰς ἑκαστον τῶν ὁποίων ἔχει προστεθῆ ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Ἐστω ἑλιξ ἡ ΑΒΓΔΘ, ἡ μὲν ΑΒΓΔΘ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἡ δὲ ΘΛΕΜ κατὰ τὴν δευτέραν καὶ αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΛ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΑΕ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Διότι εἰς ἴσον χρόνον τὸ σημεῖον Α κινούμενον εὐθυγράμμως διανύει τὴν γραμμὴν ΑΛ, καὶ τὸ σημεῖον Θ κινούμενον κυκλικῶς διανύει ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου σὺν τὸ τόξον ΘΚΖ, καὶ πάλιν τὸ σημεῖον Α διανύει τὴν εὐθεῖαν ΑΕ καὶ τὸ σημεῖον Θ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου σὺν τὸ τόξον ΘΚΗ, ἐκάτερον ἰσοταχῶς ( εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ) διαγράφον τὴν κίνησιν του· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γραμμὴ ΑΛ πρὸς τὴν ΑΕ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἂν εἰς τὴν ἑλικά τὴν γεγραμμένην ἐκ τῆς τρίτης περιφορᾶς προσπέσωσιν εὐθεῖαι, θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἔχουσι τὰ εἰρημένα τόξα



10

15'

Εἴ κα τὰς ἑλικος τὰς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένας  
 15 εὐθεία γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τὰς ἀφ᾽ εὐθεία γραμμὰ  
 ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὃ ἐστὶν ἀρχὴ τὰς ἑλικος, ὥς ποιεῖ  
 γωνίας ἃ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀνίστοι ἐσ-  
 σοῦνται καὶ ἃ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἃ δὲ ἐν  
 τοῖς ἐπομένοις ὀξεῖα.

Η 56 ἔστω ἔλιξ, ἐφ' ἧς τὰ  $A, B, \Gamma, \Delta, \Theta$ , ἐν τῇ πρώτῃ περι-  
 φορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν  $A$  σαμεῖον ἀρχὰ τῆς  
 ἔλικος, ἃ δὲ  $A\Theta$  εὐθεῖα ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς, ὃ τε πρῶτος  
 κύκλος ὁ  $\Theta K H$ , ἐπιφανέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τῆς ἔλι-  
 κος ἃ  $E\Delta Z$  κατὰ τὸ  $\Delta$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Delta$  ἐπὶ τὸ  $A$  ἐπεξεύχθω  
 25 ἃ  $\Delta A$ . δεικτέον, ὅτι ἃ  $\Delta Z$  ποτὶ τὰν  $A\Delta$  ἀμβλείαν ποιεῖ  
 γωνίαν.

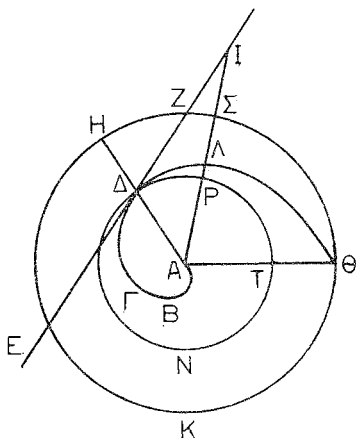
γεγράφθω κύκλος  $\delta$   $\Delta TN$  κέντρω μὲν τῷ  $A$ , διαστήματι  
δὲ τῷ  $AD$ . ἀναγκαῖον δὴ τοῦτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς  
προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἑλικος, τὰν δὲ  
ἐν τοῖς ἐπομένοις ἐκτὸς διὰ τὸ τὰν ἀπὸ τοῦ  $A$  ποτὶ τὰν ἑλικά  
ποτιπιπτονσᾶν εὐθείαν τὰς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μεί-

σὺν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου λαμβανομένην δις· ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τὰς ἐπομένους ἑλικας προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ διανυόμενα τόξα σὺν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου λαμβανομένην τόσας φορές, ὅσας δεικνύει ὁ ἀριθμὸς τῶν περιφορῶν μετὸν ἓν, καὶ ἂν ἀκόμη ἢ μία ἐκ τῶν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν προσπίπτῃ εἰς τὸ πέρας τῆς ἑλικος.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται ἑλικοῦ γεγραμμένης ἐκ τῆς πρώτης περιφορᾶς, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὅποιον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἑλικοῦ, αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀχθείσης εὐθείας θὰ εἶναι ἀνισοὶ καὶ ἡ μὲν προηγούμενη θὰ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἐπομένη θὰ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐστω ἑλιξ, ἐπὶ τῆς ὁποίας  
κεῖνται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Θ,  
γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην πε-  
ριφοράν, καὶ ἔστω τὸ μὲν σημεῖον  
Α ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ εὐθεῖα  
ΑΘ ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, καὶ ὁ  
πρῶτος κύκλος ὁ ΘΚΗ, ὃς ἐφά-  
πτεται δὲ τῆς ἑλικος εὐθεῖά τις  
γραμμὴ ἡ ΕΔΖ κατὰ τὸ Δ, καὶ  
ἀπὸ τοῦ Δ ὡς ἀχθῇ εἰς τὸ Α ἡ εὐθεῖα ΔΑ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι  
ἡ ΔΖ μετὰ τῆς ΑΔ σχηματίζει γωνίαν ἀμβλεῖαν.

Ἡ ὡς γραφῇ ὁ κύκλος ΔΤΝ μὲν κέντρον μὲν τὸ Α, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΔ· εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον τὸ μὲν προηγουμένον τοῦ κύκλου τούτου τόξον νὰ πίπτῃ ἐντὸς τῆς ἑλικος, τὸ δὲ ἐπόμενον νὰ πίπτῃ ἐκτός, διότι ἐκ τῶν ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὴν ἑλικά προσπιπτουσῶν εὐθειῶν αἱ



ζονας εἴμεν τὰς  $ΑΔ$ , τὰς δὲ ἐν τοῖς ἐπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν  $ΑΔΖ$  οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον, ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τὰς τοῦ ἡμικυκλίου, ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἔστι, δεικτέον οὕτως· ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, 5 ὀρθὰ· ἂν ἄρα  $ΕΔΖ$  ἐπιφανύει τοῦ  $ΔΤΝ$  κύκλου. δυνατόν δὴ ἔστιν ἀπὸ τοῦ  $Α$  ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιφανύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τὰς ἐπιφανούσας καὶ τὰς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ μεταξὺ τὰς ἀφ᾽ αὐτῶν καὶ τὰς ποτιπι- 15 πτούσας περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἡ  $ΑΙ$ · τεμεῖ δὴ αὐτὰ τὰν μὲν ἔλικα κατὰ τὸ  $Δ$ , τὰν δὲ τοῦ  $ΔΝΤ$  κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ  $P$ · καὶ ἔχέτω ἡ  $ΡΙ$  εὐθεῖα ποτὶ τὰν  $ΑΡ$  ἐλάσσονα λόγον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  $ΔΡ$  περιφέρεια ποτὶ τὰν  $ΔΝΤ$  περιφέρειαν· καὶ ὅλα ἄρα ἡ 15  $ΙΑ$  ποτὶ τὰν  $ΑΡ$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ  $ΡΔΝΤ$  περιφέρεια ποτὶ τὰν  $ΔΝΤ$  περιφέρειαν, τουτέστιν ὃν ἔχει ἡ  $ΣΗΚΘ$  περιφέρεια ποτὶ τὰν  $ΗΚΘ$  περιφέρειαν. ὃν δὲ ἡ  $ΣΗΚΘ$  περιφέρεια ποτὶ τὰν  $ΗΚΘ$  περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἡ  $ΑΔ$  εὐθεῖα ποτὶ τὰν  $ΑΔ$ · δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λό- 20 γον ἔχει ἡ  $ΑΙ$  ποτὶ τὰν  $ΑΡ$  ἢ περὶ ἡ  $ΑΔ$  ποτὶ τὰν  $ΑΔ$ · ὅπερ ἀδύνατον· ἴσα γὰρ ἡ  $ΡΑ$  τῇ  $ΑΔ$ . οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν  $ΑΔΖ$ . δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἡ λοιπὰ ὀξεῖά ἐστιν.

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ καὶ ἡ ἐπιφανύουσα τὰς ἔλι- 25 κος κατὰ τὸ πέρας ἐπιφανύῃ, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

ιζ'

Καὶ τοίνυν, εἴ καὶ τὰς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέ-  
νας ἔλικος ἐπιφανύῃ ἡ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

ἐπιφανέτω γὰρ ἡ  $ΕΖ$  εὐθεῖα ιᾶς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ

μὲν εἰς τὰ προηγούμενα (τόξα) εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΑΔ, αἱ δὲ εἰς τὰ ἐπόμενα εἶναι μικρότεραι. Ὅτι μὲν λοιπὸν ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ δὲν εἶναι ὀξεῖα, εἶναι φανερόν, ἐπειδὴ εἶναι μεγαλύτερα τῆς γωνίας τῆς βαινούσης ἐπὶ ἡμικυκλίου, ὅτι δὲ δὲν εἶναι ὀρθή, θὰ ἀποδειχθῇ ὡς ἐξῆς· διότι ἔστω, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ὅτι εἶναι ὀρθή· ἡ ΕΔΖ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΔΤΝ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 16, πόρ.). Εἶναι λοιπὸν δυνατόν ἀπὸ τοῦ Α νὰ προεκβάλωμεν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου νὰ ἔχη μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τῆς προσπιπτούσης τόξον, πρὸς τὸ δοθὲν τόξον (θ. 5). Ἄς προεκβληθῇ λοιπὸν μέχρι τῆς ἐφαπτομένης ἡ ΑΙ· θὰ τμήσῃ λοιπὸν αὕτη τὴν μὲν ἔλικα κατὰ τὸ Α, τὴν δὲ περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΔΝΤ κατὰ τὸ Ρ· καὶ ἄς ἔχη ἡ εὐθεῖα ΡΙ πρὸς τὴν ΑΡ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ τόξον ΔΡ πρὸς τὸ τόξον ΔΝΤ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΙΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΡΔΝΤ πρὸς τὸ τόξον ΔΝΤ, τουτέστι μικρότερον τοῦ ὃν ἔχει τὸ τόξον, ΣΗΚΘ πρὸς τὸ τόξον ΗΚΘ. Ὅν δὲ λόγον ἔχει τὸ τόξον ΣΗΚΘ πρὸς τὸ τόξον ΗΚΘ, τοῦτον ἔχει ἡ εὐθεῖα ΑΑ πρὸς τὴν ΑΔ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 14)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΑΙ πρὸς τὴν ΑΡ τοῦ λόγου τῆς ΑΑ πρὸς ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἡ ΡΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ (Εὐκλ. V, 8). Δὲν εἶναι ἄρα ὀρθή ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ. Ἀπεδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὀξεῖα· εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα. Ὡστε ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ὀξεῖα.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι θὰ συμβαίνει τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἔλικος ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρας αὐτῆς.

## 17

Καὶ πάλιν τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς ἔλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν.

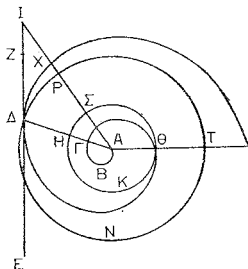
Διότι ἄς ἐφάπτηται ἡ εὐθεῖα ΕΖ τῆς κατὰ τὴν δευτέραν περιφο-

γεγραμμένας ἑλικος κατὰ τὸ  $\Delta$ , καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς  
 πρότερον κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ τὰς τοῦ  $P\Delta$  κύκλου  
 περιφερείας τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τὰς ἑλικος ἐντὸς  
 πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἐπομένοις ἐκτός· ἂ οὐν γωνία ἂ  
 5 ὑπὸ τῶν  $\Delta\Delta Z$  οὐκ ἔστιν ὀρθή, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γάρ, εἰ  
 δυνατόν, ὀρθά· ἐπιπαύσει δὴ ἂ  $EZ$  τοῦ  $P\Delta$  κύκλου κατὰ  
 τὸ  $\Delta$ . ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὴν ἐπιπαύουσαν ἂ  $AI$  καὶ τεμ-  
 Η 60 νέτω τὴν μὲν ἑλικά κατὰ τὸ  $X$ , τὴν δὲ τοῦ  $P\Delta$  κύκλου πε-  
 ριφέρειαν κατὰ τὸ  $P$ , ἐχέτω δὲ ἂ  $PI$  ποτὶ  $PA$  ἐλάσσονα λό-  
 10 γον τοῦ, ὃν ἔχει ἂ  $\Delta P$  περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὴν τοῦ  $\Delta P\Delta$   
 κύκλου περιφέρειαν καὶ [ποτὶ] τὴν  $\Delta NT$ · δέδεικται γὰρ τοῦτο  
 δυνατόν ἐόν· καὶ ὅλα ἄρα ἂ  $IA$  ποτὶ τὴν  $AP$  ἐλάσσονα λόγον  
 ἔχει ἢ ἂ  $P\Delta NT$  περιφέρεια μεθ' ὅλας τὰς τοῦ κύκλου περι-  
 φερείας ποτὶ τὴν  $\Delta NT$  περιφέρειαν μεθ' ὅλας τὰς τοῦ κύ-  
 15 κλου περιφερείας. ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἂ  $P\Delta NT$  περιφέρεια  
 μεθ' ὅλας τὰς τοῦ  $\Delta NTP$  κύκλου περιφερείας ποτὶ τὴν  $\Delta NT$   
 περιφέρειαν μεθ' ὅλας τὰς τοῦ  $\Delta NTP$  κύκλου περιφερείας,  
 τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἂ  $\Sigma HK\Theta$  περιφέρεια μεθ' ὅλας τὰς  
 τοῦ κύκλου περιφερείας τὰς  $\Theta\Sigma HK$  ποτὶ τὴν  $HK\Theta$  περιφέρειαν  
 20 μεθ' ὅλας τὰς τοῦ  $\Theta\Sigma HK$  κύκλου περιφερείας, ὃν δὲ λόγον  
 ἔχοντι αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν  
 λόγον ἂ  $XA$  εὐθεῖα ποτὶ τὴν  $\Delta\Delta$  εὐθεῖαν· δέδεικται γὰρ τοῦτο·  
 ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἂ  $IA$  ποτὶ τὴν  $AP$  ἢ ἂ  $AX$  ποτὶ  
 τὴν  $\Delta\Delta$ · ὅπερ ἀδύνατον [ἴση μὲν γὰρ ἢ  $PA$  τῇ  $\Delta\Delta$ , μείζων  
 25 δὲ ἢ  $IA$  τῇς  $AX$ ]. δῆλον οὖν, ὅτι ἀμβλεῖα ἔστιν ἂ περιεχο-  
 μένα ὑπὸ τῶν  $\Delta\Delta Z$ · ὥστε ἂ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστί.

τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται, καὶ εἴ κα ἂ ἐπιπαύουσα κατὰ τὸ  
 πέρας τὰς ἑλικος ἐπιπαύῃ.

Η 62 ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα τὰς ἐν ὁποιοῦν περι-  
 30 φορᾷ γεγραμμένας ἑλικος ἐπιπαύῃ τις εὐθεῖα, καὶ εἴ κα

ράν γεγραμμένης ἑλικος κατὰ τὸ Δ, καὶ τὰ ἄλλα ὡς κατασκευασθῶσι  
 ὥς καὶ προηγουμένως (θ. 16). Ὁμοίως λοιπὸν τὰ μὲν προηγούμενα  
 τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΡΝΔ θὰ πέσωσιν ἐντὸς τῆς ἑλικος, τὰ δὲ  
 ἐπόμενα ἐκτός· ἡ γωνία λοιπὸν ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ δὲν  
 εἶναι ὀρθή, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι ὀρθή· θὰ  
 ἐφάπτεται λοιπὸν ἡ ΕΖ τοῦ κύκλου ΡΝΔ  
 κατὰ τὸ Δ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 16, πόρ.). Ἀς ἀ-  
 χθῇ λοιπὸν πάλιν μέχρι τῆς ἐφαπτομέ-  
 νης ἢ ΑΙ καὶ ὡς τέμνη τὴν μὲν ἑλικά κατὰ  
 τὸ Χ, τὴν δὲ περιφέρειαν τοῦ κύκλου  
 ΡΝΔ κατὰ τὸ Ρ, ὡς ἕχη δὲ ἡ ΡΙ πρὸς τὴν  
 ΡΑ μικρότερον λόγον ἐκεῖνου, τὸν ὅποιον  
 ἔχει τὸ τόξον ΔΡ πρὸς ὅλην τὴν περιφέ-  
 ρειαν τοῦ κύκλου ΔΡΝ σὺν τὸ τόξον ΔΝΤ· διότι ἀπεδείχθη, ὅτι τοῦτο  
 εἶναι δυνατόν (θ. 5)· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΙΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον  
 λόγον ἢ τὸ τόξον ΡΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς  
 τὸ τόξον ΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ἄλλ' ὃν λόγον  
 ἔχει τὸ τόξον ΡΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΔΝΤΡ  
 πρὸς τὸ τόξον ΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΔΝΤΡ,  
 τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τόξον ΣΗΚΘ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν  
 τοῦ κύκλου ΘΣΗΚ πρὸς τὸ τόξον ΗΚΘ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν  
 τοῦ κύκλου ΘΣΗΚ, ὃν δὲ λόγον ἔχουσι τὰ ὕστερον λεχθέντα τόξα,  
 τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἢ εὐθεΐα ΧΑ πρὸς τὴν εὐθεΐαν ΑΔ· διότι τοῦτο  
 ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 15)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἢ ΙΑ πρὸς τὴν  
 ΑΡ ἢ ἡ ΑΧ πρὸς τὴν ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον [διότι ἡ μὲν ΡΑ εἶναι ἴση  
 πρὸς τὴν ΑΔ, εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἢ ΙΑ τῆς ΑΧ]. Εἶναι λοιπὸν φα-  
 νερόν, ὅτι ἡ γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ εἶναι ἀμβλεῖα·  
 ὥστε ἡ ὑπόλοιπος θὰ εἶναι ὀξεῖα.



Τὰ αὐτὰ δὲ θὰ συμβῶσιν, καὶ ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρασ τῆς ἑλικος.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτηται ἑλικοῦ γεγραμμένης καθ' οἷανδ' ἵπποτε περιφορὰν, ἢ ἀκόμη

κατὰ τὸ πέρασ αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἀφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἐπομένοις ὀξεῖαν.

5

τη'

Εἴ κα τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένης εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιφανῆ κατὰ τὸ πέρασ τᾶς ἑλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὃ ἐστὶν ἀρχὰ τᾶς ἑλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τῇ ἀρχῇ τᾶς περιφορᾶς, ἃ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἐπιφανού-  
10 σα, καὶ ἃ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιφανούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἑλικος ἴσα ἐσσεῖται τῇ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ.

ἔστω ἑλιξ ἃ ΑΒΓΔΘ, ἔστω δὲ τὸ Α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἑλικος, ἃ δὲ ΘΑ γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ὃ δὲ ΘΗΚ κύ-  
κλος ὃ πρώτος, ἐπιφανέτω δὲ τις τᾶς ἑλικος κατὰ τὸ Θ ἃ  
15 ΘΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τῇ ΘΑ ἃ ΑΖ· συμπε-  
σεῖται δὴ αὐτὰ ποτὶ τὰν ΘΖ, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΘΑ ὀξεῖαν γω-  
νίαν περιέχοντι. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. δεικτέον, ὅτι ἃ ΖΑ ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείᾳ.

εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον,  
20 εἰ δυνατόν, μείζων. ἔλαβον δὴ τινα εὐθεῖαν τὰν ΑΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας  
H 64 μείζονα. ἔστιν δὴ κύκλος τις ὃ ΘΗΚ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἃ ΘΗ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἃ ΘΑ ποτὶ ΑΔ, μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἃ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ  
25 τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένην, διότι καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἃ ΘΑ ποτὶ ΑΖ· δυνατόν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημένην τὰν ΑΝ, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφε-  
ρείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένης τὰν ΝΡ ποτὶ ΘΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἃ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΑ· ἔξει οὖν ἃ ΝΡ ποτὶ τὰν  
30 ΡΑ λόγον, ὃν ἃ ΘΡ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΑ. ἃ δὲ ΘΡ ποτὶ τὰν ΑΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἃ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ



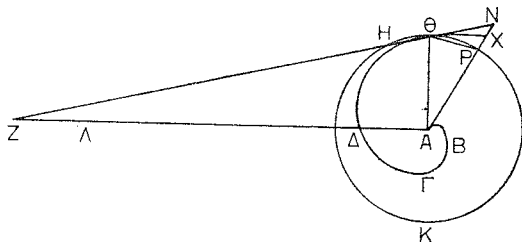
ἐφάπτεται εἰς τὸ πέρασ αὐτῆς, ὅτι ἀνίσους θὰ σχηματίσῃ τὰς γωνίας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθεῖσαν πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἑλικος καὶ τὴν μὲν προηγούμενην ἀμβλεῖαν, τὴν δὲ ἐπομένην ὀξεῖαν.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτεται εἰς τὸ πέρασ τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, τὸ ὅποιον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἑλικος ἀχθῇ κάθετος εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, ἡ ἀχθεῖσα θὰ συναντήσῃ τὴν ἐφαπτομένην, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ πρώτου κύκλου.

Ἐστω ἑλιξ ἡ ΑΒΓΔΘ, ἔστω δὲ τὸ σημεῖον Α ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ ΘΑ γραμμὴ ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, πρῶτος δὲ κύκλος ὁ ΘΗΚ, ὃς ἐφάπτεται δὲ τῆς ἑλικος κατὰ τὸ Θ εὐθεῖά τις ἡ ΘΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ὃς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΑ ἡ ΑΖ· θὰ συναντήσῃ δὲ αὕτη τὴν ΘΖ, ἐπειδὴ αἱ ΖΘ, ΘΑ σχηματίζουν γωνίαν ὀξεῖαν (θ. 16, Εὐκλ. Ι, αἵτ. 5). Ἄς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Ζ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΚΗ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα. Ἐστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλυτέρα. Λαμβάνω τώρα εὐθεῖάν τινα τὴν ΑΑ μικροτέραν μὲν τῆς εὐθείας ΖΑ, μεγαλυτέραν δὲ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ (θ. 4). Ὑπάρχει λοιπὸν κύκλος τις ὁ ΘΗΚ καὶ εἰς τὸν κύκλον χορδὴ ἡ ΘΗ μικροτέρα τῆς διαμέτρου καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς ΑΑ μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἡμισυ τῆς ΗΘ πρὸς τὴν ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν κάθετον, διότι ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι μεγαλύτερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς ΑΖ· εἶναι λοιπὸν δυνατόν ἀπὸ τοῦ Α νὰ προεκβληθῇ εὐθεῖα πρὸς τὴν προέκτασιν (τῆς ΖΘ) ἡ ΑΝ, ὥστε ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἐκβεβλημένης ἡ ΝΡ πρὸς τὴν ΘΡ νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΑ (θ. 7)· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΝΡ πρὸς τὴν ΡΑ, λόγον, ὃν ἔχει ἡ εὐθεῖα ΘΡ πρὸς τὴν ΑΑ. Ἡ δὲ ΘΡ πρὸς τὴν ΑΑ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύ-

ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ἡ μὲν γὰρ ΘΡ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἡ δὲ ΑΛ εὐθεῖα τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζων· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔξει καὶ ἡ ΝΡ

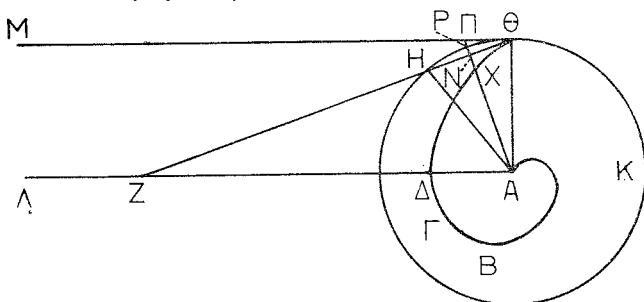


5 ποτὶ  $PA$  ἢ ἂ  $\Theta P$  περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ  $\Theta HK$  κύκλου περι-  
 10 φέρειαν· καὶ ὅλα οὖν ἂ  $NA$  ποτὶ τὰν  $AP$  ἐλάσσονα λόγον  
 ἔχει ἢ περ ἂ  $\Theta P$  περιφέρεια μεθ' ὅλας τὰς τοῦ κύκλου περι-  
 φερείας ποτὶ τὰν τοῦ  $\Theta HK$  κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λό-  
 γον ἔχει ἂ  $\Theta P$  περιφέρεια μεθ' ὅλας τὰς τοῦ  $\Theta HK$  κύκλου  
 περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ  $\Theta HK$  κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον  
 15 ἔχει ἂ  $XA$  ποτὶ τὰν  $A\Theta$ · δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα  
 λόγον ἔχει ἂ  $NA$  ποτὶ τὰν  $AP$  ἢ περ ἂ  $XA$  ποτὶ τὰν  $A\Theta$ · ὅπερ  
 ἀδύνατον· ἂ μὲν γὰρ  $NA$  μείζων ἐστὶ τῆς  $AX$ , ἂ δὲ  $AP$  ἴσα  
 ἐστὶ τῇ  $\Theta A$ . οὐκ ἄρα μείζων ἂ  $ZA$  τῆς τοῦ κύκλου περιφε-  
 ρείας τοῦ  $\Theta HK$ .

15 ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσωσιν ἡ  $ZA$  τὰς τοῦ  $\Theta HK$   
κύκλου περιφερείας. ἔλαβον δὴ τινα εὐθεΐαν πάλιν τὴν  $AA$   
τὰς μὲν  $AZ$  μείζονα, τὰς δὲ τοῦ  $\Theta HK$  κύκλου περιφερείας  
H 66 ἐλάσσωσιν, καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  τὴν  $\Theta M$  παράλληλον τῇ  $AZ$ .  
πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ  $\Theta HK$  καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσωσιν γραμ-  
20 μὰ τὰς διαμέτρους ἡ  $\Theta H$  καὶ ἄλλα ἐπιφανέουσα τοῦ κύκλου  
κατὰ τὸ  $\Theta$  καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἡ  $A\Theta$  ποτὶ τὴν  $AA$ , ἐλάσσωσιν  
τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἡμίσεια τὰς  $H\Theta$  ποτὶ τὴν ἀπὸ τοῦ  $A$  κάθετον  
ἐπ' αὐτὴν ἀγμένην, ἐπειδὴ καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  $\Theta A$  ποτὶ  $AZ$ ,  
ἐλάσσωσιν ἐστὶ· δυνατόν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ  $A$  ἀγαγεῖν τὴν  
25  $AP$  ποτὶ τὴν ἐπιφανέουσαν, ὥστε τὴν  $PN$  τὴν μεταξὺ τὰς

κλου ΘΗΚ· διότι ἡ μὲν εὐθεΐα ΘΡ εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου ΘΡ, ἡ δὲ εὐθεΐα ΑΑ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ· θα ἔχη λοιπὸν μικρότερον λόγον καὶ ἡ ΝΡ πρὸς ΡΑ ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ· καὶ ὅλη λοιπὸν ἡ ΝΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΘΡ σὺν ὅλῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ. Ὁν δὲ λόγον ἔχει τὸ τόξον ΘΡ σὺν ὅλῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ, τοῦτον ἔχει ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΑΘ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 15)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΝΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΑΘ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἡ μὲν ΝΑ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΧ, ἡ δὲ ΑΡ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΑ. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΖΑ μεγαλυτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ.

Ἐστω τώρα πάλιν, εἰ δυνατόν, ἡ ΖΑ μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ. Λαμβάνω πάλιν εὐθεῖαν τινὰ τὴν ΑΛ μεγαλυτέραν μὲν τῆς ΑΖ, μικροτέραν δὲ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ καὶ φέρω ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΖ. Ὑπάρχει λοιπὸν πάλιν ὁ κύκλος ΘΗΚ καὶ εἰς αὐτὸν χορδὴ μικροτέρα τῆς διαμέτρου ἢ ΘΗ καὶ ἄλλη ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Θ καὶ λόγος, ὃν



ἔχει ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΑΔ, μικρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ΗΘ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἐπειδὴ εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς ΑΖ· εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ἡ εὐθεῖα ΑΠ,

ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας καὶ τᾷς περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΠ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾷς ἐπιφανούσας τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· τεμεῖ δὴ ἡ ΑΠ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὰν δὲ ἑλικά κατὰ τὸ Χ· καὶ ἕξει καὶ ἐναλλάξ  
 5 τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΝΡ ποτὶ ΡΑ, ὃν ἡ ΘΠ ποτὶ ΑΛ. ἡ δὲ ΘΠ ποτὶ τὰν ΑΛ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ἡ μὲν γὰρ ΘΠ εὐθεῖα μείζων ἐστὶν τᾷς ΘΡ περιφερείας, ἡ δὲ ΑΛ ἐλάσσων τᾷς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΠΡ  
 10 ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἡ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ὥστε καὶ ἡ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἡ ΘΑ εὐθεῖα ποτὶ τὰν  
 15 ΑΧ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ ἢ ἡ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΧ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ΖΑ τᾷς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περι-  
 Η 68 φερείας· ἴσα ἄρα.

ιθ'

20 Εἰ δέ κα τᾷς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἑλικας κατὰ τὸ πέρας ἐπιφανῆ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾷς ἀρχῆς τᾷς ἑλικας ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τῇ ἀρχῇ τᾷς περιφορᾷς, συμπεσεῖται αὐτα ποτὶ τὰν ἐπιφανούσαν, καὶ ἐσσεῖται ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τᾷς ἐπιφανούσας καὶ τᾷς ἀρχῆς τᾷς ἑλικας διπλασία  
 25 τᾷς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας.

ἔστω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΘ ἑλιξ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἡ δὲ ΘΕΤ ἐν τῇ δευτέρᾳ, καὶ ὁ μὲν ΘΚΗ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ ΤΜΝ ὁ δεύτερος, ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιφανούσα τᾷς ἑλικας κατὰ τὸ Τ ἡ ΤΖ, ἡ δὲ ΖΑ ποτ' ὀρθὰς  
 30 ἄχθῳ τῇ ΤΑ· συμπεσεῖται δὲ αὐτα τῇ ΤΖ διὰ τὸ δεδειχθαι τὰν γωνίαν ὀξείαν εἶναι τὰν ὑπὸ τᾷν ΑΤΖ. δεικτέον, ὅτι ἡ ΖΑ εὐθεῖα διπλασία ἐντὶ τᾷς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας.

ὥστε ἡ PN ἡ κειμένη μεταξὺ τῆς εἰς τὸν κύκλον εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν ΘΠ, ἣτις ἀπομένει ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης νὰ ἔχη τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΛ (θ. 8). θὰ τμήσῃ λοιπὸν ἡ ΑΠ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὴν δὲ ἔλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ θὰ ἔχη καὶ ἐναλλάξ (Εὐκλ. V, 16) τὸν αὐτὸν λόγον ἡ NP πρὸς ΡΑ, ὃν ἔχει ἡ ΘΠ πρὸς ΑΛ. Ἡ δὲ ΘΠ πρὸς τὴν ΑΛ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ· διότι ἡ μὲν εὐθεῖα ΘΠ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τόξου ΘΡ, ἡ δὲ ΑΛ εἶναι μικρότερα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ· ἔχει ἄρα μεγαλύτερον λόγον ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ· ὥστε καὶ ἡ ΡΑ πρὸς τὴν ΑΝ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ΘΗΚ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΡ. Ὁν δὲ λόγον ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ΘΗΚ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΡ, τοῦτον ἔχει ἡ εὐθεῖα ΘΑ πρὸς τὴν ΑΧ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 14)· ἔχει ἄρα μεγαλύτερον λόγον ἡ ΡΑ πρὸς τὴν ΑΝ ἢ ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΧ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερα οὕτε μικρότερα ἡ ΖΑ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ· εἶναι ἄρα ἴση.

19

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρας ἔλικος γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν, καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἔλικος ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, θὰ συναντήσῃ αὕτη τὴν ἐφαπτομένην, καὶ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἔλικος διπλασία τῆς περιφερείας τοῦ δευτέρου κύκλου.

Διότι ἔστω ἡ μὲν ἑλιξ ΑΒΓΘ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν, ἡ δὲ ΘΕΤ κατὰ τὴν δευτέραν, καὶ ὁ μὲν κύκλος ΘΚΗ ὁ πρῶτος, ὁ δὲ TMN ὁ δεύτερος, ἔστω δὲ ἐφαπτομένη τῆς ἔλικος κατὰ τὸ σημεῖον Τ ἡ TZ, ἃς ἀχθῇ δὲ ἡ ΖΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΤΑ· θὰ συναντήσῃ δὲ αὕτη τὴν TZ διότι ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ γωνία τῶν ΑΤ, TZ εἶναι ὀξεῖα (θ. 17). Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι διπλασία τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN.

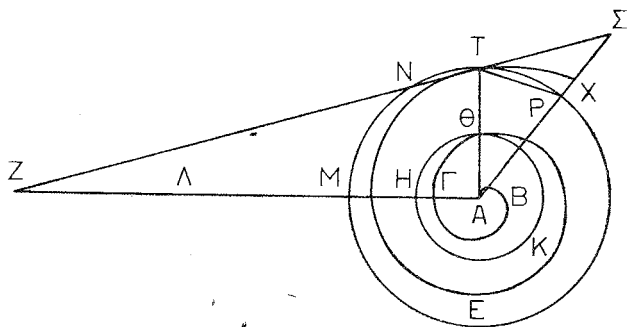
εἰ γὰρ μὴ ἔστιν διπλασία, ἤτοι μείζων ἔστιν ἢ διπλασία ἢ ἐλάσσων ἔστιν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ διπλασία, καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα ἡ  $AA$  τᾶς μὲν  $ZA$  εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ  $TMN$  κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἔστιν δὴ τις κύκλος ὁ  $TMN$  καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ δεδομένα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἡ  $TN$ , καὶ ὃν ἔχει ἡ  $TA$  ποτὶ τὰν  $AA$ , μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἡμίσεια τᾶς  $TN$  ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ  $A$  κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένην· δυνατόν οὖν ἔστιν ἀπὸ τοῦ  $A$  ποτιβαλεῖν τὰν  $AS$  ποτὶ τὰν  $TN$  H 70 ἐκβεβλημένην, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένης τὰν  $PS$  ποτὶ τὰν  $TP$  τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἡ  $TA$  ποτὶ τὰν  $AA$ · τεμεῖ δὴ ἡ  $AS$  τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ  $P$ , τὰν δὲ ἑλικά κατὰ τὸ  $X$ · καὶ ἐναλλάξ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ἡ  $PS$  ποτὶ τὰν  $TA$ , ὃν ἡ  $TP$  ποτὶ τὰν  $AA$ . ἡ δὲ  $TP$  15 ποτὶ τὰν  $AA$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ  $TP$  περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ  $TMN$  κύκλου περιφέρειαν· ἔστιν γὰρ ἡ μὲν  $TP$  εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς  $TP$  περιφερείας, ἡ δὲ  $AA$  εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ  $TMN$  κύκλου περιφερείας· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ  $PS$  ποτὶ τὰν  $AP$  ἢ ἡ  $TP$  περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ  $TMN$  κύκλου περιφερείας· ὅλα οὖν ἡ  $SA$  ποτὶ τὰν  $AP$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ  $TP$  περιφέρεια μετὰ τᾶς τοῦ  $TMN$  κύκλου περιφερείας δις εἰρημένης ποτὶ τὰν τοῦ  $TMN$  κύκλου περιφέρειαν δις εἰρημένην. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον 25 ἔχει τὸν λόγον ἡ  $XA$  ποτὶ τὰν  $AT$ · δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ  $AS$  ποτὶ τὰν  $AP$  ἢ ἡ  $XA$  ποτὶ τὰν  $TA$ · ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἔστιν ἢ διπλασία ἡ  $ZA$  εὐθεῖα τᾶς τοῦ  $TMN$  κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ διπλασία. δηλὸν οὖν, ὅτι 30 διπλασία ἔστιν.

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον, καὶ εἴ κα τᾶς ἐν ὁποιᾷ οὖν περιφορᾷ γεγραμμένης ἑλίκος ἐπιπαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι διπλασία, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διπλασίας ἢ μικροτέρα τῆς διπλασίας. Ἐστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλυτέρα τῆς διπλασίας καὶ ἄς ληφθῇ εὐθεῖα τις ἡ ΑΑ τῆς μὲν εὐθείας ΖΑ μικροτέρα, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ διπλασίου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN (θ. 4). Ὑπάρχει λοιπὸν κύκλος ὁ TMN καὶ εἰς τὸν κύκλον γραμμὴ (χορδὴ) δεδομένη ἡ TN μικροτέρα τῆς διαμέτρου, καὶ ὑπάρχει λόγος ὃν ἔχει ἡ ΤΑ πρὸς τὴν ΑΑ, μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς TN πρὸς τὴν ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν κάθετον· εἶναι λοιπὸν δυνατόν νὰ προσεκβληθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΣ πρὸς τὴν προέκτασιν τῆς TN, ὥστε ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς προσεκταθείσης ἡ ΡΣ πρὸς τὴν TP νὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΤΑ πρὸς τὴν ΑΑ· θὰ τμήσῃ δὲ ἡ ΑΣ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὴν δὲ ἑλίκαν κατὰ τὸ Χ· καὶ ἐναλλάξ θὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΡΣ πρὸς τὴν ΤΑ, ὃν ἔχει ἡ TP πρὸς τὴν ΑΑ (Εὐκλ. V, 16). Ἡ δὲ TP πρὸς τὴν ΑΑ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον TP πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN· διότι ἡ μὲν χορδὴ TP εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου TP, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΑ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΡΣ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ τὸ τόξον TP πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN· ὅλη λοιπὸν ἡ ΣΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον TP σὺν τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN. Ὅν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΑΤ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 15)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΤΑ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΑ μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου TMN. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα τοῦ διπλασίου. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι διπλασία.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν εὐθεῖα τις ἐφάπτηται ἑλίκος εἰς τὸ πέρας αὐτῆς, γεγραμμένης καθ' οἷανδῆποτε

τὸ πέρας τὰς ἑλικος, καὶ ἀπὸ τὰς ἀρχᾶς τὰς ἑλικος ποτ' ὁρθὰς ἀχθεῖσα τῇ ἀρχῇ τὰς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιπυάνουσαν, ὅτι πολλαπλασία ἐστὶν τὰς τοῦ κύκλου πε-



ριφερείας τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου  
<sup>5</sup> τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.

 $\kappa'$ 

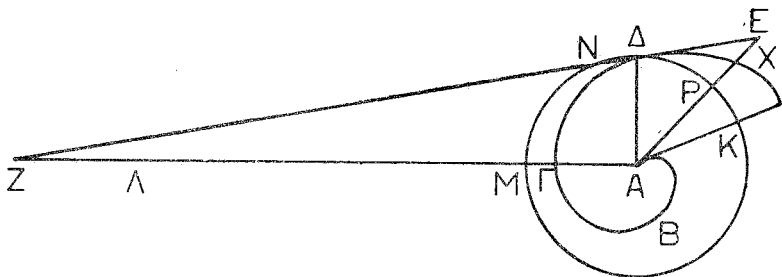
Εἰ κα τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμέ-  
 νας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιπαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρασ τᾶς ἑλικος,  
 ἀπὸ δὲ τᾶς ἀφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ,  
 10 καὶ κέντρον μὲν τὰ ἀρχῇ τᾶς ἑλικος, διαστήματι δὲ τῇ  
 ἐπιζευχθείσῃ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἑλικος  
 ἀχθῇ τις ποτ' ὁρθὰς τῇ ἀπὸ τᾶς ἀφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς  
 ἑλικος ἐπιζευχθείσῃ, συμπεσεῖται αὐτὰ ποτὶ τὰν ἐπιπαύου-  
 σαν, καὶ ἑσσεῖται ἡ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ  
 15 τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἑλικος ἴσα τῇ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύ-  
 κλου τῇ μεταξὺ τᾶς ἀφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ἃν τέμνει  
 ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς, ἐπὶ τὰ προα-  
 γούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου  
 τοῦ ἐν τῇ ἀρχῇ τᾶς περιφορᾶς.

20 ἔστω ἔλιξ, ἐφ' ἧς ἡ  $AB\Gamma\Delta$ , ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γε-  
γραμμένα, καὶ ἐπιφανέτω τις αὐτῆς εὐθεῖα ἡ  $EZ$  κατὰ τὸ  $\Delta$ ,  
ἀπὸ δὲ τοῦ  $\Delta$  ποτὶ τὰν ἀογὰν τῆς ἑλικος ἐπεξεύχθω ἡ  $AA$ , καὶ



περιφοράν, καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος εὐθεῖα ἀγομένη κάθετος συναντᾷ τὴν ἐφαπτομένην, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ἀχθείσης καθέτου εἶναι πολλαπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὃ ὅποῖος ὀνομάζεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δι' οὗ καὶ αἱ περιφοραί, κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτεται ἑλικοῦ γεγραμμένης κατὰ τὴν πρῶτην περιφορὰν, ὅχι εἰς τὸ πέρας τῆς ἑλικοῦ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικοῦ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς ἑλικοῦ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν γραφῇ κύκλος, ἀπὸ δὲ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα τις κάθετος πρὸς τὴν ἀχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς μέχρι τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικοῦ, θὰ συναντήσῃ αὕτη τὴν ἐφαπτομένην καὶ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς συναντήσεως καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικοῦ ἴση πρὸς τὸ τόξον τοῦ γραφέντος κύκλου τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τῆς τομῆς, καθ' ἣν ὁ γραφεὶς κύκλος τέμνει τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν τῆς περιφορᾶς,



τοῦ τόξου λογιζομένου ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς τοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν περιφορᾶς καὶ ἐξῆς (κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν περιφορῶν).

Ἔστω ἔλιξ, τῆς ὁποίας τμήμα εἶναι ἡ ΑΒΓΔ, γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, καὶ ἃς ἐφάπτεται αὐτῆς εὐθεῖα τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Δ, ἃς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἔλικος ἡ ΑΔ,

κέντρῳ μὲν τῷ  $A$ , διαστήματι δὲ τῷ  $ΑΔ$  κύκλος γεγραφθῶ  
ὁ  $ΔΜΝ$ , τεμνέτω δ' οὗτος τὰν ἀρχάν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ  
 $K$ , ἄχθῳ δὲ ἡ  $ΖΑ$  ποτὶ τὰν  $ΑΔ$  ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτὰ συμπί-  
πτει, δῆλον· ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἡ  $ΖΑ$  εὐθεΐα τῇ  $ΚΜΝΔ$

5 περιφερείᾳ, δεικτέον.

Η 74 εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω, εἰ δυνα-  
τόν, πρότερον μείζων, λελάφθῳ δὲ τις ἡ  $ΑΑ$  τᾶς μὲν  $ΖΑ$   
εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ  $ΚΜΝΔ$  περιφερείας μείζων. πάλιν  
δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ  $ΚΜΝ$  καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσ-  
10 σων τᾶς διαμέτρου ἡ  $ΔΝ$  καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἡ  $ΔΑ$  ποτὶ  $ΑΔ$ ,  
μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἡμίσεια τᾶς  $ΔΝ$  ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ  $A$   
κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένην· δυνατόν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ  $A$   
ποτιβαλεῖν τὰν  $ΑΕ$  ποτὶ τὰν  $ΝΔ$  ἐκβεβλημένην, ὥστε τὰν  
 $ΕΡ$  ποτὶ τὰν  $ΔΡ$  τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἡ  $ΔΑ$  ποτὶ τὰν  
15  $ΑΔ$ · δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατόν εἶν· ἔξει οὖν καὶ ἡ  $ΕΡ$   
ποτὶ τὰν  $ΑΡ$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ  $ΔΡ$  ποτὶ τὰν  $ΑΔ$ . ἡ δὲ  
 $ΔΡ$  ποτὶ τὰν  $ΑΔ$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ  $ΔΡ$  περιφέρεια  
ποτὶ τὰν  $ΚΜΔ$  περιφέρειαν, ἐπεὶ ἡ μὲν  $ΔΡ$  ἐλάσσων ἐστὶ  
τᾶς  $ΔΡ$  περιφερείας, ἡ δὲ  $ΑΔ$  μείζων τᾶς  $ΚΜΔ$  περιφε-  
20 ρείας· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἡ  $ΕΡ$  εὐθεΐα ποτὶ  $ΡΑ$  ἢ ἡ  $ΔΡ$   
περιφέρεια ποτὶ τὰν  $ΚΜΔ$  περιφέρειαν· ὥστε καὶ ἡ  $ΑΕ$   
ποτὶ  $ΑΡ$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ  $ΚΜΡ$  περιφέρεια ποτὶ τὰν  
 $ΚΜΔ$  περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ  $ΚΜΡ$  ποτὶ τὰν  $ΚΜΔ$   
περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἡ  $ΧΑ$  ποτὶ  $ΑΔ$ · ἐλάσσονα ἄρα λό-  
25 γον ἔχει ἡ  $ΕΑ$  ποτὶ  $ΑΡ$  ἢ ἡ  $ΑΧ$  ποτὶ  $ΔΑ$ · ὅπερ ἐστὶν ἀδύνα-  
τον. οὐκ ἄρα μείζων ἡ  $ΖΑ$  τᾶς  $ΚΜΔ$  περιφερείας. ὁμοίως  
δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν· ἴσα ἄρα.

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἰ καὶ τᾶς ἐν τῇ  
δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένης ἑλικος ἐπιφανῆ εὐθεΐα μὴ  
30 κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἑλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευα-  
σθέντων, ὅτι ἡ μεταξὺ εὐθεΐα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιφανούνσαν  
Η 76 συμπτώσειος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἑλικος ἴσα ἐστὶν ὅλα τῇ τοῦ

καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Α, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΔ ἃς γραφῇ κύκλος ὁ ΔΜΝ, ἃς τέμνη δὲ οὗτος τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς κατὰ τὸ Κ, ἃς ἀχθῇ δὲ ἡ ΖΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. "Οτι μὲν λοιπὸν αὕτη συναντᾷ τὴν ἐφαπτομένην εἶναι φανερόν· ὅτι δὲ ἡ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι καὶ ἴση πρὸς τὸ τόξον ΚΜΝΔ πρέπει νὰ δειχθῇ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα. Ἐστω πρῶτον, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μεγαλυτέρα, ἃς ληθῇ δὲ εὐθεῖα τις ἡ ΑΑ τῆς μὲν εὐθείας ΖΑ μικροτέρα, τοῦ δὲ τόξου ΚΜΝΔ μεγαλυτέρα (θ. 4). Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχει κύκλος ὁ ΚΜΝ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἡ χορδὴ ΔΝ μικροτέρα τῆς διαμέτρου καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΑ, μεγαλύτερος τοῦ λόγου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ΔΝ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν ἐπ' αὐτὴν κάθετον· εἶναι λοιπὸν δυνατόν ἀπὸ τοῦ Α νὰ προεκβληθῇ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν προεκβληθεῖσαν ΝΔ, ὥστε ἡ ΕΡ πρὸς τὴν ΔΡ νὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΑ· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατόν (θ. 7)· θὰ ἔχη λοιπὸν καὶ ἡ ΕΡ πρὸς τὴν ΑΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΡ πρὸς τὴν ΑΑ (Εὐκλ. V, 16). Ἡ δὲ ΔΡ πρὸς τὴν ΑΑ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΔΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ, ἐπεὶδὴ ἡ μὲν χορδὴ ΔΡ εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου ΔΡ, ἡ δὲ ΑΑ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τόξου ΚΜΔ· ἔχει λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΡ πρὸς τὴν ΡΑ μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΔΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΚΜΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ. Ὁν δὲ λόγον ἔχει τὸ τόξον ΚΜΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ, τοῦτον ἔχει ἡ ΧΑ πρὸς ΑΔ (θ. 14)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἢ ΕΑ πρὸς ΑΡ ἢ ἡ ΑΧ πρὸς ΔΑ· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα ἡ ΖΑ τοῦ τόξου ΚΜΔ. Ὁμοίως δὲ πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα· εἶναι ἄρα ἴση.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται ἑλικος οὐχὶ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἑλικος, γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν, γίνῃ δὲ κατὰ τὰ ἄλλα ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ γραφέντος κύ-

γραφέντος κύκλου περιφερεία καὶ ἔτι τῇ μεταξὺ τῶν εἰρη-  
 μένων σαμείων, ὡσαύτως τὰς περιφερείας λαμβανομένας·  
 καὶ εἴ κα τὰς ἐν ὁποιοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἑλικος ἐπι-  
 ψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τὰς ἑλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ  
 5 αὐτὰ κατασκευασθέντι, ὅτι ἡ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρη-  
 μένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τὰς τοῦ γραφέντος  
 κύκλου περιφερείας κατὰ τὸν ἐνὶ ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ,  
 καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τῇ μεταξὺ τῶν  
 εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένα.

10

κα'

Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τὰς ἑ-  
 λικος τὰς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τὰς εὐ-  
 θείας τὰς πρώτας ἐν τῇ ἀρχῇ τὰς περιφορᾶς δυνατόν ἐστι  
 περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι  
 15 ἕξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον  
 τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προ-  
 τεθέντος χωρίου.

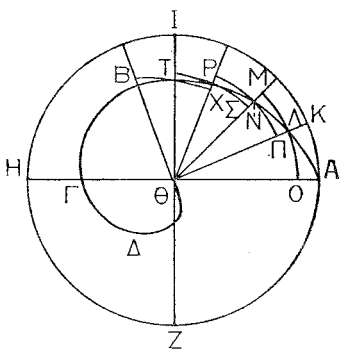
ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ  $ΑΒΓΔ$ , ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γε-  
 γραμμένα, ἔστω δὲ ἀρχὴ μὲν τὰς ἑλικος τὸ  $Θ$  σαμείον, ἀρχὰ  
 20 δὲ τὰς περιφορᾶς ἡ  $ΘΑ$ , ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ  $ΖΗΙΑ$ , αἱ δὲ  
 $ΑΗ$ ,  $ΖΙ$  διαμέτροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς ἀλλήλαις. ἀεὶ δὴ τὰς  
 ὀρθὰς γωνίας δίχα τεμνομένας καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν  
 Η 78 γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ το-  
 μέως ἑλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ ἔστω γεγεννημένος ὁ το-  
 25 μεὺς ὁ  $ΑΘΚ$  ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρηθῶ-  
 σαν δὴ αἱ γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας  
 τῇ περιεχομένα ὑπὸ τὰν  $ΑΘ$ ,  $ΘΚ$ , καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γω-  
 νίας εὐθεῖαι ἔστε ποτὶ τὰν ἑλικά ἄχθωσαν. καθ' ὃ δὴ τέμνει  
 σαμείον ἡ  $ΘΚ$  τὰν ἑλικά, ἔστω τὸ  $Λ$ , καὶ κέντρῳ τῷ  $Θ$ ,

κλου σὺν τῷ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σημείων, λαμβανόμενον ὡς προηγούμενως· καὶ ἂν ἀκόμη εὐθεΐα τῆς ἐφάπτηςται ἑλικος γεγραμμένης καθ' οἷανδῆποτε περιφορὰν, οὐχὶ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἑλικος, κατὰ τὰ ἄλλα δὲ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σημείων εὐθεΐα εἶναι πολλαπλάσιον μεῖον ἓν, τῆς περιφερείας τοῦ γραφέντος κύκλου, ὁ ὅποιος ὀνομάζεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιφορῶν, σὺν τῷ τόξον, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν εἰρημένων σημείων, λαμβανόμενον ὁμοίως.

## 21

Ἐὰν λάβῃ τις τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἑλίκος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς πρώτης κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, εἶναι δυνατόν περὶ αὐτὴν νὰ περιγράψῃ ἐπίπεδον σχῆμα καὶ ἄλλο νὰ ἐγγράψῃ ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγεγραμμένου μικρότερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

Ἐστω ἔλιξ, ἡ ΑΒΓΔ, γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἔστω δὲ ἀρχὴ μὲν τῆς ἑλικος τὸ σημεῖον Θ, ἀρχὴ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ ΘΑ, ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ΖΗΙΑ, αἱ δὲ διάμετροι αὐτοῦ ΑΗ, ΖΙ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Ἐάν λοιπὸν ἡ ὀρθὴ γωνία διχοτομηταί πάντοτε ἐπίσης δὲ καὶ ὁ τομεὺς ὁ περιέχων τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὸ καταλείπομενον τοῦ τομέως θὰ εἶναι μικρότερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας (Εὐκλ. X, 1)· καὶ ἔστω ὁ οὕτω προκύψας τομεὺς ὁ ΑΘΚ μικρότερος τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Ἄς διαιρεθῶσι τῶρα αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι εἰς γωνίας ἴσας πρὸς τὴν ΑΘΚ καὶ ἄς προσεκταθῶσιν αἱ πλευραὶ τῶν σχηματισθεισῶν γωνιῶν μέχρι τῆς ἑλικος. Ἐστω τὸ σημεῖον Λ, καθ' ὃ ἡ ΘΚ τέμνει τὴν ἑλικά, καὶ με



διαστήματι δὲ τῷ  $\Theta\Lambda$  κύκλος γεγράφθω· πεσεῖται δὲ αὐτοῦ  
 ἅ μὲν εἰς τὰ προαγοόμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἑλικος, ἅ  
 δὲ εἰς τὰ ἐπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἡ περιφέρεια, ἔστε  
 κα συμπίεση τῇ  $\Theta\Lambda$  [κατὰ τὸ  $O$  ἢ  $OM$ ] καὶ τῇ μετὰ τὰν  $\Theta K$   
 5 εὐθείαν ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπιπτούσα. πάλιν δὴ καί, καθ' ὃ  
 τέμνει τὰν ἑλικά σαμεῖον ἡ  $\Theta M$ , ἔστω τὸ  $N$ , καὶ κέντρῳ  
 τῷ  $\Theta$ , διαστήματι δὲ τῷ  $\Theta N$  κύκλος γεγράφθω, ἔστε κα  
 συμπίεση ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῇ  $\Theta K$  καὶ τῇ μετὰ τὰν  
 $\Theta M$  ποτιπιπτούσα ποτὶ τὰν ἑλικά, ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν  
 10 ἄλλων πάντων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν ἑλικά αἱ τὰς ἴσας γω-  
 νίας ποιοῦσαι, κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ  $\Theta$ , ἔστ' ἂν  
 συμπίεση ἐκάστα ἡ περιφέρεια τῇ τε προαγομένῃ εὐθείᾳ  
 καὶ τῇ ἐπομένῃ· ἐσσεῖται δὴ τι περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον πε-  
 ριγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγ-  
 15 γεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγε-  
 γραμμένου μεῖζόν ἐστίν ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου,  
 δειχθήσεται. ἔστιν γὰρ ὁ μὲν  $\Theta\Lambda O$  τομεὺς ἴσος τῷ  $\Theta M\Lambda$ ,  
 ὁ δὲ  $\Theta N\Pi$  τῷ  $\Theta N P$ , ὁ δὲ  $\Theta X\Sigma$  τῷ  $\Theta X T$ , ἔστιν δὲ καὶ τῶν  
 ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι  
 20 ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ τῶν ἐν τῷ περιγεγραμ-  
 μένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομέες  
 H 80 πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμέ-  
 νον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χω-  
 ρίον σχήματι χωρὶς τοῦ  $\Theta A K$  τομέως· μόνος γὰρ οὗτος  
 25 οὐ λέλαπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον  
 οὖν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖ-  
 ζόν ἐστι τῷ  $A K \Theta$  τομεῖ, ὃς ἐλάσσων ἐστὶν τοῦ προτεθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον  
 30 χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν, ὥστε τὸ περιγεγραμ-

κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΑ ὡς γραφῇ κύκλος· θὰ πέσῃ δὲ αὐτοῦ τὸ μὲν προηγούμενον τόξον ἐντὸς τῆς ἑλικος, τὸ δὲ ἐπόμενον ἐκτὸς. Ἄς γραφῇ λοιπὸν ἡ περιφέρεια ( τὸ τόξον ) μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΘΑ [κατὰ τὸ σημεῖον Ο τὸ τόξον ΟΜ] καὶ συναντήσῃ ἀκόμῃ τὴν μετὰ τὴν ΘΚ πρὸς τὴν ἑλικά προσπίπτουσαν εὐθεῖαν. Πάλιν τώρα ἔστω τὸ σημεῖον Ν καθ' ὃ τέμνει τὴν ἑλικά ἢ ΘΜ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΝ ὡς γραφῇ κύκλος μέχρις ὅτου τὸ τόξον τοῦ κύκλου συναντήσῃ τὴν ΘΚ καὶ τὴν μετὰ τὴν ΘΜ προσπίπτουσαν πρὸς τὴν ἑλικά, ὁμοίως δὲ καὶ δι' ὅλων τῶν ἄλλων σημείων, καθ' ἃ τέμνουσι τὴν ἑλικά αἱ σχηματίζουσιν τὰς ἴσας γωνίας εὐθεῖαι, ὡς γραφῶσι κύκλοι μὲ κέντρον τὸ Θ, μέχρις ὅτου ἕκαστος τόξον συναντήσῃ τὴν προηγούμενην καὶ τὴν ἐπομένην εὐθεῖαν· θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν περὶ τὴν ληφθεῖσαν ἐπιφάνειαν, ἐπιφάνεια περιγεγραμμένη ἀποτελουμένη ἐξ ὁμοίων τομέων καὶ ἄλλη ἐγγεγραμμένη. Ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας, θὰ ἀποδειχθῇ. Διότι ὁ μὲν τομεὺς ΘΛΟ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΘΜΛ, ὁ δὲ ΘΝΠ πρὸς τὸν ΘΝΡ, ὁ δὲ ΘΧΣ πρὸς τὸν ΘΧΤ, εἶναι δὲ καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων τομέων ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἴσος πρὸς τὸν τομέα ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα κοινὴν πλευράν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων· εἶναι ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ περιγεγραμμένον χωρὶς τὸν τομέα ΘΑΚ· διότι μόνον ὁ τομεὺς οὗτος δὲν ἐλήφθη ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κατὰ τὸν τομέα ΑΘΚ, ὁ ὅποιος εἶναι μικρότερος τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας.

#### ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὲ εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατόν περὶ τὴν εἰρημένην ἐπιφάνειαν νὰ γραφῇ σχῆμα, ὡς ἐλέχθη, ὥστε τὸ περιγεγραμ-

μένον σχῆμα μείζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντός τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μείζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντός τοῦ προτεθέντος χωρίου.

5

κβ'

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας, ἧ ἐστὶ δευτέρα τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων  
10 συγκεείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφέν τοῦ ἐγγραφέντος μείζον εἶμεν ἐλάσσονι παντός τοῦ προτεθέντος χωρίου.

ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ  $ΑΒΓΔΕ$ , ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν  $Θ$  σαμεῖον ἀρχὰ τῆς ἑλικος,  
15 ἡ δὲ  $ΑΘ$  ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς, ἡ δὲ  $ΕΑ$  ἡ δευτέρα εὐθεῖα τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ  $ΑΖΗ$  κύκλος ἔστω δεύτερος καὶ αἱ  $ΑΓΗ$ ,  $ΖΙ$  διαμέτροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς ἀλλήλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένης τῆς ὀρθᾶς γωνίας καὶ τοῦ τομέως τοῦ  
H 82 τῶν ὀρθῶν γωνιῶν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον  
20 ἑλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ  $ΘΚΑ$  τομεὺς ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθεισῶν δὲ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἰς τὰς ἴσας γωνίας τῇ ὑπὸ τῶν  $ΚΘΑ$  καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου  
25 σχήματος μείζον ἐλάσσονι ἢ ὁ τομεὺς ὁ  $ΘΚΑ$ · μείζον γὰρ ἐσσεῖται τῇ ὑπεροχῇ, ἧ ὑπερέχει ὁ  $ΘΚΑ$  τομεὺς τοῦ  $ΘΕΡ$ .

# ΠΟΡΙΣΜΑ

δῆλον οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστιν καὶ τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μείζον εἶμεν ἐλάσσονι παντός τοῦ προτε-

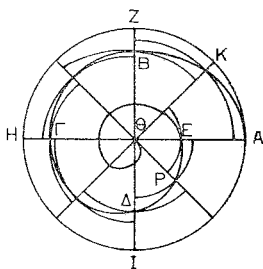


μένον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ἐπιφανείας μικρότερον οἷα σδήποτε προτεθείσης ἐπιφανείας (ὅσον δῆποτε μικρᾶς), καὶ πάλιν νὰ ἐγγρα-  
φῇ σχῆμα, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ὁμοίως νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος  
σχήματος μικρότερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

22

Ἐὰν λάβῃ τις τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἑλικος  
τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας, ἡ  
ὁποία εἶναι δευτέρα ἐκ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, εἶναι δυνατὸν  
περὶ αὐτὴν νὰ περιγράψῃ ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοί-  
ων τομέων καὶ ἄλλο νὰ ἐγγράψῃ, ὥστε τὸ περιγραφέν νὰ ὑπερέχῃ  
τοῦ ἐγγραφέντος πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

Ἐστω ἑλιξ, ἡ  $ABΓΔΕ$ , γεγραμμένη κατὰ τὴν δευτέραν περι-  
φορὰν, καὶ ἔστω τὸ μὲν σημεῖον  $\Theta$  ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ εὐθεῖα  $A\Theta$   
ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, ἡ δὲ  $EA$  ἡ δευτέρα εὐθεῖα ἐκ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ  
τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ κύκλος  $AZH$  ἔστω δεύτερος καὶ αἱ διάμετροι  
αὐτοῦ  $ΑΓΗ$ ,  $ZI$  ἔστωσαν κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Πάλιν λοιπὸν ἀφοῦ  
διχοτομηθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία καὶ ὁ τομεὺς ὁ περιέχων τὴν ὀρθὴν γωνίαν  
θὰ εἶναι τὸ καταλειπόμενον μικρότερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας  
(Εὐκλ. X, 1)· καὶ ἔστω ὅτι προέκυψεν ὁ τομεὺς  $\ThetaΚΑ$  μικρότερος  
τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Διότι ἀφοῦ διαιρεθῶσιν αἱ ὀρθαὶ γω-  
νίαι εἰς τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὴν  $K\Theta A$   
καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κα-  
τασκευὴ ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα  
θὰ ὑπερέχῃ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ  
ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον ἢ ὁ τομεὺς  
 $\ThetaΚΑ$ · διότι θὰ εἶναι μεγαλύτερον κατὰ τὴν  
ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ τομεὺς  $\ThetaΚΑ$   
τοῦ τομέως  $\Theta ΕΡ$ .



ΠΟΡΙΣΜΑ

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν καὶ τὸ περιγραφέν  
σχήμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ληφθείσης ἐπιφανείας ὀλιγώτερον πάσης προ-

θέντος χωρίου, καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν, διότι δυνατόν λαβόντα  
 5 τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν ὁποια-  
 οῦν περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῇ ἀρχῇ  
 τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγρά-  
 φαι σχῆμα, οἷον εἴρηται, ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν  
 σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς  
 10 τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράφαι, ὥστε τὸ λα-  
 φθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσ-  
 σονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κγ'

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος,  
 15 ἃ ἐστὶν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένης, οὐκ ἐ-  
 χούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος καὶ τὰν εὐθειᾶν τὰν  
 Η 84 ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑλικος ἀγομενᾶν δυνατόν ἐστι περὶ  
 τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράφαι ἐξ ὁμοίων τομέων  
 συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράφαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα  
 20 τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτε-  
 θέντος χωρίου.

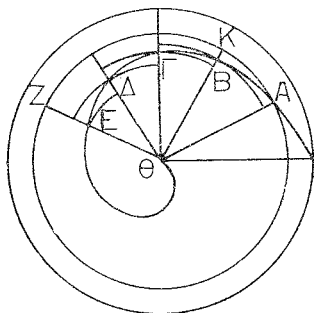
ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἂ ABΓΔΕ, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ Α, Ε,  
 ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἑλικος τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ,  
 ΘΕ. γεγράφθω δὴ κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι δὲ  
 25 τῷ ΘΑ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. αἰ δὲ τᾶς γωνίας  
 τᾶς ποτὶ τῷ Θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ ΘΑΖ δίχα τεμνομένων  
 ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἐλάσσον. ἔστω  
 ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ ΘΑΚ τοῦ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς  
 πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ

τεθείσης ἐπιφανείας, καὶ πάλιν ἡ ληφθεῖσα ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

Τοῦτο εἶναι φανερόν ἀποδεικνύμενον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διότι εἶναι δυνατόν ἀφοῦ ληφθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης καθ' οἷανδήποτε περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς λεγομένης κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (τῶν περιφορῶν) νὰ περιγραφῇ σχῆμα, ὡς ἐλέχθη, ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ληφθείσης ἐπιφανείας ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας, καὶ πάλιν νὰ ἐγγραφῇ σχῆμα, ὥστε ἡ ληφθεῖσα ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

23

Ἐὰν ληφθῇ ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἑλικος, ἡ ὁποία εἶναι μικρότερα τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν, καὶ δὲν ἔχει πέρας τὴν ἀρχὴν τῆς ἑλικος καὶ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἑλικος, εἶναι δυνατόν περὶ τὴν ἐπιφάνειαν νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων καὶ ἄλλο νὰ ἐγγραφῇ, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.



Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς τὸ τμήμα ΑΒΓΔΕ, πέρατα δὲ αὐτῆς τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὴ τῆς ἑλικος τὸ Θ καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΘΕ. Ἄς γραφῇ τώρα κύκλος μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΑ, καὶ ἃς συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. Ἐὰν δὲ διχοτομοῦμεν πάντοτε τὴν πρὸς τὸ Θ γωνίαν καὶ τὸν τομέα ΘΑΖ θὰ εἶναι τὸ καταλειπόμενον μικρότερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Ἐστω ὁ τομεὺς ΘΑΚ μικρότερος τῆς προτεθείσης. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς προηγουμένως, ἃς γραφῶσι κύκλοι διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνουσι

τέμνοντι τὰν ἑλικά αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ  $\Theta$ ,  
 ὥστε τὰν περιφερειᾶν ἐκάσταν συμπίπτειν τῇ τε προαγον-  
 μένῃ καὶ τῇ ἐπομένῃ· ἐσσεῖται δὴ τι περὶ τὸ περιεχόμενον  
 χωρίον ὑπὸ τε τᾶς  $ΑΒΓΔΕ$  ἑλικος καὶ τὰν  $ΑΘ$ ,  $ΘΕ$  εὐ-  
 5 θείῃν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων  
 συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον, καὶ τὸ περιγεγραμ-  
 μένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέν-  
 τος χωρίου· ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ  $ΘΑΚ$  τομεύς.

ΠΟΡΙΣΜΑ

10 ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ εἰρη-  
 Η 86 μένον χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι,  
 ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μείζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσ-  
 σονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι,  
 ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μείζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος  
 15 σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

καδ'

Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν τῇ πρώτῃ  
 περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τὰν ἐν  
 τῇ ἀρχῇ τᾶς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ  
 20 πρώτου.

ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ  $ΑΒΓΔΕΘ$ , ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ  
 γεγραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν  $\Theta$  σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἑλικος,  
 ἡ δὲ  $ΘΑ$  εὐθεῖα πρώτα τὰν ἐν τῇ ἀρχῇ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ  
 $ΑΚΖΗΙ$  κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ὁ, ἐν τῷ  $\varsigma$ ,  
 25 κύκλος. δεικτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ  
 $\varsigma$  κύκλῳ.

τὴν ἑλικά αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὸ Θ, ὥστε ἕκαστον τῶν τόξων νὰ συμπίπτῃ πρὸς μίαν προηγούμενην καὶ μίαν ἐπομένην εὐθεΐαν· θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν περὶ τὴν περιεχομένην ἐπιφάνειαν ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ περιγεγραμμένον ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον, καὶ τὸ περιγεγραμμένον θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας· διότι ὁ τομεὺς ΘΑΚ εἶναι μικρότερος.

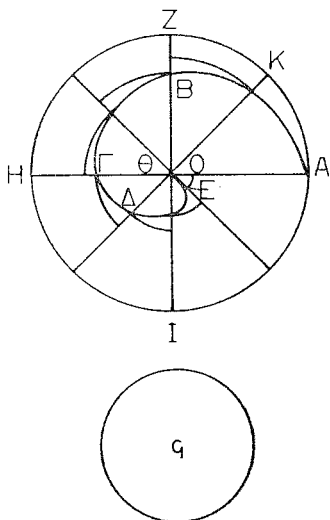
ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατόν περὶ τὴν εἰρημένην ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον σχῆμα, ὡς ἐλέχθη, νὰ περιγραφῇ, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ἐπιφανείας ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας, καὶ πάλιν νὰ ἐγγραφῇ, ὥστε ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

24

Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς πρώτης ἐκ τῶν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐν τρίτον τοῦ πρώτου κύκλου.

Ἐστω ἡ ἑλιξ ΑΒΓΔΕΘ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν, ἔστω δὲ τὸ μὲν σημεῖον Θ ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ εὐθεΐα ΘΑ πρώτη ἐκ τῶν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ κύκλος ΑΚΖΗΙ πρῶτος, τοῦ ὁποίου τρίτον μέρος ἔστω ὁ κύκλος ὅπου τὸ γράμμα ς. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς προειρημένης ἐπιφανείας ἰσοῦται πρὸς τὸν κύκλον ς.



- εἰ γὰρ μή, ἦτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον,  
εἰ δυνατόν, ἔλασσον. δυνατόν δὴ ἐστιν περὶ τὸ χωρίον τὸ  
περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἑλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐ-  
θείας περιγεῖν σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκεί-  
μενον, ὥστε τὸ περιγεγράφεν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου  
ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ εἰρημένου  
H 88 χωρίου. περιγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν  
σύνκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλά-  
χιστος δὲ ὁ ΘΕΟ· δηλὸν οὖν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα  
10 ἔλασσόν ἐστιν τοῦ ς κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι  
αἱ ποτὶ τῷ Θ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν  
τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι· ἐντὶ δὴ τινες γραμμαὶ αἱ  
ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν  
ὑπερέχουσαι, ἃν ἐστί μεγίστα μὲν ἡ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἡ ΘΕ,  
15 καὶ ἡ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς  
γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πο-  
τιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἐκά-  
στα ἴσα τᾷ μεγίστῃ, καὶ ἀναγεγράφαι ἀπὸ πασῶν ὁμοίῳ  
τομέες, ἀπὸ τε τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσᾶν καὶ ἀπὸ  
20 τῶν ἰσῶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστῃ· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ  
τῶν ἰσῶν τᾷ μεγίστῃ ἐλάσσονές ἐντι ἢ τριπλασίοι τῶν τομέων  
τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσᾶν· δέδεικται γὰρ  
τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τῶν ἰσῶν ἀλλάλαις τε  
καὶ τᾷ μεγίστῃ ἴσοι τῷ ΑΖΗΙ κύκλῳ, οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ  
25 τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσᾶν ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ  
σχήματι· ἐλάσσων ἄρα ὁ ΑΖΗΙ κύκλος τοῦ περιγεγραμμέ-  
νου σχήματος ἢ τριπλασίον. τοῦ δὲ ς κύκλου τριπλασίον·  
ἐλάσσων ἄρα ὁ ς κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος.  
οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μεῖζων· οὐκ ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον χω-  
30 ρίον ὑπὸ τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἑλικος καὶ τᾶς ΑΘ ἔλασσον  
τοῦ ς χωρίου.
- H 90 οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐστι

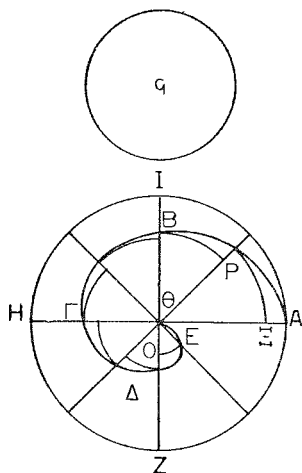
Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἐστω πρῶτον, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μικρότερον. Εἶναι ὅμως δυνατόν περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕΘ καὶ τῆς εὐθείας ΑΘ νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας κατ' ὀλιγώτερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ς τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας. Ἄς περιγραφῇ λοιπὸν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΕΟ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου ς. Ἄς προσεβληθῶσι λοιπὸν αἱ πρὸς τὸ Θ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου· θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν εὐθεῖαι τινες ἀπὸ τοῦ Θ προσπίπτουσαι πρὸς τὴν ἑλικά ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλάχιστη δὲ ἡ ΘΕ, καὶ ἡ ἐλάχιστη εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου προσπίπτουσαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς ταύτας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἐκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἄς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ ὅλας ὅμοιοι τομεῖς, καὶ ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἴσον ἀλλήλων καὶ ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν μεγίστην· οἱ τομεῖς ἄρα οἱ ἀναγραφέντες ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἄθροίσματος τῶν τομέων τῶν ἀναγραφέντων ἀπὸ τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 10, πόρ.). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην ἴσον πρὸς τὸν κύκλον ΑΖΗΙ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ΑΖΗΙ μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Τοῦ δὲ κύκλου ς εἶναι τριπλάσιος· εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ς μικρότερος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Ὅμως δὲν εἶναι, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερος· δὲν εἶναι ἄρα τὸ ἐμβαδὸν

δὴ πάλιν δυνατόν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς  
 $ΑΒΓΔΕΘ$  ἑλίκος καὶ τῆς  $ΑΘ$  εὐθείας ἐγγράφαι σχῆμα, ὥστε  
 τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μείζον εἶ-  
 5 μεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ  $ς$  κύ-  
 κλου. ἐγγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκει-  
 ται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ  $ΘΡΞ$ , ἐλά-  
 χιστος δὲ ὁ  $ΟΘΕ$ . δηλὸν οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα  
 μείζον ἐστὶν τοῦ  $ς$  κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι  
 τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ  $Θ$ , ἔστε κα ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου  
 10 περιφέρειαν πέσωντι. πάλιν οὖν ἐντὶ τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ  
 ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν αἱ ἀπὸ τοῦ  $Θ$  ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπί-  
 πτουνται, ἅν ἐστι μέγιστα μὲν ἡ  $ΘΑ$ , ἐλαχίστα δὲ ἡ  $ΘΕ$ , καὶ  
 ἐστὶν ἡ ἐλαχίστα ἴσα τῇ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ  
 αἱ ἀπὸ τοῦ  $Θ$  ποτὶ τὰν τοῦ  $AZHI$  κύκλου περιφέρειαν ποτι-

15

20

25



πίπτουνται τῷ μὲν πλήθει ἴσαι  
 ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἐκάστα  
 ἴσα τῇ μεγίστῃ, καὶ ἀναγεγρά-  
 φεται ἀπὸ πασῶν ὁμοῖοι το-  
 μέες ἀπὸ τε τῶν ἰσῶν ἀλλά-  
 λαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ καὶ ἀπὸ  
 τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχου-  
 σῶν· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τῶν  
 ἰσῶν τῇ μεγίστῃ μείζονές ἐντι  
 ἢ τριπλασίοι τῶν τομέων τῶν  
 ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερ-  
 εχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς  
 μεγίστας· δέδεικται γὰρ τοῦ-  
 το. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ

1192 τῶν ἰσῶν τῇ μεγίστῃ ἴσοι τῷ  $AZHI$  κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τῶν  
 30 τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας  
 ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι· μείζων ἄρα ὁ  $AZHI$  κύκλος  
 ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ  $ς$  κύκλου



τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕΘ καὶ τῆς ΑΘ μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ς.

Ἄλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερον. Διότι ἔστω, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μεγαλύτερον. Εἶναι λοιπὸν πάλιν δυνατόν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕΘ καὶ τῆς εὐθείας ΑΘ νὰ ἐγγραφῇ σχῆμα, ὥστε ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ς (θ. 21, πόρ.). Ἄς ἐγγραφῇ λοιπὸν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΡΕ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ς. Ἄς προσεβληθῶσι λοιπὸν αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὸ Θ, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι τινες ἴσον ἀλλήλων ὑπερέχουσαι, αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν ἑλικα, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, καὶ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΑΖΗΙ προσπίπτουσαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς ταύτας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἐκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ ὅλας ὁμοιοι τομεῖς καὶ ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην καὶ ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας· οἱ τομεῖς ἄρα οἱ ἀναγεγραμμένοι ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἄθροίσματος τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἄνευ τοῦ ἀναγραφέντος ἀπὸ τῆς μεγίστης· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 10, πόρ.). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ἀναγεγραμμένων ἴσον πρὸς τὸν κύκλον ΑΖΗΙ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τομέως, ἴσον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα· εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ΑΖΗΙ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Τοῦ δὲ κύκλου ς εἶναι τριπλάσιος· εἶναι ἄρα

τριπλασίον· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ  $\varsigma$  κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμέ-  
 νου σχήματος. οὐκ ἔστιν δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων· οὐκ ἄρα ἐστὶν  
 οὐδὲ μείζων τὸ χωρίον τὸ ὑπὸ τε τῆς  $ABΓΔΕΘ$  ἑλικος καὶ  
 τῆς  $ΑΘ$  εὐθείας τοῦ  $\varsigma$  κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶν [τῷ περι-  
 5 λαφθέντι ὑπὸ τῆς ἑλικος καὶ τῆς  $ΑΘ$  εὐθείας].

κε'

Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ  
 περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας τῶν  
 ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον τοῦτον  
 10 ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ  $\zeta$  ποτὶ τὰ  $\iota\beta$ , ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ,  
 ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα τὸ τε περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ  
 κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ  
 πρώτου κύκλου καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ  
 ἀπὸ τῆς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἅ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευ-  
 15 τέρου κύκλου τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου ποτὶ  
 τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου  
 κύκλου.

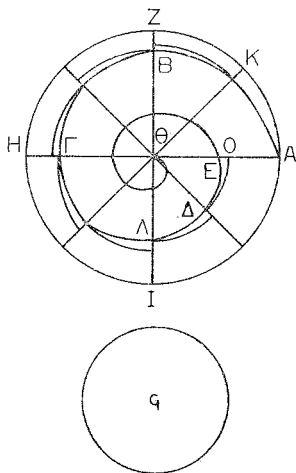
ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ  $ABΓΔΕ$ , ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γε-  
 γραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν  $Θ$  σამεῖον ἀρχὰ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ  $ΘΕ$   
 20 εὐθεΐα ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς ἡ πρώτη, ἡ δὲ  $ΑΕ$  ἐν τῇ  
 ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς ἡ δεύτερα, ὁ δὲ κύκλος ὁ  $AZHI$  ὁ δεύ-  
 τερος ἔστω, καὶ αἱ  $AH, IZ$  διαμέτροι ποτ' ὀρθὰς ἀλλάλαις.  
 δεικτέον, ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τῆς  $ABΓΔΕ$   
 H 94 ἑλικος καὶ τῆς  $ΑΕ$  εὐθείας ποτὶ τὸν  $AZHI$  κύκλον λόγον ἔχει,  
 25 ὃν τὰ  $\zeta$  ποτὶ  $\iota\beta$ .

ἔστω δὴ τις κύκλος ὁ  $\varsigma$ , ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ  $\varsigma$  κύ-  
 κλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ τῶν  $ΑΘ, ΘΕ$  περιεχομένῳ καὶ  
 τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΑΕ$  τετραγώνου· ἔξει δὴ ὁ  $\varsigma$

ὁ κύκλος  $\varsigma$  μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Ὅμως δὲν εἶναι, ἀλλὰ εἶναι μικρότερος· δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μεγαλύτερον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιχομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος  $ΑΒΓΔΕΘ$  καὶ τῆς εὐθείας  $ΑΘ$ , τοῦ κύκλου  $\varsigma$ . Εἶναι ἄρα ἴσον [ πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἑλικος καὶ τῆς εὐθείας  $ΑΘ$  ].

25

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν καὶ τῆς δευτέρας εὐθείας ἐκ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς πρὸς τὸν δεύτερον κύκλον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ ἐπτὰ πρὸς τὰ δώδεκα, ὅστις λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ πρώτου κύκλου σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτὺς τοῦ δευτέρου κύκλου τῆς ἀκτῖνος τοῦ πρώτου κύκλου, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ δευτέρου κύκλου.



Ἐστω ἑλιξ, ἡ  $ΑΒΓΔΕ$ , γεγραμμένη κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν, ἔστω δὲ τὸ μὲν σημεῖον  $Θ$  ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ εὐθεῖα  $ΘΕ$  ἡ πρώτη ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ἡ δὲ  $ΑΕ$  ἡ δευτέρα ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ἔστω δὲ δεύτερος κύκλος ὁ  $ΑΖΗΙ$ , καὶ αἱ διάμετροι  $ΑΗ$ ,  $ΙΖ$  κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος  $ΑΒΓΔΕ$  καὶ τῆς εὐθείας  $ΑΕ$  πρὸς τὸν κύκλον  $ΑΖΗΙ$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ ἐπτὰ πρὸς τὰ δώδεκα.

Ἐστω λοιπὸν κύκλος τις ὁ  $\varsigma$ , τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ἔστω ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $ΑΘ$ ,  $ΘΕ$  σὺν τὸ

κύκλος ποτὶ τὸν  $AHZI$ , ὡς  $\bar{\zeta}$  ποτὶ  $\bar{\iota\beta}$ , διότι καὶ  $\acute{\alpha}$  ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ  $AZHI$  κύκλου τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ  $\varsigma$  κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τε τᾶς  $AB\Gamma\Delta E$  ἑλικος  
 5 καὶ τᾶς  $AE$  εὐθείας.

εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω δὴ πρό-  
 τερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατόν δὴ ἐστὶ περὶ τὸ χωρίον  
 περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον,  
 ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μείζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσ-  
 10 σον, ἢ  $\bar{\phi}$  ὑπερέχει ὁ  $\varsigma$  κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγραφθῶ,  
 καὶ ἔστω, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέ-  
 γιστος μὲν ὁ  $\Theta AK$  τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ  $\Theta OD$ . δηλὸν οὖν,  
 ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἑλασσόν ἐστὶν τοῦ κύκλου. ἐκβε-  
 βλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τῷ  $\Theta$  ἴσας γωνίας,  
 15 ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πέσωντι.  
 ἐντὶ δὴ τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ  
 ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπίπτουσαι, ἃν ἐστὶ μεγίστα  
 μὲν  $\acute{\alpha}$   $\Theta A$ , ἐλαχίστα δὲ  $\acute{\alpha}$   $\Theta E$ , ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ  
 H 96 αἱ ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  ποτὶ τὰν τοῦ  $AZHI$  κύκλου περιφέρειαν, πο-  
 20 τιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ  
 μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστα, καὶ ἀναγεγρά-  
 φатаὶ ὁμοῖοι τομέες ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστα καὶ ἀπὸ τᾶν  
 τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς ἐλαχίστας οὐκ  
 ἀναγράφεται· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστα ποτὶ  
 25 τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χω-  
 ρίς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τε-  
 τράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς  $\Theta A$  ποτὶ τὰ συναμφότερα  
 τό τε ὑπὸ τᾶν  $A\Theta, \Theta E$  περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ  
 ἀπὸ τᾶς  $EA$  τετραγώνου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς  
 30 μὲν τομέεσσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστα  
 ἴσος ὁ  $AZHI$  κύκλος, τοῖς δὲ τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ  
 ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας

ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ· θὰ ἔχη λοιπὸν ὁ κύκλος ς πρὸς τὸν κύκλον ΑΗΖΙ, ὡς ἑπτὰ πρὸς δώδεκα, διότι τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος αὐτοῦ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΖΗΙ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον (Εὐκλ. XII, 2). Θὰ ἀποδειχθῇ λοιπὸν, ὅτι ὁ κύκλος ς εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος. Ἐστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερος. Εἶναι δὲ δυνατόν περὶ τὴν ἐπιφάνειαν νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα συγκεείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ἐπιφανείας ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ὑπερέχει ὁ κύκλος ς τῆς ἐπιφανείας (θ. 22, πόρ.). Ἄς περιγραφῇ, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ τομεὺς ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΟΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγραφέν σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου. Ἄς προσεβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι πρὸς τὸ Θ ἴσας γωνίας, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ δευτέρου κύκλου. Ὑπάρχουσι λοιπὸν εὐθεῖαι τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων (σχηματίζουσαι ἀριθμ. πρόοδον), αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ τοῦ σημείου Θ πρὸς τὴν ἑλικά, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλάχιστη δὲ ἡ ΘΕ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΑΖΗΙ προσπίπτουσαι, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ὀλιγώτεραι τούτων κατὰ μίαν, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην καὶ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν ὅμοιοι τομεῖς, ἀπὸ δὲ τῆς ἐλαχίστης δὲν ἔχει ἀναγραφῇ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην εὐθειῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν, ἄνευ τοῦ τομέως τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης, ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΑ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 11, πόρ.). Εἶναι δὲ πρὸς μὲν



τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας εὐθειῶν καὶ πρὸς τὴν μεγίστην ἴσος ὁ κύκλος ΑΖΗΙ, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης ἴσων τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ὁ κύκλος πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΘ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ. Ὅν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΑ, ΘΕ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ, τοῦτον ἔχει ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸν κύκλον ς· ἔχει λοιπὸν μικρότερον λόγον ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ πρὸς τὸν κύκλον ς· ὥστε ὁ κύκλος ς εἶναι μικρότερος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 10). Δὲν εἶναι ὅμως, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερος· δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ κύκλος ς τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΖ.

Οὕτε μικρότερος ὅμως εἶναι. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μικρότερος. Πάλιν λοιπὸν εἶναι δυνατόν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἑλικος καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ νὰ ἐγγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα συγκείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ νὰ ὑπερέχη τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ὑπερέχει ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ς (θ. 22, πόρ.). Ἐς ἐγγραφῇ λοιπόν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ τομεὺς ΘΚΡ, ἐλάχιστος δὲ ὁ τομεὺς ΘΕΟ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ς. Ἐς προεκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι ἴσας γωνίας πρὸς τὸ Θ, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων (σχηματίζουσαι ἀριθμ. πρόδοον) αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν ἑλικά προσπίπτουσαι, ἐκ τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου προσπίπτουσαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ὀλιγώτεροι

μὲν ἂ ΘΑ, ἐλάχιστα δὲ ἂ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ  
 ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι  
 τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλ-  
 λάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ, καὶ ἀναγεγράφεται ἀπὸ τᾶν  
 5 τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερεχουσᾶν ὁμοῖοι τομέες καὶ ἀπὸ τᾶν  
 ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ  
 ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερεχου-  
 σᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι ἢ  
 τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε  
 10 περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς  
 ΕΑ τετραγώνου. ἔστιν δὲ τοῖς μὲν τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τᾶν  
 τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας  
 ἢ 100 ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἐτέ-  
 ροις ὁ κύκλος· μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ  
 15 τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ  
 ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  
 ΑΕ τετραγώνου, τουτέστιν ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸν ς κύ-  
 κλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχή-  
 ματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ  
 20 ἐλάσσων ὁ ς κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τε τᾶς  
 ΑΒΓΔΕ ἑλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας· ὥστε ἴσος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται καί, διότι τὸ περι-  
 λαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν ὁποιοῦν περιφορᾷ  
 25 γεγραμμένης καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν  
 ταῖς περιφοραῖς λεγομένης ποτὶ τὸν κύκλον τὸν κατὰ τὸν  
 αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν  
 συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν  
 αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν  
 30 ἐνὶ ἐλάσσονα τᾶν περιφορᾶν λεγομένου καὶ τὸ τρίτον μέρος



τούτων κατὰ μίαν, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ὅμοιοι τομεῖς· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης ἀναγεγραμμένου τομέως ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΑ (θ. 11, πόρ.). Εἶναι δὲ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν, ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τομέως, ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἐπιφανείαν σχῆμα, πρὸς τὸ ἄλλο δὲ ἄθροισμα εἶναι ἴσος ὁ κύκλος· ἔχει λοιπὸν μεγαλύτερον λόγον ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΑ, ΘΕ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ, τουτέστιν ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸν κύκλον ς. Εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ς μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 10)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἦτο μικρότερος. Δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μικρότερος ὁ κύκλος ς τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ· ὥστε εἶναι ἴσος.

#### ΠΟΡΙΣΜΑ

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καί, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης καθ' οἷανδήποτε περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς ὀνομαζομένης κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν πρὸς τὸν κύκλον τὸν ὀνομαζόμενον πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ὀνομαζομένου κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ὀνομαζομένου κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν μεῖον ἓν, σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς,

τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἅ ἐκ  
τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων τᾶς ἐκ τοῦ  
κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τῶν εἰρημένων ποτὶ τὸ τε-  
τράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου  
5 τῶν εἰρημένων.

κς'

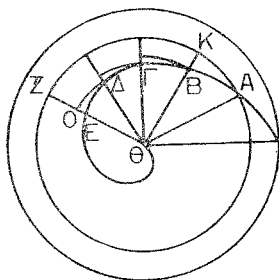
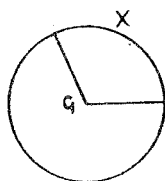
Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος, ἧ ἔστιν ἐλάσ-  
σων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένης, οὐκ ἔχουσας πέρας  
H 102 τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος καὶ τὰν εὐθειᾶν τὰν ἀπὸ τῶν περάτων  
10 αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος ἀγμενᾶν ποτὶ τὸν τομέα  
τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τὰν ἀπὸ  
τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος ἀγμενᾶν, τὰν δὲ πε-  
ριφέρειαν, ἧ ἔστι μεταξὺ τῶν εἰρημενῶν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
τᾷ ἑλικί, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε  
15 περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς  
ἑλικος ἀγμενᾶν καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ  
ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἅ μείζων τῶν εἰρημενῶν εὐ-  
θειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεί-  
ζονος τῶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος ἐπι-  
20 ζευχθεῖσάν.

ἔστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ  $ΑΒΓΔΕ$ , ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περι-  
φορᾷ γεγραμμένης, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ  $A$ ,  $E$ , ἔστω  
δὲ ἀρχὰ τᾶς ἑλικος τὸ  $\Theta$  σαμεῖον, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ  $\Theta$ ,  
διαστήματι δὲ τῷ  $\Theta A$ , κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτεύω  
25 τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἡ  $\Theta E$  κατὰ τὸ  $Z$ . δεικτέον, ὅτι τὸ πε-  
ριεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τᾶς  $ΑΒΓΔΕ$  ἑλικος καὶ τῶν εὐ-  
θειᾶν τὰν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$  ποτὶ τὸν τομέα τὸν  $A\Theta Z$  τοῦτον ἔχει τὸν  
λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τῶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$  καὶ τὸ  
τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $EZ$  ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ

καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτίς τοῦ μεγαλυτέρου τῶν εἰρημένων κύκλων τῆς ἀκτίνος τοῦ μικροτέρου τῶν εἰρημένων, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος τοῦ μεγαλυτέρου τῶν εἰρημένων κύκλων.

26

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ἑλικος, ἡ ὁποία εἶναι μικρότερα τῆς γεγραμμένης κατὰ μίαν περιφορὰν καὶ δὲν ἔχει πέρας τὴν ἀρχὴν τῆς ἑλικος καὶ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῆς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἑλικος, πρὸς τὸν τομέα τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα μὲν ἴσην πρὸς τὴν μεγαλυτέραν τῶν ἐκ τῶν περάτων τῆς ἑλικος πρὸς τὴν ἀρχὴν ἀχθειςτῶν εὐθειῶν, τόξον δὲ τὸ εὐρισκόμενον μετὰξὺ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ἑλικος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς ἀχθείσας ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἑλικος πρὸς τὴν ἀρχὴν αὐτῆς, σὺν τὸ ἔν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγαλυτέρα τῶν εἰρημένων εὐθειῶν τῆς μικρότερας, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθειςτῶν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἑλικος πρὸς τὴν ἀρχὴν.



Ἐστω ἑλιξ, ἡ ΑΒΓΔΕ, μικρότερα τῆς γεγραμμένης κατὰ μίαν περιφορὰν, πέρατα δὲ αὐτῆς ἔστω τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὴ τῆς ἑλικος τὸ σημεῖον Θ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΑ, ἃς γραφῇ κύκλος καὶ ἃς συναντᾷ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ ἡ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ πρὸς τὸν τομέα ΑΘΖ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἔν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ πρὸς τὸ

τᾶς  $\Theta A$ .

ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ  $\zeta X$ , τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν  
 δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$  καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ  
 ἀπὸ τᾶς  $EZ$ , ποτὶ δὲ τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ ποτὶ  
 5 τῷ  $\Theta$ · ὁ δὲ τομεὺς ὁ  $\zeta X$  ποτὶ τὸν τομέα τὸν  $\Theta AZ$  τὸν αὐτὸν  
 ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$  καὶ τὸ τρίτον μέρος  
 τοῦ ἀπὸ τᾶς  $EZ$  τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς  $\Theta A$  τετρά-  
 γωνον· αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυ-  
 Η 104 νάμει ποτ' ἀλλάλως. δειχθήσεται δὴ ὁ  $X\zeta$  τομεὺς ἴσος ἐὼν  
 10 τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς  $AB\Gamma A E$  ἑλικος καὶ  
 τᾶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$  εὐθειᾶν.

εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἢ ἐλάττων ἐστίν. ἔστω πρότερον,  
 εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατόν οὖν ἐστὶν περὶ τὸ εἰρημένον  
 χωρίον περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων  
 15 συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μείζον εἴμεν  
 τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἄλλῳ ὑπερέχει ὁ  $\zeta X$  το-  
 μεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν  
 τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέ-  
 γιστος μὲν ὁ  $\Theta AK$ , ἐλάχιστος δὲ ὁ  $\Theta O A$ · δῆλον οὖν, ὅτι τὸ  
 20 περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν τοῦ  $X\zeta$  τομέως. διά-  
 χθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ  
 $\Theta$ , ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ  $\Theta AZ$  τομέως πέσωντι.  
 ἐντὶ δὴ τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν, αἱ ἀπὸ  
 τοῦ  $\Theta$  ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπύπτουσιν, ἃν ἐστί μεγίστα μὲν  
 25 ἡ  $\Theta A$ , ἐλάχιστα δὲ ἡ  $\Theta E$ , ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν  
 πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλως  
 τε καὶ τᾷ μεγίστῃ, αἱ ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  ποτὶ τὰν τοῦ  $A\Theta Z$  τομέως  
 περιφέρειαν ποτιπύπτουσιν χωρὶς τᾶς  $\Theta Z$ , καὶ ἀναγεγρά-  
 φεται ὁμοῖοι τομέες ἀπὸ πασῶν ἀπὸ τε τᾶν ἰσῶν ἀλλάλως  
 30 τε καὶ τᾷ μεγίστῃ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχου-  
 σῶν, ἀπὸ δὲ τᾶς  $\Theta E$  οὐκ ἀναγέγραπται· τομέες οὖν οἱ ἀπὸ  
 τᾶν ἰσῶν ἀλλάλως τε καὶ τᾷ μεγίστῃ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς

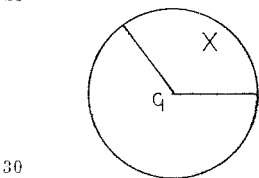
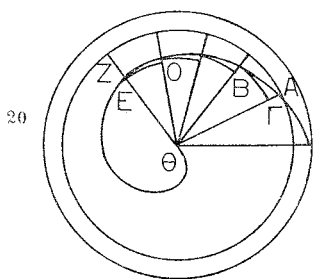
τετράγωνον τῆς  $\Theta\Lambda$ .

Ἐστω λοιπὸν κύκλος, ὅπου τὰ γράμματα  $\varrho X$ , τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $EZ$ , ἔστω δὲ εἰς αὐτὸν ἐπίκεντρος γωνία ἴση πρὸς τὴν πρὸς τὸ  $\Theta$ · ὁ τομεὺς λοιπὸν ὁ  $\varrho X$  πρὸς τὸν τομέα  $\Theta AZ$  ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $EZ$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta A$ · διότι τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τοῦτον τὸν λόγον.  $\Theta\alpha$  ἀποδειχθῇ δέ, ὅτι ὁ τομεὺς  $X\varrho$  εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἑλικος  $AB\Gamma\Delta E$  καὶ τῶν εὐθειῶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$ .

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι,  $\Theta\alpha$  εἶναι ἢ μεγαλύτερος ἢ μικρότερος. Ἐστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερος. Εἶναι λοιπὸν δυνατόν περὶ τὴν εἰρημένην ἐπιφάνειαν νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα συγκείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ὑπερέχει ὁ τομεὺς  $\varrho X$  τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας (θ. 23, πόρ.). Ἄς περιγραφῇ λοιπὸν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ  $\Theta AK$ , ἐλάχιστος δὲ ὁ  $\Theta O\Delta$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τομέως  $X\varrho$ . Ἄς ἀχθῶσι λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὴν  $\Theta$ , μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὸ τόξον τοῦ τομέως  $\Theta AZ$ . Ὑπάρχουσι λοιπὸν εὐθεῖαι τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων (σχηματίζουσαι ἀριθμ. πρόοδον), αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  πρὸς τὴν ἑλικά (θ. 12), τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ  $\Theta A$ , ἐλαχίστη δὲ ἡ  $\Theta E$ , ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος οὔσαι μικρότεραι τούτων κατὰ μίαν, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, αἱ ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  πρὸς τὸ τόξον τοῦ τομέως  $A\Theta Z$  προσπίπτουσαι ἐκτὸς τῆς  $\Theta Z$ , καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ὁμοιοι τομεῖς ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην καὶ ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἀπὸ δὲ τῆς  $\Theta E$  δὲν ἔχει ἀναγραφῇ· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τομέων, οἱ ὁποῖοι

ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλας ὑπερέχουσας χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς  
 ἐλαχίστης τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ  
 ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον  
 Η 106 μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνου. ἔστιν δὲ τοῖς μὲν το-  
 5 μέεσσιν τοῖς ἀπὸ τῶν ἰσῶν ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ ἴσος  
 ὁ ΘΑΖ τομεύς, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλας ὑπερέχου-  
 σῶν τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ  
 τομεύς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ  
 ἀπὸ τῆς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τῶν ΘΑ, ΘΕ  
 10 καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ  
 ἀπὸ τῆς ΘΑ ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ  
 τομεύς ποτὶ τὸν Χς τομέα· ὥστε ἐλάσσων ἔστιν ὁ Χς τομεύς  
 τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων·  
 οὐκ ἄρα ἐσσεῖται ὁ Χς τομεύς μείζων τοῦ περιεχομένου χω-  
 15 ρίου ὑπὸ τε τῆς ΑΒΓΔΕ ἑλίκος καὶ τῶν ΑΘ, ΘΕ ἐσθιῶν.

οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα  
 τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. πάλιν δὴ  
 δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγρά-  
 ψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων το-  
 μέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρη-  
 μένον χωρίον μείζον εἴμεν τοῦ ἐγ-  
 γραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ  
 ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ  
 Χς τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ  
 ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται  
 τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος  
 μὲν ὁ ΘΒΓ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ·  
 δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον  
 σχῆμα μείζον ἐστι τοῦ Χς τομέως.  
 πάλιν οὖν ἐντὶ τινες γραμμαὶ τῷ



ἴσῳ ἀλλάλας ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἑλικά πο-  
 Η 108 τιπίπτουσai, ὃν ἔστι μεγίστα μὲν ἡ ΘΑ, ἐλάχιστα δὲ ἡ ΘΕ,

ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων, οἱ ὅποιοι ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας ἐκτὸς τοῦ τομέως τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ (θ. 11, πόρ.). Εἶναι δὲ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην ἴσος ὁ τομεὺς ΘΑΖ, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας εἶναι ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· ἔχει λοιπὸν ὁ τομεὺς ΘΑΖ πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΘΕ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ εἰρημένον ἄθροισμα τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ τομεὺς ΘΑΖ πρὸς τὸν τομέα Χς· ὥστε ὁ τομεὺς Χς εἶναι μικρότερος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 10). Δὲν εἶναι ὅμως, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερος· δὲν θὰ εἶναι ἄρα ὁ τομεὺς Χς μεγαλύτερος τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ.

Ἄλλ' οὕτε μικρότερος εἶναι. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι μικρότερος, καὶ ἄς γίνῃ κατὰ τὰ λοιπὰ ἡ αὐτὴ κατασκευή. Εἶναι λοιπὸν πάλιν δυνατόν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον σχῆμα συγκείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ὑπερέχει ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια τοῦ τομέως Χς. Ἄς ἐγγραφῇ λοιπὸν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΒΓ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τομέως Χς. Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν ἑλικὰ προσπίπτουσαι, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλάχιστη δὲ ἡ ΘΕ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ

ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΘΑΖ  
τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τὰς ΘΑ τῷ μὲν  
πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ  
δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστῃ ἴσαι, καὶ ἀναγεγρά-  
5 φαται ἀπὸ ἐκάστας ὁμοίῳ τομέες, ἀπὸ δὲ τᾷς μεγίστας τῶν  
τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερεχουσᾶν οὐκ ἀναγράφονται· οἱ τομέες  
οὖν οἱ ἀπὸ τῶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστῃ ποτὶ τοὺς  
τομέας τοὺς ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς  
τοῦ ἀπὸ τᾷς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον  
10 τὸ ἀπὸ τᾷς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέ-  
ρος τοῦ ἀπὸ τᾷς ΕΖ· ὥστε καὶ ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγε-  
γραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ποτὶ τὸν Χς το-  
μέα· ὥστε μείζων ὁ Χς τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήμα-  
ματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων· οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσ-  
15 σων ὁ Χς τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τε τᾷς  
ΑΒΓΔΕ ἑλικος καὶ τῶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειῶν· ἴσος ἄρα.

κζ'

Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε τῶν ἐλίκων καὶ  
τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τᾷ περιφορᾷ τὸ μὲν τρίτον τοῦ δευτέρου  
20 διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ τέταρτον τριπλάσιον, τὸ δὲ πέμπτου  
τετραπλάσιον, καὶ αἰτὶ τὸ ἐπόμενον κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς  
πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ πρῶτον χωρίον  
ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου.

ἔστω ἃ προκειμένα ἔλιξ ἔν τε τᾷ πρώτῃ περιφορᾷ γε-  
25 γραμμένα καὶ ἐν τᾷ δευτέρῃ καὶ ἐν ταῖς ἐπομέναις ὅποσαι-  
σοῦν, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾷς ἑλικος τὸ Θ σαμεῖον, ἃ δὲ ΘΕ  
H 110 εὐθεῖα ἀρχὰ τᾷς περιφορᾶς, τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν Κ  
τὸ πρῶτον, τὸ δὲ Λ τὸ δεύτερον, τὸ δὲ Μ τὸ τρίτον, τὸ δὲ  
Ν τὸ τέταρτον, τὸ δὲ Ξ τὸ πέμπτου. δεικτέον, ὅτι τὸ μὲν Κ  
30 χωρίον ζ' μέρος ἐστὶ τοῦ ἐπομένου, τὸ δὲ Μ διπλάσιον τοῦ Λ,



τοῦ  $\Theta$  πρὸς τὸ τόξον τοῦ τομέως  $\Theta AZ$  ἐκτὸς τῆς  $\Theta A$ , κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι μεῖον ἔν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ ἐκάστης εὐθείας ὅμοιοι τομεῖς, δὲν ἔχει δὲ ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς μεγίστης τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τομέων, οἱ ὅποιοι εἶναι ἀναγεγραμμένοι ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἐκτὸς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τομέως, ἔχει λόγον μεγαλύτερον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta A$ , πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $\Theta E$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $EZ$  ( $\theta$ . 11, πόρ.)· ὥστε καὶ ὁ τομεὺς  $\Theta AZ$  πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸν τομέα  $X\zeta$ · ὥστε ὁ τομεὺς  $X\zeta$  εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος (*Εὐκλ.* V, 10). Δὲν εἶναι δέ, ἀλλὰ εἶναι μικρότερος· δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μικρότερος ὁ τομεὺς  $X\zeta$  τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑλικος  $AB\Gamma\Delta E$  καὶ τῶν εὐθειῶν  $A\Theta$ ,  $\Theta E$ · εἶναι ἄρα ἴσος.

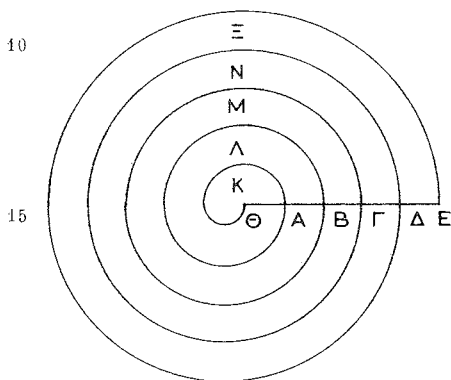
## 27

Ἐκ τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ἐλικῶν καὶ τῶν εὐθειῶν τῶν περιφορῶν τὸ μὲν τρίτον εἶναι διπλάσιον τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τέταρτον τριπλάσιον, τὸ δὲ πέμπτον τετραπλάσιον, καὶ πάντοτε τὸ ἐπόμενον κατ' ἀναλογίαν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς πρώτης ἐπιφανείας εἶναι τὸ ἐν ἑκτον τῆς δευτέρας.

Ἐστω ἡ προκειμένη ἑλιξ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ κατὰ τὴν δευτέραν καὶ ὅσασδήποτε ἐν συνεχείᾳ ἄλλας, ἔστω δὲ ἀρχὴ μὲν τῆς ἑλικος τὸ σημεῖον  $\Theta$ , ἡ δὲ εὐθεῖα  $\Theta E$  ἔστω ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, ἐκ τῶν ἐμβαδῶν δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ἔστω πρῶτον μὲν τὸ  $K$ , δεύτερον δὲ τὸ  $\Lambda$ , τρίτον δὲ τὸ  $M$ , τέταρτον δὲ τὸ  $N$ , τὸ δὲ  $\Xi$  τὸ πέμπτον. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ μὲν ἐμβαδὸν  $K$  εἶναι τὸ ἐν ἑκτον τοῦ ἐπομένου, τὸ δὲ  $M$  εἶναι διπλάσιον τοῦ  $\Lambda$ ,

τὸ δὲ  $N$  τριπλάσιον τοῦ  $\Lambda$ , καὶ τῶν ἐξῆς αἰεὶ τὸ ἐπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ  $\Lambda$  κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμούς.

ὅτι μὲν οὖν τὸ  $K$  ζ' μέρος ἐστὶ τοῦ  $\Lambda$ , ὥδε δείκνυται. ἐπεὶ τὸ  $K\Lambda$  χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ  $\zeta$  ποτὶ τὰ  $\iota\beta$ , ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ποτὶ τὸν πρῶτον κύκλον, ὡς  $\iota\beta$  ποτὶ τὰ  $\gamma$ . δηλὸν γάρ ἐστιν ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ποτὶ τὸ  $K$  χωρίον ἔχει, ὡς  $\gamma$  ποτὶ  $\alpha$ , ζ' ἄρα ἐστὶ τὸ  $K$  χωρίον τοῦ  $\Lambda$ . πάλιν δὲ καὶ τὸ  $K\Lambda M$  χωρίον



ποτὶ τὸν τρίτον κύκλον δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρων τό τε ὑπὸ  $\Gamma\Theta B$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Gamma B$  τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ  $\Gamma\Theta$  τετραγώνον. ὁ δὲ τρίτος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς

$\Gamma\Theta$  τετραγώνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Theta B$ , ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ  $K\Lambda$  χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ  $B\Theta$  τετραγώνον ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τό τε ὑπὸ τῶν  $B\Theta$ ,  $\Theta A$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνου· καὶ τὸ  $K\Lambda M$  ἄρα ποτὶ τὸ  $K\Lambda$  λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma\Theta$ ,  $\Theta B$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Gamma B$  ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $B\Theta$ ,  $\Theta A$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει ποτὶ ἄλλαλα λόγον, ὃν  $\iota\theta$  ποτὶ τὰ  $\zeta$ . ὥστε καὶ τὸ  $K\Lambda M$  χωρίον ποτὶ τὸ  $\Lambda K$  χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν  $\iota\theta$  ποτὶ τὰ  $\zeta$ . αὐτὸ οὖν τὸ  $M$  ποτὶ τὸ  $K\Lambda$  λόγον ἔχει, ὃν τὰ  $\iota\beta$  ποτὶ τὰ  $\zeta$ . τὸ δὲ  $K\Lambda$  ποτὶ τὸ  $\Lambda$  λόγον ἔχει, ὃν τὰ  $\zeta$  ποτὶ τὰ  $\varsigma$ . δηλὸν οὖν, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ  $M$  τοῦ  $\Lambda$ .

τὸ δὲ N τριπλάσιον τοῦ Λ, καὶ ἐκ τῶν ἐπομένων πάντοτε τὸ ἀκολουθοῦν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Λ κατὰ τοὺς ἀναλόγους ἀριθμούς.

“Οτι μὲν τὸ K εἶναι τὸ ἐν ἔκτον τοῦ Λ, ἀποδεικνύεται ὡς ἐξῆς. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας  $K + \Lambda$  ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ἔχει τοῦτον τὸν λόγον πρὸς τὸν δεύτερον κύκλον, ὃν ἔχουσι τὰ 7 πρὸς τὰ 12 (θ. 25), ὁ δὲ δεύτερος κύκλος πρὸς τὸν πρῶτον κύκλον ὡς τὰ 12 πρὸς τὰ 3· διότι τοῦτο εἶναι φανερόν (ἐκ τοῦ Εὐκλ. XII, 2 διότι  $\Theta B = 2 \Theta A$ )· ὁ δὲ πρῶτος κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν K ἔχει, ὡς τὰ 3 πρὸς τὸ 1 (θ. 24), εἶναι ἄρα ἡ ἐπιφάνεια K τὸ ἐν ἔκτον τῆς Λ (Ἐὰν κληθῇ ὁ πρῶτος κύκλος  $C_1$  καὶ ὁ δεύτερος  $C_2$  θὰ εἶναι  $K + \Lambda : C_2 = 7 : 12$ ,  $C_2 : C_1 = 12 : 3$ , (Εὐκλ. V, 22)  $K + \Lambda : C_1 = 7 : 3$ . Ἐπίσης εἶναι  $C_1 : K = 3 : 1$  καὶ  $K + \Lambda : K = 7 : 1$  ἢ  $K + \Lambda = 7K$ ,  $\Lambda = 6K$ ). Πάλιν δὲ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας  $K + \Lambda + M$  πρὸς τὸν τρίτον κύκλον ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Gamma\Theta$ ,  $\Theta B$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Gamma B$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Gamma\Theta$  (θ. 25, πρόρ.). Ὁ δὲ τρίτος κύκλος ἔχει πρὸς τὸν δεύτερον κύκλον λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς  $\Gamma\Theta$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta B$  (Εὐκλ. XII, 2), ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ἔχει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν  $K\Lambda$  λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς  $B\Theta$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $B\Theta$ ,  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $AB$  (θ. 25)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἐπιφανειῶν  $K + \Lambda + M$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν  $K + \Lambda$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Gamma\Theta$ ,  $\Theta B$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Gamma B$ , πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $B\Theta$ ,  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $AB$ . Ταῦτα δὲ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 19 πρὸς τὰ 7· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν  $K + \Lambda + M$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν  $\Lambda + K$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 19 πρὸς τὰ 7· αὐτὸ λοιπὸν τὸ M πρὸς τὸ  $K + \Lambda$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 12 πρὸς τὰ 7 (Εὐκλ. V, 17). Τὸ δὲ  $K + \Lambda$  πρὸς τὸ  $\Lambda$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 7 πρὸς τὰ 6· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ M εἶναι διπλάσιον τοῦ Λ (Εὐκλ. V, 22).

- ὅτι δὲ τὰ ἐπόμενα τὸν τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δει-  
 χθήσεται. τὸ γὰρ  $KAMNE$  ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ  
 κέντρου ἡ  $ΘΕ$ , τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρων  
 τὸ τε ὑπὸ τῶν  $ΕΘ$ ,  $ΘΔ$  περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ  
 5 ἀπὸ τῆς  $ΔΕ$  τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΘΕ$  τετραγώνου.  
 ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἡ  $ΘΕ$ , ποτὶ τὸν κύκλον,  
 οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἡ  $ΘΔ$ , τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν  
 τὸ ἀπὸ τῆς  $ΘΕ$  τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΘΔ$  τετραγώ-  
 νου, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἡ  $ΔΘ$ , ποτὶ τὸ  
 10  $KAMN$  χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς  $ΘΔ$   
 τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ τῶν  $ΘΔ$ ,  $ΘΓ$   
 καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΔΓ$  τετραγώνου· καὶ τὸ  
 $KAMNE$  ἄρα ποτὶ τὸ  $KAMN$  λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν  $ΘΕ$ ,  
 $ΘΔ$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΔΕ$  ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν  
 15  $ΔΘ$ ,  $ΘΓ$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΔΓ$ . διελόντι καὶ  
 τὸ  $Ξ$  χωρίον ποτὶ τὸ  $KAMN$  λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὑπεροχὰ τοῦ  
 τε ὑπὸ  $ΕΘ$ ,  $ΘΔ$  μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΕΔ$  καὶ  
 τοῦ ὑπὸ τῶν  $ΔΘ$ ,  $ΘΓ$  μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τῆς  
 Η 114  $ΓΔ$  ποτὶ τε τὸ ὑπὸ τῶν  $ΔΘ$ ,  $ΘΓ$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ  
 20 ἀπὸ τῆς  $ΔΓ$ . ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφοτέρα τῶν συναμφο-  
 τέρων, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ΕΘΔ$  τοῦ ὑπὸ τῶν  $ΔΘΓ$ , ὑπερέχει  
 δὲ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΔΘ$ ,  $ΓΕ$ . τὸ  $Ξ$  ἄρα ποτὶ τὸ  $KAMN$  λόγον  
 ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν  $ΘΔ$ ,  $ΓΕ$  ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ΔΘ$ ,  $ΘΓ$  καὶ  
 τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΓΔ$  τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν  
 25 αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ  $N$  ποτὶ τὸ  $KAM$  χωρίον λόγον  
 ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν  $ΘΓ$ ,  $ΒΔ$  ποτὶ τὰ συναμφοτέρα  
 τὸ τε ὑπὸ  $ΓΘΒ$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ  $ΓΒ$  τετραγώνου·  
 τὸ  $N$  ἄρα ποτὶ τὸ  $KAMN$  χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν  
 τὸ ὑπὸ  $ΘΓ$ ,  $ΒΔ$  ποτὶ τὸ ὑπὸ  $ΘΓ$ ,  $ΒΔ$  καὶ τὸ ὑπὸ  $ΘΓ$ ,  $ΘΒ$

“Ὅτι δὲ τὰ ἐπόμενα ἔχουσι τὸν λόγον τῶν ἐν συνεχείᾳ ἀριθμῶν ἀντιστοιχῶς, θὰ ἀποδειχθῇ. Διότι τὸ ἄθροισμα  $K + \Lambda + M + N + \Xi$  πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ  $\Theta E$ , τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $E\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Delta E$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta E$  (θ. 25, πόρ.). Ὁ δὲ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ  $\Theta E$ , πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ  $\Theta\Delta$ , τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta E$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta\Delta$ , ὁ δὲ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ  $\Delta\Theta$ , πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν  $K + \Lambda + M + N$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta\Delta$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta\Delta$ ,  $\Theta\Gamma$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Delta\Gamma$  (θ. 25, πόρ.). καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα  $K + \Lambda + M + N + \Xi$  πρὸς τὸ ἄθροισμα  $K + \Lambda + M + N$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Theta E$ ,  $\Theta\Delta$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Delta E$ , πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Delta\Gamma$ . καὶ διὰ διαιρέσεως (Εὐκλ. V, ὁρισ. 15) θὰ ἔχη τοῦτον τὸν λόγον ἡ ἐπιφάνεια  $\Xi$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν  $K + \Lambda + M + N$ , ὃν ἔχει ἡ ὑπεροχὴ, τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $E\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $E\Delta$ , ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Gamma\Delta$ , πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Delta\Gamma$ . Εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ τῶν δύο ἄθροισμάτων τόση, ὅση καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $E\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$ , ἰσοῦται δὲ ἡ ὑπεροχὴ αὕτη πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Delta\Theta$ ,  $\Gamma E$ . τὸ  $\Xi$  ἄρα πρὸς τὸ ἄθροισμα  $K + \Lambda + M + N$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Theta\Delta$ ,  $\Gamma E$  πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Gamma\Delta$ . Καθ’ ὁμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ  $N$  πρὸς τὸ ἄθροισμα  $K + \Lambda + M$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Theta\Gamma$ ,  $B\Delta$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Gamma\Theta$ ,  $\Theta B$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Gamma B$ . καὶ τὸ  $N$  ἄρα πρὸς τὸ ἐμβαδὸν  $K + \Lambda + M +$

καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $\Gamma B$  [καὶ ἀνάπαλιν]· ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν  $\Delta \Theta$ ,  $\Theta \Gamma$  καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς  $\Gamma \Delta$  τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  $\Xi$  χωρίον ποτὶ τὸ  $K \Lambda M N$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν  $\Theta \Delta$ ,  $\Gamma E$   
 5 ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν  $\Delta \Theta \Gamma$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $\Gamma \Delta$  τετραγώνου, τὸ δὲ  $K \Lambda M N$  ποτὶ τὸ  $N$ , ὃν τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν  $\Delta \Theta \Gamma$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $\Gamma \Delta$  τετραγώνου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν  $\Theta \Gamma$ ,  $\Delta B$ , ἔχει ἄρα καὶ τὸ  $\Xi$  ποτὶ τὸ  $N$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν  $\Theta \Delta$ ,  
 10  $\Gamma E$  ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν  $\Theta \Gamma$ ,  $\Delta B$ . τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν  $\Theta \Delta$ ,  $\Gamma E$  ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν  $\Theta \Gamma$ ,  $\Delta B$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ  $\Theta \Delta$  ποτὶ τὰν  $\Theta \Gamma$ , ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ  $\Gamma E$ ,  $B \Delta$ . δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ  $\Xi$  ποτὶ τὸ  $N$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἡ  $\Theta \Delta$  ποτὶ τὰν  $\Theta \Gamma$ .

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ  $N$  ποτὶ τὸ  $M$  τοῦτον ἔχον  
 Η 116 τὸν λόγον, ὃν ἡ  $\Theta \Gamma$  ποτὶ τὰν  $\Theta B$ , καὶ τὸ  $M$  ποτὶ τὸ  $\Lambda$ , ὃν ἡ  $B \Theta$  ποτὶ τὰν  $A \Theta$ . αἱ δὲ  $[E \Theta]$   $\Delta \Theta$ ,  $\Gamma \Theta$ ,  $B \Theta$ ,  $A \Theta$  εὐθεῖαι τὸν τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

κη'

Εἴ κα ἐπὶ τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμ-  
 20 μένας δύο σαιμεῖα λαφθέωντι μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σαιμείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχῇ τᾶς ἑλικος, διαστημά-  
 τεσσι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σαιμείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος, κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς με-  
 25 ζονος τᾶν περιφερειᾶν τᾶν μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν καὶ τᾶς ἑλικος τᾶς μεταξὺ τᾶν αὐτῶν εὐθειᾶν καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβλη-  
 θείσας τοῦτον ἔξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπὸ

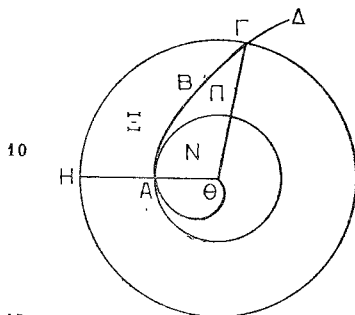
+ N τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΒΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΒΔ σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΘΒ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΒ [ καὶ ἀνάπαλιν ]· ταῦτα δὲ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὸ ἄθροισμα  $K + \Lambda + M + N$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον ΘΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἄθροισμα  $K + \Lambda + M + N$  πρὸς τὸ N, ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΔΒ (Εὐκλ. V, 7 πόρ.), ἔχει ἄρα καὶ τὸ Ξ πρὸς τὸ N τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΔΒ (Εὐκλ. V, 22). Τὸ δὲ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΔΒ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΘΓ, ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι αἱ ΓΕ, ΒΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ Ξ πρὸς τὸ N τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΘΓ.

Καθ' ὁμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ N πρὸς τὸ M τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΘΒ, καὶ τὸ M πρὸς τὸ Λ, ὃν ἔχει ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΑΘ· αἱ δὲ [ΕΘ] ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ εὐθεῖαι ἔχουσι τὸν λόγον τῶν κατὰ σειρὰν ἐπομένων ἀντιστοίχων ἀριθμῶν.

28

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἑλικος τῆς γεγραμμένης καθ' οἷανδήποτε περιφορὰν ληφθῶσι δύο σημεῖα, οὐχὶ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν ληφθέντων σημείων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἑλικος, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς ἑλικος, ἀκτῖνας δὲ τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος, γραφῶσι κύκλοι, ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιλαμβανομένη ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τοῦ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν καὶ τοῦ ἐλικοειδοῦς τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν καὶ τῆς προεκβληθείσης (μικροτέρας) ἀκτῖνος θὰ ἔχη τοῦτον

τε τᾷς ἐλάσσονος περιφερείας καὶ τᾷς αὐτᾷς ἑλικος καὶ τᾷς  
εὐθείας τᾷς ἐπιξευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἃ ἐκ τοῦ  
κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾷς  
ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἃ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου  
5 τᾷς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ



κέντρον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου  
μετὰ ἐνὸς τριταμορίου τᾶς ἀν-  
τᾶς ὑπεροχᾶς.

ἔστω ἑλῖξ, ἐφ' ἧς ἁ  $AB\Gamma\Delta$ ,  
ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα,  
καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾷ δύο σα-  
μεῖα τὰ  $A, \Gamma$ , ὥστε τὸ  $\Theta$  σα-  
μεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἑλίκος,  
καὶ ἀπὸ τῶν  $A, \Gamma$  ἐπεξεύχθω-  
σαν ἐπὶ τὸ  $\Theta$ , καὶ κέντρῳ τῷ

$\Theta$ , διασθημάτεσσι δὲ τοῖς  $\Theta A$ ,  $\Theta \Gamma$ , κύκλοι γεγραφθῶσαν.  
 δεικτέον, ὅτι τὸ  $\Xi$  χωρίον ποτὶ τὸ  $\Pi$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον,  
 ὃν ἔχει συναμφοτέρως ἅ τε  $A\Theta$  καὶ δύο τριταμόρια τᾶς  $HA$   
 ποτὶ συναμφοτέρον τὰν τε  $A\Theta$  καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς  $HA$ .  
 20 τὸ γὰρ χωρίον τὸ  $N\Pi$  ποτὶ τὸν  $H\Gamma\Theta$  τομέα δέδεικται  
 τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν  $H\Theta$ ,  $A\Theta$  καὶ  
 τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $AH$  τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ  
 τᾶς  $H\Theta$  τετραγώνου· αὐτὸ ἄρα τὸ  $\Xi$  ποτὶ τὸ  $N\Pi$  τοῦτον  
 ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν  $\Theta AH$  μετὰ δύο τριτα-  
 25 μορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$  τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφοτέρα  
 τό τε ὑπὸ τᾶν  $A\Theta H$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$ .  
 καὶ ἐπεὶ τὸ  $N\Pi$  χωρίον ποτὶ τὸν  $N\Pi\Xi$  τομέα τοῦτον ἔχει  
 τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρον τό τε ὑπὸ τᾶν  $\Theta A$ ,  $\Theta H$   
 καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$  ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς  $\Theta H$   
 30 τετραγώνου, ὃ δὲ  $N\Pi\Xi$  τομεὺς ποτὶ τὸν  $N$  τομέα τοῦτον  
 ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς  $\Theta H$  ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς  $\Theta A$ , ἔξει  
 καὶ τὸ  $N\Pi$  χωρίον ποτὶ τὸν  $N$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμ-



τὸν λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιλαμβανομένην ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μικροτέρου κύκλου καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐλικοειδοῦς τόξου καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ πέρατα αὐτῶν, ὃν ἔχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τῆς ἀκτίνος τοῦ μικροτέρου κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὸ ἐν τρίτον τῆς αὐτῆς ὑπεροχῆς.

Ἐστω ἔλιξ, ἐφ' ἧς τὸ ἐλικοειδὲς τόξον ΑΒΓΔ, γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, καὶ ἄς ληθῶσιν ἐπ' αὐτοῦ τὰ δύο σημεῖα Α, Γ, ὥστε τὸ σημεῖον Θ νὰ εἶναι ἀρχὴ τῆς ἑλικος, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ ἄς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι μέχρι τοῦ Θ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνας δὲ τὰς ΘΑ, ΘΓ, ἄς γραφῶσι κύκλοι. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς ΑΘ σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ΑΘ σὺν τὸ ἐν τρίτον τῆς ΗΑ.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια  $N + \Pi$  πρὸς τὸν τομέα  $H\Gamma\Theta$  ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι ἔχει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $H\Theta$ ,  $A\Theta$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $AH$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $H\Theta$  (θ. 26)· αὕτη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν  $N + \Pi$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $AH$  σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $A\Theta$ ,  $\Theta H$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$ . Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια  $N + \Pi$  πρὸς τὸν τομέα  $N\Pi\Xi$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $\Theta H$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta H$ , ὁ δὲ τομεὺς  $N\Pi\Xi$  πρὸς τὸν τομέα  $N$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta H$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta A$ , θὰ ἔχῃ καὶ ἡ ἐπιφάνεια  $N + \Pi$  πρὸς τὸν τομέα  $N$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $\Theta H$  σὺν τὸ ἐν τρίτον

φότερον τό τε ὑπὸ  $\Theta A$ ,  $\Theta H$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  
 $HA$  ποτὶ τὸ ἀπὸ  $\Theta A$ · τὸ ἄρα  $NI$  ποτὶ τὸ  $\Pi$  λόγον ἔχει, ὃν  
 H 120 συναμφοτέρα τό τε ὑπὸ τᾶν  $H\Theta A$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ  
 ἀπὸ τᾶς  $HA$  ποτὶ συναμφοτέρον τό τε ὑπὸ τᾶν  $HA$ ,  $\Theta A$   
 5 καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$  τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν  
 τὸ  $\Xi$  χωρίον ποτὶ τὸ  $NI$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει  
 συναμφοτέρον τό τε ὑπὸ  $\Theta AH$  καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ  
 τᾶς  $HA$  τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τό τε ὑπὸ τᾶν  
 $H\Theta A$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$ , τὸ δὲ  $NI$  χω-  
 10 ρίον ποτὶ τὸ  $\Pi$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὰ συναμφοτέρα  
 τό τε ὑπὸ τᾶν  $H\Theta A$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$   
 τετραγώνου ποτὶ συναμφοτέρον τό τε ὑπὸ τᾶν  $HA\Theta$  καὶ  
 τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$  τετραγώνου, ἔξει καὶ τὸ  
 $\Xi$  ποτὶ τὸ  $\Pi$  τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρα τό τε  
 15 ὑπὸ τᾶν  $\Theta AH$  καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$  ποτὶ  
 συναμφοτέρον τό τε ὑπὸ τᾶν  $\Theta AH$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ  
 ἀπὸ τᾶς  $HA$ . τὰ δὲ συναμφοτέρα τό τε ὑπὸ τᾶν  $\Theta AH$  καὶ  
 δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$  ποτὶ συναμφοτέρα τό τε  
 ὑπὸ τᾶν  $\Theta AH$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς  $HA$  τετρα-  
 20 γώνου τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρα ἅ τε  
 $\Theta A$  καὶ δύο τριταμόρια τᾶς  $HA$  ποτὶ συναμφοτέρον τάν  
 τε  $\Theta A$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς  $HA$ · ὁῦλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ  
 $\Xi$  χωρίον ποτὶ τὸ  $\Pi$  χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμ-  
 25 φότερον τάν τε  $\Theta A$  καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς  $HA$ .

τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\Theta A$  (Εὐκλ. V, 22)· τὸ ἄθροισμα ἄρα  $N + \Pi$  πρὸς τὸ  $\Pi$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $H\Theta$ ,  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $HA$ ,  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια  $\Xi$  πρὸς τὴν  $N + \Pi$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $AH$ , σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $H\Theta$ ,  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$ , ἡ δὲ ἐπιφάνεια  $N + \Pi$  πρὸς τὴν  $\Pi$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $H\Theta$ ,  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $HA$ ,  $A\Theta$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  (Εὐκλ. V, 22), θὰ ἔχη καὶ ἡ ἐπιφάνεια  $\Xi$  πρὸς τὴν  $\Pi$  τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $AH$  σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $AH$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$ . Τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $AH$  σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν  $\Theta A$ ,  $AH$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς  $HA$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς  $\Theta A$  σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τῆς  $HA$ . εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια  $\Xi$  πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν  $\Pi$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς  $\Theta A$  σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς  $HA$  πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς  $\Theta A$  σὺν τὸ ἐν τρίτον τῆς  $HA$ .



# ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α' ΚΑΙ Β'

(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ)

ΒΙΒΛΙΑ 2

## ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α'

Η 124

Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν  
ἐπιπέδων α'

α'. Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεια ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν,  
τὰ δὲ ἴσα βάρεια ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν,  
5 ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος.

β'. εἴ κα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπὸ τινων μακέων ποτὶ  
τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν  
ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο, ᾧ ποτετέθη.

γ'. ὁμοίως δὲ καί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀ-  
10 φαιρεθῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος, ἀφ' οὗ  
οὐκ ἀφηρεθή.

δ'. τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζο-  
μένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ'  
ἄλλαλα.

15 ε'. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁ-  
μοίως ἐσσεῖται κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομες σαμεῖα κέεσθαι  
ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι  
εὐθεῖαι ποίοντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς.

ζ'. εἴ κα μεγέθεα ἀπὸ τινων μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ  
20 ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει.

Η 126 ζ'. παντὸς σχήματος, οὗ κα ἅ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
κοίλα ᾗ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς εἴμεν δεῖ τοῦ σχήματος.  
Τούτων δὲ ὑποκειμένων.

α'

25 Τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεια ἴσα ἐντί.  
εἴπερ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς

## ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α'

( Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων )  
βιβλίον 1

1. Λαμβάνομεν ὡς αἰτήματα τὰ ἴσα βάρη νὰ ἰσορροπῶσιν ἐξηρτημένα ἀπὸ ἴσων μηκῶν, τὰ δὲ ἴσα βάρη ἐξηρτημένα ἀπὸ ἀνίσων μηκῶν νὰ μὴ ἰσορροπῶσι, ἀλλὰ νὰ κλίνη (ἢ φάλαγξ) πρὸς τὸ βάρος τὸ ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον μῆκος.

2. Ἐὰν ὑπάρχωσι βάρη ἐξηρτημένα ἀπὸ τινων μηκῶν ( ἀπὸ τοῦ σημείου στηρίξεως ) ἰσορροποῦντα καὶ προστεθῇ βάρος εἰς τὸ ἐν ἐκ τούτων, νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, ἀλλὰ νὰ κλίνη (ἢ φάλαγξ) πρὸς τὸ βάρος ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὅποῖον ἔγινεν ἡ πρόσθεσις.

3. Ὅμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἀπὸ τὸ ἐν βάρος ἀφαιρεθῇ τι, νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, ἀλλὰ νὰ κλίνη (ἢ φάλαγξ) πρὸς τὸ βάρος, ἀπὸ τοῦ ὁποίου οὐδὲν ἀφηρέθη.

4. Ἐὰν ἴσα καὶ ὅμοια σχήματα ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἄλληλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν των ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα.

5. Τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ κεῖνται ὁμοίως. Ὅμοίως δὲ λέγομεν ὅτι σημεῖα κεῖνται εἰς τὰ ὅμοια σχήματα, ἐκεῖνα ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουν μετὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνίας ἴσας.

6. Ἐὰν μεγέθη ἐξηρτημένα ἀπὸ τινων μηκῶν ἰσορροπῶσι, καὶ τὰ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν μηκῶν θὰ ἰσορροπήσωσι.

7. Παντὸς σχήματος, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κοίλη, τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐντὸς τοῦ σχήματος.

Κατόπιν τῶν αἰτημάτων τούτων.

### 1

Τὰ ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροποῦντα βάρη εἶναι ἴσα.

Διότι ἐὰν εἶναι ἄνισα, ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ μεγαλύτερου ἀφαιρεθῇ ἡ

ὑπεροχᾶς τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροποῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἐτέρου ἀφήρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεα ἰσορροπεόντα ἴσα ἐντί.

β'

5 Τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα οὐκ ἰσορροπεύοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἐπὶ τὸ μείζον.

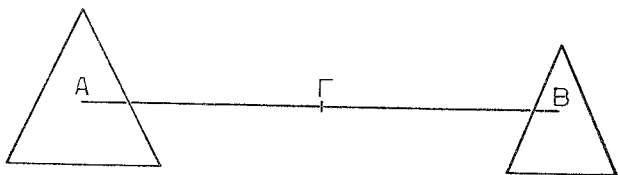
ἀφαιρεθείσας γὰρ τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροποῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπεύοντι. ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέπει ἐπὶ τὸ μείζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῶν  
10 ἐτέρω ποτετέθη.

γ'

Τὰ ἄνισα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροποῦντι, καὶ τὸ μείζον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

ἔστω ἄνισα βάρεα τὰ  $A$ ,  $B$ , καὶ ἔστω μείζον τὸ  $A$ , καὶ  
15 ἰσορροπεόντων ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  μακέων. δεικτέον, ὅτι ἐλάσσω-  
σων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τᾶς  $ΓΒ$ .

μὴ γὰρ ἔστω ἐλάσσων. ἀφαιρεθείσας δὴ τᾶς ὑπεροχᾶς,  
H 128 ᾧ ὑπερέχει τὸ  $A$  τοῦ  $B$ , ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἐτέρου ἀφήρηται, ῥέπει ἐπὶ τὸ  $B$ . οὐ ῥέπει δέ· εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἡ



20  $ΓΑ$  τᾷ  $ΓΒ$ , ἰσορροποῦντι [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων], εἴτε μείζων ἡ  $ΓΑ$  τᾶς  $ΓΒ$ , ῥέπει ἐπὶ τὸ  $A$ . τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπεύοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μέρος. διὰ δὴ ταῦτα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τᾶς  $ΓΒ$ .



ὑπεροχή, τὰ ὑπόλοιπα δὲν θὰ ἰσορροπήσωσι, ἐπειδὴ ἐν ᾧ ὑπάρχουσι ἰσορροποῦντα βάρη ἀφηρέθη κάτι ἀπὸ τοῦ ἐνός (αἵτ. 3). Ὡστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μηχανῶν βάρη ἰσορροποῦντα εἶναι ἴσα.

## 2

Τὰ ἀπὸ ἴσων μηχανῶν ἄνισα βάρη δὲν ἰσορροποῦσιν, ἀλλὰ ἡ φάλαγξ κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ μεγαλυτέρου.

Διότι ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπεροχή θὰ ἰσορροπήσωσι, ἐπειδὴ τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μηχανῶν ἐξηρητημένα ἰσορροποῦσι (αἵτ. 1). Ἐὰν λοιπὸν προστεθῇ τὸ ἀφαιρεθὲν ἡ φάλαγξ θὰ κλίνη πρὸς τὸ μεγαλύτερον ἐπειδὴ, ἐν ᾧ ὑπῆρχεν ἰσορροπία εἰς τὸ ἐν ἐκ τούτων προστετέθη βάρος (αἵτ. 2).

## 3

Ἐὰν τὰ ἄνισα βάρη ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηχανῶν ἰσορροπῶσιν, τὸ μεγαλύτερον θὰ εἶναι ἐξηρητημένον ἀπὸ τοῦ μικροτέρου μήκους.

Ἐστω ἄνισα βάρη τὰ Α, Β, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ Α, καὶ ὅτι ἰσορροποῦσι ἐξηρητημένα ἀπὸ τῶν μηχανῶν ΑΓ, ΒΒ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΒ.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν εἶναι μικροτέρα. Ἀφοῦ λοιπὸν ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Β, ἐπειδὴ ἐν ᾧ εὐρίσκοντο ἐν ἰσορροπία ἀφηρέθη ἀπὸ τοῦ ἐνός βάρος, ἡ φάλαγξ θὰ κλίνη πρὸς τὸ Β (αἵτ. 3). Ἀλλὰ δὲν θὰ κλίνη· διότι ἐὰν εἶναι ἴση ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΒΒ, θὰ ἰσορροπήσωσι [διότι τὰ ἴσα ἰσορροποῦσιν ἀπὸ τῶν ἴσων μηχανῶν] (αἵτ. 1), ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΓΑ τῆς ΒΒ, θὰ ἐπέλθῃ κλίσις πρὸς τὸ Α· διότι τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηχανῶν δὲν ἰσορροποῦσι, ἀλλὰ ἡ φάλαγξ κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ μεγαλυτέρου μήκους (αἵτ. 1). Διὰ τοὺς λόγους τούτους ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΒ.

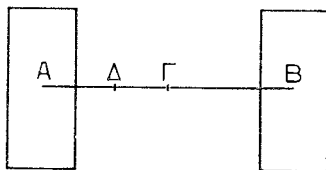
Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηχανῶν ἰσορ-

φανερὸν δέ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορρο-  
πέοντα ἄνισά ἐντι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

δ'

Εἴ κα δύο ἴσα μεγέθεα μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους  
5 ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέ-  
θεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς  
ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρους.

ἔστω τοῦ μὲν  $A$  κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Delta$ , τοῦ δὲ  $B$  τὸ  
 $B$ , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ  $AB$  τετμᾶσθω δι᾽ ἡ  $\Gamma$ . λέγω,



10 ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος  
κέντρον ἐστὶ τὸ  $\Gamma$ .

εἰ γὰρ μὴ, ἔστω [τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $A, B$  μεγεθῶν]  
κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Delta$ , εἰ δυνατόν [ὅτι γὰρ ἔστιν ἐπὶ τῆς  
 $AB$ , προδεδεικται]. ἐπεὶ οὖν τὸ  $\Delta$  σάμειον κέντρον ἐστὶν τοῦ

15 βάρους τοῦ ἐκ τῶν  $A, B$  συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου  
τοῦ  $\Delta$  ἰσορροπήσει· τὰ ἄρα  $A, B$  μεγέθεα ἰσορροποῦντι  
ἀπὸ τῶν  $\Delta\Delta, \Delta B$  μακέων· ὅπερ ἀδύνατον [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ  
H 130 τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροποῦντι]. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ  
 $\Gamma$  κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ ἐκ τῶν  $A, B$  συγκειμένου με-  
20 γέθεος.

ε'

Εἴ κα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἐπ' εὐθείας  
ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ  
μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν  
25 μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βά-

ροποῦντα εἶναι ἄνισα, καὶ μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἐξηρητημένον ἀπὸ τοῦ μικροτέρου.

4

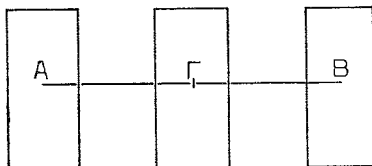
Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο μεγέθη μὴ ἔχοντα τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους, τὸ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν θὰ εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα βάρους τῶν μεγεθῶν.

Ἐστω τοῦ μὲν μεγέθους Α κέντρον βάρους τὸ Α, τοῦ δὲ Β τὸ Β, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ εὐθεΐα ΑΒ ἃς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν κέντρον βάρους εἶναι τὸ Γ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω εἰ δυνατόν τὸ Δ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους [ τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθῶν Α, Β ] συγκειμένου μεγέθους [ ἔχει δὲ προαποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΒ ]. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β, ἐὰν τοῦτο στηριχθῇ ἐπὶ τοῦ Δ θὰ ἰσορροπήσῃ. Τὰ μεγέθη ἄρα Α, Β θὰ ἰσορροπήσωσιν ἐξηρητημένα ἀπὸ τῶν μηκῶν ΑΔ, ΔΒ· ὅπερ ἀδύνατον [ διότι τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν δὲν ἰσορροποῦσι ] (αἴτ. 1). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ Γ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β.

5

Ἐὰν τὰ κέντρα βάρους τριῶν μεγεθῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ μεγέθη ἔχωσιν ἴσον βάρος ἕκαστον, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων βάρους



εὐθεΐαι εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι

ρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

ἔστω τρία μεγέθη τὰ  $A, B, \Gamma$ , κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρους τὰ  $A, B, \Gamma$  σαμεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα, ἔστω δὲ  
 5 τὰ τε  $A, B, \Gamma$  ἴσα καὶ αἱ  $ΑΓ, ΒΒ$  ἴσαι εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  $\Gamma$  σαμεῖον.

ἐπεὶ γὰρ τὰ  $A, B$  μεγέθη ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ  $\Gamma$  σαμεῖον, ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ  $ΑΓ, ΒΒ$ .  
 10 ἔστιν δὲ καὶ τοῦ  $\Gamma$  κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Gamma$  σαμεῖον· δηλὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθους κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

#### ΠΟΡΙΣΜΑ Α'

15 ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ὁπόσων κα τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴ κα τὰ τε ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθη ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν  
 Η 132 ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέ-  
 20 θεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

#### ΠΟΡΙΣΜΑ Β'

εἴ κα καὶ ἄρτια ἔωντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθη, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ  
 25 μέσα αὐτῶν καὶ τὰ ἴσα ἀπέχοντα ἀπ' αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ

# ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α΄ (ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Α΄)

κέντρον βάρους καὶ τοῦ μεσαίου μεγέθους.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, κέντρα δὲ τοῦ βάρους αὐτῶν τὰ σημεία Α, Β, Γ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἔστω δὲ ὅτι τὰ Α, Β, Γ εἶναι ἴσα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΒ εἶναι ἴσαι· λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν συγκειμένου μεγέθους εἶναι τὸ σημεῖον Γ.

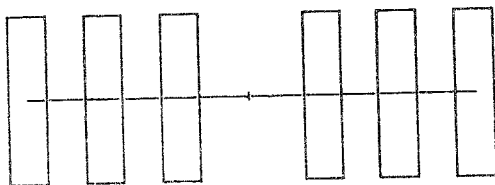
Διότι ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α, Β ἔχουσιν ἴσον βάρος ἕκαστον, τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Β, ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΒΒ εἶναι ἴσαι (θ. 4). Εἶναι δὲ καὶ τοῦ Γ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Γ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους καὶ τοῦ μεσαίου μεγέθους.

## ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν τὰ κέντρα τοῦ βάρους ὁσωνδήποτε μεγεθῶν περιττῶν κατὰ τὸ πλῆθος κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὰ μεγέθη τὰ ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τοῦ μέσου ἔχωσιν ἴσον βάρος, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεσαίου ἐξ αὐτῶν.

## ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Ἐὰν τὰ μεγέθη εἶναι ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὰ μεσαῖα ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ



ἴσον ἀπ' αὐτῶν ἀπέχοντα ἔχωσιν ἴσον βάρος, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων ( τῶν βαρῶν ) εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον τοῦ βάρους

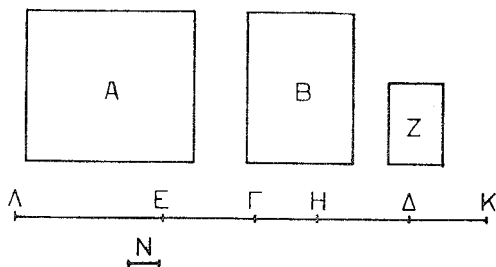
ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθους κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνύουσας τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.

5

ζ'

Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἰσορροπεύοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονητότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς βάρεσιν.

ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ  $A$ ,  $B$ , ὧν κέντρα τὰ  $A$ ,  $B$ , καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ  $ΕΔ$ , καὶ ἔστω, ὡς τὸ  $A$  ποτὶ τὸ  $B$ ,



10 οὕτως τὸ  $ΔΓ$  μᾶκος ποτὶ τὸ  $ΓΕ$  μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $A$ ,  $B$  συγκειμένου μεγέθους κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ  $Γ$ .

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ  $A$  ποτὶ τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $ΔΓ$  ποτὶ τὸ  $ΓΕ$ , τὸ δὲ  $A$  τῷ  $B$  σύμμετρον, καὶ τὸ  $ΓΔ$  ἄρα τῷ  $ΓΕ$  σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεία τᾷ εὐθείᾳ· ὥστε τῶν  $ΕΓ$ ,  $ΓΔ$  ἐστὶ κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ  $N$ , καὶ κείσθω τᾷ μὲν  $ΕΓ$  ἴσα ἐκατέρω τῶν  $ΔΗ$ ,  $ΔΚ$ , τᾷ δὲ  $ΔΓ$  ἴσα ἡ  $ΕΛ$ . καὶ ἐπεὶ ἴσα ἡ  
 15  $ΔΗ$  τᾷ  $ΓΕ$ , ἴσα καὶ ἡ  $ΔΓ$  τᾷ  $ΕΗ$ . ὥστε καὶ ἡ  $ΛΕ$  ἴσα τᾷ  $ΕΗ$ . διπλασία ἄρα ἡ μὲν  $ΛΗ$  τᾷς  $ΔΓ$ , ἡ δὲ  $ΗΚ$  τᾷς  $ΓΕ$ . ὥστε τὸ  
 20  $N$  καὶ ἑκατέραν τῶν  $ΛΗ$ ,  $ΗΚ$  μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς τὸ  $A$  ποτὶ τὸ  $B$ , οὕτως ἡ  $ΔΓ$  ποτὶ  $ΓΕ$ , ὡς δὲ ἡ  $ΔΓ$  ποτὶ  $ΓΕ$ , οὕτως ἡ  $ΛΗ$  ποτὶ  $ΗΚ$ . διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ  $A$  ποτὶ τὸ

τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεγεθῶν, ὡς δηλοῦται εἰς τὸ σχῆμα.

6

Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἰσορροποῦσιν ἀπὸ μηχανῶν, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν λόγον τῶν βαρῶν.

Ἐστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, τῶν ὁποίων κέντρα τοῦ βάρους εἶναι τὰ Α, Β καὶ ἔστω τυχὸν μῆκος τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ μῆκος ΔΓ πρὸς τὸ μῆκος ΓΕ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β εἶναι τὸ Γ.

Διότι ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΓΕ, τουτέστιν εὐθεῖα εἶναι σύμμετρος πρὸς εὐθεῖαν (Εὐκλ. Χ, 11)· ὥστε τῶν μεγεθῶν ΕΓ, ΓΔ ὑπάρχει κοινὸν μέτρον. Ἐστω, ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ Ν, καὶ ἄς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΕΓ ἴση ἑκατέρα τῶν ΔΗ, ΔΚ, πρὸς δὲ τὴν ΔΓ ἴση ἡ ΕΛ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, εἶναι ἴση καὶ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΕΗ· ὥστε καὶ ἡ ΛΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Εἶναι ἄρα διπλασία ἡ μὲν ΛΗ τῆς ΔΓ, ἡ δὲ ΗΚ τῆς ΓΕ· ὥστε τὸ Ν μετρεῖ καὶ ἑκατέραν τῶν ΛΗ, ΗΚ, ἐπειδὴ μετρεῖ καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν (Εὐκλ. Χ, 12). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΚ· διότι ἑκατέρα εἶναι διπλασία ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΚ. Ὅσας φορὰς δὲ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΛΗ τῆς Ν, τόσας φορὰς μεγαλύτερον ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΛΗ πρὸς Ν, οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Ζ (Εὐκλ. V, ὁρισ. 5). Εἶναι δὲ καί, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΛΗ, οὕτως τὸ Β πρὸς Α (Εὐκλ. V, 7 πρό.)· δι' ἴσου ἄρα εἶναι, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς Ν, οὕτως

$B$ , οὕτως ἡ  $\Lambda H$  ποτὶ  $H K$ . ὁσαπλασίων δὲ ἐστὶν ἡ  $\Lambda H$  τῆς  $N$ ,  
 τοσανταπλασίων ἔστω καὶ τὸ  $A$  τοῦ  $Z$ . ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ  $\Lambda H$   
 ποτὶ  $N$ , οὕτως τὸ  $A$  ποτὶ  $Z$ . ἔστι δὲ καί, ὥς ἡ  $K H$  ποτὶ  
 $\Lambda H$ , οὕτως τὸ  $B$  ποτὶ  $A$ . δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὥς ἡ  $K H$  ποτὶ  
 5  $N$ , οὕτως τὸ  $B$  ποτὶ  $Z$ . ἰσάκεις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἡ  
 $K H$  τῆς  $N$  καὶ τὸ  $B$  τοῦ  $Z$ . ἐδείχθη δὲ τοῦ  $Z$  καὶ τὸ  $A$  πολ-  
 λαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ  $Z$  τῶν  $A, B$  κοινόν ἐστι μέτρον. διαι-  
 ρεθείσας οὖν τῆς μὲν  $\Lambda H$  εἰς τὰς τῇ  $N$  ἴσας, τοῦ δὲ  $A$  εἰς  
 τὰ τῷ  $Z$  ἴσα, τὰ ἐν τῇ  $\Lambda H$  τμήματα ἰσομεγέθη τῇ  $N$  ἴσα  
 10 ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ  $A$  τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν  
 τῷ  $Z$ . ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τῇ  $\Lambda H$   
 ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ  $Z$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἔχον  
 ἐπὶ μέσον τοῦ τμήματος, τά τε πάντα μεγέθη ἴσα ἐντὶ τῷ  
 $A$ , καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρ-  
 15 ρος τὸ  $E$ . ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ  
 ἐφ' ἑκάτερα τοῦ  $E$  ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν  
 H 136  $\Lambda E$  τῇ  $H E$ . ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ, εἴ κα ἐφ' ἕκα-  
 στον τῶν ἐν τῇ  $K H$  τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ  $Z$   
 κέντρον τοῦ βάρους ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος, τά τε  
 20 πάντα μεγέθη ἴσα ἐσσεῖται τῷ  $B$ , καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγ-  
 κειμένου κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται τὸ  $\Delta$ . ἐσσεῖται οὖν τὸ  
 μὲν  $A$  ἐπικείμενον κατὰ τὸ  $E$ , τὸ δὲ  $B$  κατὰ τὸ  $\Delta$ . ἐσσεῖται  
 δὴ μεγέθη ἴσα ἀλλήλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα  
 τοῦ βάρους ἴσα ἀπ' ἀλλήλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια  
 25 τῷ πλήθει· δηλον οὖν, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέ-  
 θεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τῆς εὐθείας τῆς  
 ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθῶν. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἡ  
 μὲν  $\Lambda E$  τῇ  $\Gamma \Delta$ , ἡ δὲ  $E \Gamma$  τῇ  $\Delta K$ , καὶ ὅλα ἄρα ἡ  $\Lambda \Gamma$  ἴσα τῇ  
 $\Gamma K$ . ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους τὸ  
 30  $\Gamma$  σαμείον. τοῦ μὲν ἄρα  $A$  κειμένου κατὰ τὸ  $E$ , τοῦ δὲ  $B$   
 κατὰ τὸ  $\Delta$ , ἰσορροπησούντι κατὰ τὸ  $\Gamma$ .

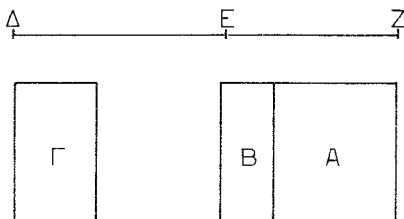


τὸ Β πρὸς Ζ  $\left( \frac{\Lambda\text{H}}{\text{N}} = \frac{\text{A}}{\text{Z}}, (1) \text{ καὶ } \frac{\text{K}\text{H}}{\Lambda\text{H}} = \frac{\text{B}}{\text{A}}, (2). \right.$  Δι' ἴσου σημαίνει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αἱ (1) καὶ (2) κατὰ μέλη. Εὐκλ. V, ὁρισ. 17 καὶ θεώρ. 22). ἰσάκεις ἄρα πολλαπλασία εἶναι ἡ ΚΗ τῆς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Ζ· ὥστε τὸ Ζ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β. Ἀφοῦ λοιπὸν διαιρεθῇ ἡ μὲν ΛΗ εἰς τὰς ἴσας πρὸς τὴν Ν, τὸ δὲ Α εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ζ, τὰ ἰσομεγέθη τμημάτα τὰ εἰς τὴν ΛΗ τὰ ἴσα πρὸς τὴν Ν θὰ εἶναι ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰ εἰς τὸ Α ὑπάρχοντα τμημάτα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ὡστε, ἂν ἐφ' ἑκαστον τῶν εἰς τὴν ΛΗ τμημάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ Ζ ἔχον τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τὸ ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν τούτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Α, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἄθροίσματος τούτου θὰ εἶναι τὸ Ε· διότι ὅλα τὰ τμημάτα εἶναι ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα μέρη τοῦ Ε εἶναι ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος, διότι ἡ ΛΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καί, ἂν ἐφ' ἑκαστον τῶν τμημάτων τῶν εἰς τὴν ΚΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ Ζ ἔχον τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τοῦ μεσαίου τμήματος, καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἄθροίσματος θὰ εἶναι τὸ Δ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν Α τοποθετημένον κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ. Θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν μεγέθη ἴσα πρὸς ἄλληλα κείμενα ἐπ' εὐθείας, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἴσον, ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα τῶν μεσαίων μεγεθῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι ἡ μὲν ΛΕ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς τὴν ΔΚ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΛΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΚ· ὥστε τοῦ ἄθροίσματος τῶν μεγεθῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Γ. Ὅταν λοιπὸν τὸ μὲν Α κῆται κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, θὰ ἰσορροπήσωσι κατὰ τὸ Γ.

ζ'

Καὶ τοίνυν, εἴ κα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροποῦσονται ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονηθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν.

- 5 ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ  $AB$ ,  $\Gamma$ , μάκεα δὲ τὰ  $\Delta E$ ,  $EZ$ , ἐχέτω δὲ τὸ  $AB$  ποτὶ τὸ  $\Gamma$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ



$E\Delta$  ποτὶ τὸ  $EZ$  μᾶκος· λέγω, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $AB$ ,  $\Gamma$  κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  $E$ .

- εἰ γὰρ μὴ ἰσορροπῇσι τὸ  $AB$  τεθὲν ἐπὶ τῷ  $Z$  τῷ  $\Gamma$  τεθὲν-  
 10 τι ἐπὶ τῷ  $\Delta$ , ἤτοι μείζον ἐστὶ τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$  ἢ ὥστε ἰσορρο-  
 Η 138 πεῖν [τῷ  $\Gamma$ ] ἢ οὐ. ἔστω μείζον, καὶ ἀφηγήσθω ἀπὸ τοῦ  $AB$   
 ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$  ἢ ὥστε  
 ἰσορροπεῖν, ὥστε [τὸ] λοιπὸν τὸ  $A$  σύμμετρον εἴμεν τῷ  $\Gamma$ .  
 ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ  $A$ ,  $\Gamma$  μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον  
 15 ἔχει τὸ  $A$  ποτὶ τὸ  $\Gamma$  ἢ ἡ  $\Delta E$  ποτὶ  $EZ$ , οὐκ ἰσορροποῦσονται  
 τὰ  $A$ ,  $\Gamma$  ἀπὸ τῶν  $\Delta E$ ,  $EZ$  μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν  $A$  ἐπὶ  
 τῷ  $Z$ , τοῦ δὲ  $\Gamma$  ἐπὶ τῷ  $\Delta$ . διὰ ταῦτα δ', οὐδ' εἰ τὸ  $\Gamma$  μείζον  
 ἐστὶν ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ  $AB$ .

η'

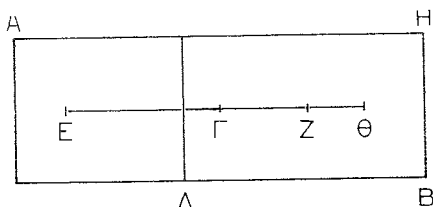
- 20 Εἴ κα ἀπὸ τινος μεγέθεος ἀφαιρεθῇ τι μέγεθος μὴ τὸ  
 αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ  
 τοῦ βάρους, ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιτενγνυούσας τὰ  
 κέντρα τῶν βαρέων τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφηρημένου

Ἄλλὰ καὶ ἀσύμμετρα ἂν εἶναι τὰ μεγέθη, ὁμοίως θὰ ἰσορροπήσωσιν ἀπὸ μήκη ἔχοντα λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν.

Ἐστω τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη  $AB$ ,  $\Gamma$ , μήκη δὲ τὰ  $\Delta E$ ,  $EZ$ , ἃς ὑπάρχη δὲ ἡ σχέσις  $AB : \Gamma = \text{μῆκος } E\Delta : \text{μῆκος } EZ$ . λέγω, ὅτι τὸ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν  $AB$ ,  $\Gamma$  εἶναι τὸ  $E$ .

Διότι, ἐὰν τὸ  $AB$  δὲν ἰσορροπήσῃ τεθὲν εἰς τὸ  $Z$  τοῦ  $\Gamma$  τεθέντος εἰς τὸ  $\Delta$ , ἢ τὸ  $AB$  θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ  $\Gamma$  ὥστε νὰ μὴ ἰσορροπῇ ἢ δὲν θὰ εἶναι. Ἐστω μεγαλύτερον, καὶ ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ  $AB$  μέγεθος μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερον τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$  διὰ νὰ ἰσορροπῶσιν, ὥστε τὸ ὑπόλοιπον τὸ  $A$  νὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ  $\Gamma$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ μεγέθη  $A$ ,  $\Gamma$  εἶναι σύμμετρα καὶ ὁ λόγος  $A : \Gamma$  εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου  $\Delta E : EZ$ , δὲν θὰ ἰσορροπήσωσιν τὰ μεγέθη  $A$ ,  $\Gamma$  ἀπὸ τῶν μηκῶν  $\Delta E$ ,  $EZ$ , ὅταν τεθῇ τὸ μὲν  $A$  εἰς τὸ  $Z$ , τὸ δὲ  $\Gamma$  εἰς τὸ  $\Delta$  (θ. 6). Διὰ τοὺς αὐτοὺς δὲ λόγους, οὐδὲ ἐὰν τὸ  $\Gamma$  εἶναι μεγαλύτερον ὥστε νὰ ἰσορροπῇ πρὸς τὸ  $AB$ .

Ἐὰν ἀπὸ τινος μεγέθους ἀφαιρεθῇ μέγεθος τι μὴ ἔχον τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους πρὸς τὸ ὅλον, τοῦ λοιποῦ μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ



βάρους θὰ εἶναι, ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰ κέντρα τῶν βαρῶν καὶ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος πρὸς τὸ αὐτὸ

ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους, καὶ ἀπο-  
λαφθείσας τινὸς ἀπὸ [τᾶς] ἐκβληθείσας τὰς ἐπιζευγνυούσας  
τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὰν  
μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφηρημένου μεγέ-  
5 θεος ποτὶ τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας.

ἔστω μεγέθους τινος τοῦ  $AB$  κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Gamma$ ,  
καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ  $AB$  τὸ  $AD$ , οὗ κέντρον τοῦ βάρους  
H 140 ἔστω τὸ  $E$ , ἐπιζευχθείσας δὲ τὰς  $EG$  καὶ ἐκβληθείσας ἀπο-  
λελάφθω ἡ  $GZ$  ποτὶ τὰν  $GE$  λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν, ὃν  
10 ἔχει τὸ  $AD$  μέγεθος ποτὶ τὸ  $\Delta H$ . δεικτέον, ὅτι τοῦ  $\Delta H$  μεγέ-  
θεος κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  $Z$  σαμεῖον.

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ  $\Theta$  σαμεῖον. ἐπεὶ οὖν  
τοῦ μὲν  $AD$  μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  $E$ , τοῦ δὲ  
 $\Delta H$  τὸ  $\Theta$  σαμεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $AD$ ,  $\Delta H$  μεγεθέων  
15 κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς  $E\Theta$  τμαθείσας, ὥστε τὰ  
τμήματα αὐτᾶς ἀντιπεπονημένον κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς  
μεγέθεσιν· ὥστε οὐκ ἐσσεῖται τὸ  $\Gamma$  σαμεῖον κατὰ τὰν ἀνάλο-  
γον τομὴν τᾶ εἰρημένα. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ  $\Gamma$  κέντρον τοῦ ἐκ τῶν  
 $AD$ ,  $\Delta H$  συγκειμένου μεγέθους, τουτέστι τοῦ  $AB$ . ἐστὶ δέ·  
20 ὑπέκειτο γάρ· οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ  $\Theta$  κέντρον βάρους τοῦ  $\Delta H$   
μεγέθους.

θ'

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν  
ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν  
25 κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευρῶν.

ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ  $AB\Gamma\Delta$ , ἐπὶ δὲ τὰν διχοτο-  
μίαν τᾶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , ἡ  $EZ$ . φανὶ δὴ, ὅτι τοῦ  $AB\Gamma\Delta$  παραλ-  
ληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς  $EZ$ .  
H 142 μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ  $\Theta$ , καὶ ἄχθω παρὰ τὰν  
30  $AB$  ἡ  $\Theta I$ . τὰς [δὲ] δὴ  $EB$  διχοτομονύμενας αἰεὶ ἐσσεῖται ποκα  
ἡ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς  $I\Theta$ . καὶ διηρήσθω ἑκατέρω

μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους, καὶ ἀφοῦ ληφθῇ ἐπὶ [τῆς] ἐκβληθείσης τῆς ἐνούσης τὰ εἰρημένα κέντρα τοιοῦτον τμήμα, ὥστε τοῦτο νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν εὐθείαν τὴν ἐνούσαν τὰ δύο κέντρα, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφηρημένου μεγέθους πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑπολοίπου, τὸ πέρας τῆς οὕτω ληφθείσης εὐθείας.

Ἐστω μεγέθους τινὸς ΑΒ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ, καὶ ἄς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΑΒ τὸ ΑΔ, τοῦ ὁποίου κέντρον βάρους ἔστω τὸ Ε, ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἡ ΕΓ καὶ προεκβληθῇ, ἄς ληφθῇ ἡ ΓΖ τοιαύτη, ὥστε  $ΓΖ : ΓΕ = \text{μέγεθος } ΑΔ : \text{μέγεθος } ΔΗ$ . Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους ΔΗ εἶναι τὸ σημεῖον Ζ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι τοῦτο, εἰ δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ σημεῖον Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν μεγέθους ΑΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ε, τοῦ δὲ ΔΗ τὸ Θ, τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγεθῶν ΑΔ, ΔΗ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΘ τμηθείσης κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς νὰ ἔχωσι λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν (Θ. 6, 7). ὥστε τὸ σημεῖον Γ δὲν θὰ εἶναι εἰς τὴν ἀνάλογον τομὴν πρὸς τὴν εἰρημένην. Δὲν θὰ εἶναι ἄρα τὸ Γ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΗ, τουτέστι τοῦ ΑΒ. Εἶναι δέ· διότι ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως· δὲν εἶναι ἄρα τὸ Θ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους ΔΗ.

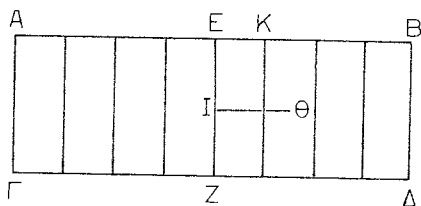
9

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ ἐνούσα δὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΖ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΘΙ. Ἐὰν [δὲ] ἡ ΕΒ διχοτομῇται διαρκῶς θὰ φθάσῃ στιγμή καθ' ἣν θὰ ληφθῇ τμήμα μικρότερον τῆς ΙΘ· ἄς διαι-

τῶν  $AE$ ,  $EB$  εἰς τὰς τῇ  $EK$  ἴσας, καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὴν  $EZ$ · διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὁμοῖα τῷ  $KZ$ . τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ἴσων καὶ



- 5 ὁμοίων τῷ  $KZ$  ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. ἐσοῦνται δὴ μεγέθεά τινα, παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ  $KZ$ , ἅρτια τῷ πλήθει, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα, καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων αὐτά τε ἴσα.
- 10 ἐντὶ καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι· τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς εὐθείας τᾷς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ· τὸ γὰρ  $\Theta$  ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερόν οὖν, ὅτι ἐπὶ
- 15 τᾷς  $EZ$  εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου.

ι'

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διαμέτροι συμπίπτουσι.

- 20 ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ  $AB\Gamma\Delta$  καὶ ἐν αὐτῷ ἡ  $EZ$  δίχα τέμνουσα τὰς  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , ἡ δὲ  $ΚΛ$  τὰς  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$ · ἔστιν δὴ τοῦ  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους
- Η 144 ἐπὶ τᾷς  $EZ$ · δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταῦτά δὲ καὶ ἐπὶ τᾷς

# ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α'

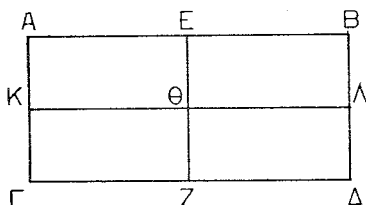
## (ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΩΝ Α')

ρεθῇ λοιπὸν ἐκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΕΒ εἰς τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ΕΚ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἃς ἀχθῶσι παραλλήλοι πρὸς τὴν ΕΖ· θὰ διαιρεθῇ λοιπὸν οὕτω τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὸ ΚΖ. Ἐὰν λοιπὸν τὰ ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὸ ΚΖ παραλληλόγραμμα τεθῶσιν τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν (αἴτ. 4). Θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν μεγέθη τινά, παραλληλόγραμμα ἴσα πρὸς τὸ ΚΖ, ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὰ μεσαῖα ἐξ αὐτῶν ἴσα μεταξὺ των, καὶ ὅλα τὰ κείμενα ἐκατέρωθεν τῶν μεσαίων εἶναι ἴσα καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων (τῶν βαρῶν) εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι· θὰ εἶναι ἄρα τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεσαίων μεγεθῶν (θ. 5, πόρ. 2). Ὅμως δὲν εἶναι· διότι τὸ Θ εἶναι ἐκτὸς τῶν μεσαίων παραλληλογράμμων. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ.

10

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον ὅπου τέμνονται αἱ διάμεσοι.

\*Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ εἰς αὐτὸ ἡ ΕΖ διχο-



τόμος τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ΚΛ διχοτόμος τῶν ΑΓ, ΒΔ· εἶναι λοιπὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΕΖ. Διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ἐπὶ

ΚΑ· τὸ Θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρους. κατὰ δὲ τὸ Θ αἱ  
διαμέτροι τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτοντι ὥστε δέδει-  
κται τὸ προτεθέν.

ΑΛΛΩΣ

5 ἔστιν δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δείξαι.

ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ  
ἔστω ἡ ΑΒ. τὰ ἄρα ΑΒΔ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐντὶ καὶ ὁμοῖα  
ἀλλάλοις ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα τῶν τριγώνων  
καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. ἔστω  
10 δὴ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ε σαμεῖον,  
καὶ τετμάσθω δίχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ  
καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπολελάφθω ἡ ΖΘ ἴσα τῇ ΘΕ. ἐφαρ-  
μοζομένου δὴ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον καὶ  
τιθεμένας τᾶς μὲν ΑΒ πλενρᾶς ἐπὶ τὰν ΔΓ, τᾶς δὲ ΑΔ ἐπὶ  
15 τὰν ΒΓ, ἐφαρμόξει καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ΖΘ, καὶ τὸ Ε  
σαμεῖον ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ  
βάρους τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου  
κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ε σαμεῖον, τοῦ δὲ ΔΒΓ τὸ Ζ, δηλον,  
ὥς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος  
H 146 κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ μέσον τᾶς ΕΖ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ  
τὸ Θ σαμεῖον.

ια'

Ἐὰν δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἀλλάλοις ᾗ καὶ ἐν αὐτοῖς σα-  
μεῖα ὁμοίως κείμενα ποτὶ τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἐν σαμεῖον  
25 τοῦ, ἐν ᾧ ἐστὶ, τριγώνου κέντρον ᾗ τοῦ βάρους, καὶ τὸ λοιπὸν  
σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ, ἐν ᾧ ἐστὶ, τριγώνου.  
[ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα,

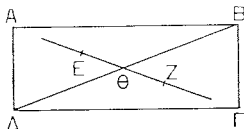


τῆς ΚΛ· τὸ σημεῖον Θ ἄρα εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους. Εἰς δὲ τὸ Θ τέμνονται αἱ διάμεσοι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

#### ΑΛΛΩΣ

Εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον.

Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΔΒ. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ ὅμοια (Εὐκλ. Ι, 34)· ὥστε ἐὰν τὰ τρίγωνα ἐφαρμοσθῶσι τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου θὰ συμπίσωσι καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν. Ἐστω λοιπὸν



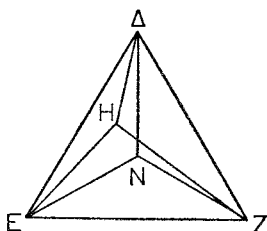
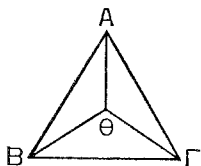
τοῦ τριγώνου ΑΒΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἄς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΒ κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΘ καὶ ἄς προεκβληθῇ, καὶ ἄς ληφθῇ ἡ ΖΘ ἴση πρὸς τὴν ΘΕ. Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ καὶ τεθῇ ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ ἐπὶ τῆς ΔΓ, ἡ δὲ ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ εὐθεῖα ΘΕ ἐπὶ τῆς ΖΘ, καὶ τὸ σημεῖον Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ. Ἀλλὰ θὰ πέσῃ καὶ εἰς τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΒΔΓ (αἴτ. 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ε, τοῦ δὲ ΒΔΓ τὸ Ζ, εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΕΖ (θ. 4), τὸ ὅποῖον εἶναι τὸ σημεῖον Θ.

#### 11

Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι μεταξύ των ὅμοια καὶ εἰς αὐτὰ ὑπάρχωσι σημεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἐν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὅποῖον κεῖται, καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὅποῖον κεῖται, [λέγομεν δὲ σημεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς ὅμοια σχήματα, ἐκεῖνα

ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσας ποιοῦσιν γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς].

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , καὶ ἔστω, ὥς ἂν  $AF$  ποτὶ  $\Delta Z$ , οὕτως ἂν τε  $AB$  ποτὶ  $\Delta E$  καὶ ἂν  $B\Gamma$  ποτὶ  $EZ$ , καὶ ἐν τοῖς  
5 εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ  $\Theta$ ,  $N$



[πρὸς τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  τρίγωνα], καὶ ἔστω τὸ  $\Theta$  κέντρον τοῦ βάρους τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου· λέγω, ὅτι καὶ τὸ  $N$  κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ  $\Delta EZ$  τριγώνου.

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ  $H$  κέντρον βάρους τοῦ  
10  $\Delta EZ$  τριγώνου, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $\Theta A$ ,  $\Theta B$ ,  $\Theta \Gamma$ ,  $\Delta N$ ,  $EN$ ,  $ZN$ ,  $\Delta H$ ,  $EH$ ,  $ZH$ . ἐπεὶ οὖν ὁμοῖόν ἐστι τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστὶ τὰ  $\Theta$ ,  $H$  σαμεῖα, τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα [ὥστε ἴσας ποιησοῦντι γωνίας ποτὶ ταῖς  
15 ὁμολόγοις πλευραῖς ἕκαστον ἑκάσταις], ἴσα ἄρα ἂν ὑπὸ  $H\Delta E$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Theta AB$ . ἀλλὰ ἂν ὑπὸ  $\Theta AB$  γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ  
H 148 ὑπὸ  $E\Delta N$  [διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ  $\Theta$ ,  $N$  σαμεῖα]· καὶ ἂν ὑπὸ  $E\Delta N$  γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ  $E\Delta H$ , ἂν μείζων τῇ ἐλάσσονι ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ  
20  $\Delta EZ$  τριγώνου τὸ  $N$  σαμεῖον· ἔστιν ἄρα.

ιβ'

Εἰ καὶ δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἔωντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ἢ τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣ ἐντὶ ἀπὸ τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου

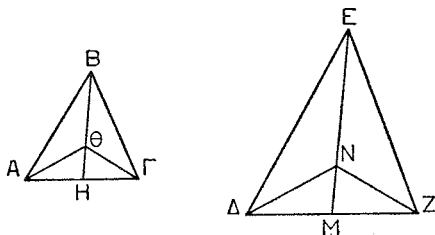
ἐκ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰς ἴσας γωνίας, σχηματίζουσι μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας ].

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , καὶ ἔστω,  $AF : \Delta Z = AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$ , καὶ εἰς τὰ εἰρημένα τρίγωνα ἔστω σημεῖα ὁμοίως κείμενα τὰ  $\Theta$ ,  $N$  [ πρὸς τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  ], καὶ ἔστω τὸ  $\Theta$  κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ . λέγω, ὅτι καὶ τὸ  $N$  εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου  $\Delta EZ$ .

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν τὸ  $H$  νὰ εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου  $\Delta EZ$ , καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ  $\Theta A$ ,  $\Theta B$ ,  $\Theta \Gamma$ ,  $\Delta N$ ,  $EN$ ,  $ZN$ ,  $\Delta H$ ,  $EH$ ,  $ZH$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον  $\Delta EZ$  καὶ κέντρα τῶν βαρῶν εἶναι τὰ σημεῖα  $\Theta$ ,  $H$ , τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρῶν κεῖνται ὁμοίως (αἴτ. 5) [ ὥστε εἰς ἕκαστον νὰ σχηματίζωνται μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνία ἴσαι ἀντιστοίχως ], εἶναι ἄρα ἡ γωνία  $H\Delta E$  ἴση πρὸς τὴν  $\Theta AB$  (αἴτ. 5). Ἀλλὰ ἡ γωνία  $\Theta AB$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $E\Delta N$  (αἴτ. 5) [διότι τὰ σημεῖα  $\Theta N$  κεῖνται ὁμοίως]· καὶ ἡ γωνία ἄρα  $E\Delta N$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $E\Delta H$ , ἡ μεγαλυτέρα πρὸς τὴν μικροτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου  $\Delta EZ$  τὸ σημεῖον  $N$ . εἶναι ἄρα.

12

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ὅμοια τρίγωνα, τοῦ δὲ ἐνὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τῆς



κορυφῆς μιᾶς γωνίας εἰς τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καὶ τοῦ ἄλλου τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ὁμοίως πρὸς

τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾷς ὁμοίως ἀγομέναις γραμμῶν.

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , καὶ ἔστω, ὥς ἂν  $ΑΓ$  ποτὶ  $ΔΖ$ , οὕτως ἂν τε  $ΑΒ$  ποτὶ  $ΔΕ$  καὶ ἂν  $ΒΓ$  ποτὶ  $ΖΕ$ , καὶ  
5 τμαθείσας τᾷς  $ΑΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $Η$  ἐπεξεύχθω ἂν  $ΒΗ$ , καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου ἐπὶ τᾷς  $ΒΗ$  τὸ  $Θ$ . λέγω, ὅτι καὶ τοῦ  $ΕΔΖ$  τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾷς ὁμοίως ἀγομέναις εὐθείαις.

τετμάσθω ἂν  $ΔΖ$  δίχα κατὰ τὸ  $Μ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἂν  $ΕΜ$ ,  
10 καὶ πεποιήσθω, ὥς ἂν  $ΒΗ$  ποτὶ  $ΒΘ$ , οὕτως ἂν  $ΜΕ$  ποτὶ  $ΕΝ$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $ΑΘ$ ,  $ΘΓ$ ,  $ΔΝ$ ,  $ΝΖ$ . ἐπεὶ ἐστὶ τᾷς μὲν  $ΓΑ$  ἡμίσεια ἂν  $ΑΗ$ , τᾷς δὲ  $ΔΖ$  ἡμίσεια ἂν  $ΔΜ$ , ἐστὶν ἄρα καί,   
H 150 ὥς ἂν  $ΒΑ$  ποτὶ  $ΕΔ$ , οὕτως ἂν  $ΑΗ$  ποτὶ  $ΔΜ$ . καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἂν ὑπὸ  $ΑΗΒ$   
15 γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΜΕ$ , καὶ ἐστὶν, ὥς ἂν  $ΑΗ$  ποτὶ  $ΔΜ$ , οὕτως ἂν  $ΒΗ$  ποτὶ  $ΕΜ$ . ἐστὶν δὲ καί, ὥς ἂν  $ΒΗ$  ποτὶ  $ΒΘ$ , οὕτως ἂν  $ΜΕ$  ποτὶ  $ΕΝ$ . καὶ δι' ἴσον ἄρα ἐστίν, ὥς ἂν  $ΑΒ$  ποτὶ  $ΔΕ$ , οὕτως ἂν  $ΒΘ$  ποτὶ  $ΕΝ$ . καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶν ἂν ὑπὸ  $ΒΑΘ$  γωνία τῇ ὑπὸ  
20  $ΕΔΝ$ . ὥστε καὶ λοιπὰ ἂν ὑπὸ  $ΘΑΓ$  γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ  $ΝΔΖ$  γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἂν μὲν ὑπὸ  $ΒΓΘ$  γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ  $ΕΖΝ$ , ἂν δὲ ὑπὸ  $ΘΓΗ$  τῇ ὑπὸ  $ΝΖΜ$  ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἂν ὑπὸ  $ΑΒΘ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΜ$  ἴσα· ὥστε καὶ λοιπὰ ἂν ὑπὸ  $ΘΒΓ$  γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ  $ΝΕΖ$ . διὰ ταῦτα δὴ πάντα ὁμοίως  
25 κεῖται τὰ  $Θ$ ,  $Ν$  σαμεῖα [ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας ποιεῖ]. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ  $Θ$ ,  $Ν$  σαμεῖα, καὶ ἐστὶ τὸ  $Θ$  κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου, καὶ τὸ  $Ν$  ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ  $ΔΕΖ$ .

γ'

30 Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾷς εὐθείαις, ἃ ἐστὶν ἐκ τᾷς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀγομένα τὰν βάσιν.

ταύτην ἀγομένης γραμμῆς.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , καὶ ἔστω  $AF : \Delta Z = AB : \Delta E = B\Gamma : ZE$  (Εὐκλ. VI, 4), καὶ ἀφοῦ τμηθῇ ἡ  $AF$  εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ  $H$  ὡς ἀχθῇ ἡ  $BH$ , καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  κείμενον ἐπὶ τῆς  $BH$  τὸ σημεῖον  $\Theta$ . λέγω, ὅτι καὶ τοῦ τριγώνου  $\Delta EZ$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ὁμοίως ἀγομένης εὐθείας.

Ἄς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ  $\Delta Z$  κατὰ τὸ  $M$ , καὶ ὡς ἀχθῇ ἡ  $EM$ , καὶ ὡς γίνῃ  $BH : B\Theta = ME : EN$ , καὶ ὡς ἀχθῶσιν αἱ  $A\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$ ,  $\Delta N$ ,  $NZ$ . Ἐπειδὴ ἡ  $AH$  εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς  $GA$  καὶ ἡ  $\Delta M$  εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς  $\Delta Z$ , θὰ εἶναι ἄρα καὶ  $BA : \Delta\Delta = AH : \Delta M$ . Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ἴση ἡ γωνία  $AHB$  πρὸς τὴν  $\Delta ME$  (Εὐκλ. VI, 6), καὶ εἶναι ὡς  $AH : \Delta M = BH : EM$  (Εὐκλ. VI, 4). Εἶναι δὲ καὶ ὡς  $BH : B\Theta = ME : EN$ · καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι, ὡς  $AB : \Delta E = B\Theta : EN$ . Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· ἐὰν δὲ συμβαίῃ τοῦτο, ἡ γωνία  $BA\Theta$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $\Delta\Delta N$  (Εὐκλ. VI, 6)· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος γωνία ἡ  $\Theta A\Gamma$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $N\Delta Z$ . Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ μὲν γωνία  $B\Gamma\Theta$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $EZN$ , ἡ δὲ  $\Theta\Gamma H$  πρὸς τὴν  $NZM$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία  $AB\Theta$  ἴση πρὸς τὴν  $\Delta EM$ · ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος γωνία ἡ  $\Theta B\Gamma$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $NEZ$ . Δι' ὅλους αὐτοὺς τοὺς λόγους τὰ σημεῖα  $\Theta$ ,  $N$  κεῖνται ὁμοίως [σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευράς]. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ σημεῖα  $\Theta$ ,  $N$  κεῖνται ὁμοίως, καὶ τὸ  $\Theta$  εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ , καὶ τὸ  $N$  ἄρα εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου  $\Delta EZ$  (θ. 11).

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας εἰς τὸ μέσον τῆς (ἀπέναντι) βάσεως.

ἔστω τρίγωνον τὸ  $ABΓ$  καὶ ἐν αὐτῷ ἡ  $ΑΔ$  ἐπὶ μέσαν τὰν  $ΒΓ$  βάσιν· δεικτέον, ὅτι ἐπὶ τᾷς  $ΑΔ$  τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βά-  
 ρους τοῦ  $ΑΒΓ$ .

- Η 152 μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ  $Θ$ , καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν  
 5  $ΒΓ$  ἄχθω ἡ  $ΘΙ$ . αἰεὶ δὴ δίχα τεμνομένης τᾷς  $ΔΓ$  ἐσσεῖται ποκα  
 ἡ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾷς  $ΘΙ$ · καὶ διηρῆσθω ἐκατέρα  
 τὰν  $ΒΔ$ ,  $ΔΓ$  ἐς τὰς ἴσας, καὶ διὰ τὰν τομῶν παρὰ τὰν  $ΑΔ$  ἄ-  
 χθωσαν, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $ΕΖ$ ,  $ΗΚ$ ,  $ΑΜ$ · ἐσσοῦνται δὴ  
 αὗται παρὰ τὰν  $ΒΓ$ . τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν  $ΜΝ$   
 10 τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $ΥΣ$ , τοῦ δὲ  $ΚΞ$  τὸ κέντρον  
 τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $ΤΥ$ , τοῦ δὲ  $ΖΟ$  ἐπὶ τᾷς  $ΤΔ$ · τοῦ ἄρα ἐκ  
 πάντων συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν  
 ἐπὶ τᾷς  $ΣΔ$  εὐθείας. ἔστω δὴ τὸ  $Ρ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΡΘ$  καὶ  
 ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν  $ΑΔ$  ἡ  $ΓΦ$ . τὸ δὴ  $ΑΔΓ$   
 15 [τρίγωνον] ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τὰν  $ΑΜ$ ,  $ΜΚ$ ,  
 $ΚΖ$ ,  $ΖΓ$  ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τῷ  $ΑΔΓ$  τοῦτον ἔχει τὸν λό-  
 γον, ὃν ἔχει ἡ  $ΓΑ$  ποτὶ  $ΑΜ$ , διὰ τὸ ἴσας εἶμεν τὰς  $ΑΜ$ ,  $ΜΚ$ ,  
 $ΖΓ$ ,  $ΚΖ$ . ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ  $ΑΔΒ$  τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ  
 τὰν  $ΑΛ$ ,  $ΛΗ$ ,  $ΗΕ$ ,  $ΕΒ$  ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τρίγωνα τὸν  
 20 αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ  $ΒΑ$  ποτὶ  $ΑΛ$ , τὸ ἄρα  $ΑΒΓ$  τρίγωνον  
 Η 154 ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν  
 ἔχει ἡ  $ΓΑ$  ποτὶ  $ΑΜ$ . ἀλλὰ ἡ  $ΓΑ$  ποτὶ  $ΑΜ$  μείζονα λόγον ἔχει  
 ἢ περὶ ἡ  $ΦΡ$  ποτὶ  $ΡΘ$ · ὁ γὰρ τᾷς  $ΓΑ$  ποτὶ  $ΑΜ$  λόγος ὁ αὐτός  
 ἐστὶ τῷ [ὅλας] τᾷς  $ΦΡ$  ποτὶ  $ΡΠ$  [διὰ τὸ ὁμοῖα εἶμεν τὰ τρί-  
 25 γωνα]· καὶ τὸ  $ΑΒΓ$  ἄρα τρίγωνον ποτὶ τὰ εἰρημένα μείζονα  
 λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ  $ΦΡ$  ποτὶ  $ΡΘ$ · ὥστε καὶ διελόντι τὰ  $ΜΝ$ ,  
 $ΚΞ$ ,  $ΖΟ$  παραλληλόγραμμα ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα  
 μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ  $ΦΘ$  ποτὶ  $ΘΡ$ . γερονέτω οὖν ἐν τῷ  
 τῶν παραλληλογράμμων ποτὶ τὰ τρίγωνα λόγῳ ἡ  $ΧΘ$  ποτὶ  
 30  $ΘΡ$ . ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τι μέγεθος τὸ  $ΑΒΓ$ , οὗ τὸ κέντρον τοῦ βά-  
 ρους ἐστὶ τὸ  $Θ$ , καὶ ἀφήρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκεί-  
 μενον ἐκ τῶν  $ΜΝ$ ,  $ΚΞ$ ,  $ΖΟ$  παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶν

Ἐστω τὸ τρίγωνον  $ABΓ$  καὶ εἰς αὐτὸ ἡ  $ΑΔ$  ἀγομένη εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως  $ΒΓ$ · πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου  $ABΓ$  εἶναι ἐπὶ τῆς  $ΑΔ$ .

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ σημεῖον  $Θ$  καὶ δι' αὐτοῦ ἄς ἀχθῇ ἡ  $ΘΙ$  παράλληλος πρὸς τὴν  $ΒΓ$ . Ἐὰν λοιπὸν ἡ  $ΔΓ$  διχοτομῇται διαρκῶς θὰ φθάσῃ στιγμῇ, καθ' ἣν θὰ ληφθῇ τμήμα μικρότερον τῆς  $ΘΙ$ · καὶ ἄς διαιρεθῇ ἐκάστη τῶν  $ΒΔ, ΔΓ$  εἰς ἴσα τμήματα καὶ ἄς ἀχθῶσι διὰ τῶν τομῶν παράλληλοι πρὸς τὴν  $ΑΔ$ , καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ  $EZ, HK, ΛΜ$ · θὰ εἶναι λοιπὸν αὗται παράλληλοι πρὸς τὴν  $ΒΓ$ . Τοῦ μὲν παραλληλογράμμου λοιπὸν  $MN$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς  $ΥΣ$ , τοῦ δὲ  $ΚΞ$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς  $ΤΥ$ , τοῦ δὲ  $ZO$  ἐπὶ τῆς  $ΤΔ$  (θ. 9)· τοῦ μεγέθους ἄρα τοῦ συγκειμένου ἐξ ὧν τούτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας  $ΣΔ$  (θ. 4). Ἐστω ὅτι εἶναι τοῦτο τὸ  $P$ , καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ  $PΘ$  καὶ ἄς προσεβληθῇ, καὶ ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν  $ΑΔ$  ἡ  $ΓΦ$ . Τὸ [τρίγωνον] λοιπὸν  $ΑΔΓ$  πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀναγεγραμμένα ἀπὸ τῶν  $AM, MK, KZ, ZΓ$  καὶ ὅμοια πρὸς τὸ  $ΑΔΓ$  ἔχει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ  $ΓΑ : AM$ , διότι αἱ  $AM, MK, ZΓ, KZ$  εἶναι ἴσαι μετὰξὺ των. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον  $ΑΔΒ$  πρὸς ὅλα τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ$  ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ  $ΒΑ : ΑΛ$ , τὸ τρίγωνον ἄρα  $ABΓ$  πρὸς ὅλα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ  $ΓΑ : AM$ . Ἀλλὰ  $ΓΑ : AM > ΦΡ : ΡΘ$ · διότι  $ΓΑ : AM = ΦΡ : ΡΠ$  [διότι τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια]· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα  $ABΓ$  πρὸς τὰ εἰρημένα τρίγωνα ἔχει λόγον μεγαλύτερον τοῦ λόγου  $ΦΡ : ΡΘ$ · ὥστε καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως λόγου (Εὐκλ. V, ὁρισ. 15) τὰ παραλληλόγραμμα  $MN, ΚΞ, ZO$  πρὸς τὰ ὑπολειπόμενα τρίγωνα ἔχουσι λόγον μεγαλύτερον τοῦ  $ΦΘ : ΘΡ$ . Ἀς γίνῃ λοιπὸν πρὸς τὸν λόγον τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα ἴσος ὁ λόγος τῆς  $ΧΘ : ΘΡ$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει μέγεθος τι τὸ  $ABΓ$ , τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $Θ$ , καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἔχει ἀφαιρεθῇ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν παραλληλογράμμων  $MN, ΚΞ, ZO$ , καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος μεγέθους κέντρον





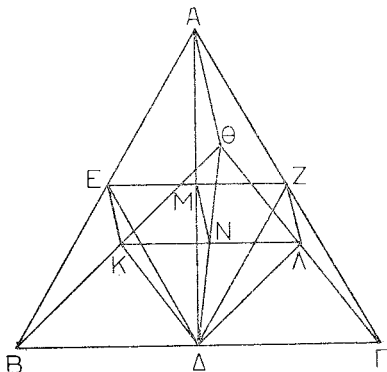
# МХХАНИКА А'

(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Α')

τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον P, τοῦ ὑπολοίπου ἄρα μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν ἀπομενόντων τριγώνων τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας PΘ ἀφοῦ αὕτη ἐκβληθῇ καὶ ληφθῇ τμήμα αὐτῆς ἔχον πρὸς τὴν ΘΡ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος πρὸς τὸ ἀπομεῖναν (θ. 8). Τὸ σημεῖον ἄρα X εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπομενόντων (τριγώνων)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐὰν διὰ τοῦ X ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, πάντα τὰ τρίγωνα θὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ [δηλαδὴ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος]. Εἶναι λοιπὸν φανερόν τὸ προτεθέν.

ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ

Ἐστω τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ , καὶ ὡς ἀχθῇ ἡ  $AD$  εἰς τὸ μέσον τῆς  $B\Gamma$ . λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρου τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  εἶναι ἐπὶ τῆς  $AD$ .



Διότι ἄς μὴ εἶναι, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἄς ἀχθῶσι  
καὶ αἱ ΑΘ, ΘΒ, ΘΓ καὶ αἱ ΕΔ, ΖΕ εἰς τὸ μέσον τῶν ΒΑ, ΑΓ, καὶ

καὶ παρὰ τὰν  $ΑΘ$  ἄχθωσαν αἱ  $ΕΚ$ ,  $ΖΑ$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  
 $ΚΑ$ ,  $ΛΔ$ ,  $ΔΚ$ ,  $ΔΘ$ ,  $ΜΝ$ . ἐπεὶ ὁμοῖόν ἐστι τὸ  $ΑΒΓ$  τριγώνον  
τῷ  $ΔΖΓ$  τριγώνῳ διὰ τὸ παράλληλον εἶμεν τὰν  $ΒΑ$  τῇ  $ΖΔ$ ,  
καὶ ἐστι τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $Θ$  σαμεῖον,  
5 καὶ τοῦ  $ΖΔΓ$  ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστι τὸ  $Λ$   
σαμεῖον· ὁμοίως γάρ ἐντι κείμενα τὰ  $Θ$ ,  $Λ$  σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ  
τῶν τριγώνων [ἐπειδήπερ ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας  
ποιέοντι γωνίας· φανερόν γάρ τοῦτο]. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ  
 $ΕΒΔ$  κέντρον τοῦ βάρους ἐστι τὸ  $Κ$  σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐξ  
10 ἀμφοτέρων τῶν  $ΕΒΔ$ ,  $ΖΔΓ$  τριγώνων συγκειμένου μεγέθους  
κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ μέσας τὰς  $ΚΑ$  εὐθείας [ἐπει-  
δήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ  $ΕΒΔ$ ,  $ΖΔΓ$  τρίγωνα]. καὶ ἐστὶν τὰς  $ΚΑ$   
μέσον τὸ  $Ν$ , ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς ἡ  $ΒΕ$  ποτὶ  $ΕΑ$ , οὕτως ἡ  $ΒΚ$  ποτὶ  
 $ΘΚ$ , ὥς δὲ ἡ  $ΓΖ$  ποτὶ  $ΖΑ$ , οὕτως ἡ  $ΓΛ$  ποτὶ  $ΛΘ$ . εἰ δὲ τοῦτο,  
15 ἐστὶν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΚΑ$  παράλληλος. καὶ ἐπέξενκται ἡ  $ΛΘ$ . ἐστὶν  
ἄρα, ὥς ἡ  $ΒΔ$  ποτὶ  $ΛΓ$ , οὕτως ἡ  $ΚΝ$  ποτὶ τὰν  $ΝΛ$ . ὥστε τοῦ  
ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέ-  
θους κέντρον ἐστὶ τὸ  $Ν$ . ἐστὶν δὲ καὶ τοῦ  $ΑΕΔΖ$  παραλληλο-  
γράμμου κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $Μ$  σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐκ πάν-  
20 των συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ  
τὰς  $ΜΝ$  εὐθείας. ἐστὶν δὲ καὶ τοῦ  $ΑΒΓ$  κέντρον τοῦ βάρους  
τὸ  $Θ$  σαμεῖον· ἡ  $ΜΝ$  ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται διὰ τοῦ  $Θ$   
σαμείου· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ  
 $ΑΒΓ$  τριγώνου οὐκ ἐστὶν ἐπὶ τὰς  $ΑΔ$  εὐθείας· ἐστὶν ἄρα ἐπ’  
25 αὐτᾶς.

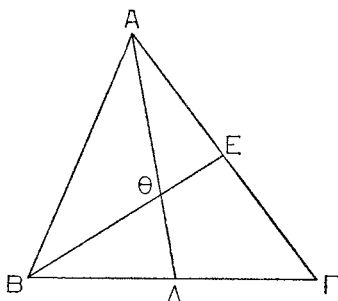
ιδ'

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ σαμεῖον,  
καθ’ ὃ συμπέτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν ἐπὶ μέσας  
τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΘ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΖΑ, καὶ ἄς ἐπιζευ-  
χθῶσιν αἱ ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ, ΜΝ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι  
ὁμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΓ, διότι ἡ ΒΑ εἶναι παράλληλος πρὸς  
τὴν ΖΔ, καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον  
Θ, εἶναι ἄρα καὶ τοῦ τριγώνου ΖΔΓ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον  
Λ (θ. 11)· διότι τὰ σημεῖα Θ, Λ εἶναι ὁμοίως κείμενα εἰς ἕκαστον  
τῶν τριγώνων [ἐπειδὴ σχηματίζουνσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευράς  
ἴσας γωνίας· διότι τοῦτο εἶναι φανερόν]. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λοιπὸν  
λόγους καὶ τοῦ τριγώνου ΕΒΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον  
Κ· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων  
ΕΒΔ, ΖΔΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας  
ΚΛ (θ. 4) [ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΕΒΔ, ΖΔΓ εἶναι ἴσα]. Καὶ εἶναι τὸ  
μέσον τῆς ΚΛ τὸ Ν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΕ : ΕΑ = ΒΚ : ΘΚ, ὡς δὲ  
ΓΖ : ΖΑ = ΓΛ : ΛΘ (Εὐκλ. VI, 2)· ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνειν εἶναι ἡ ΒΓ  
παράλληλος πρὸς τὴν ΚΛ. Καὶ ἔχει ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ  
ΒΔ : ΔΓ = ΚΝ : ΝΛ· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφο-  
τέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ν. Εἶναι  
δὲ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον  
Μ (θ. 10)· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ πάντων τῶν σχημά-  
των τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΝ. Εἶναι δὲ καὶ  
τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Θ· ἡ ΜΝ ἄρα  
προεκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Θ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν  
εἶναι ἄρα ἀληθὲς ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δὲν  
εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΔ· εἶναι ἄρα ἐπ' αὐτῆς.

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον το-  
μῆς τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἀγομένων  
εὐθειῶν.

ἔστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , καὶ ἄχθω ἡ μὲν  $AD$  ἐπὶ μέσαν τὴν  $B\Gamma$ , ἡ δὲ  $BE$  ἐπὶ μέσαν τὴν  $ΑΓ$ . ἑσσεῖται δὴ τοῦ  $AB\Gamma$



τρίγωνον κέντρον τοῦ βάρους ἐφ' ἑκατέρας τῶν  $AD$ ,  $BE$ . δέ-  
 δεικται γὰρ τοῦτο. ὥστε τὸ  $\Theta$  σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρους  
 5 ἔστιν.

ιε'

Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους  
 ἀλλάλας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς εὐθείαις τᾷς  
 ἐπιευγννούσας τὰς διχοτομίας τῶν παραλλήλων διαιρεθεί-  
 10 σας, ὥστε τὸ τμήμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὴν διχοτομίαν τᾷς  
 ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμήμα τοῦτον  
 ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρως ἡ ἴσα τᾷ διπλασίᾳ τᾷς  
 μείζονος μετὰ τᾷς ἐλάσσονος ποτὶ τὴν διπλασίαν τᾷς ἐλάσσο-  
 νος μετὰ τᾷς μείζονος τῶν παραλλήλων.

Η 160 ἔστω τραπέζιον τὸ  $AB\Gamma\Delta$  παραλλήλους ἔχον τὰς  $AD$ ,  
 $B\Gamma$ , ἡ δὲ  $EZ$  ἐπιευγννέτω τὰς διχοτομίας τῶν  $AD$ ,  $B\Gamma$ .  
 ὅτι οὖν ἐπὶ τᾷς  $EZ$  ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν.  
 εἰ γὰρ ἐκβαλῆς τὰς  $\Gamma\Delta H$ ,  $ZEH$ ,  $BAH$ , δῆλον, ὅτι ἐπὶ τὸ  
 αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται, καὶ ἑσσεῖται τοῦ  $HBF$  τριγώνου τὸ  
 20 κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $HZ$  καὶ ὁμοίως τοῦ  $AH\Delta$  τριγώ-  
 νου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $EH$ . καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ

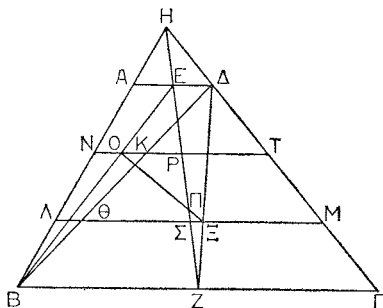
**ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α'**  
(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Α')

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ , καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ μὲν  $ΑΔ$  εἰς τὸ μέσον τῆς  $ΒΓ$ , ἡ δὲ  $ΒΕ$  εἰς τὸ μέσον τῆς  $ΑΓ$ . θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου  $ABΓ$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἰς ἐκάστην τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΒΕ$ . διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 13). Ὡστε τὸ σημεῖον  $Θ$  εἶναι κέντρον τοῦ βάρους.

15

Παντὸς τραπεζίου ἔχοντος τὰς δύο πλευράς παραλλήλους πρὸς ἀλλήλας τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ μέσα τῶν παραλλήλων, διαιρεθείσης κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ ἔχον πέρας τὸ μέσον τῆς μικροτέρας τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ λοιπὸν τμήμα νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τῆς μεγαλυτέρας τῶν παραλλήλων σὺν τὴν μικροτέραν πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τῆς μικροτέρας τῶν παραλλήλων σὺν τὴν μεγαλυτέραν.

Ἐστω τὸ τραπέζιον  $ABΓΔ$  ἔχον παραλλήλους τὰς  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$ , ἡ δὲ  $ΕΖ$  ἄς ἐνώνῃ τὰ μέσα τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$ . Ὅτι λοιπὸν τὸ κέντρον βάρους



τοῦ τραπεζίου εἶναι ἐπὶ τῆς  $ΕΖ$  εἶναι φανερόν. Διότι ἐὰν προεκβάλῃς τὰς  $ΓΔΗ$ ,  $ΖΕΗ$ ,  $ΒΑΗ$ , εἶναι φανερόν, ὅτι αὗται συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ θὰ εἶναι τοῦ τριγώνου  $ΗΒΓ$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς  $ΗΖ$  καὶ ὁμοίως τοῦ τριγώνου  $ΑΗΔ$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς  $ΕΗ$  (θ. 13). καὶ τοῦ ἀπομένοντος ἄρα τραπε-

$ΑΒΓΔ$  τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾷς  $ΕΖ$ .  
ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ  $ΒΔ$  διηρησθῶ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ  $Κ$ ,  $Θ$   
σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν  $ΒΓ$  ἄχθωσαν αἱ  $ΛΘΜ$ ,  
 $ΝΚΤ$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΔΖ$ ,  $ΒΕ$ ,  $ΟΞ$ . ἐσσεῖται δὴ τοῦ  
<sup>5</sup> μὲν  $ΔΒΓ$  τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $ΘΜ$ , ἐπειδή-  
περ τρίτον μέρος ἡ  $ΘΒ$  τᾷς  $ΒΔ$  [καὶ διὰ τοῦ  $Θ$  σαμεῖον πα-  
ράλληλος τῇ βάσει ἄκται ἡ  $ΜΘ$ ]. ἔστιν δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους  
τοῦ  $ΔΒΓ$  τριγώνου καὶ ἐπὶ τᾷς  $ΔΖ$ . ὥστε τὸ  $Ξ$  κέντρον  
τοῦ βάρους τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ  $Ο$   
<sup>10</sup> σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ  $ΑΒΔ$  τριγώνου· τοῦ ἄρα  
ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $ΑΒΔ$ ,  $ΒΔΓ$  τριγώνων συγκειμένον μεγέ-  
θος, ὅπερ ἐστὶ τὸ τραπέζιον, κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $ΟΞ$   
εὐθείας. ἔστιν δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρους  
<sup>Η 162</sup> καὶ ἐπὶ τᾷς  $ΕΖ$ . ὥστε τοῦ  $ΑΒΓΔ$  τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ  
<sup>15</sup> βάρους τὸ  $Π$  σαμεῖον. ἔχοι δ' ἂν τὸ  $ΒΔΓ$  τρίγωνον ποτὶ τὸ  
 $ΑΒΔ$  λόγον, ὃν ἡ  $ΟΠ$  ποτὶ  $ΠΞ$ . ἀλλ' ὥς τὸ  $ΒΔΓ$  τρίγωνον  
ποτὶ τὸ  $ΑΒΔ$  τρίγωνον, οὕτως ἐντὶ ἡ  $ΒΓ$  ποτὶ  $ΑΔ$ , ὥς δὲ  
ἡ  $ΟΠ$  ποτὶ  $ΠΞ$ , οὕτως ἡ  $ΡΠ$  ποτὶ  $ΠΣ$ . καὶ ὥς ἄρα ἡ  $ΒΓ$   
ποτὶ  $ΑΔ$ , οὕτως ἡ  $ΡΠ$  ποτὶ  $ΠΣ$ . ὥστε καί, ὥς δύο αἱ  $ΒΓ$   
<sup>20</sup> μετὰ τᾷς  $ΑΔ$  ποτὶ δύο τὰς  $ΑΔ$  μετὰ τᾷς  $ΒΓ$ , οὕτως δύο αἱ  
 $ΡΠ$  μετὰ τᾷς  $ΠΣ$  ποτὶ δύο τὰς  $ΠΣ$  μετὰ τᾷς  $ΠΡ$ . ἀλλὰ δύο  
μὲν αἱ  $ΡΠ$  μετὰ τᾷς  $ΠΣ$  συναμφοτέρός ἐστιν ἡ  $ΣΡΗ$ , τον-  
τέστιν ἡ  $ΠΕ$ , δύο δὲ αἱ  $ΠΣ$  μετὰ τᾷς  $ΠΡ$  συναμφοτέρός  
ἐστιν ἡ  $ΡΣΠ$ , τοντέστιν ἡ  $ΠΖ$ . δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα.

ζίου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΖ (θ. 8). Ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἡ ΒΔ ἃς διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Θ, καὶ δι' αὐτῶν ἃς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ αἱ ΛΘΜ, ΝΚΤ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μὲν τριγώνου ΔΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΘΜ, ἐπειδὴ ἡ ΘΒ εἶναι τὸ ἐν τρίτον τῆς ΒΔ [καὶ διὰ τοῦ σημείου Θ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἡ ΜΘ]. Εἶναι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΔΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΖ (θ. 13)· ὥστε τὸ Ξ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εἰρημένου τριγώνου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΔ· τοῦ μεγέθους ἄρα τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΒΔΓ, ὅπερ εἶναι τὸ τραπέζιον, τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΞ. Εἶναι δὲ καὶ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους καὶ ἐπὶ τῆς ΕΖ· ὥστε τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Π. Θὰ ἰσχύῃ δὲ ἡ ἀναλογία, τρίγωνον ΒΔΓ : τρίγωνον ΑΒΔ = ΟΠ : ΠΞ (θ. 6 καὶ 7). Ἀλλὰ, τρίγωνον ΒΔΓ : τρίγωνον ΑΒΔ = ΒΓ : ΑΔ (Εὐκλ. VI, 1), καὶ ΟΠ : ΠΞ = ΡΠ : ΠΣ· καὶ ὥς ἄρα ΒΓ : ΑΔ = ΡΠ : ΠΣ· ὥστε καὶ ὥς τὸ ἄθροισμα, 2ΒΓ + ΑΔ : ἄθροισμα 2ΑΔ + ΒΓ = 2ΡΠ + ΠΣ : 2ΠΣ + ΠΡ. Ἀλλὰ 2ΡΠ + ΠΣ = ΣΡ + ΡΠ = ΠΕ, καὶ 2ΠΣ + ΠΡ = ΡΣ + ΣΠ = ΠΖ· ἀπεδείχθησαν ἄρα τὰ ζητούμενα.

## ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'

Η 164

Ἴσορροπικῶν β'

α'

Εἰ καὶ δύο χωρία περιεχόμενα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθο-  
γωνίου κώνου τομαῖς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν  
5 παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους ἔχωντι, τοῦ ἐξ  
ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βά-  
ρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾷς εὐθείας τᾷς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα  
τοῦ βάρους αὐτῶν διαιρέον οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε  
τὰ τμήματα αὐτᾶς ἀντιπεπονητότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν  
10 τοῖς χωρίοις.

ἔστω δύο χωρία τὰ  $AB, \Gamma\Delta$ , οἷα εἴρηται, κέντρα δὲ αὐ-  
τῶν τοῦ βάρους ἔστω τὰ  $E, Z$  σαιμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ  
 $AB$  ποτὶ τὸ  $\Gamma\Delta$ , τοῦτον ἔχέτω ἡ  $Z\Theta$  ποτὶ  $\Theta E$ . δεικτέον, ὅτι  
τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $AB, \Gamma\Delta$  χωρίων συγκειμένου μεγέ-  
166 θεος κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  $\Theta$  σαιμεῖον.

ἔστω δὴ τᾷ μὲν  $E\Theta$  ἑκάτερα ἴσα τὰν  $ZH, ZK$ , τᾷ δὲ  $Z\Theta$ ,  
τουτέστι τᾷ  $HE$ , ἴσα ἡ  $EA$ . ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἡ  $A\Theta$  τᾷ  $K\Theta$   
ἴσα, καὶ ἔτι, ὥς ἡ  $AH$  ποτὶ  $HK$ , οὕτως τὸ  $AB$  ποτὶ  $\Gamma\Delta$ .  
διπλασία γὰρ ἑκάτερα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν  
20  $AH$  τὸ χωρίον τοῦ  $AB$  ἐφ' ἑκάτερα τᾷς  $AH$ , ὥστε εἶμεν τὸ  
 $MN$  ἴσον τῷ  $AB$ . ἐσσεῖται δὴ τοῦ  $MN$  κέντρον τοῦ βάρους  
τὸ  $E$  σαιμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ  $NE$ , ἔξει δὲ τὸ  $MN$   
ποτὶ τὸ  $NE$  λόγον, ὃν ἡ  $AH$  ποτὶ  $HK$ . ἔχει δὲ καὶ τὸ  $AB$   
ποτὶ τὸ  $\Gamma\Delta$  τὸν τᾷς  $AH$  ποτὶ  $HK$  λόγον· καὶ ὥς ἄρα τὸ  $AB$   
25 ποτὶ  $\Gamma\Delta$ , οὕτως τὸ  $MN$  ποτὶ  $NE$ . καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ  
 $AB$  τῷ  $MN$ . ἴσον ἄρα καὶ τὸ  $\Gamma\Delta$  τῷ  $NE$ , καὶ κέντρον ἐστὶν  
αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ  $Z$  σαιμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἡ  $A\Theta$  τᾷ



## ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'

(Ἱσοροπικῶν)

βιβλίον 2

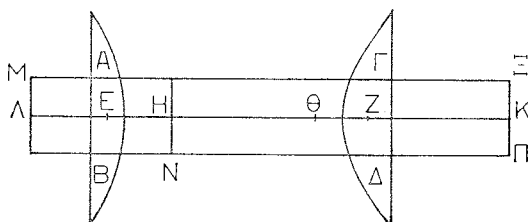
1

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, τὰ ὅποια δυνάμεθα νὰ παραβάλωμεν ὡς εὐθύγραμμα παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, μὴ ἔχοντα τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους, τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν χωρίων τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν, καὶ θὰ διαιρῇ οὕτω πῶς τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς νὰ ἔχωσι λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν χωρίων.

Ἐστω δύο χωρία τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὡς ἐλέχθησαν, κέντρα δὲ τοῦ βάρους αὐτῶν ἔστω τὰ σημεῖα Ε, Ζ, καὶ ἅς εἶναι  $ΑΒ : ΓΔ = ΖΘ : ΘΕ$ . Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν χωρίων ΑΒ, ΓΔ τὸ κέντρον βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Θ.

Ἐστω λοιπὸν πρὸς μὲν τὴν ΕΘ ἴση ἐκάστη τῶν ΖΗ, ΖΚ, πρὸς δὲ τὴν ΖΘ, τουτέστι τὴν ΗΕ, ἴση ἡ ΕΛ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΛΘ ἴση πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἀκόμη θὰ εἶναι  $ΛΗ : ΗΚ = ΑΒ : ΓΔ$  (Εὐκλ. V, 15)· διότι ἐκάστη εἶναι διπλασία ἐκάστης. Ἄς παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΛΗ τὸ χωρίον τοῦ ΑΒ συμμετρικῶς πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ΛΗ, ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ ΜΝ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Ε (1, 10). Ἄς συμπληρωθῇ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΝΞ, ὁπότε θὰ εἶναι  $ΜΝ : ΝΞ = ΛΗ : ΗΚ$  (Εὐκλ. VI, 1). Εἶναι δὲ καὶ  $ΑΒ : ΓΔ = ΛΗ : ΗΚ$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ  $ΑΒ : ΓΔ = ΜΝ : ΝΞ$ . Καὶ ἐναλλάξ (Εὐκλ. V, 16)· εἶναι δὲ  $ΑΒ = ΜΝ$ · εἶναι ἄρα καὶ  $ΓΔ = ΝΞ$  καὶ εἶναι τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ τὸ σημεῖον Ζ (1, 10). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι

ΘΚ, καὶ ὅλα ἃ ΑΚ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, [τοῦ] ὅλου τοῦ ΠΜ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ Θ σαιμεῖον. ἀλλὰ τὸ



ΜΠ ἴσον τῷ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΜΝ, ΝΞ· ὥστε καὶ τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, ΓΔ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ Θ σαιμεῖον.

Η 168

β'

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμᾶματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμᾶματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχοντα τοῖς τμᾶματεσσιν καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμᾶματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμᾶματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι λεγέσθω. φανερόν δέ, ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι τὰς τε ἑγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμᾶματος καὶ τὰς ἐξῆς παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμᾶματος καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμᾶματος διαμέτρου καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἐξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους ἐνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμᾶματος.

Εἰ δέ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ

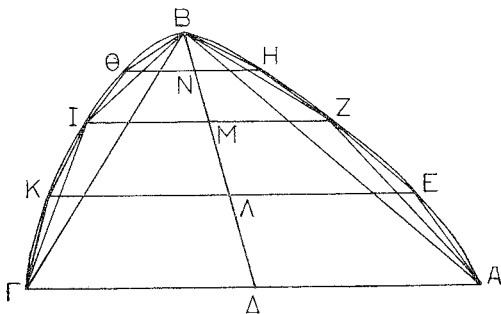
# ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'

## (ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Β')

$\Lambda\Theta = \Theta K$  καὶ ὅλη ἡ  $\Lambda K$  τέμνει εἰς τὸ μέσον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς θὰ εἶναι ὅλου τοῦ παραλληλογράμμου  $\Pi M$  κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον  $\Theta$  (1, 10). Ἀλλὰ τὸ  $M\Pi$  εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν  $MN, NE$ · ὥστε καὶ τοῦ ἄθροίσματος  $AB, \Gamma\Delta$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον  $\Theta$ .

2

Ἐὰν εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐγγραφῶσι τρίγωνα ἔχοντα τὰς αὐτὰς βάσεις πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάντοτε εἰς τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐγγράφονται τρίγωνα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα εἰς τὸ τμήμα ἄς λέγῃται, ὅτι ἐγγράφεται γνωρίμως. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τοῦ οὕτω πως ἐγγραφέντος σχήματος αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι πλησιέ-



στατα πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος καὶ ἀκολουθῶς αἱ συνδέουσαι ὁμοίως τὰς ἄλλας γωνίας θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τμήματος καὶ θὰ διχοτομῶνται ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τμήματος καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσι τὴν διάμετρον εἰς μέρη τὰ ὁποῖα ἔχουσι λόγους ὡς οἱ ἐν συνεχείᾳ περιττοὶ ἀριθμοὶ τῆς μονάδος λαμβανομένης διὰ τὸ πλησίον πρὸς τὴν κορυφὴν τμήμα. Ταῦτα δὲ πρέπει νὰ ἀποδειχθῶσιν εἰς τοὺς οἰκείους τόπους.

Ἐὰν εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγρα-

ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφή, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾷς τοῦ τμύματος διαμέτρους.

ἔστω τμᾶμα τὸ  $ABΓ$ , οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ  $AEZHΒΘΙΚΓ$ . δεικτέον, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾷς  $ΒΔ$ .

ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν  $AEKΓ$  τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους  
 Η 170 ἐπὶ τᾷς  $ΛΔ$  ἐστί, τοῦ δὲ  $EZIK$  τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾷς  
 10  $ΜΛ$ , τοῦ δὲ  $ZHΘI$  τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾷς  $MN$ , ἔτι δὲ καὶ τοῦ  $HBΘ$  τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $BN$ , δῆλον, ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷς  $ΒΔ$  ἐστίν.

γ'

15 Εἰ καὶ δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφή γνωρίμως, ἔχοντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν  
 20 τμαμάτων.

ἔστω δύο τμᾶματα τὰ  $ABΓ$ ,  $EOΠ$ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως, καὶ τᾶν πασᾶν πλευρῶν τὸν ἀριθμὸν ἔχόντων ἀλλάλοις ἴσον, διαμέτροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ  $ΒΔ$ ,  $OP$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $EK$ ,  $ZI$ ,  $HΘ$   
 25 καὶ αἱ  $ΣΤ$ ,  $ΥΦ$ ,  $ΧΨ$ . ἐπεὶ οὖν ἃ τε  $ΒΔ$  διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν περισσῶν λόγους καὶ ἃ  $PO$ , καὶ τῷ πλήθει τὰ τμᾶματα αὐτᾶν ἴσα ἐντί, δῆλον, ὥς τὰ τε τμᾶματα τᾶν διαμέτρων ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται,  
 Η 172 καὶ αἱ παραλλήλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐξοῦντι. καὶ τῶν τρα-

**ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'**  
(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Β')

φῆ εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ τμήματος.

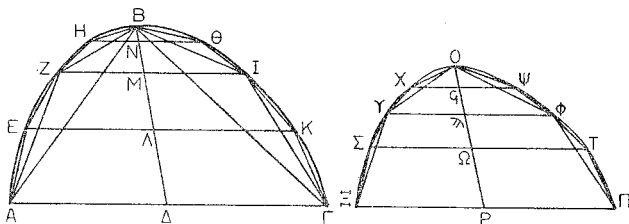
Ἔστω τὸ τμήμα  $AB\Gamma$ , ὅπως ἐλέχθη, καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ γνωρίμως τὸ εὐθύγραμμον  $AEZH\Theta IK\Gamma$ . Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εὐθυγράμμου εἶναι ἐπὶ τῆς  $BD$ .

Διότι ἐπειδὴ τοῦ μὲν τραπεζίου  $AEK\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς  $AD$ , τοῦ δὲ τραπεζίου  $EZIK$  τὸ κέντρον εἶναι ἐπὶ τῆς  $ML$ , τοῦ δὲ τραπεζίου  $ZH\Theta I$  τὸ κέντρον εἶναι ἐπὶ τῆς  $MN$ , ἀκόμη δὲ τοῦ τριγώνου  $H\Theta$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς  $BN$ , εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς  $BD$ .

3

Ἐὰν εἰς δύο ὅμοια τμήματα περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ εἰς ἕκαστον γνωρίμως εὐθύγραμμον, νὰ ἔχωσι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμματα τὰς πλευρὰς ἴσας κατὰ τὸ πλῆθος, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ τέμνωσιν ὁμοίως τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων.

Ἔστω δύο τμήματα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $EO\Pi$ , καὶ ἄς ἐγγραφῶσιν εἰς



αὐτὰ εὐθύγραμματα γνωρίμως, καὶ νὰ ἔχωσι τὸ πλῆθος ὅλων τῶν πλευρῶν ἴσον, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμημάτων αἱ  $BD$ ,  $OP$ , καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ  $EK$ ,  $ZI$ ,  $H\Theta$  καὶ αἱ  $\Sigma T$ ,  $\Upsilon\Phi$ ,  $\chi\Psi$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ ἡ  $BD$  διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς λόγους τῶν (ἀπὸ τῆς μονάδος) ἐν συνεχείᾳ περιττῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ  $PO$ , καὶ κατὰ τὸ πλῆθος εἶναι ἴσα τὰ τμήματα αὐτά, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὰ τμήματα τῶν διαμέτρων θὰ εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, καὶ αἱ παράλληλοι

πεζίων τοῦ τε  $ΑΕΚΓ$  καὶ τοῦ  $ΞΣΤΠ$  τὰ κέντρα τῶν βαρέων  
 ἐσσεῖται ἐπὶ τῶν  $ΛΔ$ ,  $ΩΡ$  εὐθειᾶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν  
 αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΕΚ$  ταῖς  $ΞΠ$ ,  $ΣΤ$ . πάλιν δὲ καὶ  
 τῶν  $ΕΖΙΚ$ ,  $ΣΥΦΤ$  τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦν-  
 5 ται ὁμοίως διαιρόντα τὰς  $ΑΜ$ ,  $Ολ$ , καὶ τῶν  $ΖΗΘΙ$ ,  $ΥΧΨΦ$   
 τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρόν-  
 τα τὰς  $ΜΝ$ ,  $ςλ$ , ἐσσεῖται δὲ καὶ τῶν  $ΗΒΘ$ ,  $ΧΟΨ$  τριγώ-  
 νων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν  $ΒΝ$ ,  $Ος$  ὁμοίως κείμενα·  
 ἔχοντι δὴ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα. δῆλον  
 10 ὄν, ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ  $ΑΒΓ$  τμήματι ἐγ-  
 γεγραμμένον τὸ κέντρον τοῦ βάρους ὁμοίως διαιρεῖ τὰν  $ΒΔ$   
 Η 174 καὶ τοῦ ἐν τῷ  $ΞΟΠ$  τμήματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ  
 βάρους τὰν  $ΟΡ$ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'

15 Παντὸς τμήματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθο-  
 γωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τᾶς  
 τοῦ τμήματος διαμέτρου.

ἔστω τμᾶμα, ὡς εἴρηται, τὸ  $ΑΒΓ$ , οὗ διάμετρος ἔστω ἡ  
 $ΒΔ$ . δεικτέον, ὅτι τοῦ εἰρημένου τμήματος κέντρον τοῦ βά-  
 20 ρεός ἐστὶν ἐπὶ τᾶς  $ΒΔ$ .

εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ  $Ε$ , καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν  $ΒΔ$   
 ἡ  $ΕΖ$ , καὶ ἐγγεγράφω εἰς τὸ τμᾶμα τρίγωνον τὸ  $ΑΒΓ$  τὰν  
 αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ  $ΓΖ$   
 ποτὶ  $ΖΔ$ , τοῦτον ἔχέτω τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον ποτὶ τὸ  $Κ$  χωρίον·  
 25 ἐγγεγράφω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως,  
 ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ  $Κ$ . τοῦ  
 δὴ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν  
 ἐπὶ τᾶς  $ΒΔ$ . ἔστω τὸ  $Θ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΘΕ$  καὶ ἐκβεβλήσθω,  
 καὶ παρὰ τὰν  $ΒΔ$  ἄχθω ἡ  $ΓΛ$ . δῆλον δὴ, ὅτι μείζονα λόγον  
 30 ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμήματι ποτὶ τὰ  
 λειπόμενα τμήματα ἢ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον ποτὶ τὸ  $Κ$ . ἀλλ', ὡς

θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς λόγους. Καὶ τῶν τραπεζίων καὶ τοῦ ΑΕΚΓ καὶ τοῦ ΞΣΤΠ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ εἶναι ὁμοίως κείμενα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΛΔ, ΩΡ, ἐπειδὴ  $ΑΓ : ΕΚ = ΞΠ : ΣΤ$ . πάλιν δὲ καὶ τῶν τραπεζίων ΕΖΙΚ, ΣΥΦΤ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ διαιρῶσιν ὁμοίως τὰς ΑΜ, ΩΖ, καὶ τῶν τραπεζίων ΖΗΘΙ, ΥΧΨΦ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ διαιρῶσιν ὁμοίως τὰς ΜΝ, ςΖ, θὰ εἶναι δὲ καὶ τῶν τριγώνων ΗΒΘ, ΧΟΨ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ὁμοίως κείμενα ἐπὶ τῶν ΒΝ, Ος· θὰ ἔχωσι λοιπὸν τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ὁλοκλήρου τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τμήμα ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους διαιρεῖ ὁμοίως τὴν ΒΔ καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τμήμα ΕΟΠ τὸ κέντρον τοῦ βάρους διαιρεῖ ὁμοίως τὴν ΟΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

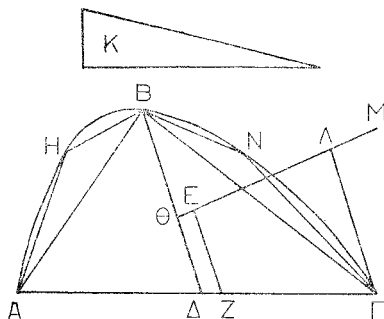
4

Παντὸς τμήματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ τμήματος.

Ἐστω τμήμα, ὡς ἐλέχθη, τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τοῦ εἰρημένου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΔ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΕΖ, καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμήμα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον καὶ ἄς εἶναι  $ΓΖ : ΖΔ = \text{τρίγωνον ΑΒΓ} : \text{χωρίον Κ}$ . ἄς ἐγγραφῇ δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμήμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ Κ· τοῦ ἐγγεγραφομένου ὅμως εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΔ (θ. 2). Ἐστω τὸ Θ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΘΕ καὶ ἄς προεκβληθῇ, καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΛ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμήμα εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἔχει μεγαλύτερον

Η 176 τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον ποτὶ τὸ  $K$ , οὕτως ἡ  $ΓΖ$  ποτὶ  $ΖΔ$ · καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ  $ΓΖ$  ποτὶ  $ΖΔ$ , τουτέστιν ἡ  $ΛΕ$  ποτὶ  $ΕΘ$ . ἐχέτω οὖν ἡ  $ΜΕ$  ποτὶ  $ΕΘ$  τὸν αὐτὸν λόγον τὸν τοῦ



- 5 εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ τμήματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  $E$  κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθύγραμμον τὸ  $Θ$ , δηλον, ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐκβληθείσας τῆς  $ΘΕ$  καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἡ λόγον  
10 ἔχει ποτὶ τὰν  $ΘΕ$ , ὅν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα. ὥστε εἴη καὶ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $M$  σαμεῖον· ὅπερ ἄτοπον· τῆς γὰρ διὰ τοῦ  $M$  παρὰ τὰν  $ΒΔ$  ἀγομένης ἐπὶ ταῦτα ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμή-  
15 ματα. δηλον οὖν, ὅτι ἐπὶ τῆς  $ΒΔ$  τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

ε'

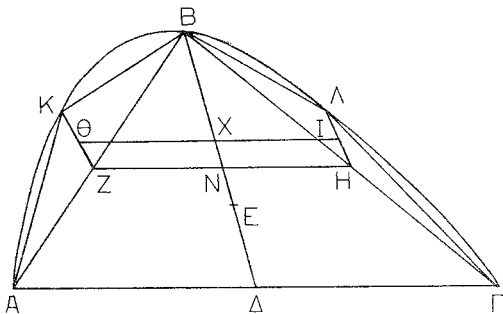
Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κῶνον τομᾶς εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐγγύτερόν ἐστι τῆς κορυφᾶς  
20 τοῦ τμήματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθύγραμμον κέντρον.



λόγον ἢ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  πρὸς τὸ  $K$ . Ἀλλὰ ὥς τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma : K = \Gamma Z : Z\Delta$ · καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ ἡ  $\Gamma Z : Z\Delta$ , τουτέστιν ἢ  $\Lambda E : E\Theta$ . Ἄς ἔχῃ λοιπὸν ἡ  $ME : E\Theta$  τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν λόγον τοῦ εὐθυγράμμου πρὸς τὰ τμήματα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν  $E$  εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ εὐθυγράμμου εἶναι τὸ  $\Theta$ , εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦ λοιποῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι, ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ  $\Theta E$  καὶ ληφθῇ εὐθεῖά τις, ἢ ὅποια νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν  $\Theta E$ , ὃν ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμήματα. Ὡστε καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι τὸ σημεῖον  $M$ · ὅπερ ἄτοπον· διότι τὰ περιλειπόμενα τμήματα, ὅταν ἀχθῇ διὰ τοῦ  $M$  ἢ παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Delta$ , θὰ εἶναι ὅλα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς  $B\Delta$ .

5

Ἐὰν εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ εὐθύγραμμον γνωρίμως, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμή-



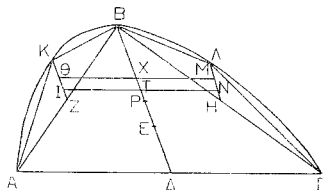
ματος εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος ἢ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου.

- ἔστω τὸ  $ABΓ$  τμήμα, ὅλον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ  
 ἡ  $AB$ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως  
 τὸ  $ABΓ$ , καὶ τετμάσθω ἡ  $ΒΔ$  κατὰ τὸ  $E$ , ὥστε εἴμεν διπλασί-  
 Η 178 αν τὰν  $BE$  τὰς  $ΕΔ$ . ἔστιν οὖν τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου κέντρον τοῦ  
 5 βάρους τὸ  $E$  σαμεῖον. τετμάσθω δὴ δίχα ἑκατέρω τὰν  $AB$ ,  $BΓ$   
 κατὰ τὰ  $Z$ ,  $H$ , καὶ διὰ τῶν  $Z$ ,  $H$  παρὰ τὰν  $ΒΔ$  ἄχθωσαν  
 αἱ  $ZK$ ,  $ΛΗ$ . ἐσσεῖται ἄρα τοῦ μὲν  $AKB$  τμήματος τὸ κέντρον  
 τοῦ βάρους ἐπὶ τὰς  $ZK$ , τοῦ δὲ  $BΓΛ$  τμήματος τὸ κέντρον  
 τοῦ βάρους ἐπὶ τὰς  $ΗΛ$ . ἔστω δὲ τὰ  $Θ$ ,  $I$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  
 10  $ΘI$ . καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ  $ΘZHI$ , καὶ ἴσα ἐστι  
 τῇ  $ZN$  ἡ  $NH$ , ἔστιν ἄρα καὶ ἡ  $XΘ$  ἴσα τῇ  $XI$ . ὥστε τοῦ ἐξ  
 ἀμφοτέρων τῶν  $AKB$ ,  $BΛΓ$  τμημάτων συγκειμένου μεγέθους  
 κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ μέσας τὰς  $ΘI$  [ἐπειδὴ περ ἴσα  
 ἐντὶ τμήματα], τουτέστιν τὸ  $X$  σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν  $ABΓ$   
 15 τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  $E$  σαμεῖον, τοῦ δὲ συγ-  
 κειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $AKB$ ,  $BΛΓ$  τὸ  $X$ , δηλὸν οὖν,  
 Η 180 ὅτι ὅλον τοῦ τμήματος τοῦ  $ABΓ$  κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν  
 ἐπὶ τὰς  $XE$ , τουτέστι μεταξὺ τῶν  $X$ ,  $E$  σαμείων. ὥστ' εἴη  
 κα ἐγγύτερον τὰς τοῦ τμήματος κορυφαῖς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου  
 20 τμήματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.  
 ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμήμα πεντάγωνον εὐθύγραμ-  
 μον γνωρίμως τὸ  $AKBΛΓ$ , καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος  
 διάμετρος ἡ  $ΒΔ$ , ἑκατέρου δὲ τῶν τμημάτων ἑκατέρω τὰν  
 $KZ$ ,  $ΛΗ$  διάμετρος [καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ  $AKB$  τμήματι ἐγγέγρα-  
 25 πται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ  
 βάρους ἐστὶν ἐγγύτερον τὰς κορυφαῖς ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου].  
 ἔστω οὖν τοῦ μὲν τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $Θ$ , τοῦ  
 δὲ τριγώνου τὸ  $I$ , πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν  $BΛΓ$  τμήματος τὸ  
 κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $M$ , τοῦ δὲ τριγώνου τὸ  $N$ . ἐσσεῖται  
 30 δὴ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $AKB$ ,  $BΛΓ$  τμημάτων συγκει-  
 μένου μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $X$ , τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέ-  
 ρων τῶν  $AKB$ ,  $BΛΓ$  τριγώνων τὸ  $T$ . πάλιν οὖν, ἐπεὶ τοῦ  $ABΓ$

Ἐστω τὸ τμήμα  $AB\Gamma$ , ὡς ἐλέχθη, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $\Delta B$ , καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ γνωρίμως πρῶτον τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ , καὶ ἄς τμηθῇ ἡ  $BA$  κατὰ τὸ  $E$ , ὥστε ἡ  $BE$  νὰ εἶναι διπλασία τῆς  $EA$ . εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον  $E$ , (1, 14). Ἄς τμηθῇ λοιπὸν ἐκάστη τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  κατὰ τὰ σημεῖα  $Z$ ,  $H$ , καὶ διὰ τῶν  $Z$ ,  $H$  ἄς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν  $BA$  αἱ  $ZK$ ,  $ΛH$ . θὰ εἶναι ἄρα τοῦ μὲν τμήματος  $AKB$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς  $ZK$  (θ. 4), τοῦ δὲ τμήματος  $B\Gamma\Lambda$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς  $HL$ . Ἐστω ὅτι εἶναι αὐτὰ τὰ  $\Theta$ ,  $I$ , καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ  $\Theta I$ . Καὶ ἐπειδὴ τὸ  $\Theta ZHI$  εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἡ  $NH$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $ZN$ , εἶναι ἄρα καὶ ἡ  $X\Theta = XI$ . ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων  $AKB$ ,  $BA\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς  $\Theta I$  [ἐπειδὴ βεβαίως τὰ τμήματα εἶναι ἴσα], τουτέστιν τὸ σημεῖον  $X$ . Ἐπειδὴ δὲ τοῦ μὲν τριγώνου  $AB\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον  $E$ , τοῦ δὲ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $AKB$ ,  $BA\Gamma$  εἶναι τὸ  $X$ , εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλου τοῦ τμήματος  $AB\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς  $XE$ , τουτέστι μετὰξὺ τῶν σημείων  $X$ ,  $E$ . ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος θὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος ἢ τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἐγγραφομένου γνωρίμως.

Ἄς ἐγγραφῇ πάλιν εἰς τὸ τμήμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ  $AKB\Lambda\Gamma$ , καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος διάμετρος ἡ  $BA$ , ἐκάστου δὲ τῶν τμημάτων διάμετρος ἐκάστη τῶν  $KZ$ ,  $\Lambda H$  [καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τμήμα  $AKB$  ἔχει ἐγγραφῇ γνωρίμως εὐθύγραμμον, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν ἢ τὸ κέντρον τοῦ εὐθυγράμμου]. Ἐστω λοιπὸν τοῦ μὲν τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ , τοῦ δὲ τριγώνου τὸ  $I$ , πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν τμήματος  $BA\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $M$ , τοῦ δὲ τριγώνου τὸ  $N$ . θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μὲν μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων  $AKB$ ,  $BA\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $X$ , τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων

τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  $E$ , τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων  
τῶν  $AKB$ ,  $BAΓ$  τμαμάτων τὸ  $X$ , δηλον, ὡς [τοῦ] ὅλου τοῦ  
 $ABΓ$  τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τᾷς  $XE$  τμα-  
H 182 θείσας οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον ποτὶ



- 5 τὰ συναμφοτέρα τὰ  $AKB$ ,  $BAΓ$  τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον  
ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ  $X$  ποτὶ τὸ ἔλασσον  
τμᾶμα. τοῦ δὲ  $AKBAΓ$  πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν  
ἐπὶ τᾷς  $ET$  εὐθείσας τμαθείσας οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον τὸ  
 $ABΓ$  τρίγωνον ποτὶ τὰ  $AKB$ ,  $BAΓ$  τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν  
10 τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ  $T$  ποτὶ τὸ λοιπόν.  
ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον ποτὶ τὰ  $KAB$ ,  
 $ABΓ$  τρίγωνα ἢ ποτὶ τὰ τμάματα, δηλον οὖν, ὅτι τοῦ  $ABΓ$   
τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐγγύτερόν ἐστὶ τᾷς  $B$  κορυ-  
φᾷς ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. καὶ ἐπὶ πάντων εὐ-  
15 θυγράμμων τῶν ἐγγραφομένων ἐς τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ  
αὐτὸς λόγος.

ζ'

Τμάματος δοθέντος περιεχομένον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθο-  
γωνίου κώνου τομᾶς δυνατόν ἐστιν ἐς τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον  
20 γνωρίμως ἐγγράφαι, ὥστε τὰν μεταξὺν εὐθεϊαν τῶν κέντρων  
τοῦ βάρους τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου  
ἐλάσσονα εἶμεν πάσας τὰς προτεθείσας εὐθείας.

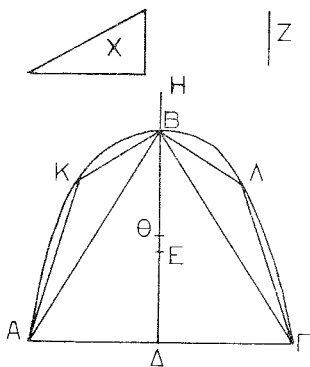
δεδόσθω τμᾶμα τὸ  $ABΓ$ , οἷον εἴρηται, οὗ κέντρον ἔστω  
τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρί-  
25 μως τὸ  $ABΓ$ , καὶ ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $Z$ , καὶ ὃν λόγον

ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ Τ. Πάλιν λοιπόν, ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ε, τοῦ δὲ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ εἶναι τὸ Χ, εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλου τοῦ τμήματος ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΧΕ τμηθείσης οὕτως, ὥστε ὄν λόγον ἔχει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ, τὸν αὐτὸν λόγον νὰ ἔχη τὸ τμήμα τὸ ἔχον πέρας τὸ Χ (τὸ μεγαλύτερον) πρὸς τὸ μικρότερον τμήμα. Τοῦ δὲ πενταγώνου ΑΚΒΛΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΤ τμηθείσης οὕτως, ὥστε ὄν λόγον ἔχει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΛΓ, τοῦτον τὸν λόγον νὰ ἔχη τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ ἔχον πέρας τὸ Τ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον. Ἐπειδὴ λοιπόν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΒΓ ἢ πρὸς τὰ τμήματα, εἶναι προφανές, ὅτι τοῦ τμήματος ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Β ἢ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ἐπὶ ὅλων τῶν εὐθυγράμμων τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὰ τμήματα γνωρίμως.

6

Τμήματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι δυνατόν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμήμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἢ μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ βάρους τοῦ τμήματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου νὰ εἶναι μικρότερα πάσης δοθείσης εὐθείας.

Ἐστω τὸ τμήμα ΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἔστω τὸ Θ, καὶ ἅς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ γνωρίμως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Ζ, καὶ ὄν λόγον ἔχει ἡ ΒΘ πρὸς Ζ τοῦτον



ἔχει ἡ  $B\Theta$  ποτὶ  $Z$ , τοῦτον τὸν λόγον ἔχέτω τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον  
 ποτὶ τὸ  $X$  χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ  $AB\Gamma$  τμᾶμα εὐθύ-  
 Η 184 γραμμον γνωρίμως τὸ  $AKB\Lambda\Gamma$ , ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμᾶ-  
 ματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ  $X$ , καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐ-  
 5 θυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $E$ . φανί δὴ τὰν  $\Theta E$  ἐλάσ-  
 σονα εἶμεν τᾶς  $Z$ .

εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ  $AKB\Lambda\Gamma$  εὐ-  
 θύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμᾶματα μείζονα λόγον ἔχει  
 ἢ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον ποτὶ  $X$ , τουτέστιν ἡ  $\Theta B$  ποτὶ  $Z$ , ἔχει δὲ  
 10 καὶ ἡ  $B\Theta$  ποτὶ  $Z$  οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει ποτὶ  $\Theta E$ , διὰ  
 τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν  $\Theta E$  τᾶς  $Z$ , πολλῷ ἄρα τὸ  $AKB\Lambda\Gamma$   
 εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμᾶματα μείζονα λόγον  
 ἔχει ἢ ἡ  $B\Theta$  ποτὶ  $\Theta E$ . ὥστε, ἐὰν ποιῶμες, ὥς τὸ  $AKB\Lambda\Gamma$   
 εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμᾶματα, οὕτως ἄλλαν  
 15 τινὰ ποτὶ  $\Theta E$  [ἐπειδὴ τοῦ  $AB\Gamma$  τμᾶματος τὸ κέντρον τοῦ βάρ-  
 ρεός ἐστι τὸ  $\Theta$ , ἐκβληθείσας τᾶς  $E\Theta$  καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς  
 εὐθείας ἐχούσας λόγον ποτὶ τὰν  $E\Theta$ , ὃν τὸ  $AKB\Lambda\Gamma$  εὐθύγραμ-  
 μον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμᾶματα], ἐσσεῖται μείζων τᾶς  
 $\Theta B$ . ἔχέτω οὖν ἡ  $H\Theta$  ποτὶ  $\Theta E$ . τὸ  $H$  ἄρα κέντρον τοῦ βάρ-  
 20 ρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων· ὅπερ  
 ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ  $H$  ἀχθείσας παρὰ τὰν  $A\Gamma$  ἐπὶ τὰ  
 αὐτὰ ἐστὶν [τῷ τμήματι]. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ  $\Theta E$  ἐλάσσων ἐστὶ  
 τᾶς  $Z$ . ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

Η 186

ζ'

25 Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ τε εὐθείας καὶ  
 ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν  
 λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους.

ἔστω δύο τμᾶματα, οἷα εἴρηται, τὰ  $AB\Gamma$ ,  $EZH$ , ὧν δια-  
 μέτροι αἱ  $B\Delta$ ,  $Z\Theta$ , καὶ ἔστω τοῦ μὲν  $AB\Gamma$  τμᾶματος κέντρον  
 30 τοῦ βάρους τὸ  $K$  σαμεῖον, τοῦ δὲ  $EZH$  τὸ  $\Lambda$ . δεικτέον, ὅτι εἰς

**ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'**  
(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Β')

τὸν λόγον νὰ ἔχῃ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  πρὸς τὸ χωρίον  $X$ . Ἐὰς ἐγγρα-  
φῇ λοιπὸν εἰς τὸ τμήμα  $AB\Gamma$  γνωρίμως τὸ εὐθύγραμμον  $AKBA\Gamma$ ,  
ὥστε τὰ ἀπομένοντα τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου  $X$ ,  
καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους τὸ  
 $E$ . Λέγω, ὅτι ἡ  $\Theta E$  εἶναι μικροτέρα τῆς  $Z$ .

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἡ ἴση ἢ μεγαλυτέρα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ  
εὐθύγραμμον  $AKBA\Gamma$  πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἔχει μεγαλύ-  
τερον λόγον ἢ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  πρὸς τὸ  $X$ , τουτέστιν ἡ  $\Theta B$  πρὸς  $Z$ ,  
ἔχει δὲ καὶ ἡ  $B\Theta$  πρὸς  $Z$  ὅχι μικρότερον λόγον, ἐκείνου τὸν ὅποιον  
ἔχει πρὸς  $\Theta E$ , ἐπειδὴ ἡ  $\Theta E$  δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς  $Z$  (Εὐκλ. V, 8),  
κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὸ εὐθύγραμμον  $AKBA\Gamma$  πρὸς τὰ ἀπομέ-  
νοντα τμήματα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ ἡ  $B\Theta$  πρὸς  $\Theta E$ . ὥστε,  
ἐὰν κατασκευάσωμεν, ὡς τὸ εὐθύγραμμον  $AKBA\Gamma$  πρὸς τὰ ἀπο-  
μένοντα τμήματα, οὕτως ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν πρὸς  $\Theta E$  [ἐπειδὴ τοῦ  
τμήματος  $AB\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $\Theta$ , ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ  
 $E\Theta$  καὶ ἀπ' αὐτῆς ληφθῇ εὐθεῖα τις ἔχουσα λόγον πρὸς τὴν  $E\Theta$ ,  
ὃν ἔχει τὸ εὐθύγραμμον  $AKBA\Gamma$  πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα],  
θὰ εἶναι αὕτη μεγαλυτέρα τῆς  $\Theta B$  (Εὐκλ. V, 8). Ἐὰς εἶναι λοιπὸν ὡς  
ἡ  $H\Theta$  πρὸς  $\Theta E$ . Τὸ  $H$  ἄρα εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ συγκειμένου  
ἐκ τῶν ἀπομενόντων τμημάτων· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἀχθείσης διὰ  
τοῦ  $H$  τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν  $AG$  εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς  
ὅλα τὰ ἀπομένοντα τμήματα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ  $\Theta E$  εἶναι  
μικροτέρα τῆς  $Z$ . τοῦτο δὲ ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

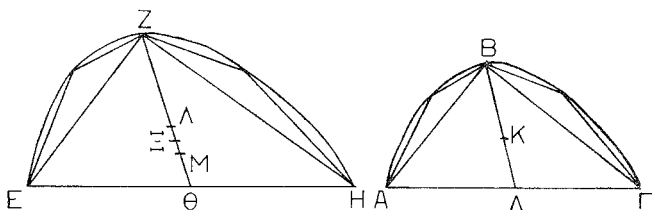
7

Δύο τμημάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας καὶ παρα-  
βολῆς τὰ κέντρα τῶν βαρῶν τέμνουσι τὰς διαμέτρους εἰς τὸν αὐτὸν  
λόγον.

Ἐστω δύο τμήματα, ὡς ἐλέχθη, τὰ  $AB\Gamma$ ,  $EZH$ , τῶν ὁποίων  
διάμετροι εἶναι αἱ  $B\Delta$ ,  $Z\Theta$ , καὶ ἔστω τοῦ μὲν τμήματος  $AB\Gamma$  κέν-  
τρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον  $K$ , τοῦ δὲ  $EZH$  τὸ  $\Lambda$ . Πρέπει νὰ δει-

τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ  $K$ ,  $\Lambda$ .

εἰ γὰρ μή, ἔστω, ὥς ἂ  $KB$  ποτὶ  $KA$ , οὕτως ἂ  $ZM$  ποτὶ  $M\Theta$ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ  $EZH$  τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμύματος καὶ τοῦ



- 5 ἐγγεγραμμένου εὐθύγραμμου ἐλάσσονα εἶμεν τὰς  $\Lambda M$ , καὶ ἔστω τοῦ ἐγγεγραφέντος εὐθύγραμμου κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Xi$  σαρμεῖον, ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ  $AB\Gamma$  τμᾶμα τῷ ἐν τῷ  $EZH$  [ἐγγεγραμμένῳ εὐθύγραμμῳ] ὁμοῖον εὐθύγραμμον [τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως]. οὐδὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὰς κορυφᾶς  
10 ἐγγύτερον ἢ περὶ τὸ τοῦ τμύματος· ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἂ  $BK$  ποτὶ  $KA$ , ὃν ἂ  $Z\Lambda$  ποτὶ  $\Lambda\Theta$ .

ἡ'

- Παντὸς τμύματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθο-  
H 188 γωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρους διαιρεῖ τὰν τοῦ  
15 τμύματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἀμύλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τῇ κορυφῇ τοῦ τμύματος τοῦ ποτὶ τῇ βάσει.

ἔστω τὸ  $AB\Gamma$  τμᾶμα, οἷον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἂ  $B\Delta$ , κέντρον δὲ τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$  σαρμεῖον. δεικτέον, ὅτι ἀμολία ἐστὶν ἂ  $B\Theta$  τὰς  $\Theta\Delta$ .

- 20 ἐγγεγράφθω ἐς τὸ  $AB\Gamma$  τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , οὗ κέντρον τοῦ βάρους ἔστω τὸ  $E$ , καὶ τετρασθὼ δίχα ἑκατέρω τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ , καὶ ἄχθων αἱ  $KZ$ ,  $HA$ . διαμέτροι ἄρα ἐντὶ τῶν  $AKB$ ,  $B\Lambda\Gamma$  τμυμάτων. ἔστω οὖν τοῦ μὲν  $AKB$  τμύματος



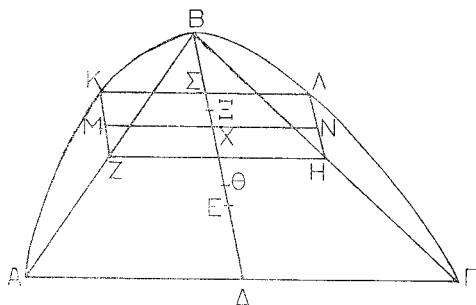
χθῆ, ὅτι τὰ Κ, Λ τέμνουσι τὰς διαμέτρους εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Διότι ἐὰν ὄχι, ἔστω, ὥς ἡ  $KB : ΚΔ = ΖΜ : ΜΘ$ , καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμήμα ΕΖΗ εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε ἡ ἀπόστασις ἡ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμήματος καὶ τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΛΜ (θ. 6), καὶ ἔστω κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου τὸ σημεῖον Ξ, ἄς ἐγγραφῇ δὲ εἰς τὸ τμήμα ΑΒΓ εὐθύγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ [ἐγγραφὲν εὐθύγραμμον] εἰς τὸ τμήμα ΕΖΗ [τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως]· τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐγγύτερον πρὸς τὴν κορυφὴν ἢ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 5). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ΒΚ πρὸς ΚΔ, ὃν ἔχει ἡ ΖΛ πρὸς ΛΘ.

8

Παντὸς τμήματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους διαιρεῖ τὴν διάμετρον τοῦ τμήματος, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος νὰ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ πρὸς τὴν βάσιν.

Ἔστω τὸ τμήμα ΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Θ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΘ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τῆς ΘΔ.



Ἄς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμήμα ΑΒΓ γνωρίμως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου κέντρον τοῦ βάρους ἔστω τὸ Ε, καὶ ἄς τηθῇ εἰς τὸ μέσον ἐκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΚΖ, ΗΛ· εἶναι ἄρα αὗται διάμετροι τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ. Ἔστω λοιπὸν τοῦ μὲν τμήματος ΑΚΒ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Μ, τοῦ δὲ ΒΛΓ τὸ Ν, καὶ

τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $M$ , τοῦ δὲ  $ΒΛΓ$  τὸ  $N$ , καὶ ἐπεξεύ-  
 χθωσαν αἱ  $ZH$ ,  $MN$ ,  $ΚΛ$ . τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμα-  
 μάτων συγκειμένον μεγέθος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ  
 $X$ . καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὥς ἂ  $ΒΘ$  ποτὶ  $ΘΔ$ , οὕτως ἂ  $ΚΜ$  ποτὶ  $ΜΖ$ ,  
 5 καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὥς ἂ  $ΒΔ$  ποτὶ  $ΚΖ$ , οὕτως ἂ  $ΔΘ$   
 ποτὶ  $ΜΖ$ , τετραπλασία δὲ ἂ  $ΒΔ$  τᾶς  $ΚΖ$ . τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει  
 δείκνυται, οἷον σαμεῖον  $Δ$ . τετραπλασίων ἄρα καὶ ἂ  $ΔΘ$  τᾶς  
 $ΜΖ$ . ὥστε καὶ λοιπὰ ἂ  $ΒΘ$  λοιπᾶς τᾶς  $ΚΜ$ , τουτέστι τᾶς  
 $ΣΧ$ , τετραπλασίων. καὶ λοιπὰ ἄρα συναμφοτέρα ἂ  $ΒΣ$ ,  $ΧΘ$   
 Η 190 τριπλασίων τᾶς  $ΣΧ$ . ἔστω τριπλασία ἂ  $ΒΣ$  τᾶς  $ΣΕ$ . καὶ ἂ  
 $ΧΘ$  ἄρα τᾶς  $ΕΧ$  ἐστὶ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν  
 ἂ  $ΒΔ$  τᾶς  $ΒΣ$ . καὶ γὰρ τοῦτο δείκνυται· ἂ δὲ  $ΒΣ$  τᾶς  $ΣΕ$   
 τριπλασίων, ἂ  $ΕΒ$  ἄρα τᾶς  $ΒΔ$  τρίτον μέρος ἐστίν. ἐστὶν δὲ  
 καὶ ἂ  $ΕΔ$  τᾶς  $ΔΒ$  τρίτον μέρος, ἐπειδὴ περ κέντρον τοῦ βάρους  
 15 τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου ἐστὶ τὸ  $Ε$ . καὶ λοιπὰ ἄρα ἂ  $ΕΕ$  τρίτον  
 μέρος τᾶς  $ΒΔ$ . καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλον τμήματος κέντρον τοῦ  
 βάρους ἐστὶ τὸ  $Θ$  σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν  $ΑΚΒ$ ,  
 $ΒΛΓ$  τμαμάτων συγκειμένον μεγέθος τὸ κέντρον τοῦ βάρους  
 τὸ  $Χ$ , τοῦ δὲ  $ΑΒΓ$  τριγώνου τὸ  $Ε$ , ἐσσεῖται, ὥς τὸ  $ΑΒΓ$  τρί-  
 20 γωνον ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τμήματα, οὕτως ἂ  $ΧΘ$  ποτὶ  
 $ΘΕ$ . τριπλασίον δὲ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῶν τμαμάτων [ἐπει-  
 δὴ περ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτρίτον ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου]· τρι-  
 πλασία ἄρα καὶ ἂ  $ΧΘ$  τᾶς  $ΘΕ$ . ἐδείχθη δὲ ἂ  $ΧΘ$  τριπλασία  
 καὶ τᾶς  $ΧΕ$ . πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἂ  $ΕΕ$  τᾶς  $ΕΘ$ , τουτέστιν  
 25 ἂ  $ΔΕ$  τᾶς  $ΕΘ$ . ἴσα γάρ ἐστιν αὐτᾶ· ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἂ  
 $ΔΘ$  τᾶς  $ΘΕ$ . καὶ ἐντι τᾶς  $ΔΕ$  τριπλασία ἂ  $ΒΔ$ . ἀμολία ἄρα  
 ἐντι ἂ  $ΒΘ$  τᾶς  $ΘΔ$ . ὅπερ ἔδει δείξαι.

θ'

Εἴ κα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον ἔωντι ἐν τᾷ συνεχεῖ  
 30 ἀναλογία, καὶ ὅν ἔχει λόγον ἂ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχάν,  
 ἧ ὑπερέχει ἂ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λα-

ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΖΗ, ΜΝ, ΚΛ· τοῦ μεγέθους ἄρα τοῦ συγκειμένου ἐκ τοῦ ἄθροίσματος ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Χ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι  $BΘ : ΘΔ = ΚΜ : ΜΖ$ , εἶναι καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. V, 18) καὶ ἐναλλάξ  $ΒΔ : ΚΖ = ΔΘ : ΜΖ$  (Εὐκλ. V, 16), εἶναι δὲ ἡ ΒΔ τετραπλασία τῆς ΚΖ· διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὸ τέλος ὅπου τὸ σημεῖον δ· εἶναι ἄρα τετραπλασία καὶ ἡ ΔΘ τῆς ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΒΘ τῆς ὑπολοίπου τῆς ΚΜ, τουτέστι τῆς ΣΧ, εἶναι τετραπλασία. Καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα, δηλ. τὸ ἄθροισμα  $ΒΣ + ΧΘ$ , εἶναι τριπλασία τῆς ΣΧ. Ἐστω ἡ ΒΣ τριπλασία τῆς ΣΞ· καὶ ἡ ΧΘ ἄρα εἶναι τριπλασία τῆς ΞΧ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι τετραπλασία τῆς ΒΣ· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ· ἡ δὲ ΒΣ εἶναι τριπλασία τῆς ΣΞ, εἶναι ἄρα ἡ ΕΒ τὸ ἐν τρίτον τῆς ΒΔ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΔ τὸ ἐν τρίτον τῆς ΔΒ, ἐπειδὴ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ Ε (1, 14 πόρ.)· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΞΕ εἶναι τὸ ἐν τρίτον τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Θ, τοῦ δὲ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Χ, τοῦ δὲ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ Ε, θὰ εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα, οὕτως ἡ ΧΘ : ΘΕ (I, 8). Εἶναι δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τριπλασίον τῶν τμημάτων [ἐπειδὴ τὸ ὅλον τμῆμα εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου]· εἶναι ἄρα τριπλασία καὶ ἡ ΧΘ τῆς ΘΕ. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΧΘ τριπλασία καὶ τῆς ΧΞ· εἶναι ἄρα πενταπλασία ἡ ΞΕ τῆς ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΕ τῆς ΕΘ· διότι εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν· ὥστε ἡ ΔΘ εἶναι ἑξαπλασία τῆς ΘΕ. Καὶ εἶναι ἡ ΒΔ τριπλασία τῆς ΔΕ· εἶναι ἄρα ἡ ΒΘ τὰ τρία δεύτερα τῆς ΘΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9

Ἐὰν ὑπάρχωσι τέσσαρες γραμμαὶ εἰς συνεχῇ ἀναλογίαν, καὶ ὃν λόγον ἔχει ἡ ἐλαχίστη, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῆς ἐλαχίστης, τοῦτον τὸν λόγον ἂς ληφθῇ νὰ ἔχη εὐθεΐα

φθῆ ποτὶ τὰ τρία πεμπταμόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἅ  
 μέγιστα τῶν ἀνάλογον τᾶς τρίτας, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἅ ἴσα τῇ  
 τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τῶν ἀνάλογον καὶ τῇ τετραπλασίᾳ  
 τᾶς δευτέρας καὶ τῇ ἐξαπλασίᾳ τᾶς τρίτας καὶ τῇ τριπλασίᾳ  
 Η 192 τᾶς τετάρτας ποτὶ τὴν ἴσαν τῇ τε πενταπλασίᾳ τᾶς μεγίστας  
 καὶ τῇ δεκαπλασίᾳ τᾶς δευτέρας καὶ τῇ δεκαπλασίᾳ τᾶς τρί-  
 τας καὶ τῇ πενταπλασίᾳ τᾶς τετάρτας, τοῦτον ἔχουσά τις λα-  
 φθῆ ποτὶ τὴν ὑπεροχάν, ᾧ ὑπερέχει ἅ μέγιστα τῶν ἀνάλογον  
 τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμ-  
 10 πταμόρια τᾶς μεγίστας.

ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον αἱ  $AB, BF, BD,$   
 $BE$ , καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἅ  $BE$  ποτὶ  $EA$ , τοῦτον ἔχέτω ἅ  
 $ZH$  ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς  $AD$ , ὃν δὲ λόγον ἔχει  
 15 ἅ ἴσα τῇ διπλασίᾳ τᾶς  $AB$  καὶ τετραπλασίᾳ τᾶς  $BF$   
 καὶ ἐξαπλασίᾳ τᾶς  $BD$  καὶ τριπλασίᾳ τᾶς  $BE$  ποτὶ  
 τὴν ἴσαν τῇ πενταπλασίᾳ τᾶς  $AB$  καὶ δεκαπλασίᾳ  
 τᾶς  $GB$  καὶ δεκαπλασίᾳ τᾶς  $BD$  καὶ πενταπλασίᾳ  
 τᾶς  $BE$ , τοῦτον ἔχέτω τὸν λόγον ἅ  $H\Theta$  ποτὶ τὴν  
 20  $AD$ . δεικτέον, ὅτι ἅ  $Z\Theta$  δύο πεμπταμόριά ἐντι  
 τᾶς  $AB$ .

ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν ἐντι αἱ  $AB, BF, BD, BE$ , καὶ  
 αἱ  $AF, GA, AE$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμ-  
 φότερος ἅ  $AB, BF$  ποτὶ τὴν  $BD$ , τοντέστιν ἅ διπλα-  
 σία συναμφοτέρου τᾶς  $AB, BF$  ποτὶ τὴν διπλασίαν  
 τᾶς  $BD$ , ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἅ  $AD$  ποτὶ τὴν  
 25  $AE$ , καὶ συναμφότερος ἅ  $AB, BF$  ποτὶ τὴν  $EB$ , καὶ  
 Η 194 πάντα ποτὶ πάντα τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἅ  $AD$   
 ποτὶ τὴν  $AE$ , ὃν ἅ ἴσα τῇ τε διπλασίᾳ τᾶς  $AB$  καὶ τῇ τρι-  
 πλασίᾳ τᾶς  $GB$  καὶ τῇ  $AB$  ποτὶ τὴν ἴσαν τῇ τε διπλασίᾳ  
 30 τᾶς  $BD$  καὶ τῇ  $BE$ , ὃν δὲ λόγον ἔχει ἅ ἴσα τῇ τε διπλασίᾳ τᾶς  
 $AB$  καὶ τῇ τετραπλασίᾳ τᾶς  $BF$  καὶ τῇ τετραπλασίᾳ τᾶς  
 $BD$  καὶ τῇ διπλασίᾳ τᾶς  $BE$  ποτὶ τὴν ἴσαν τῇ τε διπλασίᾳ τᾶς

τις πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῶν τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας πρὸς τὴν τρίτην, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴση πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς μεγίστης τῶν τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς δευτέρας καὶ τὴν ἐξαπλασίαν τῆς τρίτης καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς τετάρτης, πρὸς τὴν ἴσην πρὸς τὴν πενταπλασίαν τῆς μεγίστης καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς δευτέρας καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς τρίτης καὶ τὴν πενταπλασίαν τῆς τετάρτης, τοῦτον τὸν λόγον νὰ ληφθῇ ἔχουσα εὐθεῖά τις πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῶν τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τῆς τρίτης, καὶ αἱ δύο ληφθεῖσαι θὰ εἶναι τὰ δύο πέμπτα τῆς μεγίστης.

Ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ αἱ AB, BΓ, ΒΔ, BE, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἡ BE πρὸς EA, τοῦτον ἄς ἔχη ἡ ZH πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ΑΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴση πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AB καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς BΓ καὶ τὴν ἐξαπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς BE πρὸς τὴν ἴσην πρὸς τὴν πενταπλασίαν τῆς AB καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς ΓB καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν πενταπλασίαν τῆς BE, τοῦτον ἄς ἔχη τὸν λόγον ἡ HΘ πρὸς τὴν ΑΔ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ZΘ εἶναι τὰ δύο πέμπτα τῆς AB.

Διότι ἐπειδὴ εἶναι εἰς συνεχεῖ ἀναλογίαν αἱ AB, BΓ, ΒΔ, BE, καὶ ἐπίσης εἶναι εἰς συνεχεῖ ἀναλογίαν καὶ μὲ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔE, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν AB, BΓ πρὸς τὴν ΒΔ, τουτέστιν ἡ διπλασία τοῦ ἄθροισματος τῶν AB, BΓ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔE, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ΔB, BΓ πρὸς τὴν EB, καὶ πάντα πρὸς πάντα τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔE, ὃν ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AB καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς ΓB καὶ τὴν ΔB πρὸς τὴν ἴσην καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν BE, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AB καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς BΓ καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς BE πρὸς τὴν ἴσην καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔB καὶ τὴν EB, τοῦτον θὰ ἔχη ἡ

$\Delta B$  καὶ τῇ  $EB$ , τοῦτον ἔξει ἡ  $\Delta A$  ποτὶ ἐλάσσονα τῆς  $\Delta E$ .  
 ἔχέτω οὖν ποτὶ  $\Delta O$ . καὶ ἀμφοτέραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας τὸν  
 αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον· ἔξει οὖν ἡ  $OA$  ποτὶ  $AD$  τὸν αὐτὸν λόγον,  
 ὃν ἡ ἴσα τῇ τε διπλασίᾳ τῆς  $AB$  καὶ τετραπλασίᾳ τῆς  $GB$  καὶ  
 5 ἐξαπλασίᾳ τῆς  $BD$  καὶ τριπλασίᾳ τῆς  $BE$  ποτὶ τὰν συγκειμέναν  
 ἔκ τε τῆς διπλασίας συναμφοτέρως τῆς  $AB$ ,  $EB$  καὶ τετρα-  
 πλασίας συναμφοτέρου τῆς  $GB$ ,  $BD$ . ἔχει δὲ καὶ ἡ  $AD$  ποτὶ  
 $H\Theta$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ πενταπλασία συναμφοτέρου τῆς  
 $AB$ ,  $BE$  μετὰ τῆς δεκαπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $GB$ ,  $BD$   
 10 ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς  $AB$  καὶ τῆς  
 τετραπλασίας τῆς  $GB$  καὶ τῆς τριπλασίας τῆς  $EB$  καὶ ἑξα-  
 πλασίας τῆς  $BD$ . ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέ-  
 στιν ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον  
 ἡ  $OA$  ποτὶ  $H\Theta$ , ὃν ἡ πενταπλασία συναμφοτέρου τῆς  $AB$ ,  
 15  $BE$  μετὰ τῆς δεκαπλασίας τῶν  $GB$ ,  $BD$  ποτὶ τὰν συγκειμέναν  
 ἔκ τε τῆς διπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $AB$ ,  $BE$  καὶ τῆς τε-  
 τραπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $GB$ ,  $BD$ . ἀλλ' ἡ συγκειμένα  
 H 196 ἔκ τε τῆς πενταπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $AB$ ,  $BE$  μετὰ τῆς  
 δεκαπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $GB$ ,  $BD$  ποτὶ τὰν συγκειμέναν  
 20 ἔκ τε τῆς διπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $AB$ ,  $BE$  καὶ τετρα-  
 πλασίας συναμφοτέρου τῆς  $GB$ ,  $BD$  λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ  
 δύο· καὶ ἡ  $AO$  ἄρα ποτὶ  $H\Theta$  λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο.  
 πάλιν, ἐπεὶ ἡ  $OD$  ποτὶ  $AD$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ  $EB$  μετὰ  
 τῆς διπλασίας τῆς  $BD$  ποτὶ τὰν ἴσαν τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς  
 25 διπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $AB$ ,  $BE$  μετὰ τῆς τετραπλασίας  
 συναμφοτέρου τῆς  $GB$ ,  $BD$ , ἔστιν δὲ καὶ, ὥς ἡ  $AD$  ποτὶ  
 $\Delta E$ , οὕτως ἡ συγκειμένα ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς  $AB$  καὶ  
 τριπλασίας τῆς  $GB$  καὶ τῆς  $BD$  ποτὶ τὰν ἴσαν τῇ τε  $EB$  καὶ  
 τῇ διπλασίᾳ τῆς  $BD$ , ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων,  
 30 τουτέστιν τεταραγμένῃς εὐθείαις τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου, ὥς

ΔΑ πρὸς μικροτέραν τῆς ΔΕ (Εὐκλ. V, 8). Ἐὰς ἔχῃ λοιπὸν πρὸς τὴν ΔΟ. Καὶ τὸ ἄθροισμὰ των δὲ πρὸς τὰς πρώτας θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΟΑ πρὸς ΑΔ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΒ καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς ΓΒ καὶ τὴν ἑξαπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς ΒΕ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΕΒ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 7 πόρ., V, 18). Ἐχει δὲ καὶ ἡ ΑΔ πρὸς ΗΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πενταπλασία τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΒ καὶ τῆς τετραπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΕΒ καὶ τῆς ἑξαπλασίας τῆς ΒΔ· ἂν δὲ οἱ λόγοι ταχθῶσιν ἀνομοίως, τουτέστιν εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν (Εὐκλ. V, ὅρισμ. 18 καὶ θ. 23), καὶ ληφθῇ ὁ δι' ἴσου λόγος (δηλ. νὰ πολ/σθῶσιν αἱ ἀναλογίαι κατὰ μέλη), θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΟΑ πρὸς ΗΘ, ὃν ἔχει ἡ πενταπλασία τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 23). Ἀλλὰ ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς πενταπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι πέντε πρὸς δύο· καὶ ἡ ΑΟ ἄρα πρὸς ΗΘ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ πέντε πρὸς δύο. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΟΔ πρὸς ΔΑ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΒ μετὰ τῆς διπλασίας τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ἴσην πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 7 πόρ.), εἶναι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ἴσην καὶ πρὸς τὴν ΕΒ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ, ὅταν δὲ οἱ λόγοι ταχθῶσιν ἀνομοίως, τουτέστιν ἡ ἀναλογία νὰ εἶναι τεταραγμένη (Εὐκλ. V, 23), καὶ ληφθῇ ὁ δι' ἴσου λόγος, θὰ

ἡ  $ΟΔ$  ποτὶ  $ΔΕ$ , οὕτως ἡ διπλασία τῆς  $ΑΒ$  μετὰ τῆς τριπλασί-  
 ας τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἡ  $ΒΔ$  ποτὶ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλασίας  
 συναμφοτέρου τῆς  $ΑΒ$ ,  $ΒΕ$  καὶ τῆς τετραπλασίας τῶν  $ΓΒ$ ,  
 $ΒΔ$ . ὥστε καί, ὥς ἡ  $ΟΕ$  ποτὶ  $ΕΔ$  ἐστίν, οὕτως ἡ  $ΓΒ$  μετὰ  
 5 τῆς τριπλασίας τῆς  $ΒΔ$  καὶ διπλασίας τῆς  $ΕΒ$  ποτὶ τὴν δι-  
 πλασίαν συναμφοτέρου τῆς  $ΑΒ$ ,  $ΒΕ$  καὶ τετραπλασίαν συν-  
 αμφοτέρου τῆς  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$ . ἔστιν δὲ καί, ὥς ἡ  $ΔΕ$  ποτὶ  $ΕΒ$ , οὕ-  
 τως ἡ  $ΑΓ$  ποτὶ  $ΓΒ$ , ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν, καὶ ἡ τριπλα-  
 σία τῆς  $ΓΔ$  ποτὶ τὴν τριπλασίαν τῆς  $ΔΒ$  καὶ ἡ διπλασία τῆς  
 Η 198  $ΔΕ$  ποτὶ τὴν διπλασίαν τῆς  $ΕΒ$ . ὥστε καὶ ἡ συγκειμένη ἐκ τε  
 τῆς  $ΑΓ$  καὶ τριπλασίας τῆς  $ΓΔ$  καὶ διπλασίας τῆς  $ΔΕ$  ποτὶ  
 τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς  $ΓΒ$  καὶ τριπλασίας τῆς  $ΔΒ$  καὶ  
 διπλασίας τῆς  $ΕΒ$ . ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμέ-  
 νων, τουτέστιν ἐν τετραγμένῳ ἀναλογία, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν  
 15 ἔξει λόγον ἡ  $ΕΟ$  ποτὶ  $ΕΒ$ , ὃν ἡ  $ΑΓ$  μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς  
 $ΓΔ$  καὶ διπλασίας τῆς  $ΔΕ$  ποτὶ τὴν διπλασίαν συναμφοτέρου  
 τῆς  $ΑΒ$ ,  $ΒΕ$  μετὰ τῆς τετραπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $ΓΒ$ ,  
 $ΒΔ$ . ὅλα οὖν ἡ  $ΟΒ$  ποτὶ  $ΒΕ$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ἴσα τῇ  
 τε τριπλασίᾳ τῆς  $ΑΒ$  μετὰ τῆς ἑξαπλασίας τῆς  $ΓΒ$  καὶ τῇ  
 20 τριπλασίᾳ τῆς  $ΒΔ$  ποτὶ τὴν διπλασίαν συναμφοτέρου τῆς  
 $ΑΒ$ ,  $ΒΕ$  μετὰ τῆς τετραπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$ .  
 καὶ ἐπεὶ αἱ τε  $ΕΔ$ ,  $ΔΓ$ ,  $ΓΑ$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντὶ καὶ συναμ-  
 φότερος ἐκάστα τῶν  $ΕΒ$ ,  $ΒΔ$ ,  $ΔΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΒ$ ,  $ΒΑ$ , ἐσσεῖται καί,  
 ὥς ἡ  $ΕΔ$  ποτὶ  $ΔΑ$ , οὕτως συναμφοτέρος ἡ  $ΕΒ$ ,  $ΒΔ$  ποτὶ  
 25 συναμφοτέρον τὴν  $ΔΒ$ ,  $ΒΓ$  μετὰ τῆς συναμφοτέρου τῆς  $ΓΒ$ ,  
 Η 200  $ΒΑ$ . καὶ συνθέντι ἄρα ἐστίν, ὥς ἡ  $ΑΕ$  ποτὶ  $ΑΔ$ , οὕτως συναμ-  
 φότερος ἡ  $ΕΒ$ ,  $ΒΔ$  μετὰ συναμφοτέρου τῆς  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  καὶ  
 συναμφοτέρου τῆς  $ΓΒΔ$ , ὃ ἐστὶ συναμφοτέρος ἡ  $ΕΒΑ$  μετὰ  
 τῆς διπλασίας συναμφοτέρου τῆς  $ΔΒΓ$  ποτὶ συναμφοτέρον  
 30 τὴν  $ΒΔ$ ,  $ΒΑ$  μετὰ τῆς διπλασίας τῆς  $ΒΓ$ . ὥστε καὶ ἡ διπλα-  
 σία ποτὶ τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, τουτέστιν ὥς  
 ἡ  $ΕΑ$  ποτὶ  $ΑΔ$ , οὕτως ἡ διπλασία συναμφοτέρου τῆς  $ΕΒΑ$



εἶναι ὥς ἡ ΟΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΑΒ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΓ καὶ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε εἶναι καὶ ὥς ἡ ΟΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως ἡ ΓΒ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΔ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΕΒ πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τὴν τετραπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 7 πόρ., V, 19 πόρ.). Εἶναι δὲ καὶ ὥς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἐπειδὴ εἶναι καὶ κατὰ τὴν σύνθεσιν, καὶ ἡ τριπλασία τῆς ΓΔ πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς ΔΒ καὶ ἡ διπλασία τῆς ΔΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΒ· ὥστε καὶ ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς ΑΓ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΓΔ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΔΕ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς ΓΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΔΒ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΕΒ. "Ὅταν λοιπὸν οἱ λόγοι ταχθῶσι πάλιν ἀνομοίως, τουτέστιν εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν, δι' ἴσου θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΕΟ πρὸς τὴν ΕΒ, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΓΔ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΔΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 23)· ὅλη λοιπὸν ἡ ΟΒ πρὸς ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς ΑΒ μετὰ τῆς ἐξαπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΔ πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ καὶ αἱ ΕΔ, ΔΓ, ΓΑ καὶ τὰ ἄθροισματα ΕΒ + ΒΔ, ΔΒ + ΒΓ, ΓΒ + ΒΑ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν (ἐν συνεχείᾳ) λόγον, θὰ εἶναι καί, ὥς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ΕΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΔΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἄθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΑ (Εὐκλ. V, 18). Καὶ διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι  $ΑΕ : ΑΔ = (ΕΒ + ΒΔ) + (ΑΒ + ΒΓ) + (ΓΒ + ΒΔ)$ , τὸ ὅποιον ἰσοῦται πρὸς  $ΕΒ + ΒΑ + 2(ΔΒ + ΒΓ) : (ΒΔ + ΒΑ) + 2ΒΓ$ · ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, τουτέστιν ὥς  $ΕΑ : ΑΔ = 2(ΕΒ + ΒΑ) + 4(ΓΒ + ΒΔ) :$

μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $\Gamma\beta\Delta$  ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  μετὰ τᾶς τετραπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$ . ὥστε καί, ὥς ἡ  $ΕΑ$  ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς  $Α\Delta$ , οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒΕ$  καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $\Gamma\beta\Delta$  ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένης ἐκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  καὶ τετραπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$ . ἀλλ' ὥς ἡ  $ΕΑ$  ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς  $Α\Delta$ , οὕτως ἐστὶν ἡ  $ΕΒ$  ποτὶ  $ΖΗ$ . καὶ ὥς ἄρα ἡ  $ΕΒ$  ποτὶ  $ΖΗ$ , οὕτως ἡ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒΕ$  μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $\Delta\beta\Gamma$  ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένης ἐκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  μετὰ τᾶς τετραπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$ . ἐδείχθη δὲ καί, ὥς ἡ  $ΟΒ$  ποτὶ  $ΕΒ$ , οὕτως ἡ τριπλασία συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  μετὰ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$  ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒΕ$  καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς  $\Gamma\beta\Delta$ . καὶ δι' ἴσον ἄρα ἐστίν, ὥς ἡ  $ΟΒ$  ποτὶ  $ΖΗ$ , οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τε τᾶς τριπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  καὶ ἑξαπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$  ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένης ἐκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  καὶ τετραπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$ . ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τε τᾶς τριπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  καὶ ἑξαπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$  ποτὶ μὲν τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς  $ΑΒ\Delta$  καὶ τετραπλασίας τᾶς  $\Gamma\beta$  λόγον ἔχει, ὃν τρία ποτὶ δύο, ποτὶ δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $ΑΟ$  ποτὶ  $ΗΘ$  λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε ποτὶ δύο. καὶ ὅλα ἄρα ἡ  $ΒΑ$  ποτὶ ὅλαν τὰν  $ΖΘ$  λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπταμορία ἐντι ἡ  $ΖΘ$  τᾶς  $ΑΒ$ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'

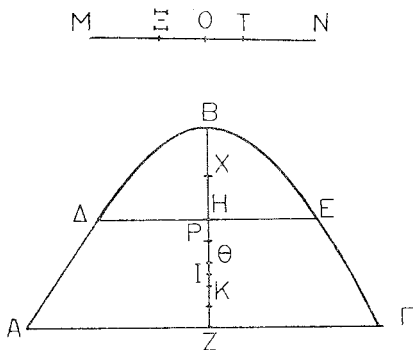
30 Παντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ἐθθείας ἐστίν, ἡ διάμετρος  
 Η 204 ἐστι τοῦ τόμου, τόνδε τὸν τρόπον κείμενον· διαιρεθείσας τᾶς

**ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'**  
(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Β')

$2 (AB + B\Delta) + 4\Gamma B$ . ὥστε καὶ ὡς  $EA : (3 : 5) A\Delta = 2 (AB + BE) + 4 (\Gamma B + B\Delta) : (3 : 5) [2 (AB + B\Delta) + 4\Gamma B]$ . Ἀλλὰ ὡς  $EA : (3 : 5) A\Delta = EB : ZH$ . καὶ ὡς ἄρα  $EB : ZH = 2 (AB + BE) + 4 (\Delta B + B\Gamma) : (3 : 5) [2 (AB + B\Delta) + 4\Gamma B]$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ  $OB : EB = 3(AB + B\Delta) + 6\Gamma B : 2(AB + BE) + 4(\Gamma B + B\Delta)$ . Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ  $OB : ZH = 3(AB + B\Delta) + 6 \Gamma B : (3 : 5) [2(AB + B\Delta) + 4\Gamma B]$  (Εὐκλ. V, 22). Ἀλλὰ  $3 (AB + B\Delta) + 6 \Gamma B : 2(AB + B\Delta) + 4\Gamma B = 3 : 2$  (Εὐκλ. VI, 16), αὐτῆς δὲ τὰ τρία πέμπτα εἶναι  $5 : 2$ . ἐδείχθη δὲ καὶ  $AO : H\Theta = 5 : 2$  καὶ ὅλη ἄρα ἡ  $BA : Z\Theta = 5 : 2$  (Εὐκλ. V, 12). Ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνει ἡ  $Z\Theta$  εἶναι τὰ δύο πέμπτα τῆς  $AB$  ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

Παντὸς τόμου ἀφαιρουμένου ἀπὸ παραβολῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι διάμετρος τοῦ τόμου,



κείμενον κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον· ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα εἰς πέντε ἴσα μέρη εἰς τὸ μέσον πέμπτον, ὥστε τὸ τμήμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον

εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ μέσῳ πεμπταμορίου, ὥστε τὸ τμήμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμήμα τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν βα-  
 5 σίων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσων συναμφοτέρῃ τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βασιῶν καὶ τᾷ μείζονι, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βασιῶν τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσων ἀμφοτέρῃ τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾷ ἐλάσσονι αὐτᾶν.

10 ἔστωσαν ἐν ὀρθογωνίῳ κώνον τομᾷ δύο εὐθεῖαι αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΔΕ$ , διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ  $ΑΒΓ$  τμήματος ἡ  $ΒΖ$ . φανερὸν δὴ, ὅτι καὶ τοῦ  $ΑΔΕΓ$  τόμου διάμετρος ἐστὶν ἡ  $ΗΖ$  [καὶ αἱ μὲν  $ΑΓ$ ,  $ΔΕ$  παραλλήλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ  $Β$  ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς]· καὶ τᾶς  $ΗΖ$  εὐθείας διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον  
 15 ἔστω πεμπταμόριον ἡ  $ΘΚ$ , ἡ δὲ  $ΘΙ$  ποτὶ τὰν  $ΙΚ$  τὸν αὐτὸν ἔχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΑΖ$  τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσων ἀμφοτέραις τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς  $ΔΗ$  καὶ τᾷ  $ΑΖ$ , ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΔΗ$  τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσων ἀμφοτέραις τᾷ διπλα-  
 20 σίᾳ τᾶς  $ΑΖ$  καὶ τᾷ  $ΔΗ$ . δεικτέον, ὅτι τοῦ  $ΑΔΕΓ$  τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ  $Ι$  σαμεῖον.

Η 206 ἔστω δὴ τᾷ μὲν  $ΖΒ$  ἴσα ἡ  $ΜΝ$ , τᾷ δὲ  $ΗΒ$  ἴσα ἡ  $ΝΟ$ , καὶ λε-  
 λάφθω τᾶν μὲν  $ΜΝΟ$  μέσα ἀνάλογον ἡ  $ΝΞ$ , τετάρτα δὲ ἀνάλο-  
 γον ἡ  $ΤΝ$ , καὶ ὥς ἡ  $ΤΜ$  ποτὶ  $ΤΝ$ , οὕτως ἡ  $ΖΘ$  ποτὶ τὴν ἀπὸ  
 25 τοῦ  $Ι$ , ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον· οὐδὲν γὰρ διαφέρει, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν  $Ζ$ ,  $Η$  εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν  $Η$ ,  $Β$ · τὰν  $ΙΡ$ . καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ κώνον τομᾷ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τμήματος ἡ  $ΖΒ$ , ἡ  $ΒΖ$  ἥτοι ἀρχικᾶ ἐστὶ τᾶς τομᾶς ἢ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται, αἱ δὲ  $ΑΖ$ ,  $ΔΗ$  εἰς αὐτὰν τεταγμένως  
 30 ἐντὶ καταγμέναι, ἐπειδὴ παραλλήλοι ἐντὶ τᾷ ἐπὶ τοῦ  $Β$  τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένα. εἰ δὲ τοῦτο, ἔστιν, ὥς ἡ  $ΑΖ$  ποτὶ  $ΔΗ$  δυνάμει, οὕτως ἡ  $ΖΒ$  ποτὶ  $ΒΗ$  μάκει, τουτέστιν ἡ  $ΜΝ$  ποτὶ

τῆς μικροτέρας βάσεως τοῦ τόμου πρὸς τὸ λοιπὸν τμήμα νὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μεγαλυτέραν τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τῆς διπλασίας τῆς μικροτέρας τῶν βάσεων καὶ τῆς μεγαλυτέρας, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μικροτέραν τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τῆς διπλασίας τῆς μεγαλυτέρας καὶ τῆς μικροτέρας αὐτῶν.

Ἐστωσαν εἰς παραβολὴν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΔΕ, διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ΑΒΓ ἡ ΒΖ· εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ τόμου ΑΔΕΓ διάμετρος εἶναι ἡ ΗΖ [καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΕ εἶναι παράλληλοι τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς εἰς τὸ Β]· καὶ ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΗΖ εἰς πέντε ἴσα μέρη ἔστω μέσον τὸ πέμπτον ἡ ΘΚ, ἡ δὲ ΘΙ πρὸς τὴν ΙΚ ἃς ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ἀμφοτέρων ἦτοι καὶ τοῦ διπλασίου τῆς ΔΗ καὶ τῆς ΑΖ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ἀμφοτέρων ἦτοι καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ καὶ τῆς ΔΗ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τοῦ τόμου ΑΔΕΓ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ι.

Ἐστω λοιπὸν πρὸς μὲν τὴν ΖΒ = ΜΝ, πρὸς δὲ τὴν ΗΒ = ΝΟ, καὶ ἃς ληφθῇ τῶν ΜΝ, ΝΟ μέση ἀνάλογος ἡ ΝΞ, τετάρτη δὲ αὐτῶν ἀνάλογος ἡ ΤΝ καὶ ὥς ΤΜ : ΤΝ, οὕτως ἃς γίνῃ ἡ ΖΘ πρὸς τινα εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ Ι, ὅπου ἤθελε πέσει τὸ ἄλλο σημεῖον· διότι οὐδὲν διαφέρει εἴτε πέσει μετὰξὺ τῶν Ζ, Η εἴτε μετὰξὺ τῶν Η, Β· ἔστω τὴν ΙΡ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς παραβολὴν διάμετρος τοῦ παραβολικοῦ τμήματος εἶναι ἡ ΖΒ, ἡ ΒΖ ἢ θὰ εἶναι διάμετρος τῆς παραβολῆς ἢ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΖ, ΔΗ εἶναι τεταγμέναι κάθετοι, ἐπειδὴ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς παραβολῆς. Ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνει, εἶναι  $AZ^2 : \Delta H^2 = ZB : BH$ , τουτέστιν ὥς ἡ ΜΝ : ΝΟ. Ὡς δὲ ἡ ΜΝ :

ΝΟ. ὥς δὲ ἡ ΜΝ ποτὶ ΝΟ μάκει, οὕτως ἡ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΖ ποτὶ ΔΗ δυνάμει, οὕτως ἡ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει· ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὥς ἄρα ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ  
 5 ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον. ἀλλ' ὥς μὲν ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως τὸ ΑΒΓ τμᾶμα ποτὶ  
 Η 208 τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, ὥς δὲ ὁ ἀπὸ ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον, οὕτως ἡ ΜΝ ποτὶ ΝΤ· ὥστε καὶ διελόντι ἐστίν, ὥς ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, οὕτως ἡ ΜΤ ποτὶ ΝΤ,  
 10 τουτέστι τὰ  $\bar{\gamma}$  ε' τᾶς ΗΖ ποτὶ ΙΡ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμένων ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, ποτὶ τὸν ἀπὸ ΑΖ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τᾶς ΔΗ μετὰ τᾶς ΑΖ ποτὶ ΖΑ, ὥστε καί, ὃν ἡ διπλασία τᾶς ΝΞ μετὰ τᾶς ΝΜ ποτὶ  
 15 ΝΜ, ἔστι δὲ καί, ὥς ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ἡ ΜΝ ποτὶ ΝΤ, ὥς δὲ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμένων ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ μετὰ τᾶς ΔΗ, οὕτως ἡ ΔΗ ποτὶ τὰν συγκειμένων ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ  
 20 τᾶς ΔΗ, ὥστε καὶ ἡ ΤΝ ποτὶ τὰν συγκειμένων ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΟΝ καὶ τᾶς ΤΝ, γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμένων ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, καὶ ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος καὶ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος καὶ τὸ στερεὸν τὸ  
 25 βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμένων ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, τέτταρα μεγέθουσιν ἀνάλογον σύνδυο λαμβανομένοις, τᾷ τε συγκειμένῳ ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ΝΜ καὶ ἑτέρῳ μεγέ-  
 Η 210 θει τᾷ ΜΝ καὶ ἄλλῳ ἐξῆς τᾷ ΝΤ καὶ τελευταῖον τᾷ συγκειμένῳ ἕκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΟ καὶ τᾶς ΝΤ· δι' ἴσον  
 30 ἄρα γενήσεται, ὥς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμένων ἕκ τε τᾶς διπλασίας

$NO = MN^2 : NE^2$  (Εὐκλ. V, ὁρισ. 9)· καὶ ὡς ἄρα  $AZ^2 : \Delta H^2 = MN^2 : NE^2$ · ὥστε καὶ  $AZ : \Delta H = MN : NE$ . Καὶ ὡς ἄρα  $AZ^3 : \Delta H^3 = MN^3 : NE^3$ . Ἀλλὰ ὡς μὲν  $AZ^3 : \Delta H^3 =$  τὸ παραβολικὸν τμῆμα  $AB\Gamma$  πρὸς τὸ τμῆμα  $\Delta BE$ , ὡς δὲ  $MN^3 : NE^3 = MN : NT$ · ὥστε καὶ διὰ διαιρέσεως (Εὐκλ. V, 17) εἶναι, ὡς ὁ τόμος  $A\Delta E\Gamma$  πρὸς τὸ τμῆμα  $\Delta BE$ , οὕτως ἡ  $MT : NT$ , τουτέστι τὰ τρία πέμπτα τῆς  $HZ$  πρὸς  $IP$ . Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς  $AZ$ , ὕψος δὲ τὸ ἄθροισμα καὶ τῆς διπλασίας τῆς  $\Delta H$  καὶ τῆς  $AZ$  πρὸς τὸν κύβον τῆς  $AZ$  ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ διπλασία τῆς  $\Delta H$  μετὰ τῆς  $AZ$  πρὸς τὴν  $ZA$ , ὥστε καί, ὃν λόγον ἔχει ἡ διπλασία τῆς  $NE$  μετὰ τῆς  $NM$  πρὸς  $NM$ , εἶναι δὲ καί, ὡς ὁ κύβος τῆς  $AZ$  πρὸς τὸν κύβον τῆς  $\Delta H$ , οὕτως ἡ  $MN$  πρὸς τὴν  $NT$ , ὡς δὲ ὁ κύβος τῆς  $\Delta H$  πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς  $\Delta H$ , ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $AZ$  μετὰ τῆς  $\Delta H$ , οὕτως ἡ  $\Delta H$  πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $AZ$  καὶ τῆς  $\Delta H$ , ὥστε καὶ ἡ  $TN$  πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $ON$  καὶ τῆς  $TN$ , ὑπάρχουσι λοιπὸν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς  $AZ$ , ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $\Delta H$  καὶ τῆς  $AZ$ , καὶ ὁ κύβος τῆς  $AZ$  καὶ ὁ κύβος τῆς  $\Delta H$  καὶ τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς  $\Delta H$ , ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $AZ$  καὶ τῆς  $\Delta H$ , πρὸς τέσσαρα μεγέθη λαμβανόμενα εἰς ἀναλογίαν ἀνὰ δύο, καὶ ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $NE$  καὶ τῆς  $NM$  καὶ ἄλλο μέγεθος τὸ  $MN$  καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ  $NT$  καὶ τελευταῖον ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $NO$  καὶ τῆς  $NT$ · δι' ἴσου ἄρα θὰ εἶναι, ὡς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς  $AZ$ , ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς  $\Delta H$  καὶ τῆς

τὰς ΔΗ καὶ τὰς ΑΖ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ  
 ἀπὸ ΔΗ τετραγώνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τὰς δι-  
 πλασίας τὰς ΑΖ καὶ τὰς ΔΗ, οὕτως ἂ συγκειμένα ἔκ τε τὰς  
 διπλασίας τὰς ΝΞ καὶ τὰς ΜΝ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε  
 5 τὰς διπλασίας τὰς ΝΟ καὶ τὰς ΝΤ. ἀλλ' ὥς τὸ εἰρημένον στε-  
 ρεὸν ποτὶ τὸ εἰρημένον στερεόν, οὕτως ἂ ΘΙ ποτὶ ΙΚ· καὶ ὥς  
 ἄρα ἂ ΘΙ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἂ συγκειμένα ποτὶ τὰν συγκειμέναν.  
 ὥστε καὶ συνθέντι καὶ τῶν ἀγνουμένων τὰ πενταπλάσια· ἔστιν  
 ἄρα, ὥς ἂ ΖΗ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἂ πενταπλασία συναμφοτέρων  
 10 τὰς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρων τὰς ΝΞ, ΝΟ ποτὶ  
 τὰν διπλασίαν τὰς ΟΝ καὶ τὰν ΝΤ. καὶ ὥς ἂ ΖΗ ποτὶ ΖΚ  
 εὐοῦσαν αὐτὰς δύο πέμπτα, οὕτως ἂ πενταπλασία συναμφοτέ-  
 ρων τὰς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρων τὰς ΕΝΟ ποτὶ  
 τὰν διπλασίαν συναμφοτέρων τὰς ΜΝΤ καὶ τετραπλασίαν  
 15 συναμφοτέρων τὰς ΕΝΟ· ἐσσεῖται οὖν, ὥς ἂ ΖΗ ποτὶ ΖΙ,  
 οὕτως ἂ πενταπλασία συναμφοτέρων τὰς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία  
 συναμφοτέρων τὰς ΕΝΟ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τὰς δι-  
 πλασίας τὰς ΜΝ καὶ τετραπλασίας τὰς ΝΞ καὶ ἑξαπλασίας  
 τὰς ΟΝ καὶ τριπλασίας τὰς ΝΤ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθείαι  
 20 ἐξῆς ἀνάλογον αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΟΝ, ΝΤ, καὶ ἔστιν, ὥς μὲν ἂ  
 ΝΤ ποτὶ ΤΜ, οὕτως λελαμμένα τις ἂ ΡΙ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα  
 τὰς ΖΗ, τουτέστι τὰς ΜΟ, ὥς δὲ ἂ συγκειμένα ἔκ τε τὰς δι-  
 πλασίας τὰς ΝΜ καὶ τετραπλασίας τὰς ΝΞ καὶ ἑξαπλασίας  
 Η 212 τὰς ΝΟ καὶ τριπλασίας τὰς ΝΤ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε  
 25 τὰς πενταπλασίας συναμφοτέρων τὰς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασίας  
 συναμφοτέρων τὰς ΕΝΟ, οὕτως ἑτέρα τις λελαμμένα ἂ ΙΖ  
 ποτὶ τὰν ΖΗ, τουτέστιν ποτὶ τὰν ΜΟ, ἐσσεῖται διὰ τὰ πρό-  
 τερον ἂ ΡΖ δύο πέμπτα τὰς ΜΝ, τουτέστι τὰς ΖΒ· ὥστε  
 κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ ΑΒΓ τμήματος τὸ Ρ σημεῖον. ἔστω  
 30 δὴ καὶ τοῦ ΔΒΕ τμήματος κέντρον βάρεος τὸ Χ σημεῖον.  
 τοῦ ἄρα ΑΔΕΓ τόμον ἐσσεῖται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ  
 τὰς ἐπ' εὐθείας τῇ ΧΡ τὸν αὐτὸν ποτὶ αὐτὰν λόγον ἐχούσας,



ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'  
(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Β')

AZ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς AZ καὶ τῆς ΔΗ, οὕτως ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΝΕ καὶ τῆς ΜΝ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΝΟ καὶ τῆς ΝΤ (Εὐκλ. V, 22). Ἀλλὰ ὥς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεόν, οὕτως ἡ ΘΙ : ΙΚ· καὶ ὥς ἄρα ΘΙ : ΙΚ = ἡ συγκειμένη πρὸς τὴν συγκειμένην. Ὡστε καὶ διὰ συνθέσεως καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ πέντε τῶν ἡγουμένων ὁρων τῆς ἀναλογίας· εἶναι ἄρα, ὥς  $ZH : IK = 5(MN + NT) + 10(NE + NO) : 2ON + NT$ . Καὶ ὥς ἡ ZH πρὸς ZK ἡ ὁποία εἶναι αὐτῆς τὰ δύο πέμπτα =  $5(MN + NT) + 10(EN + NO) : 2(MN + NT) + 4(EN + NO)$ · θὰ εἶναι λοιπὸν ὥς ἡ  $ZH : ZI = 5(MN + NT) + 10(EN + NO) : 2MN + 4NE + 6ON + 3NT$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ (ἐξ ὑποθέσεως) αἱ MN, NE, ON, NT, καὶ εἶναι ὥς μὲν ἡ  $NT : TM = \lambda\eta\phi\theta\epsilon\acute{\iota}\sigma\acute{\alpha} \tau\iota\varsigma \eta \ PI : (3 : 5)ZH$ , τουτέστι  $PI : (3 : 5)MO$ , ὥς δὲ ἡ συγκειμένη ἐκ  $2NM + 4NE + 6NO + 3NT$  : τὴν συγκειμένην ἐκ  $5(MN + NT) + 10(EN + NO) = \lambda\eta\phi\theta\epsilon\acute{\iota}\sigma\acute{\alpha} \tau\iota\varsigma \eta \ IZ : ZH = IZ : MO$ , θὰ εἶναι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (9) ἡ  $PZ = (2 : 5)MN$ , τουτέστι =  $(2 : 5)ZB$ · ὥστε κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος ABΓ εἶναι τὸ σημεῖον P (θ. 8). Ἐστὼ λοιπὸν καὶ τοῦ τμήματος ΔBE κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον X. Τοῦ τόμου ἄρα AΔEΓ θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται καὶ ἡ XP τῆς ἐχούσης πρὸς αὐτὴν τὸν αὐτὸν

ὃν ἔχει ὁ τόμος ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστιν δὲ τὸ  $I$  σαμεῖον.  
 ἐπεὶ γὰρ τᾶς μὲν  $ZB$  τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ  $BP$ , τᾶς δὲ  $HB$   
 τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ  $BX$ , καὶ λοιπᾶς ἄρα τᾶς  $HZ$  τρία πέμπτα  
 ἐστὶν ἡ  $XP$ . ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς μὲν ὁ  $ΑΔΕΓ$  τόμος ποτὶ τὸ  
 5  $ΔΒΕ$  τμᾶμα, οὕτως ἡ  $MT$  ποτὶ  $TN$ , ὡς δὲ ἡ  $MT$  ποτὶ τὰν  
 $TN$ , οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς  $HZ$ , ἅτις ἐστὶν ἡ  $XP$ , ποτὶ  
 $PI$ , ἐσσεῖται ἄρα καί, ὡς ὁ  $ΑΔΕΓ$  τόμος ποτὶ τὸ  $ΔΒΕ$  τμᾶμα,  
 οὕτως ἡ  $XP$  ποτὶ  $PI$ . καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον  
 τοῦ βάρους τὸ  $P$  σαμεῖον, τοῦ δὲ  $ΔΒΕ$  κέντρον βάρους τὸ  $X$ .  
 10 φανερόν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ  $ΑΔΕΓ$  τόμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους  
 τὸ  $I$  σαμεῖον.

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β'  
(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Β')

λόγον, ὃν ἔχει ὁ τόμος πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα. Τὸ τέλος δὲ τῆς εὐθείας αὐτῆς εἶναι τὸ σημεῖον I. Διότι ἐπειδὴ ἡ BP εἶναι τῆς μὲν ZB τρία πέμπτα, τῆς δὲ HB ἢ BX εἶναι τρία πέμπτα, καὶ τῆς λοιπῆς ἄρα τῆς HZ ἢ XP εἶναι τρία πέμπτα. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς μὲν ὁ τόμος AΔΕΓ πρὸς τὸ τμῆμα ΔΒΕ, οὕτως ἡ MT : TN, ὡς δὲ  $MT : TN = (3 : 5)HZ$ , ἥτις εἶναι ἡ XP : PI, θὰ εἶναι ἄρα καί, ὡς ὁ τόμος AΔΕΓ : τὸ τμῆμα ΔΒΕ = XP : PI. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον P, τοῦ δὲ ΔΒΕ κέντρον βάρους τὸ X· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ τόμου AΔΕΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον I.



ΨΑΜΜΙΤΗΣ

- 1     Ι. Οἴονται τινες, βασιλεῦ Γέλων, τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει· λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ  
5 καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. ἐντί τινες δέ, οἳ αὐτὸν ἄπειρον μὲν εἶμεν οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρ-  
2 χειν ἀριθμὸν, ὅστις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἳ δὲ οὕτως δοξάζοντες δῆλον ὥς, εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον  
10 ὄγκον συγκείμενον τὸ μέγεθος, ἀλίκος ὁ τᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελάγεων πάντων καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς εἰς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων, πολλαπλασίως μὴ γνώσονται μηδένα κα ῥηθῆμεν ἀ-  
3 ριθμὸν ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαι  
15 τοι δεικνύνει δι' ἀποδειξίων γεωμετρικῶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις ὑπερβάλλοντί τινες οὐ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ γᾶ πεπληρωμένα, καθάπερ εἶπαμες, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ  
4 μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δέ, διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἥ ἐστι κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον, ἃ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα τᾷ εὐθείᾳ τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς· ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων  
25 δεῖξεισι διάκουσας. Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑποθεσίῳ τινῶν ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν  
5 κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται

## Ψαμμίτης

1. Νομίζουσί τινες, ὃ βασιλεῦ Γέλων, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος ἄπειρος· λέγω δὲ ὅχι μόνον τῆς ὑπαρχούσης περὶ τὰς Συρακούσας καὶ τὴν ἄλλην Σικελίαν, ἀλλὰ καὶ τῆς κατὰ πᾶσαν χώραν καὶ τὴν οἰκουμένην καὶ τὴν ἀκατοίκητον. Ὑπάρχουσι δὲ μερικοί, οἱ ὅποιοι δὲν θεωροῦσι μὲν αὐτὸν ἄπειρον, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος κατωνομασμένος ἀριθμὸς, ὁ ὅποιος νὰ υπερβάλλῃ αὐτὸν κατὰ τὸ πλῆθος. Οἱ δὲ ἔχοντες αὐτὴν τὴν γνώμην εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ᾔθελον φαντασθῇ μέγεθος ἐκ τῆς ἄμμου κατέχον τόσον ὄγκον, ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς γῆς μὲ πλήρη τὰ πελάγη ὅλα καὶ τὰ κοιλάματα τῆς γῆς εἰς ὕψος ἴσον πρὸς τὰ ὑψηλότατα τῶν ὀρέων, πολὺ περισσότερον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ γνωρίσωσιν ἀριθμὸν ὁ ὅποιος νὰ υπερβάλλῃ τὸ πλῆθος αὐτῆς. Ἐγὼ δὲ θὰ προσπαθῆσω νὰ σοῦ ἀποδείξω διὰ γεωμετρικῶν ἀποδείξεων, τὰς ὁποίας θὰ παρακολουθήσης, ὅτι ἐκ τῶν ὑφ' ἡμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκδεδομένων εἰς τὴν πραγματείαν τὴν ἀπευθυνομένην πρὸς τὸν Ζεῦ-ξίππον, μερικοὶ (ἀριθμοὶ) υπερβάλλουσι ὅχι μόνον τὸν ἀριθμὸν τῆς ἄμμου ἢ ὁποία καταλαμβάνει μέγεθος ἴσον πρὸς τὸν ὄγκον τῆς γῆς, ὅταν αὕτη πληρωθῇ, ὡς εἵπομεν, ἀλλὰ καὶ τὸν ὄγκον τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ κόσμου. Σοῦ εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι κόσμος καλεῖται ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρονόμων ἢ σφαῖρα, τῆς ὁποίας κέντρον μὲν εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλίου καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς· διότι ταῦτα ἔχεις ἤδη ἀναγνώσει εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀστρονόμων. Ὁ Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ἐδημοσίευσε θεωρίας τινάς, κατὰ τὰς ὁποίας ἐκ τῶν ὑπαρχόντων στοιχείων συνάγεται, ὅτι ὁ κόσμος εἶναι πολὺ μεγάλυ-

γὰρ τὰ μὲν ἀπλανέα τῶν ἄστρον καὶ τὸν ἄλιον μένειν ἀκίνη-  
 τον, τὰν δὲ γὰν περιφέρεισθαι περὶ τὸν ἄλιον κατὰ κύκλον περι-  
 φέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀ-  
 πλανέων ἄστρον σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἄλλῳ κει-  
 5 μέναν τῷ μεγέθει ταλικάυταν εἶμεν, ὥστε τὸν κύκλον, καθ'  
 ὃν τὰν γὰν ὑποτίθεται περιφέρεισθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογί-  
 6 αν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἀποστασίαν, οἷαν ἔχει τὸ κέντρον  
 τᾶς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο γ' εὐδελον ὡς ἀδύ-  
 νατόν ἐστιν· ἐπεὶ γὰρ τὸ τᾶς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέ-  
 10 γεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαί-  
 ρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον δὲ τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖ-  
 σθαι τόδε· ἐπειδὴ τὰν γὰν ὑπολαμβάνομες ὥσπερ εἶμεν τὸ κέν-  
 τρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἃ γὰ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρη-  
 μένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστιν  
 15 ὁ κύκλος, καθ' ὃν τὰν γὰν ὑποτίθεται περιφέρεισθαι, ποτὶ τὰν  
 τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖραν· τὰς γὰρ ἀποδείξιας τῶν φαι-  
 νομένων οὕτως ὑποκειμένῳ ἐναρμόζει, καὶ μάλιστα φαίνεται  
 τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾗ ποιεῖται τὰν γὰν κινουμένην,  
 7 ἴσον ὑποτίθεσθαι τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φανερὸν δὴ,  
 Η 220 καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος,  
 ἄλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρον  
 σφαῖραν εἶμεν, καὶ οὕτως τινὰς δειχθήσκειν τῶν ἐν ἀρχᾷ  
 ἀριθμῶν τῶν κατονομαζίαν ἐχόντων ὑπερβάλλοντας τῷ πλή-  
 θει τὸν ἀριθμὸν τὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ  
 8 εἰρημένῳ σφαίρᾳ, ὑποκειμένων τῶνδε· πρῶτον μὲν τὰν περι-  
 μετρον τᾶς γὰς εἶμεν ὡς  $\overline{\tau}$  μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω,  
 καίπερ τινῶν πεπειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καὶ τὸ παρα-  
 κολουθεῖς, εὐῶσαν αὐτὰν ὡς  $\overline{\lambda}$  μυριάδων σταδίων. ἐγὼ δ' ὑ-  
 περβαλλόμενος καὶ θείς τὸ μέγεθος τᾶς γὰς ὡς δεκαπλάσιον  
 30 τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένου τὰν περίμετρον αὐτᾶς  
 ὑποτίθεμαι εἶμεν ὡς  $\overline{\tau}$  μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω·  
 μετὰ δὲ τοῦτο τὰν διάμετρον τᾶς γὰς μείζονα εἶμεν τὰς δια-



τερος ἐκείνου τὸν ὅποῖον εἴπομεν προηγουμένως. Διότι ὑποθέτει ὅτι ἐκ τῶν ἄστρων τὰ μὲν ἀπλανῆ καὶ ὁ ἥλιος μένουσιν ἀκίνητα, ἡ δὲ γῆ περιφέρεται κατὰ περιφέρειαν κύκλου περὶ τὸν ἥλιον, ὁ ὅποῖος εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον (τῆς κυκλικῆς) τροχιᾶς, τὴν δὲ σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων κειμένην περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὡς ὁ ἥλιος, ὅτι εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε ὁ κύκλος, καθ' ὃν ὑποθέτει ὅτι περιφέρεται ἡ γῆ, ἔχει τοιαύτην ἀναλογίαν πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀπλανῶν, οἷαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. Τοῦτο εἶναι προφανές, ὅτι εἶναι ἀδύνατον· διότι ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας δὲν ἔχει μέγεθος, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν αὐτό, ὅτι δὲν ἔχει κανένα λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Πρέπει δὲ νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ Ἀρίσταρχος ἐννοεῖ τὸ ἐξῆς· ἐπειδὴ θεωροῦσιν, ὅτι ἡ γῆ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν λόγον ἔχει ἡ γῆ πρὸς τὸν ὕφ' ἡμῶν (ἀνωτέρω) εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ σφαῖρα εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι ὁ κύκλος, καθ' ὃν ὑποθέτει, ὅτι περιφέρεται (περὶ τὸν ἥλιον) ἡ γῆ, πρὸς τὴν σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων· διότι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐναρμόζει τὰς ἀποδείξεις τῶν φαινομένων, καὶ μάλιστα, φαίνεται, ὑποθέτει, ὅτι τὸ μέγεθος τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν θεωρεῖ ὅτι κινεῖται ἡ γῆ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ὕφ' ἡμῶν εἰρημένον κόσμον. Λέγω λοιπόν, ὅτι καὶ ἂν ὑπάρξῃ σφαῖρα μὲ ἄμμον τόση κατὰ τὸ μέγεθος, ὅσην ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος, ὅτι εἶναι ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν ἄστρων, καὶ παρὰ τοῦτο, θὰ δειχθῇ διὰ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὅποιοι ἔχουσι κατονομασθῇ εἰς τὴν ἀρχήν, ὅτι ὑπάρχουσιν ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι κατὰ τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἀποτελούσης μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν εἰρημένην σφαῖραν, ἀφοῦ κάμωμεν τὰς ἐξῆς ὑποθέσεις· πρῶτον μὲν ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γῆς εἶναι περίπου 3.000.000 στάδια καὶ ὄχι περισσότερον, καίτοι μερικοὶ προσπαθοῦσι νὰ ἀποδείξωσιν, καθὼς καὶ εἰς σὲ εἶναι γνωστόν, ὅτι αὕτη εἶναι περίπου 300.000 στάδια. Ἐγὼ δὲ ὑπερβάλλων αὐτοὺς (τοὺς τελευταίους) καὶ θέτων τὸ μέγεθος τῆς γῆς περίπου δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προηγουμένων θεωρουμένου, ὑποθέτω, ὅτι ἡ περίμετρος αὐτῆς εἶναι περίπου 3.000.000 στάδια καὶ ὄχι περισσότερα· μετὰ δὲ τοῦτο,

μέτρον τᾷς σελήνης, καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα  
 εἶμεν τᾷς διαμέτρον τᾷς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς  
 9 πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων· μετὰ δὲ ταῦτα τὰν  
 διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾷς διαμέτρον τᾷς σελήνης ὡς τριακον-  
 5 ταπλασίαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα, καίπερ τῶν προτέρων ἀστρο-  
 λόγων Εὐδόξου μὲν ὡς ἐννεαπλασίονα ἀποφαινομένου, Φειδία  
 δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρὸς ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν, Ἀριστάρχου δὲ  
 πεπειραμένου δεικνύειν, ὅτι ἐστὶν ἡ διάμετρος τοῦ ἁλίου τᾷς  
 διαμέτρον τᾷς σελήνης μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων,  
 10 ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων· ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ  
 H 222 τοῦτον, ὅπως τὸ προκείμενον ἀναμφιλόγως ἢ δεδειγμένον,  
 ὑποτίθεται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾷς διαμέτρον τᾷς σελή-  
 10 νας ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα· ποτὶ δὲ τού-  
 τοις τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾷς τοῦ χλιαγώ-  
 15 νου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν  
 ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεται Ἀριστάρχου μὲν εὐρηκό-  
 τος τοῦ κύκλου τῶν ζωδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον ὡς τὸ εἰ-  
 κοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν, αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε  
 τὸν τρόπον ἐπειράθηεν ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν, εἰς ἣν ὁ  
 11 ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσιν ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ μὲν  
 οὖν ἀκριβὲς λαβεῖν οὐκ εὐχερὲς ἐστὶ διὰ τὸ μήτε τὰν ὄψιν  
 μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν δεῖ λαβεῖν, ἀξιόπι-  
 στα εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι· περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ  
 παρόντος οὐκ εὐκαιρὸν μακύνειν ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοι-  
 25 ούτων ἐμπεφανισμένων· ἀποχρῆ δέ μοι ἐς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ  
 προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἥτις ἐστὶ μὴ μείζων τᾷς γωνίας,  
 εἰς ἣν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσιν ποτὶ τᾷ ὄψει, καὶ  
 πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἥτις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾷς γωνίας,  
 εἰς ἣν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσιν ποτὶ τᾷ ὄψει.  
 12 τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πόδα ὀρθὸν ἐν τόπῳ κείμε-  
 νον, ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλων ὁ ἅλιος ὀρᾶσθαι, καὶ κυλινδρὸν  
 μικροῦ τορνευθέντος καὶ τεθέντος ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθὺς

ὑποθέτω, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης, καὶ ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς γῆς, λαμβάνων αὐτὰ ὅπως τὰ λαμβάνουσιν οἱ περισσότεροι τῶν προηγουμένων ἀστρονόμων· μετὰ δὲ ταῦτα θεωρῶ ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι τριακονταπλασία καὶ ὄχι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης, καίτοι ἐκ τῶν προηγουμένων ἀστρονόμων ὁ μὲν Εὐδοξος ἔλεγεν ὅτι εἶναι ἑνεαπλασία, ὁ Φειδίας δὲ ὁ πατήρ μου, ὅτι εἶναι περίπου δωδεκαπλασία, ὁ Ἀρίσταρχος δὲ προσεπάθει νὰ ἀποδείξῃ, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τῶν δεκαοκτὼ μικροτέρα δὲ τῶν εἴκοσι διαμέτρων τῆς σελήνης· ἐγὼ δὲ ὑπερβάλλων καὶ τοῦτον, διὰ νὰ ἀποδείξω ἀναντιλέκτως τὸ προκείμενον, ὑποθέτω, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι τριακονταπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης καὶ ὄχι μεγαλυτέρα αὐτῆς· πρὸς τούτοις δέ, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν εἰς τὸν κόσμον. Τοῦτο δὲ ὑποθέτω, ἐν ᾧ ὁ Ἀρίσταρχος ἔχει εὖρει, ὅτι ὁ ἥλιος φαίνεται, ὅτι εἶναι τὸ ἐπτακοσιοστὸν εἰκοστὸν τοῦ κύκλου τῶν ζωδίων, ἐγὼ δὲ ἐρευνήσας προσεπάθησα κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον νὰ λάβω δι' ὀργάνων τὴν γωνίαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος (ἔχουσιν τὴν κορυφὴν εἰς τὸν ὀφθαλμόν). Τὸ νὰ λάβῃ μὲν κανεὶς ἀκριβῆ γωνίαν δὲν εἶναι εὐχερές, διότι οὔτε ὁ ὀφθαλμός, οὔτε αἱ χεῖρες, οὔτε τὰ ὄργανα, διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ λάβῃ κανεὶς τὴν γωνίαν, νομίζω, ὅτι εἶναι ἀξιόπιστα, ὥστε νὰ δίδωσιν ἀκρίβειαν τῶν παρατηρήσεων· περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος δὲν εἶναι καιρὸς νὰ μηχανώμεν τὸν λόγον, ἄλλως τε πολλὰς φορές ἔχει γίνεαι λόγος περὶ αὐτοῦ· δι' ἐμὲ εἶναι ἀρκετόν, διὰ τὴν ἀποδείξιν τοῦ προκειμένου, νὰ λάβω μίαν γωνίαν, ἥτις νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος, καὶ πάλιν νὰ λάβω ἄλλην γωνίαν, ἥ ὁποία νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος. Τεθέντος λοιπὸν ἐνὸς μακροῦ κανόνοιο ἐπὶ κατακορύφου στελέχους εἰς τόπον ὅπου μέλλει νὰ παρατηρηθῇ ὁ ἥλιος ἀνατέλλων, καὶ μικροῦ κυλίνδρου τορνευθέντος καὶ

μετὰ τὰν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου, ἔπειτ' ἐόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ  
 ὀρίζοντι καὶ δυναμένον ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστράφη ὁ κανὼν εἰς  
 τὸν ἅλιον, καὶ ἃ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος· ὁ δὲ  
 κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος τοῦ τε ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος ἐπε-  
 5 σκότει τῷ ἁλίῳ. ἀποχωριζόμενος οὖν [τοῦ κυλίνδρου] ἀπὸ τᾶς  
 Η 224 ὄψιος, ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικρὸν ἐφ' ἐκά-  
 13 τερα τοῦ κυλίνδρου, κατεστάθη ὁ κύλινδρος. εἰ μὲν οὖν συνέ-  
 βαιεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἐνὸς σαμείου βλέπειν, εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν  
 ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἃ ὄψις κατεστάθη, ἐπι-  
 10 ψανουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἃ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθει-  
 σᾶν ἐλάσσωσιν κα ἧς τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν  
 κορυφὰν ἔχουσιν ποτὶ τῷ ὄψει, διὰ τὸ παραβλέπεσθαι τι τοῦ  
 ἁλίου ἐφ' ἐκάτερα τοῦ κυλίνδρου· ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἐνὸς  
 σαμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπὸ τινος μεγέθους, ἐλάφθη τι μέ-  
 15 γεθος στρογγύλον οὐκ ἔλαττον ὄψιος, καὶ τεθέντος τοῦ μεγέ-  
 θους ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἃ ὄψις κατεστάθη,  
 ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν ἐπιψανουσᾶν τοῦ τε μεγέθους καὶ τοῦ κυ-  
 λίνδρου ἃ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐλάττων  
 14 ἧς τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσιν  
 20 ποτὶ τῷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος τόνδε  
 τὸν τρόπον εὐρίσκεται· δύο κυλίνδρια λαμβάνεται λεπτὰ ἰσο-  
 παχέα ἀλλάλοις, τὸ μὲν λευκόν, τὸ δὲ οὖ, καὶ προτίθενται πρὸ  
 τᾶς ὄψιος, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὖ λευ-  
 κὸν ὡς ἔστιν ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ  
 25 προσώπου. εἰ μὲν οὖν κα τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότερα  
 ἔωντι τᾶς ὄψιος, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυ-  
 λίνδριον, καὶ ὀρῆται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκόν, εἰ μὲν κα παρὰ  
 πολὺ λεπτότερα ἔωντι, πᾶν, εἰ δέ κα μὴ παρὰ πολὺ, μέρεά  
 τινα τοῦ λευκοῦ ὀρῶνται ἐφ' ἐκάτερα τοῦ ἐγγὺς τᾶς ὄψιος,  
 30 λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλινδρίων ἐπιταδείων πως τῷ πάχει  
 Η 226 δὴ ταλικοῦτον μέγεθος, ἄλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλινδρίων

τεθέντος κατακορύφως ἐπὶ τοῦ κανόνος εὐθύς μετὰ τὴν ἀνατολὴν τοῦ ἡλίου, ἔπειτα ἐν ᾧ αὐτὸς ἦτο ἀκόμῃ εἰς τὸν ὀρίζοντα καὶ ἦτο δυνατόν νὰ φαίνεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη, ἐστράφη ὁ κανὼν μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὸν ἥλιον, καὶ ὁ ὀφθαλμὸς ἐτέθη εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος· ὁ δὲ κύλινδρος κείμενος μεταξὺ τοῦ ἡλίου καὶ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐπεσκίαζε τὸν ἥλιον. Ἀπομακρυνομένου δὲ [τοῦ κυλίνδρου] ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ (μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὸν ἥλιον), μόλις ἤρχισε νὰ φαίνεται ὁ ἥλιος ὀλίγον καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου, ἐστάθη ὁ κύλινδρος. Ἐὰν μὲν λοιπὸν συνέβαινεν νὰ βλέπῃ ὁ ὀφθαλμὸς μόνον ἐξ ἑνὸς σημείου, καὶ ἐὰν ἐφέρομεν ἐκ τοῦ ἄκρου τοῦ κανόνος, ὅπου εὐρίσκετο ὁ ὀφθαλμὸς, ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ ἥλιος φαίνεται, διότι καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου φαίνεται ὀλίγον μέρος τοῦ ἡλίου· ἐπειδὴ δὲ οἱ ὀφθαλμοὶ δὲν βλέπουν μόνον ἐξ ἑνὸς σημείου, ἀλλὰ ἀπὸ τινος μεγέθους, ἐλήφθη μέγεθος στρογγύλον οὐχὶ μικρότερον τοῦ ὀφθαλμοῦ, καὶ ἀφοῦ ἐτέθη τὸ μέγεθος εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ὅπου ἐτέθη ὁ ὀφθαλμὸς, καὶ ἤχθησαν ἐφαπτόμεναι καὶ τοῦ μεγέθους καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ἦτο μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος. Τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐχὶ μικρότερον τοῦ ὀφθαλμοῦ εὐρίσκεται κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον· λαμβάνονται δύο κυλίνδρια λεπτὰ καὶ ἰσοπαχῇ μεταξὺ των, τὸ μὲν λευκόν, τὸ δὲ ὄχι, καὶ φέρονται πρὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ, τὸ μὲν λευκὸν μακρότερον αὐτοῦ, τὸ δὲ μὴ λευκὸν πλησιέστατα πρὸς τὸν ὀφθαλμόν, ὥστε καὶ νὰ ἐγγίξῃ τὸ πρόσωπον. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὰ ληφθέντα κυλίνδρια εἶναι λεπτότερα τοῦ ὀφθαλμοῦ, τὸ πλησιέστερον κυλίνδριον περιλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ, καὶ φαίνεται ὑπ' αὐτοῦ τὸ λευκόν, ἐὰν μὲν εἶναι παρὰ πολὺ λεπτόν, φαίνεται ὁλόκληρον, ἐὰν δὲ δὲν εἶναι, φαίνονται μέρη τινὰ τοῦ λευκοῦ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πλησίον τοῦ ὀφθαλμοῦ, ἐὰν δὲ ληφθῶσι τὰ κυλίνδρια αὐτὰ ὑπὸ κατάλληλον πάχος ἐπισκιάζει τὸ ἐν τὸ ἄλλον καὶ ὄχι περισσότερον χῶρον· τὸ δὲ τοιοῦτον μέγεθος, ἔχον τὸ πάχος τῶν κυλινδρίων, τὰ ὅποια προκαλοῦν τὸ

- 15 τῶν τοῦτο ποιούντων μάλιστα πῶς ἐστὶν οὐκ ἔλαττον τᾶς ὀψιος. ἂ δὲ γωνία ἂ οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας, εἰς ἂν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὀφει, οὕτως ἐλάφθη· ἀποσταθέντος ἐπὶ τοῦ κανονίου τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὀψιος
- 5 οὕτως, ὥς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ τῷ ἄλλῳ, καὶ ἀχθειςᾶν εὐθειᾶν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἂ ὀψις κατεστάθη, ἐπιφανουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἂ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθειςᾶν εὐθειᾶν οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, εἰς ἂν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὀφει. ταῖς
- 16 δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθᾶς γωνίας ἐγένετο ἂ ἐν στήνῳ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ ἐλάττων ἢ ἐν μέρος τούτων, ἂ δὲ ἐλάττων διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ μείζων ἢ ἐν μέρος τούτων· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἂ γωνία, εἰς ἂν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὀφει,
- 15 ἐλάττων μὲν ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ τούτων ἐν
- 17 μέρος, μείζων δὲ ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ τούτων ἐν μέρος. πεπιστευμένων δὲ τούτων δείκνυται ἂ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἔοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. νοεῖσθω
- 20 γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διὰ τε τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ διὰ τᾶς ὀψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὀρίζοντα ἔοντος τοῦ ἁλίου, τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβληθὲν ἐπίπεδον τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν ΑΒΓ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν
- Η 228 ΔΕΖ, τὸν δὲ ἄλιον κατὰ τὸν ΣΗ κύκλον, κέντρον δὲ ἔστω τᾶς
- 25 μὲν γᾶς τὸ Θ, τοῦ δὲ ἁλίου τὸ Κ, ὀψις δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἀχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιφανέουσαι τοῦ ΣΗ κύκλου ἀπὸ μὲν τοῦ Δ αἱ ΔΑ, ΔΕ, ἐπιφανόντων δὲ κατὰ τὸ Ν καὶ τὸ Τ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ αἱ ΘΜ, ΘΟ, ἐπιφανόντων δὲ κατὰ τὸ Χ καὶ τὸ Ρ, τὸν δὲ ΑΒΓ
- 18 κύκλον τεμνόντων αἱ ΘΜ, ΘΟ κατὰ τὸ Α καὶ τὸ Β· ἔστι δὴ
- 30 μείζων ἂ ΘΚ τᾶς ΔΚ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἄλιος ὑπὲρ τὸν ὀρίζοντα εἶμεν ὥστε ἂ γωνία ἂ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΑ, ΔΕ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ.

φαινόμενον αὐτό, δὲν εἶναι τοῦλάχιστον μικρότερον τοῦ ὀφθαλμοῦ· Ἡ δὲ γωνία ἢ ὁποία δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος, ἐλήφθη κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον· ὅταν σταθῇ ἐπὶ τοῦ κανόνος ὁ κύλινδρος εἰς τόσῃν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ, ὥστε ὁ κύλινδρος νὰ ἐπισκιαζῇ ὁλόκληρον τὸν ἥλιον, καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ κανόνος, ἀπὸ τὸ μέρος, ὅπου ἐστάθη ὁ ὀφθαλμός, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτονται τοῦ κυλίνδρου, ἡ γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν δὲν γίνεται μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος. Ὅταν ἔγινε σύγκρισις τῶν οὕτω πως ληφθεῖσῶν γωνιῶν πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν εὐρέθη (ἡ μεγαλυτέρα), ἀφοῦ ἡ ὀρθὴ διηρέθη εἰς 164 μέρη διὰ στιγμῶν (διὰ στίγων), οὐχὶ μικροτέρα τοῦ ἐνὸς 164ου, ἡ δὲ μικροτέρα, ἀφοῦ ἡ ὀρθὴ διηρέθη εἰς 200 μέρη, οὐχὶ μεγαλυτέρα τοῦ ἐνὸς 200ου· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἐνὸς 164ου τῆς ὀρθῆς, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ ἐνὸς 200ου μέρους τῆς ὀρθῆς. Ἀφοῦ δὲ ταῦτα γίνωσι παραδεκτὰ ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. Διότι ἄς νοηθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλίου καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ (τοῦ παρατηρητοῦ), τοῦ ἡλίου εὐρισκομένου ὀλίγον ὑπὲρ τὸν ὀρίζοντα, ἄς τέμνῃ δὲ τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν κύκλον ΑΒΓ, τὴν δὲ γῆν κατὰ τὸν ΔΕΖ, τὸν δὲ ἥλιον κατὰ τὸν κύκλον ΣΗ, κέντρον δὲ ἔστω τῆς μὲν γῆς τὸ Θ, τοῦ δὲ ἡλίου τὸ Κ, ὀφθαλμός δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΣΗ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ αἱ ΔΛ, ΔΞ, ἄς ἐφάπτονται δὲ κατὰ τὸ Ν καὶ τὸ Τ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ αἱ ΘΜ, ΘΟ, ἄς ἐφάπτονται δὲ κατὰ τὸ Χ καὶ τὸ Ρ, νὰ τέμνωσι δὲ τὸν κύκλον ΑΒΓ αἱ ΘΜ, ΘΟ κατὰ τὸ Α καὶ τὸ Β· εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΘΚ τῆς ΔΚ, ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ὁ ἥλιος εἶναι ὑπὲρ τὸν ὀρίζοντα· ὥστε ἡ γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΔΞ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ΘΜ, ΘΟ.

ἃ δὲ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τῶν  $\Delta\Lambda$ ,  $\Delta\Xi$  μείζων μὲν ἐστὶν  
 ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθῆς, ἐλάττων δὲ ἢ τῆς ὀρθῆς διαιρε-  
 θεΐσας εἰς  $\overline{\rho\zeta\delta}$  τούτων ἐν μέρος· ἴσα γὰρ ἐστὶν τῇ γωνίᾳ, εἰς  
 ἣν ὁ ἄλλος ἐναρμόζει τὴν κορυφὴν ἔχουσιν ποτὶ τῇ ὅψει.  
 5 ὥστε ἡ γωνία ἃ περιεχομένα ὑπὸ τῶν  $\Theta\mathcal{M}$ ,  $\Theta\mathcal{O}$  ἐλάττων ἐστὶν  
 ἢ τῆς ὀρθῆς διαιρεθεΐσας εἰς  $\overline{\rho\zeta\delta}$  τούτων ἐν μέρος, ἃ δὲ  $AB$   
 εὐθεΐα ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑποτείνουσας ἐν τμήμα διαιρεθεί-  
 19 σας τῆς τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου περιφερείας ἐς  $\overline{\chi\nu\varsigma}$ . ἃ δὲ τοῦ εἰρη-  
 μένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ  
 H 230  $AB\Gamma$  κύκλου ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ τὰ  $\overline{\mu\delta}$  ποτὶ τὰ  $\overline{\zeta}$  διὰ τὸ  
 παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὴν περίμετρον  
 ποτὶ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάττονα λόγον ἔχειν ἢ τὰ  $\overline{\mu\delta}$  ποτὶ  
 τὰ  $\overline{\zeta}$ · ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὕφ' ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου  
 ἡ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίῳ τῆς διαμέτρου ἐλάσ-  
 15 σονι ἢ ἐβδόμῳ μέρει, ταύτας δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ περίμετρος  
 τοῦ ἐγγραφέντος πολυγωνίου· ἐλάττω οὖν λόγον ἔχει ἡ  $BA$   
 ποτὶ τὴν  $\Theta K$  ἢ τὰ  $\overline{\iota\alpha}$  ποτὶ τὰ  $\overline{\alpha\rho\mu\eta}$ · ὥστε ἐλάττων ἐστὶν ἡ  
 20  $BA$  τῆς  $\Theta K$  ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τῇ δὲ  $BA$  ἴσα ἐστὶν ἡ διά-  
 μετρος τοῦ  $\Sigma H$  κύκλου, διότι καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ  $\Phi A$  ἴσα  
 20 ἐστὶ τῇ  $KP$ · ἴσῃ γὰρ εἰσὶν τῶν  $\Theta K$ ,  $\Theta A$  ἀπὸ τῶν περᾶτων  
 καθετοὶ ἐπιζεύγνυνται ὑπὸ τῶν αὐτῶν γωνιῶν· δηλὸν οὖν, ὅτι  
 ἡ διάμετρος τοῦ  $\Sigma H$  κύκλου ἐλάττων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος  
 τῆς  $\Theta K$ . καὶ ἡ  $E\Theta Y$  διάμετρος ἐλάττων ἐστὶ τῆς διαμέτρου  
 τοῦ  $\Sigma H$  κύκλου, ἐπεὶ ἐλάττων ἐστὶν ὁ  $\Delta EZ$  κύκλος τοῦ  $\Sigma H$   
 25 κύκλου· ἐλάττονες ἄρα ἐντὶ ἀμφοτέραι αἱ  $\Theta Y$ ,  $K\Sigma$  ἢ ἑκατο-  
 στὸν μέρος τῆς  $\Theta K$ · ὥστε ἡ  $\Theta K$  ποτὶ τὴν  $Y\Sigma$  ἐλάττονα λόγον  
 ἔχει ἢ τὰ  $\overline{\rho}$  ποτὶ τὰ  $\overline{\varsigma\theta}$ . καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν  $\Theta K$  οὐκ ἐλάττων ἐστὶ  
 τῆς  $\Theta P$ , ἃ δὲ  $\Sigma Y$  ἐλάττων τῆς  $\Delta T$ , ἐλάττω ἄρα καὶ λόγον ἔχει  
 21 ἡ  $\Theta P$  ποτὶ τὴν  $\Delta T$  ἢ τὰ  $\overline{\rho}$  ποτὶ τὰ  $\overline{\varsigma\theta}$ . ἐπεὶ δὲ τῶν  $\Theta KP$ ,  
 30  $\Delta KT$  ὀρθογωνίων ὁντων αἱ μὲν  $KP$ ,  $KT$  πλευραὶ ἴσαι ἐντί,  
 αἱ δὲ  $\Theta P$ ,  $\Delta T$  ἄνισοι καὶ μείζων ἡ  $\Theta P$ , ἡ γωνία ἃ περιεχομένα  
 H 232 ὑπὸ τῶν  $\Delta T$ ,  $\Delta K$  ποτὶ τὴν γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν



Ἡ δὲ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΔΞ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τοῦ διακοσιοστοῦ μέρους τῆς ὀρθῆς, μικροτέρα δὲ τοῦ ἑκατοστοῦ ἑξήκοστοῦ τετάρτου μέρους αὐτῆς· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος· ὥστε ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΘΜ, ΘΟ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἐνὸς 164ου τῆς ὀρθῆς, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑποτείνουσας (χορδῆς) ἐνὸς τόξου τοῦ κύκλου ΑΒΓ διαιρεθέντος εἰς 656 μέρη. Ἡ δὲ περίμετρος τοῦ εἰρημένου πολυγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὰ 44 : 7, διότι ἡ περίμετρος παντὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ 44 : 7· διότι θὰ σοῦ εἶναι γνωστὸν τὸ ἀποδειχθὲν παρ' ἡμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου σὺν ὀλιγώτερον τοῦ ἐνὸς ἐβδόμου αὐτῆς (Κύκλου μέτρησις, θ. 3), ταύτης δὲ μικροτέρα εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου· ἔχει λοιπὸν μικρότερον λόγον ἢ ΒΑ : ΘΚ ἢ τὰ 11 : 1148· ὥστε εἶναι

$BA < \frac{1}{100} \Theta K$ . Πρὸς δὲ τὴν ΒΑ εἶναι ἴση ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου

ΣΗ, διότι καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς ἡ ΦΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΡ· διότι, ἐν ᾧ αἱ ΘΚ, ΘΑ εἶναι ἴσαι ἔχουσιν ἀχθῆ ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν κάθετοι ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν (Εὐκλ. Ι, 26)· εἶναι λοιπὸν φανερόν,

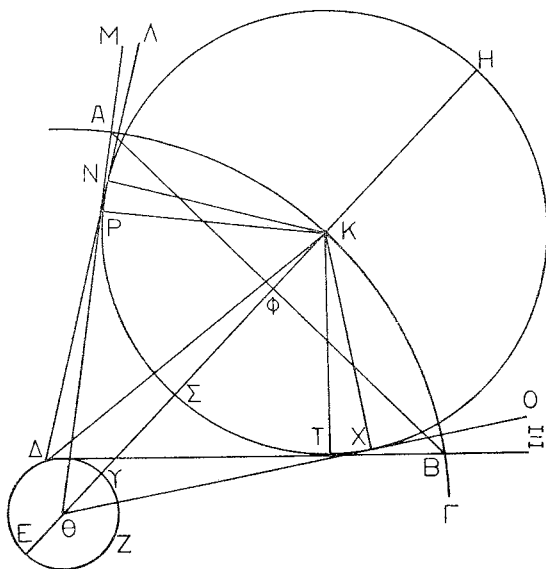
ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ΣΗ εἶναι μικροτέρα τοῦ  $\frac{1}{100} \Theta K$ .

Καὶ ἡ διάμετρος ΕΘΥ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΣΗ, ἐπειδὴ ὁ κύκλος ΔΕΖ εἶναι μικρότερος τοῦ κύκλου ΣΗ· εἶναι

ἄρα τὸ ἄθροισμα ΘΥ + ΚΣ <  $\frac{1}{100} \Theta K$ · ὥστε εἶναι  $\Theta K : \Upsilon \Sigma <$

100 : 99. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΘΚ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΘΡ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 8), ἡ δὲ ΣΥ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΤ, θὰ εἶναι ἄρα  $\Theta P : \Delta T < 100 : 99$ . Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΘΚΡ, ΔΚΤ εἶναι ὀρθογώνια, αἱ μὲν πλευραὶ ΚΡ, ΚΤ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ΘΡ, ΔΤ εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΘΡ, ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΤ, ΔΚ πρὸς τὴν γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ΘΡ, ΘΚ ἔχει μεγαλύ-

$\Theta P$ ,  $\Theta K$  μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἂ  $\Theta K$  ποτὶ τὰν  $\Delta K$ , ἐλάττω  
 δὲ ἢ ἂ  $\Theta P$  ποτὶ τὰν  $\Delta T$ . εἰ γὰρ κα δυὼν τριγώνων ὀρθογω-  
 νίων αἱ μὲν ἄτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι  
 ἔωντι, αἱ δὲ ἄτεραι ἀνίστοι, ἂ μείζων γωνία τῶν ποτὶ ταῖς ἀ-  
 5 νίστοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάττονα μείζονα μὲν ἔχει λόγον  
 ἢ ἂ μείζων γραμμὰ τῶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτείνουσῶν  
 ποτὶ τὰν ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ ἢ ἂ μείζων γραμμὰ τῶν περὶ  
 22 τὰν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ τὰν ἐλάττονα. ὥστε ἂ γωνία ἂ περιε-  
 χομμένα ὑπὸ τῶν  $\Delta A$ ,  $\Delta E$  ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν  
 10 ὑπὸ τῶν  $\Theta O$ ,  $\Theta M$  ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ ἂ  $\Theta P$  ποτὶ τὰν  $\Delta T$ ,  
 αἷτις ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ  $\bar{\rho}$  ποτὶ τὰ  $\zeta\theta$ . ὥστε καὶ ἂ γωνία  
 ἂ περιεχομμένα ὑπὸ τῶν  $\Delta A$ ,  $\Delta E$  ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιε-  
 χομέναν ὑπὸ τῶν  $\Theta M$ ,  $\Theta O$  ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ  $\bar{\rho}$  ποτὶ τὰ  
 $\zeta\theta$ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἂ γωνία ἂ περιεχομμένα ὑπὸ τῶν  $\Delta A$ ,  $\Delta E$



τερον μὲν λόγον ἢ ἡ  $\Theta K : \Delta K$ , μικρότερον δὲ ἢ ἡ  $\Theta P : \Delta T$ . διότι  
 ἐὰν δύο ὀρθογωνίων τριγώνων αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ  
 ἄλλαι δὲ κάθετοι εἶναι ἄνισοι, ἡ μεγαλυτέρα γωνία ἡ σχηματιζομένη  
 ὑπὸ τῶν ἀνίσων καθέτων πλευρῶν πρὸς τὴν μικροτέραν ἔχει μεγα-  
 λύτερον μὲν λόγον ἢ ἡ μεγαλυτέρα ὑποτείνουσα πρὸς τὴν μικροτέραν,  
 μικρότερον δὲ ἢ ἡ μεγαλυτέρα κάθετος πλευρὰ πρὸς τὴν μικροτέραν.  
 Ὡστε ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν  $\Delta \Lambda$ ,  $\Delta \Xi$  πρὸς τὴν γωνίαν τὴν  
 περιεχομένην ὑπὸ τῶν  $\Theta O$ ,  $\Theta M$  ἔχει μικρότερον λόγον ἢ ἡ  $\Theta P : \Delta T$ ,  
 ἡ ὁποία ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὰ  $100 : 99$ . Ὡστε καὶ ἡ γωνία ἡ  
 περιεχομένη ὑπὸ τῶν  $\Delta \Lambda$ ,  $\Delta \Xi$  πρὸς τὴν γωνίαν τὴν περιεχομένην  
 ὑπὸ τῶν  $\Theta M$ ,  $\Theta O$  ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὰ  $100 : 99$ . Καὶ ἐπειδὴ  
 ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν  $\Delta \Lambda$ ,  $\Delta \Xi$  εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ  $\frac{1}{200}$

- μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθῶς, εἴη καὶ ἡ γωνία ἡ περιε-  
 χομένα ὑπὸ τῶν  $\Theta\text{Μ}$ ,  $\Theta\text{Ο}$  μείζων ἢ τὰς ὀρθῶς διαιρεθείσας  
 εἰς δισμύρια τούτων  $\zeta\theta$  μέρεα· ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρε-  
 θείσας τὰς ὀρθῶς εἰς  $\sigma$  καὶ  $\gamma$  τούτων ἐν μέρος. ἡ ἄρα  $\text{ΒΑ}$  μεί-  
 5 ζων ἐστὶ τὰς ὑποτεινοῦσας ἐν τμᾶμα διηρημέναις τὰς τοῦ  $\text{ΑΒΓ}$   
 κύκλου περιφερείας εἰς  $\omega\beta$ . τῇ δὲ  $\text{ΑΒ}$  ἴσα ἐντὶ ἡ τοῦ ἁλίου  
 διάμετρος· δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ ἁλίου διάμετρος  
 τὰς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.
- 1 **II.** Τούτων δὲ ὑποκειμένων δείκνυνται καὶ τάδε· οἷον ἡ διά-  
 10 μετρος τοῦ κόσμου τὰς διαμέτρου τὰς γὰς ἐλάττων ἐστὶν ἢ  
 μυριοπλασίον, καὶ ἔτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐστὶν  
 ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες  $\rho$ . ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὴν διά-  
 H 234 μετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζω εἶμεν ἢ τριακονταπλασίονα τὰς  
 διαμέτρου τὰς σελήνας, τὴν δὲ διάμετρον τὰς γὰς μείζω εἶμεν  
 15 τὰς διαμέτρου τὰς σελήνας, δῆλον, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ ἁλίου  
 ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίον τὰς διαμέτρου τὰς γὰς.  
 πάλιν δέ, ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα  
 τὰς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγ-  
 γραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ χιλιαγώνου  
 20 περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάττων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίον τὰς  
 διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἡ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν  
 2 ἢ τριακονταπλασίον τὰς διαμέτρου τὰς γὰς· ὥστε ἡ περίμε-  
 τρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλασίον τὰς  
 διαμέτρου τὰς γὰς. ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου  
 25 τὰς μὲν διαμέτρου τὰς γὰς ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλα-  
 σίον, τὰς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίον· δέ-  
 δεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἡ διάμετρος ἐλάττων  
 ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου τὰς περιμέτρου, ὃ καὶ  
 ἰσόπλευρον ἢ καὶ πολυγωνότερον τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένον  
 30 ἐν τῷ κύκλῳ· εἴη καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριο-  
 πλασίον τὰς διαμέτρου τὰς γὰς. ἡ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κό-  
 3 σμου ἐλάττων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίον τὰς διαμέτρου τὰς γὰς

τῆς ὀρθῆς, θὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΘΜ, ΘΟ  
 μεγαλύτερα  $\frac{99}{20.000}$  τῆς ὀρθῆς· ὥστε εἶναι μεγαλύτερα καὶ τοῦ

$\frac{1}{203}$  τῆς ὀρθῆς. Εἶναι ἄρα ἡ ΒΑ μεγαλύτερα τῆς χορδῆς τόξου  
 τοῦ κύκλου ΑΒΓ διαιρεθέντος εἰς 812 ἴσα μέρη. Πρὸς δὲ τὴν ΑΒ  
 εἶναι ἴση ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ διάμε-  
 τρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλύτερα τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου.

2. Τούτων δὲ ὑποκειμένων ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἐξῆς· ὅτι ἡ  
 διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικρότερα 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς,  
 καὶ ἀκόμη, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικρότερα τῶν  $10.000 \times 10.000 \times 100$  σταδίων. Διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἡ διάμετρος  
 τοῦ ἡλίου δὲν εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τριακονταπλασίου τῆς διαμέ-  
 τρου τῆς σελήνης, ὅτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι μεγαλύτερα τῆς  
 διαμέτρου τῆς σελήνης, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου  
 εἶναι μικρότερα τοῦ τριακονταπλασίου τῆς διαμέτρου τῆς γῆς.  
 Πάλιν δέ, ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλύτερα  
 τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύ-  
 κλον τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ εἰρη-  
 μένου χιλιαγώνου εἶναι μικρότερα τοῦ χιλιοπλασίου τῆς διαμέτρου  
 τοῦ ἡλίου. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μικρότερα τοῦ τριακον-  
 ταπλασίου τῆς διαμέτρου τῆς γῆς· ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου  
 εἶναι μικρότερα 30.000 διαμέτρων τῆς γῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ περί-  
 μετρος τοῦ χιλιαγώνου εἶναι μικρότερα μὲν 30.000 διαμέτρων τῆς  
 γῆς, μεγαλύτερα δὲ τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ κόσμου· διότι  
 ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ διάμετρος παντὸς κύκλου εἶναι μικρότερα τοῦ  
 ἑνὸς τρίτου τῆς περιμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου  
 εἰς τὸν κύκλον, ὅταν τοῦτο ἔχῃ περισσοτέρας πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώ-  
 νου· θὰ εἶναι ἐπομένως καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου μικρότερα τῶν  
 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς. Ἀπεδείχθη λοιπὸν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος  
 τοῦ κόσμου εἶναι μικρότερα τῶν 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς· ὅτι δὲ  
 ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικρότερα 10.000.000.000 σταδίων,

- δέδεικται· ὅτι δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες  $\overline{\varrho}$ , ἐκ τούτου δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὴν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων, ἡ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς μείζων ἐστὶν
- 5 ἢ τριπλασία τᾶς διαμέτρου διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὴν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίονα τᾶς διαμέτρου, δῆλον, ὥς ἡ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων  $\overline{\varrho}$  μυριάδες.
- Η 236 ἐπεὶ οὖν ἡ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον, ὥς ἡ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες  $\overline{\varrho}$ . περὶ μὲν οὖν τῶν μεγεθῶν καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι, περὶ δὲ τοῦ φάμμου τάδε· εἴ καὶ ἥ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ φάμμου μὴ μείζον μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὴν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάτ-
- 15 τωνα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον· ἐτέθεν ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνες ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμεναι ἀπτόμεναι ἀλλήλων, καὶ ἀνέλαβον αἱ  $\overline{\kappa\epsilon}$  μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλίου μάκωος. ἐλάττονα οὖν τιθεὶς τὴν διάμετρον τᾶς μάκωνος ὑπο-
- 20 τίθεμαι ὥς τετρωκοστομόριον εἶμεν δακτύλου καὶ μὴ ἐλάττονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατα δείκνυσθαι τὸ προκείμενον.
- 1 ΠΙΙ. Ἡ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα· χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὴν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως
- 25 καὶ τῶν ἄλλων οἱ τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετευχότες τῷ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν ὑπὲρ
- 2 αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ προειρημένον. συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἅμιν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τὸ τῶν μυρίων [μὲν] ἀποχρεόντως γιγνώ-
- 30 σκομες μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἔστε ποτὶ τὰς μυρίας μυριάδας. ἔστων οὖν ἅμιν οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰς μυρίας μυριάδας πρῶτοι καλουμένοι, τῶν δὲ πρῶτων ἀριθμῶν

εἶναι φανερόν ἐκ τοῦ ἐξῆς· διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γῆς δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 3.000.000 σταδίων, ἡ δὲ περίμετρος τῆς γῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου αὐτῆς, ἐπειδὴ παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι μικροτέρα 1.000.000 σταδίων. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα 10.000.000.000 σταδίων. Περὶ τῶν μεγεθῶν λοιπὸν καὶ τῶν ἀποστάσεων κάμνω αὐτάς τὰς ὑποθέσεις, περὶ δὲ τῆς ἄμμου ὑποθέτω τὰ ἐξῆς· ἔστω ὅτι ὑπάρχει μέγεθος συγκείμενον ἐξ ἄμμου μὴ μεγαλύτερον κόκκου μήκωνος, ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν κόκκων τῆς ἄμμου ἐντὸς τοῦ μεγέθους νὰ εἶναι οὐχὶ μεγαλύτερος τῶν 10.000, καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος νὰ εἶναι οὐχὶ μικροτέρα τοῦ ἐνὸς τεσσαρακοστοῦ τοῦ δακτύλου. Ὑποθέτω δὲ τοῦτο σκεφθεὶς κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· ἐτέθησαν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς εἰς λεῖον κανόνα κόκκοι μήκωνος ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ οἱ 25 κόκκοι μήκωνος κατέλαβον χῶρον ἐνὸς πλήρους μήκους δακτύλου. Θέσας λοιπὸν τὴν διάμετρον τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος μικροτέραν, ὑποθέτω ὅτι εἶναι  $\frac{1}{40}$  τοῦ δακτύλου καὶ ὅχι μικροτέρα, ἐπιθυμῶν καὶ διὰ τούτου νὰ ἀποδείξω τὸ προκείμενον ἀναντιρρητότατα.

3. Αὐτὰ λοιπὸν εἶναι ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ὑποθέτω· νομίζω δὲ ὅτι εἶναι χρήσιμον νὰ κατονομασθῶσιν οἱ ἀριθμοί, ἵνα, καὶ ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι δὲν ἔτυχε νὰ ἀναγνώσωσι τὸ βιβλίον (περὶ ἀριθμῶν) τὸ ἀφιερωμένον εἰς τὸν Ζεῦξίππον, μὴ πλανῶνται, διότι δὲν θὰ ἔχωμεν εἴπει τίποτε περὶ αὐτῶν εἰς τὸ παρὸν βιβλίον. Συμβαίνει δέ, ὥστε τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι ἐκ παραδόσεως γνωστὰ εἰς ἡμᾶς (ἀπὸ τῆς μονάδος) μέχρι τῶν 10.000, καὶ γνωρίζομεν ἐπίσης ἀρκούντως τοὺς ἀριθμούς, ἐν ᾧ ἀριθμοῦμεν ἀπὸ μυριάδος μέχρι 10.000 μυριάδας. Ἐστω λοιπὸν οἱ ἤδη εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 μέχρι τῶν μυρίων μυριάδων, ἃς καλῶνται πρῶτοι, τῶν δὲ πρῶτων ἀριθμῶν αἱ μύρια.

αἱ μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἂ-  
 Η 238 ριθμείσθω τῶν δευτέρων μονάδες καὶ ἐκ τῶν μονάδων δεκά-  
 δες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας  
 μυριάδας. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἂ-  
 5 ριθμῶν μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω  
 τῶν τρίτων ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἀπὸ τῶν μονάδων δεκάδες  
 3 καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυ-  
 ριάδας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μύριαι  
 μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τε-  
 10 τάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων  
 ἀριθμῶν, καὶ αἰ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα  
 ἐχόντων ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριά-  
 4 δας. ἀποχρέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ἀριθμοὶ γιγνώ-  
 4 σκόμενοι, ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλεόν προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ  
 15 μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτας περιόδου καλουμένοι, ὁ  
 δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τῆς πρώτας περιόδου μονὰς καλείσθω  
 δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι  
 μυριάδες τῆς δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν μονὰς κα-  
 λείσθω τῆς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ  
 20 καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου  
 τρίτων ἀριθμῶν, καὶ αἰ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες τὰ ὀ-  
 νόματα ἐχόντων τῆς δευτέρας περιόδου ἐς τὰς μυριακισμυριο-  
 στῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀρι-  
 θμὸς τῆς δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου  
 25 πρώτων ἀριθμῶν, καὶ αἰ οὕτως προαγόντων ἐς τὰς μυριακι-  
 5 σμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυ-  
 Η 240 ριάδας. τούτων δὲ οὕτως κατονομασμένων, εἰ κα ἔωντι ἂ-  
 ριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐξῆς κειμένοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν  
 μονάδα δεκάς ἦ, ὁκτώ μὲν αὐτῶν οἱ πρώτοι σὺν τῇ μονάδι  
 30 τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται, οἱ δὲ μετ' αὐ-  
 τοὺς ἄλλοι ὁκτώ τῶν δευτέρων καλουμένων, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν  
 αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦν-



μυριάδες ἄς καλῶνται μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἄς ἀριθμηθῶσι τῶν δευτέρων ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἐκ τῶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες μέχρι μυριάδες μυριάδων. Πάλιν δὲ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ἄς κληθῶσι μονὰς τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἄς ἀριθμηθῶσι μονάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν καὶ ἀπὸ τῶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες μέχρι μυριάδες μυριάδων. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες ἄς κληθῶσι μονὰς τῶν τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ἄς κληθῶσι μονὰς τῶν πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ὀνομάζωνται οἱ ἀριθμοὶ μέχρι τῶν μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες. Καίτοι εἶναι ἐπαρκεῖς οἱ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὀνομαζόμενοι ἀριθμοί, ἐν τούτοις εἶναι δυνατόν νά προχωρήσωμεν καὶ περισσότερον. Διότι ἔστω, ὅτι οἱ ἤδη εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἄς κληθῶσι ἀριθμοὶ τῆς πρώτης περιόδου, ὁ δὲ τελευταῖος ἀριθμὸς τῆς πρώτης περιόδου ἄς κληθῇ μονὰς τῆς δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῆς δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν ἄς κληθῶσι μονὰς τῆς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. Ὅμοιως δὲ καὶ ὁ τελευταῖος τούτων ἄς κληθῇ μονὰς δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν, καὶ πάντοτε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἄς ὀνομάζωνται οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας περιόδου μέχρι τῶν μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες. Πάλιν δὲ καὶ ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τῆς δευτέρας περιόδου ἄς κληθῇ μονὰς τῆς τρίτης περιόδου πρώτων ἀριθμῶν, καὶ πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν προχώρησιν μέχρι τῆς μυριάκις μυριοστῆς περιόδου μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. Ἐν ᾧ δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι κατονομασθῇ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὁ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι δέκα, οἱ ὀκτὼ μὲν πρῶτοι ἐξ αὐτῶν σὺν τὴν μονάδα θὰ περιέχωσι τοὺς καλουμένους πρώτους ἀριθμοὺς (τῆς πρώτης τάξεως), οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ θὰ περιέχωσι τοὺς δευτέρους ἀριθμοὺς (δευτέρας τάξεως) καὶ οἱ ἄλλοι θὰ γίνωνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πρὸς αὐτοὺς καὶ θὰ περιέχωσι τοὺς ἀντι-

- ται τῇ ἀποστάσει τᾶς δεκάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας δεκάδος τῶν ἀριθμῶν. τᾶς μὲν οὖν πρώτας δεκάδος τῶν ἀριθμῶν ὁ ὄγδοός ἐστιν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες, τᾶς δὲ δευτέρας δεκάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίῳ ἐστὶν τοῦ πρὸ αὐτοῦ,
- 5 μύριαι μυριάδες ἐσσεῖται· οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας δεκάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας δεκάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίῳ ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, μύριαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν· οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς
- 6 τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερόν δέ, ὅτι καὶ πολλοσταὶ δεκάδες ἐξοῦντι, ὥς εἴρηται. χρήσιμον δὲ ἐστὶ καὶ τόδε γινγνωσκόμενον. εἴ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζωντί τινες ἀλλήλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ
- 15 μείζονος τῶν πολλαπλασιαζάντων ἀλλήλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαζάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει, ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἐνὶ ἐλάττονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς
- 7 συναμφοτέρων, οὗς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάζαντες ἀλλήλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοὶ τινες ἀνάλογον ἀπὸ μονάδος οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda$ , μονὰς δὲ ἔστω ὁ  $A$ , καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ  $\Delta$  τῷ  $\Theta$ , ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ  $X$ . λελάφθω δὲ ἐκ τᾶς ἀναλογίας ὁ  $\Lambda$  ἀπέχων ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  τοσούτους, ὅσους ὁ  $\Delta$  ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· δεικτέον, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ  $X$  τῷ  $\Lambda$ . ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἀριθμῶν ἴσους ἀπέχει
- 25 ὁ τε  $\Delta$  ἀπὸ τοῦ  $A$  καὶ ὁ  $\Lambda$  ἀπὸ τοῦ  $\Theta$ , τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ  $\Delta$  ποτὶ τὸν  $A$ , ὃν ὁ  $\Lambda$  ποτὶ τὸν  $\Theta$ . πολλαπλασίῳ δὲ ἐστὶν ὁ  $\Delta$  τοῦ  $A$  τῷ  $\Delta$ · πολλαπλασίῳ ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ  $\Lambda$  τοῦ  $\Theta$  τῷ
- 8  $\Delta$ · ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ  $\Lambda$  τῷ  $X$ . δῆλον οὖν, ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστιν καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλα-
- 30 σιαζάντων ἀλλήλους ἴσους ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάττων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. φανερόν δέ, ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἐνὶ ἐλάττονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὗς ἀπέ-

στοίχους ἀριθμούς ἀναλόγως πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἐκάστης ὀκτάδος ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς πρώτης ὀκτάδος ἀριθμῶν. Τῆς μὲν λοιπὸν πρώτης ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὁ ὄγδοος ἀριθμὸς εἶναι χίλιαι μυριάδες, τῆς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ πρὸ αὐτοῦ, θὰ εἶναι μύριαι μυριάδες· οὗτος δὲ εἶναι ἡ μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ὁ δὲ ὄγδοος τῆς δευτέρας ὀκτάδος εἶναι χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ τῆς τρίτης ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ πρὸ αὐτοῦ, θὰ εἶναι μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν· οὗτος δὲ εἶναι μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ ὑπάρχωσι καὶ πολλοσταὶ ὀκτάδες, ὥς ἐλέχθη. Εἶναι δὲ χρήσιμον νὰ γνωσθῇ καὶ τὸ ἐξῆς. Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς μονάδος εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ μερικοὶ ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιασθῶσι μεταξύ των, τὸ γινόμενον θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν αὐτὴν πρόοδον καὶ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν πολλαπλασιασάντων, τόσον ὅσον ἀπέχει ἀπὸ μονάδος ὁ μικρότερος τῶν πολλαπλασιασάντων. Ἀπὸ δὲ τῆς μονάδος θὰ ἀπέχῃ τὸ γινόμενον κατὰ ἓνα ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ἀπέχει ὁ ἀριθμὸς ὁ δηλούμενος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο, καθ' ὃν ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς μονάδος οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους. Διότι ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ τινες εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, μονὰς δὲ ἔστω ὁ Α καὶ ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ Δ μετὰ τὸν Θ, τὸ δὲ γινόμενον ἔστω ὁ Χ. Ἄς ληφθῇ λοιπὸν ἐκ τῆς προόδου ὁ Λ ἀπέχων ἀπὸ τοῦ Θ τόσους ἀριθμούς, ὅσους ἀπέχει ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Δ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ Χ = Λ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει γεωμετρικὴ πρόοδος μετὰ συνεχεῖς ὅρους καὶ ἀπέχει ἴσους τὸ πλῆθος ἀριθμούς καὶ ὁ Δ ἀπὸ τοῦ Α καὶ ὁ Λ ἀπὸ τοῦ Θ, θὰ εἶναι  $\Delta : Α = \Lambda : \Theta$ . Εἶναι δὲ πολλαπλάσιος ὁ Δ τοῦ Α κατὰ τὸν Δ· εἶναι ἄρα καὶ ὁ Λ τοῦ Θ πολλαπλάσιος κατὰ τὸν Δ· ὥστε εἶναι  $\Lambda = Χ$ . Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον ἀνήκει εἰς τοὺς ὅρους τῆς προόδου καὶ ὅτι ἀπέχει ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν πολλαπλασιασάντων ἀλλήλους ἴσους κατὰ τὸ πλῆθος ἀριθμούς, ὅσους ἀπέχει ὁ μικρότερος ἀπὸ τῆς μονάδος. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καὶ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀπέχει κατὰ ἓνα ὀλιγώτερον, ἢ

χοντι ἀπὸ τῆς μονάδος οἱ  $\Delta$ ,  $\Theta$ · οἱ μὲν γὰρ  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$  τοσοῦτοι ἐντί, ὅσους ὁ  $\Theta$  ἀπὸ μονάδος ἀπέχει, οἱ δὲ  $I, K, \Lambda$  ἐνὶ ἐλάττονες, ἢ ὅσους ὁ  $\Delta$  ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· σὺν γὰρ τῷ  $\Theta$  τοσοῦτοι ἐντί.

- 1 IV. Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων, τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διαμέτρων τῆς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου, δηλον, ὥς ἂ σφαῖρα ἂ δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον οὐ μείζων ἐστὶν ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας
- 10 καὶ τετρακισχιλίας· τῆς γὰρ σφαῖρας τῆς ἔχούσας τὰν διάμετρον τετρωκοστομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶν τῷ
- Η 244 εἰρημένῳ ἀριθμῷ· δέδεικται γάρ τοι, ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τὰν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν τοῦ εἰς τὸ τῆς μάκωνος
- 15 μέγεθος μὴ μείζονα εἶμεν μυριάων, δηλον, ὥς, εἰ πληρωθείη ψάμμου ἂ σφαῖρα ἂ δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς μονάδες τε  $\zeta$  τῶν δευτέρων ἀριθμῶν καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρα-
- 20 κισχίλια· ἐλάσσων οὖν ἐστὶν ἢ  $\iota$  μονάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ἂ δὲ τῶν  $\varrho$  δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶν τῆς δακτυλιαίαν ἔχούσας τὰν διάμετρον σφαῖρας ταῖς  $\varrho$  μυριάδεσσιν διὰ τὸ τριπλάσιον λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλας τὰν διαμέτρων τὰς σφαῖρας. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ
- 25 ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλικά ἐστὶν ἂ σφαῖρα ἂ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων  $\varrho$ , δηλον, ὥς ἐλάττων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλα-
- 3 πλασιασθειςῶν τὰν δέκα μονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς  $\varrho$  μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονά-

ὅσον εἶναι τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν δύο, καθ' οὗς ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς μονάδος οἱ Δ, Θ· διότι οἱ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τόσοι, ὅσους ἀπέχει ὁ Θ ἀπὸ τῆς μονάδος, οἱ δὲ Ι, Κ, Λ εἶναι ὀλιγώτεροι κατὰ τὸ πλῆθος κατὰ ἓν ἢ ὅσον ἀπέχει ὁ Δ ἀπὸ τῆς μονάδος· διότι εἶναι τόσοι ὁμοῦ μετὸν Θ.

4. Ἐκ τούτων δὲ ἐν ᾧ ἄλλα μὲν ἔχομεν ὑποθέσει, ἄλλα δὲ ἔχομεν ἀποδείξει, θὰ ἀποδειχθῇ τὸ προκείμενον. Διότι, ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος δὲν εἶναι μικροτέρα τοῦ  $\frac{1}{40}$  τοῦ δακτύλου, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ σφαῖρα ἢ ἔχουσα τὴν διά-

μετρον ἴσην μετ' ἑνα δάκτυλον δὲν θὰ ἔχη μεγαλύτερον ὄγκον, ἢ ὥστε νὰ χωρῇ 64000 κόκκους μήκωνος· διότι αὕτη εἶναι πολλαπλασία κατὰ τὸν εἰρημένον ἀριθμὸν τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον  $\frac{1}{40}$  τοῦ δακτύλου· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς

ἀλλήλας ὃν λόγον ἔχουσιν οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων αὐτῶν (Εὐκλ. XII, 18). Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ὄχι μεγαλύτερον τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος δὲν εἶναι μεγαλύτερος τῶν μυρίων, εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ σφαῖρα ἢ ἔχουσα διάμετρον ἐνὸς δακτύλου πληρωθῇ ἄμμου, ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 640.000.000. Οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔχει 6 μονάδας τῶν δευτέρων (δευτέρας τάξεως) ἀριθμῶν καὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν (πρώτης τάξεως) ἔχει 4000 μυριάδας· εἶναι λοιπὸν μικρότερος τῶν 10 μονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν (δευτέρας τάξεως). Ἡ δὲ σφαῖρα ἢ ἔχουσα διάμετρον 100 δακτύλους εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον ἐνὸς δακτύλου κατὰ 1.000.000, διότι αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἴσον πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῶν διαμέτρων. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελεν ἀποτελεσθῇ σφαῖρα ἐκ τῆς ἄμμου ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ ἔχουσα διάμετρον 100 δακτύλων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν αἱ 10 μονάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ἐπὶ 1.000.000. Ἐπειδὴ δὲ αἱ

δες δέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐν τῇ τῶν  
 δεκαπλασίων ὄρων ἀναλογία, αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἑβδομος  
 ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, δηλον, ὡς ὁ γενόμενος  
 ἀριθμὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος  
 5 ἀπὸ μονάδος· δέδεικται γάρ, ὅτι ἐνὶ ἐλάσσονας ἀπέχει ἀπὸ  
 τῆς μονάδος, ἥ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὗς ἀ-  
 πέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλήλους. τῶν  
 H 246 δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὁκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν  
 πρῶτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὁκτὼ τῶν δευ-  
 10 τέρων, καὶ ὁ ἑσχατός ἐστιν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες δευτέρων  
 ἀριθμῶν. φανερόν οὖν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλήθος τοῦ μέγεθος  
 ἔχοντος ἴσον τῇ σφαῖρα τῇ τὰν διάμετρον  $\overline{\rho}$  δακτύλων ἐχούσα  
 4 ἑλαττόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν  
 δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἡ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον  
 15 πολλαπλασία ἐστὶν τῆς ἐχούσας τὰν διάμετρον  $\overline{\rho}$  δακτύλων  
 ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα  
 ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἅλκα ἐστὶν ἡ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διά-  
 μετρον μυρίων δακτύλων, δηλον, ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ  
 ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθεῖσάν τὰν χι-  
 20 λιᾶν μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. ἐπεὶ  
 δ' αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδέκατός  
 ἐστὶν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ  $\overline{\rho}$  μυριάδες ἑβδο-  
 μος ἀπὸ μονάδος ἐν τῇ αὐτῇ ἀναλογία, δηλον, ὡς ὁ γενόμενος  
 5 ἐσσεῖται δυοκαεικοστός τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας ἀπὸ  
 25 μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων ὁκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν  
 τῇ μονάδι τῶν πρῶτων καλουμένων ἐντί, ὁκτὼ δὲ οἱ μετὰ  
 τούτους τῶν δευτέρων καλουμένων, οἱ δὲ λοιποὶ ἐξ τῶν τρίτων  
 καλουμένων, καὶ ὁ ἑσχατός αὐτῶν ἐστι δέκα μυριάδες τῶν  
 τρίτων ἀριθμῶν. φανερόν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλήθος τοῦ  
 H 248 μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαῖρα τῇ τὰν διάμετρον ἐχούσα μυ-

10 μονάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν εἶναι ὁ δέκατος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, τὸ δὲ 1.000.000 εἶναι ὁ ἑβδομος ὅρος τῆς αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι τῆς αὐτῆς προόδου ὁ δέκατος ἕκτος ὅρος· διότι ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἀπὸ τῆς μονάδος ἀπέχει κατὰ ἓνα ὀλιγώτερον, ἢ ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο, καθ' οὓς ἀπέχουσιν οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους. Ἐκ τῶν δέκα ἐξ δὲ τούτων ὁρῶν ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν (πρώτης τάξεως), οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν δευτέρων (δευτέρας τάξεως), καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι 10.000.000 τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ἔχουσαν διάμετρον 100 δακτύλων εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μυριάδων (10.000.000) τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἣ ἔχουσα διάμετρον 10.000 δακτύλων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον 100 δακτύλων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ᾗθελε γίνει σφαῖρα ἄμμου ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει σφαῖρα ἔχουσα διάμετρον 10.000 δακτύλων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος, ὅταν πολλαπλασιασθῶσι 1000 μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ἐπὶ 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλια μυριάδες εἶναι δέκατος ἕκτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ἑβδομος ὅρος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον θὰ εἶναι ὁ εἰκοστὸς δεύτερος ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου. Ἐκ τῶν 22 δὲ τούτων ὁρῶν οἱ μὲν πρῶτοι ὀκτὼ σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν (πρώτης τάξεως), οἱ μετὰ τούτους δὲ ὀκτὼ ἐκ τῶν καλουμένων δευτέρων, οἱ ἄλλοι δὲ ἐξ ἐκ τῶν καλουμένων τρίτων, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν διάμετρον μυρίων δακτύλων εἶναι μικρότερον

- ρίων δακτύλων ἔλασσόν ἐστιν ἢ ἡ μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σταδιαία ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δηλόν, ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος
- 5 ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρα τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσα σταδιαία
- 6 ἔλασσόν ἐστιν ἢ ἡ μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον  $\overline{\rho}$  σταδίων πολλαπλασίῳν ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαία ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλι-
- 10 καύτα τὸ μέγεθος, ἄλῖκα ἐστὶν ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον  $\overline{\rho}$  σταδίων, δηλόν, ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεῖσάν τῶν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν τρίτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δυοκαεικοστός ἐστιν ἀπὸ μο-
- 15 νάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ  $\overline{\rho}$  μυριάδες ἑβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δηλόν, ὥς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτω-
- 7 καιεικοστός ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ ὀκτῶ καὶ εἴκοσι τούτων ὀκτῶ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρῶτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι
- 20 ὀκτῶ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτῶ τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. φανερόν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαῖρα τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσα στα-
- 25 δίων  $\overline{\rho}$  ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων  $\overline{\rho}$  ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἄλῖκα ἐστὶν ἡ
- 30 σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δηλόν, ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεῖσάν τῶν χιλιάδων μονάδων τῶν τετάρτων



τῶν 10 μυριάδων τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον ἑνὸς σταδίου εἶναι μικροτέρα τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον μυρίων δακτύλων, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν διάμετρον ἑνὸς σταδίου εἶναι μικρότερον τῶν 10 μυριάδων τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Πάλιν λοιπὸν ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον 100 σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον ἑνὸς σταδίου κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνεαι ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον 100 σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 10 μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὰς 100 μυριάδας. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μὲν δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ εἰκοστὸς δεύτερος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα (καὶ λόγον 10), αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἑβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύψας ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ εἰκοστὸς ὃγδοος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου. Ἐκ τῶν εικοσιοικτῶ δὲ τούτων ὄρων, οἱ μὲν ὀκτῶ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρῶτων ἀριθμῶν, οἱ δὲ ἄλλοι ὀκτῶ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτῶ ἐκ τῶν τρίτων, οἱ δὲ ἄλλοι τέσσαρες ἐκ τῶν καλουμένων τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ἔχουσαν διάμετρον 100 σταδίων εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον 100 σταδίων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνεαι σφαῖρα μὲ τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν χιλίων μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὰς 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων

- Η 250 ἀριθμῶν ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν τετάρτων ἀ-  
 ριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτωκαιεικοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος  
 ἀνάλογον, αἱ δ' ἑκατὸν μυριάδες ἑβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς  
 αὐτᾶς ἀναλογίας, δηλόν, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς  
 9 αὐτᾶς ἀναλογίας τέταρτος καὶ τριακοστός ἀπὸ μονάδος. τῶν  
 δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτῶ μὲν οἱ πρώτοι σὺν  
 τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους  
 ὀκτῶ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτῶ τῶν  
 τρίτων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτῶ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ λοιποὶ  
 10 δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσσοῦνται, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν  
 ἐστι δέκα μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δηλόν οὖν, ὅτι τὸ  
 τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ τῇ  
 τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων ἔλασσον ἐσσεῖται ἢ ἡ  
 10 μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα  
 15 τὰν διάμετρον σταδίων  $\overline{\rho}$  μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς  
 σφαίρας τᾶς τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων ταῖς  $\overline{\rho}$   
 μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύ-  
 τα τὸ μέγεθος, ἄλκις ἐστὶν ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον  
 σταδίων  $\overline{\rho}$  μυριάδων, δηλόν, ὥς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμ-  
 20 μου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισῶν τᾶν  
 δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν.  
 καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες τέταρτός  
 ἐστι καὶ τριακοστός ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ  $\overline{\rho}$  μυριάδες  
 ἑβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δηλόν, ὅτι ὁ  
 11 γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρωκοστός ἀπὸ  
 μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτῶ μὲν οἱ πρώτοι  
 σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ ταῦτα  
 Η 252 ἄλλοι ὀκτῶ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτῶ  
 τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτῶ τῶν τετάρτων, οἱ  
 30 δὲ μετὰ τούτους ὀκτῶ τῶν πέμπτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔ-  
 σχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν.  
 φανερόν οὖν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος

ἀριθμῶν εἶναι ὁ εἰκοστὸς ὄγδος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἑβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι τῆς αὐτῆς προόδου ὁ τριακοστὸς τέταρτος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος. Ἐκ τῶν τριάκοντα καὶ τεσσάρων δὲ τούτων ὄρων οἱ μὲν ὀκτὼ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν τρίτων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν τετάρτων, οἱ ἄλλοι δὲ δύο θὰ εἶναι ἐκ τῶν πέμπτων καλουμένων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι δέκα μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὴν ὁποίαν περιέχει μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων θὰ εἶναι μικρότερον τῶν 10 μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνεαι σφαῖρα ἐκ τῆς ἄμμου ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὰς 100 μυριάδας. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μὲν δέκα μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ τριακοστὸς τέταρτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἑβδομος ὅρος ἀπὸ μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ τεσσαράκοστος ἀπὸ μονάδος. Ἐκ τῶν τεσσαράκοντα δὲ τούτων ὄρων οἱ μὲν ὀκτὼ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν πρώτων καλουμένων ἀριθμῶν, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν πέμπτων καλουμένων, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι χίλια μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ

- ἴσον τᾷ σφαίρα τᾷ τὰν διάμετρον ἔχούσα σταδίων  $\overline{\rho}$  μυριάδων
- 12 ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἃ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάων μυριάδων πολλαπλασίον ἐστὶ τᾷς σφαίρας τᾷς ἔχούσας τὰν διάμετρον στα-
- 5 δίων  $\overline{\rho}$  μυριάδων ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. εἰ δὴ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμον σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἄλκις ἐστὶν ἡ σφαῖρα ἃ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάων μυριάδων, φανερόν, ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμον πλήθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεῖσάν τῶν χιλιάων μυριάδων τῶν πέμ-
- 10 πτων ἀριθμῶν ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρωκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ  $\overline{\rho}$  μυριάδες ἑβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾷς αὐτᾷς
- 13 ἀναλογίας, δῆλον, ὥς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἔκτος καὶ τετρωκοστός ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἕξ τούτων
- 15 ὁκτῶ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὁκτῶ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὁκτῶ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὁκτῶ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὁκτῶ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ ἕξ τῶν ἕκτων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ
- 20 ἕσχατος αὐτῶν ἐστὶ  $\overline{\iota}$  μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. φανερόν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμον πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρα τᾷ τὰν διάμετρον ἔχούσα σταδίων μυριάδων μυριάων
- 14 ἔλασσόν ἐστιν ἢ  $\overline{\iota}$  μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. ἃ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων  $\overline{\rho}$  πολλα-
- 25 πλασία ἐστὶ τᾷς σφαίρας τᾷς ἔχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδων μυριάων ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμον σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἄλκις ἐστὶν ἡ σφαῖρα ἃ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων  $\overline{\rho}$ , φανερόν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμον πλήθος ἔλασσον ἐσσεῖται
- 30 τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεῖσάν τῶν  $\overline{\iota}$  μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν ταῖς  $\overline{\rho}$  μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν

ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσιν τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Ἡ δὲ σφαῖρα ἢ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων μυριάδων σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνεαι ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἢ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων μυριάδων σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν, ὅταν αὐταὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν 1000 μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ τεσσαρακοστὸς ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἑβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ τεσσαρακοστὸς ἔκτος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος. Ἐκ δὲ τῶν 46 τούτων ὄρων, οἱ ὀκτὼ μὲν πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρῶτων ἀριθμῶν, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ ἐκ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν πέμπτων, οἱ ἄλλοι δὲ ἕξ εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων ἕκτων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τελευταῖος ἕξ αὐτῶν εἶναι 10 μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσιν τὴν διάμετρον μυρίων μυριάδων σταδίων εἶναι μικρότερον τῶν 10 μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Ἡ δὲ σφαῖρα ἢ ἔχουσα διάμετρον 100 μυριάδας μυριάδων σταδίων (10.000.000.000) εἶναι 100 μυριάδας φορὰς (1.000.000) πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον 10.000 μυριάδων σταδίων. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνεαι ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα μὲ τόσον μέγεθος, ὅσον εἶναι ἡ σφαῖρα ἢ ἔχουσα διάμετρον 10.000.000.000 σταδίων εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 10 μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν, κατὰ 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δέ, αἱ μὲν δέκα

ἑκτῶν ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τετρωκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ  $\overline{\rho}$  μυριάδες ἑβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, δηλόν, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται  
 15 δυοκαιπεντακοστός ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας. τῶν  
 5 δὲ δύο καὶ πενήκοντα τούτων οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τῇ μονάδι οἱ τε πρῶτοι καλουμένοι ἐντὶ καὶ οἱ δευτέροι καὶ τρίτοι καὶ τετάρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἐβδόμων καλουμένων ἐντὶ, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν. φανερόν οὖν, ὅτι  
 10 τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ τῇ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων  $\overline{\rho}$  ἔλασσόν ἐστιν ἢ  $\overline{\alpha}$  μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη  
 16 ἃ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων  $\overline{\rho}$ , δηλόν, ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος  
 15 ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ  $\overline{\alpha}$  μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν οὖν τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ  $\overline{\alpha}$  μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν, δέ-  
 Η 256 δεικται· ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχον-  
 20 τος ἴσον τῇ σφαίρᾳ ταλικαύτῃ, ἀλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἀστρῶν σφαῖραν εἶμεν, ἔλασσόν ἐστιν  
 17 ἢ  $\overline{\alpha}$  μυριάδες τῶν ὀγδῶν ἀριθμῶν, δεικθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὰν γὰρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ' ἀμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν  
 25 τῶν ἀπλανέων ἀστρῶν σφαῖραν, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, καὶ αἱ διαμέτροι τῶν σφαιρῶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλας. ἃ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τῆς διαμέτρου τῆς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίῳν· δηλόν οὖν, ὅτι καὶ ἃ διάμετρος τῆς τῶν ἀπλανέων ἀστρῶν σφαίρας ἐλάσσων  
 18 ἐστὶν ἢ μυριοπλασίῳν τῆς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπεὶ δὲ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τῶν διαμέτρων, φανερόν, ὅτι ἃ τῶν ἀπλανέων ἀστρῶν σφαῖρα, ἃν Ἀρίσταρχος

μυριάδες τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ τεσσαρακοστὸς ἕκτος ὅρος ἀπὸ  
 τῆς μονάδος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα,  
 αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἑβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς  
 προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ πεντηκο-  
 στὸς δεύτερος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου. Ἐκ τῶν 52  
 δὲ τούτων ὄρων οἱ μὲν τεσσαράκοντα ὀκτὼ σὺν τὴν μονάδα εἶναι οἱ  
 κατὰ σειρὰν καλούμενοι πρῶτοι καὶ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι  
 καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι, οἱ δὲ ἄλλοι τέσσαρες εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων  
 ἑβδόμων, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι 1000 μονάδες τῶν ἑβδόμων  
 ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον  
 μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσιν τὴν διάμετρον σταδίων 100 μυ-  
 ριάδων μυριάκις εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μονάδων τῶν ἑβδόμων  
 ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι  
 μικροτέρα σταδίων 100 μυριάδων μυριάκις, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ  
 τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ κό-  
 σμου εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μονάδων τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν.  
 Ὅτι μὲν λοιπὸν τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὸν  
 κόσμον τὸν ὀριζόμενον ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρονόμων εἶναι μικρό-  
 τερον τῶν 1000 μονάδων τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, ἀπεδείχθη· ὅτι δὲ  
 καὶ τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν  
 πρὸς τὸ μέγεθος τῆς ὁποίας ὁ Ἀρίσταρχος ὑποθέτει, ὅτι εἶναι ἴσον  
 τὸ μέγεθος τῆς σφαίρας τῶν ἀπλανῶν ἀστρων, εἶναι μικρότερον τῶν  
 1000 μυριάδων τῶν ὀγδῶν ἀριθμῶν θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω. Διότι  
 ἐπειδὴ ἔχει ὑποτεθῆ, ὅτι ἡ γῆ πρὸς τὸν ὕψ' ἡμῶν εἰρημένον κόσμον  
 ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ εἰρημένος κόσμος πρὸς τὴν σφαῖραν  
 τῶν ἀπλανῶν, τὴν ὁποίαν ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος, καὶ αἱ διάμετροι  
 τῶν σφαιρῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας. Ἡ δὲ διάμετρος  
 τοῦ κόσμου ἀπεδείχθη, ὅτι εἶναι μικροτέρα τῶν 10.000 διαμέτρων  
 τῆς γῆς· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας τῶν  
 ἀπλανῶν εἶναι μικροτέρα τῶν 10.000 διαμέτρων τοῦ κόσμου. Ἐπει-  
 δὴ δὲ αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν  
 κύβων τῶν διαμέτρων, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν,

ὑποτίθεται, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι  
 πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται δέ, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου  
 πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν  
 ἢ  $\bar{\alpha}$  μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν· δῆλον οὖν, ὅτι, εἰ γένοιτο  
 5 ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλίκαν δ' Ἀρί-  
 σταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖραν εἶ-  
 μεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου  
 ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεῖσάν τὰν χιλιάν μονάδων ταῖς μυριά-  
 19 κίς μυρίαις μυριάδεσσιν. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἐβδόμων  $\bar{\alpha}$  μο-  
 10 νάδες δυοκαιπεντακοστός ἐστὶν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ  
 μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος ἐκ  
 τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρ-  
 τος καὶ ἐξηκοστός ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας· οὗτος  
 H 258 δέ ἐστι τῶν ὀγδῶν ὀγδοος, ὅς κα εἴη χίλιαι μυριάδες τῶν  
 15 ὀγδῶν ἀριθμῶν. φανερόν τοίνυν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλήθος  
 τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖρα,  
 ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσόν ἐστιν ἢ  $\bar{\alpha}$  μυριάδες τῶν  
 20 ὀγδῶν ἀριθμῶν. ταῦτα δέ, βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς  
 καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὐπίστα φα-  
 20 νήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσιν καὶ περὶ τῶν  
 ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθῶν τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλλίου  
 καὶ τᾶς σελήνης καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσιν πιστὰ  
 διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι· διόπερ ᾤηθην καὶ τὴν οὐκ ἀ-  
 νόρμοστον εἶμεν [ἔτι] ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.



τὴν ὁποίαν ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος, εἶναι μικροτέρα τῆς σφαίρας τοῦ κόσμου κατὰ  $10.000 \times 10.000 \times 10.000$ . Ἀπεδείχθη δέ, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὸν κόσμον εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μονάδων τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἐὰν ἤθελε γίνεαι ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα μὲ τόσον μέγεθος, ὅσον ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος τὴν σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν, ὁ ἀριθμὸς τοῦ πλῆθους τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 1000 μονάδων ἐπὶ  $10.000 \times 10.000 \times 10.000$ . Καὶ ἐπειδὴ αἱ μὲν 1000 μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν εἶναι ὁ πεντηκοστὸς δεύτερος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, τὸ δὲ ἐν τρισεκατομμύριον εἶναι ὁ δέκατος τρίτος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ ἐξηκοστὸς τέταρτος ( $1, 10, 10^2, 10^3 \dots 10^{63}$ ) ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου· οὗτος δὲ εἶναι ὄγδοος τῶν ὀγδῶν ἀριθμῶν, ὅστις εἶναι 1000 μυριάδες τῶν ὀγδῶν ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων, τὴν ὁποίαν ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος, εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μυριάδων τῶν ὀγδῶν ἀριθμῶν. Ταῦτα δέ, ὧ βασιλεῦ Γέλων, νομίζω ὅτι εἰς μὲν τοὺς μὴ γνωρίζοντας μαθηματικὰ δὲν θὰ γίνουν πιστευτά, εἰς δὲ τοὺς γνωρίζοντας καὶ τοὺς ἐνδιαφερόμεντας νὰ μάθωσι περὶ τῶν ἀποστάσεων καὶ τῶν μεγεθῶν καὶ τῆς γῆς καὶ τοῦ ἡλίου καὶ τῆς σελήνης καὶ ὅλου τοῦ κόσμου θὰ εἶναι πιστευτά ἕνεκα τῆς ἀποδείξεως· δι' αὐτὸ ἐνόμισα, ὅτι δὲν εἶναι ἀνάρμοστον νὰ τὰ ἐρευνήσῃ κανεὶς αὐτά.



ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΚΩΝΟΥ  
ΤΟΜΗΣ (ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ)

Τετραγωνισμός ὀρθογωνίου κώνου τομῆς  
(παραβολῆς)

Ἀρχιμήδης Δοσιθέω εὖ πρώττειν

- Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπι-  
 5 λείπων ἡμῖν ἐν φιλία, τὴν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι  
 καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἶνεκεν  
 ἐλυπήθημεν ὥς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένον καὶ ἐν τοῖς  
 μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριζάμεθα δὲ ἀποστεί-  
 λαι τοι γράψαντες, ὥς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἡμεῖς, γεω-  
 10 μετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον,  
 νῦν δὲ ὑφ' ἡμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὐ-  
 ρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν  
 μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχει-  
 ρησάν τινες γράφειν ὥς δυνατόν ἐδὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ  
 15 κύκλου τμᾶματι τῷ δοθέντι χωρίον εὐρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον,  
 καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ὅλου τοῦ  
 κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνον-  
 τες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν  
 Η 264 πλείστων οὐχ εὐρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθην. τὸ δὲ ὑπ'  
 20 εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα περιεχόμενον  
 οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστά-  
 μεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἡμῶν εὔρηται· δείκνυται γάρ, ὅτι πᾶν  
 τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς  
 ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν

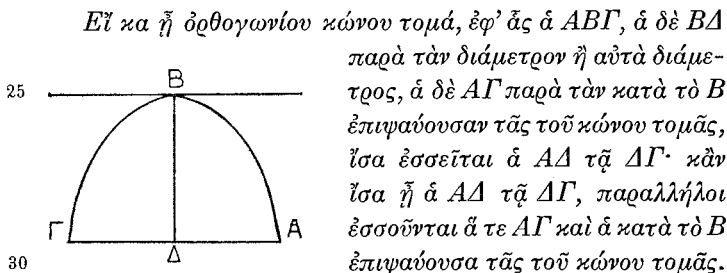
Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς  
( παραβολῆς )

Ἀρχιμήδης Δοσιθέω εὖ πράττειν

Ἀκούσας ὅτι ὁ Κόνων μὲν ἀπέθανε, ὁ ὁποῖος ἦτο πολὺ φίλος μου, σὺ δὲ ὅτι εἶσαι γνωστός του καὶ περὶ τὴν γεωμετρίαν ἱκανὸς διὰ μὲν τὸν ἀποθανόντα ἐλυπήθημεν πολὺ καὶ ὡς φίλον καὶ ὡς θαυμάσιον μαθηματικόν, προήλθομεν δὲ εἰς τὴν ἀπόφασιν νὰ ἀποστείλωμεν εἰς σὲ τὰς ἐρεῦνας μας, ὡς τοῦτο ἐπράττομεν διὰ τὸν Κόνωνα, ἐκ τῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, κάτι τὸ ὁποῖον προηγουμένως δὲν εἶχεν ἐρευνηθῆ, τώρα δὲ εὗρέθη παρ' ἡμῶν, πρῶτον μὲν διὰ μεθόδων τῆς μηχανικῆς, ἔπειτα δὲ ἀπεδείχθη γεωμετρικῶς. Ἐξ ἐκείνων μὲν οἱ ὁποῖοι προηγουμένως ἡσχολήθησαν μὲ τὴν γεωμετρίαν ἐπεχείρησαν μερικοὶ νὰ ἀποδείξωσιν, ὅτι εἶναι δυνατὸν εἰς δοθέντα κύκλον καὶ εἰς δοθὲν τμήμα κύκλου νὰ εὗρεθῇ ἴσον εὐθύγραμμον χωρίον, καὶ κατόπιν προσεπάθησαν νὰ τετραγωνίσωσι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ τμήματος ἑλλείψεως χρησιμοποιοῦντες οὐχὶ εὐκόλως ἀποδεχόμενα λήμματα, ἔνεκα τοῦ ὁποῖου οἱ περισσότεροι δὲν παρεδέχοντο, ὅτι ταῦτα ἐλύθησαν. Διὰ δὲ τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς δὲν γνωρίζομεν νὰ ἡῦρε κανεὶς τὸν τετραγωνισμὸν ἐξ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι πρὸ ἡμῶν ἐπεχείρησαν αὐτό, ὅπερ εὗρέθη τώρα παρ' ἡμῶν· διότι ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ τμήμα

καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμήματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος  
 ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν,  
 ἧ ὑπερέχει τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατόν εἶμεν αὐτὰν  
 ἐαυτῇ συντιθεμένην παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπε-  
 5 ρασμένου χωρίου. κέχρηται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι  
 τῷδε τῷ λήμματι· τοὺς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον  
 ἔχειν ποτ' ἀλλήλους τὰν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τού-  
 τῳ τῷ λήμματι χρωμένοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα  
 λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τὰν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι  
 10 πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐ-  
 τὰν βάσιν ἔχοντος τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς  
 κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν  
 ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λήμ-  
 μά τι λαμβάνοντες ἔγραπον. συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων  
 15 θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμ-  
 ματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοί-  
 αν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. ἀνα-  
 Η 266 γράφαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις ἀποστέλλομες πρῶτον  
 μὲν, ὥς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καί,  
 20 ὥς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ  
 καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

α'



χρησιμοποιουμένου τοῦ ἐξῆς λήμματος εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· ἐκ τῶν ἀνίσων χωρίων ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου εἶναι δυνατὸν λαμβανομένη πολλὰς φορὰς νὰ ὑπερβῇ τὸ δοθὲν πεπερασμένον χωρίον. Χρησιμοποιοῦν δὲ καὶ οἱ προηγούμενοι γεωμέτραι αὐτὸ τὸ λῆμμα· διότι δι' αὐτοῦ ἀπέδειξαν, ὅτι οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, καὶ ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον, ὃν ἔχουσιν οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων, προσέτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὴν πυραμίδα καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι λαμβάνοντες ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον λῆμμα ἀπεδείκνυσαν, ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸν κῶνον καὶ ὕψος ἴσον. Πιστεύεται δέ, ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων δὲν εἶναι κατώτερον ἐκείνων τὰ ὅποια ἔχουσιν ἀποδειχθῆ ἄνευ τοῦ λήμματος τούτου· μοῦ εἶναι δὲ ἀρκετόν, ἐὰν τὰ ὑπ' ἐμοῦ εὑρεθέντα θεωρήματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν βαθμὸν ἀληθείας. Ἀναγράφαντες λοιπὸν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις τὰς ἀποστέλλομεν, πρῶτον μὲν τὰς διὰ τῶν μηχανικῶν μεθόδων, κατόπιν δὲ πῶς ἔγινεν ἡ ἀπόδειξις διὰ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων. Προτάσσονται δὲ καὶ στοιχεῖά τινα περὶ κωνικῶν τομῶν χρήσιμα διὰ τὴν ἀπόδειξιν."Ερρωσο.

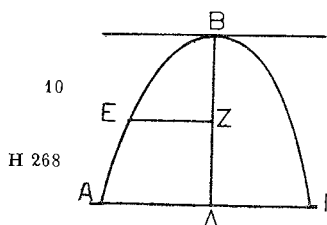
1

Ἐὰν ὑπάρχη παραβολή, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ καμπύλη ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς ἣ αὐτὴ ἡ ἰδία εἶναι διάμετρος, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, θὰ εἶναι ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΔΓ· καὶ ἂν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ ΑΓ καὶ ἡ κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς.

β'

Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ  $\acute{\alpha}$   $AB\Gamma$ , ἡ δὲ  $\acute{\alpha}$  μὲν  $B\Delta$  παρὰ τὰν διάμετρον ἡ αὐτὰ διάμετρος,  $\acute{\alpha}$  δὲ  $AA\Gamma$  παρὰ τὰν κατὰ τὸ  $B$  ἐπιφανύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς,  $\acute{\alpha}$  δὲ  $E\Gamma$  τᾶς  
5 τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιφανύουσα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ἐσσοῦνται αἱ  $B\Delta$ ,  $BE$  ἴσαι.

γ'



Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ  $\acute{\alpha}$   $AB\Gamma$ ,  $\acute{\alpha}$  δὲ  $B\Delta$  παρὰ τὰν διάμετρον ἡ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ  $AA$ ,  $EZ$  παρὰ τὰν κατὰ τὸ  $B$  ἐπιφανύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐσ-  
σεῖται, ὥς  $\acute{\alpha}$   $B\Delta$  ποτὶ τὰν  $BZ$ , δυνά-  
μει  $\acute{\alpha}$   $AA$  ποτὶ τὰν  $EZ$ .

15 ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ'

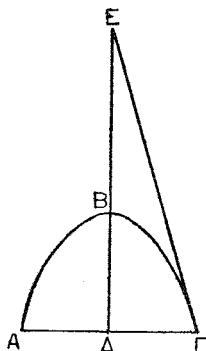
Ἐστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ  $AB\Gamma$ ,  $\acute{\alpha}$  δὲ  $B\Delta$  ἀπὸ μέσας τᾶς  $A\Gamma$  παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω ἡ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ  $\acute{\alpha}$   $B\Gamma$  εὐθεῖα  
20 ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δὴ κα ἀχθῇ τις ἄλλα  $\acute{\alpha}$   $Z\Theta$  παρὰ τὰν  $B\Delta$  τέμνουσα τὰν διὰ τῶν  $B$ ,  $\Gamma$  εὐθεϊαν, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον  $\acute{\alpha}$   $Z\Theta$  ποτὶ τὰν  $\Theta H$ , ὃν  $\acute{\alpha}$   $AA$  ποτὶ τὰν  $\Delta Z$ .

ἄχθω γὰρ διὰ τοῦ  $H$  παρὰ τὰν  $A\Gamma$   $\acute{\alpha}$   $KH$ · ἔστιν ἄρα, ὥς  $\acute{\alpha}$   $B\Delta$  ποτὶ τὰν  $BK$  μάκει, οὕτως  $\acute{\alpha}$   $AA$  ποτὶ τὰν  $KH$  δυνάμει·  
25 ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα, ὥς  $\acute{\alpha}$   $B\Gamma$  ποτὶ τὰν  $BI$  μάκει, οὕτως  $\acute{\alpha}$   $B\Gamma$  ποτὶ τὰν  $B\Theta$  δυνάμει· ἴσαι γὰρ αἱ  $\Delta Z$ ,  $KH$ · ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ  $B\Gamma$ ,  $B\Theta$ ,  $BI$  γραμμαί. ὥστε τὸν αὐτὸν



2

Ἐὰν ὑπάρχη ἡ παραβολὴ  $AB\Gamma$ , εἶναι δὲ ἡ μὲν  $B\Delta$  παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ αὐτὴ ἡ ἰδίᾳ εἶναι διάμετρος, ἡ δὲ  $A\Delta\Gamma$  εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν κατὰ τὸ  $B$  ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, ἡ δὲ  $E\Gamma$  εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ  $\Gamma$ , θὰ εἶναι ἴσαι αἱ  $B\Delta$ ,  $BE$ .



3

Ἐὰν ὑπάρχη ἡ παραβολὴ  $AB\Gamma$ , ἡ δὲ  $B\Delta$  εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ αὐτὴ ἡ ἰδίᾳ εἶναι διάμετρος, καὶ ἀχθῶσιν, αἱ  $A\Delta$ ,  $E\Gamma$  παράλληλοι πρὸς τὴν κατὰ τὸ  $B$  ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, θὰ εἶναι  $B\Delta : B\Gamma = A\Delta^2 : E\Gamma^2$ .

Ταῦτα δὲ ἔχουσιν ἀποδειχθῆ εἰς τὰ Στοιχεῖα τῶν Κωνικῶν.

4

Ἐστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ  $AB\Gamma$ , ἡ δὲ  $B\Delta$  ἐκ τοῦ μέσου τῆς  $A\Gamma$  ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ ἡ ἰδίᾳ νὰ εἶναι διάμετρος, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα  $B\Gamma$  ἄς προεκβληθῇ. Ἐὰν κατόπιν ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ  $Z\Theta$  παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Delta$  τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν  $B$ ,  $\Gamma$ , θὰ εἶναι  $Z\Theta : \Theta H = A\Delta : A\Gamma$ .

Διότι ἄς ἀχθῇ διὰ τοῦ  $H$  ἡ  $KH$  παράλληλος πρὸς τὴν  $A\Gamma$ · εἶναι ἄρα ὡς ἡ  $B\Delta : BK = A\Gamma^2 : KH^2$ · διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 3). Ὡς εἶναι ἄρα, ὡς ἡ  $B\Gamma : BI = B\Gamma^2 : B\Theta^2$ · διότι εἶναι  $A\Gamma = KH$ · εἶναι ἄρα εἰς (συνεχῇ) ἀναλογίαν αἱ γραμμαὶ  $B\Gamma$ ,  $B\Theta$ ,  $BI$

ἔχει λόγον ἅ  $BΓ$  ποτὶ τὰν  $BΘ$ , ὃν ἅ  $ΓΘ$  ποτὶ τὰν  $ΘΙ$ . ἔστιν  
H 270 ἄρα, ὥς ἅ  $ΓΔ$  ποτὶ τὰν  $ΔΖ$ , οὕτως ἅ  $ΘΖ$  ποτὶ τὰν  $ΘΗ$ . τᾷ δὲ  
 $ΔΓ$  ἴσα ἐστὶν ἅ  $ΔΑ$ . ὁμολον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἅ  $ΔΑ$   
ποτὶ τὰν  $ΔΖ$ , ὃν ἅ  $ΖΘ$  ποτὶ τὰν  $ΘΗ$ .

5

3'

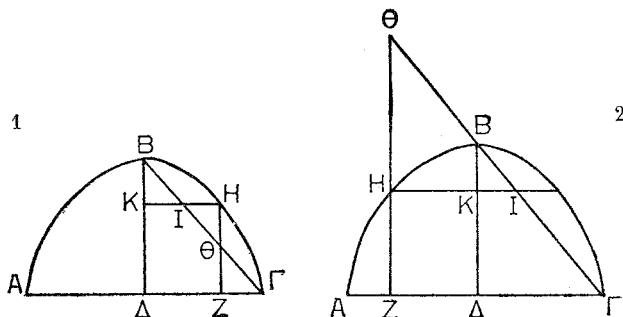
Ἐστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου  
κῶνου τομᾶς τὸ  $AB\Gamma$ , καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ  $A$  παρὰ τὰν διάμε-  
τρον ἃ  $ZA$ , ἀπὸ δὲ τοῦ  $\Gamma$  ἐπιφανύουσα τᾷς τοῦ κῶνου τομᾶς  
κατὰ τὸ  $\Gamma$  ἃ  $\Gamma Z$ . εἰ δὴ τις ἀχθείη ἐν τῷ  $ZA\Gamma$  τριγώνῳ παρὰ  
τὰν  $AZ$ , τὸν αὐτὸν λόγον ἃ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾷς

τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς καὶ ἡ  $AG$   
ὑπὸ τῆς ἀχθείας [ἀνάλογον], ὁμόλο-  
γον δὲ ἔσσεϊται τὸ τμήμα τῆς  $AG$  τὸ  
ποτιτῶ  $A$  τῶ τμήματι τῆς ἀχθείας τῶ  
ποτὶ τῶ  $A$ .

ἄχθω γάρ τις ἡ  $\Delta E$  παρὰ τὰν  $AZ$ ,  
καὶ τεμνέτω πρῶτον ἡ  $\Delta E$  τὰν  $ΑΓ$  δίχα.  
ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὀρθογωνίου κώνου τομὴ ἡ  
 $ΑΒΓ$  καὶ ἀγμένα ἡ  $B\Delta$  παρὰ τὰν διάμε-  
τρον, αἱ δὲ  $\Delta A, \Delta Γ$  ἴσαι, ἐσσεῖται τῇ  $ΑΓ$   
παράλληλος ἡ κατὰ τὸ  $B$  ἐπιφανέουσα

τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν, ἐπεὶ παρὰ τὴν διάμετρόν ἐστιν ἡ  $\Delta E$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  ἡ  $\Gamma E$  ᾄχται ἐπιφανέουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ἡ δὲ  $\Delta \Gamma$  παρόλ-

(Εὐκλ. V, ὁρισμ. 9 ). Ὡστε θὰ εἶναι  $B\Gamma : B\Theta = \Gamma\Theta : \Theta I$ · εἶναι



ἄρα  $\Gamma\Delta : \Delta Z = \Theta Z : \Theta H$ . Εἶναι δὲ  $\Delta\Gamma = \Delta A$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι  $\Delta A : \Delta Z = Z\Theta : \Theta H$ .

5

Ἐστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ  $AB\Gamma$ , καὶ ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ  $A$  παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ  $ZA$ , ἀπὸ δὲ τοῦ  $\Gamma$  ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ  $\Gamma$  ἢ  $\Gamma Z$ . Ἐὰν κατόπιν ἀχθῇ εἰς τὸ τρίγωνον  $ZAG$  παράλληλος πρὸς τὴν  $AZ$ , ἡ ἀχθεῖσα θὰ τμηθῇ ὑπὸ τῆς παραβολῆς εἰς τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ  $AG$  ὑπὸ τῆς ἀχθείσης, θὰ εἶναι δὲ ὁμόλογον τὸ τμῆμα τῆς  $AG$  πρὸς τὸ  $A$ , πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἀχθείσης τὸ πρὸς τὸ  $A$ .

Διότι ἄς ἀχθῇ εὐθεῖα τις ἢ  $\Delta E$  παράλληλος πρὸς τὴν  $AZ$  καὶ ἄς τμήσῃ πρῶτον ἢ  $\Delta E$  τὴν  $AG$  εἰς τὸ μέσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει ἡ παραβολὴ  $AB\Gamma$  καὶ ἔχει ἀχθῇ ἢ  $B\Delta$  παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, εἶναι δὲ  $\Delta\Delta = \Delta\Gamma$ , θὰ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ  $B$  παράλληλος πρὸς τὴν  $AG$  (θ. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ  $\Delta E$  εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  ἔχει ἀχθῇ ἢ  $\Gamma E$  ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ἡ δὲ  $\Delta\Gamma$  εἶναι παράλλη-

ληλος τᾷ κατὰ τὸ  $B$  ἐπιφανούσα, ἴσα ἐστὶν ἡ  $EB$  τᾷ  $BD$ . ὥστε  
 τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ  $AD$  ποτὶ τὰν  $\Delta\Gamma$ , ὃν ἡ  $\Delta B$  ποτὶ τὰν  
 $BE$ . εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἡ ἀχθεῖσα τὰν  $AG$ , δέδεικται· εἰ δὲ  
 Η 272 μὴ, ἄχθω τις ἄλλα ἡ  $KL$  παρὰ τὰν  $AZ$ . δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν  
 5 αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ  $AK$  ποτὶ τὰν  $K\Gamma$ , ὃν ἡ  $K\Theta$  ποτὶ τὰν  $\Theta\Lambda$ .  
 ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἡ  $BE$  τᾷ  $BD$ , ἴσα ἐστὶ καὶ ἡ  $IA$  τᾷ  $KI$ . τὸν  
 αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἡ  $AK$  ποτὶ τὰν  $KI$ , ὃν ἡ  $AG$  ποτὶ τὰν  
 $\Delta A$ . ἔχει δὲ καὶ ἡ  $KI$  ποτὶ τὰν  $K\Theta$  τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ  $\Delta A$   
 ποτὶ τὰν  $AK$ . δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον· ὥστε τὸν αὐτὸν  
 10 λόγον ἔχει ἡ  $K\Theta$  ποτὶ τὰν  $\Theta\Lambda$ , ὃν ἡ  $AK$  ποτὶ τὰν  $K\Gamma$ . δέδει-  
 κται οὖν τὸ προτεθέν.

ς'

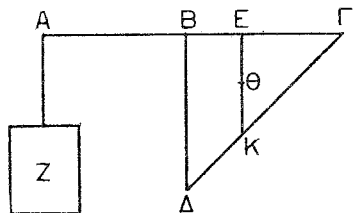
Νοείσθω δὲ τὸ [ὅτε ἐστὶν τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ] προκείμενον  
 [ὀρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὀρίζοντα, καὶ τᾷς  $AB$   
 15 γραμμᾷς [ἔπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ  $\Delta$  κάτω νοείσθω, τὰ  
 δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ  $B\Delta\Gamma$  τρίγωνον ἕστω ὀρθογώνιον  
 ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ  $B$  γωνίαν καὶ τὰν  $B\Gamma$  πλευρὰν ἴσαν  
 τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ [δηλονότι ἴσης οὔσης τᾷς  $AB$  τῇ  $B\Gamma$ ],  
 κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν  $B, \Gamma$  σαμείων, κρεμάσθω δὲ  
 20 καὶ ἄλλο χωρίον τὸ  $Z$  ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  
 $A$ , καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ  $Z$  χωρίον κατὰ τὸ  $A$  κρεμάμενον τῷ  
 $B\Delta\Gamma$  τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται. φανὲ δὴ, τὸ  $Z$   
 χωρίον τοῦ  $B\Delta\Gamma$  τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν.

ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη καὶ ἡ  $AG$   
 25 γραμμὰ παρὰ τὸν ὀρίζοντα, αἱ δὲ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ  $AG$   
 Η 274 ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὀρίζοντα καθέτοι ἐσσοῦνται ἐπὶ  
 τὸν ὀρίζοντα. τετμάσθω δὴ ἡ  $B\Gamma$  γραμμὰ κατὰ τὸ  $E$  οὕτως,  
 ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν  $\Gamma E$  τᾷς  $EB$ , καὶ ἄχθω παρὰ τὰν  
 $\Delta B$  ἡ  $KE$  καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Theta$  τοῦ δὴ  $B\Delta\Gamma$  τριγώνου

λος πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην, εἶναι  $EB = BD$  (θ. 2). ὥστε  $AD : \Delta\Gamma = \Delta B : BE$ . Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ἀχθεῖσα τέμνη εἰς τὸ μέσον τὴν  $AG$ , ἡ πρότασις ἀπεδείχθη· ἐὰν δὲ δὲν τὴν τέμνη εἰς τὸ μέσον ἀς ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ  $KL$  παράλληλος πρὸς τὴν  $AZ$ , πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι  $AK : K\Gamma = K\Theta : \Theta\Lambda$ . Διότι ἐπειδὴ εἶναι ἡ  $BE = BD$ , εἶναι καὶ ἡ  $IA = KI$ . εἶναι ἄρα ὡς ἡ  $AK : KI = AG : \Delta A$ . Εἶναι δὲ καὶ  $KI : K\Theta = \Delta A : AK$ , διότι τοῦτο ἀπεδείχθη προηγουμένως· ὥστε θὰ εἶναι  $K\Theta : \Theta\Lambda = AK : K\Gamma$ . Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

6

\* Ἀς νοηθῇ τὸ παρατιθέμενον σχῆμα εὐρισκόμενον ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας  $AB$ , καὶ κάτω μὲν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἀς νοηθῇ τὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ  $\Delta$ , ἄνω δὲ τὸ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος, τὸ δὲ τρίγωνον  $B\Delta\Gamma$  ἔστω ὀρθογώνιον ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν πρὸς τὸ  $B$  καὶ τὴν πλευρὰν  $B\Gamma$  ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ [ δηλαδὴ ἡ  $AB = B\Gamma$  ], ἀς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν σημείων  $B, \Gamma$ , ἀς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ  $Z$  ἐκ τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $A$ , καὶ ἀς ἰσορροπῇ τὸ χωρίον  $Z$  ἐξηρητημένον κατὰ τὸ  $A$  τὸ τρίγωνον  $B\Delta\Gamma$ , ὅπως εὐρίσκεται τώρα. Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον  $Z$  εἶναι τὸ ἐν τρίτον τοῦ τριγώνου  $B\Delta\Gamma$ .



Διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ, θὰ εἶναι καὶ ἡ γραμμὴ  $AG$  ὀριζοντία αἱ δὲ ἀγόμεναι κάθετοι πρὸς τὴν  $AG$  εὐρισκόμεναι εἰς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Ἀς τμηθῇ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα  $B\Gamma$  κατὰ τὸ  $E$  ὥστε νὰ εἶναι  $\Gamma E = 2 EB$ , καὶ ἀς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν  $\Delta B$  ἡ  $KE$  καὶ ἀς τμηθῇ εἰς

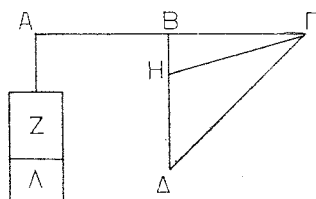
νου κέντρον βάρεός ἐστι τὸ  $\Theta$  σαμεῖον· δέδεικται γὰρ τοῦτο  
ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. εἴ κα οὖν τοῦ  $B\Delta\Gamma$  τριγώνου ἃ μὲν κατὰ  
τὰ  $B, \Gamma$  κρέμασις λυθῇ, κατὰ δὲ τὸ  $E$  κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρί-  
γωνον, ὡς νῦν ἔχει· ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων, ἐξ οὗ σα-  
5 μείον κα κατασταθῇ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἴμεν τό τε  
σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κρεμα-  
μένου· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἔξει κατά-  
στασιν τὸ  $B\Gamma\Delta$  τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως  
τὸ  $Z$  χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεύονται τὸ μὲν  $Z$  κρεμάμενον κατὰ  
10 τὸ  $A$ , τὸ δὲ  $B\Delta\Gamma$  κατὰ τὸ  $E$ , δηλόν, ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκε-  
σιν, καὶ ἐστίν, ὡς ἃ  $AB$  ποτὶ τὰν  $BE$ , οὕτως τὸ  $B\Delta\Gamma$  τρίγω-  
νον ποτὶ τὸ  $Z$  χωρίον. τριπλασία δὲ ἃ  $AB$  τᾶς  $BE$ · καὶ τὸ  $B\Delta\Gamma$   
ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ  $Z$  χωρίου.

φανερὸν δὲ [δτι] καί, εἴ κα τριπλάσιον ἤ τὸ  $B\Delta\Gamma$  τρίγω-  
15 νον τοῦ  $Z$  χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ'

H 276

25



Ἐστω πάλιν ζυγὸς ἃ  $ΑΓ$  γραμμά, μέσον δὲ αὐτᾶς ἔστω τὸ  
 $B$ , καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ  $B$  [τὸ  $\Gamma\Delta H$  τρίγωνον], τὸ δὲ  $\Gamma\Delta H$   
ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν  $\Delta H$ , ὕψος δὲ  
τὰν ἴσαν ἑοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ  
ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ  $\Delta\Gamma H$   
25 τρίγωνον ἐκ τῶν  $B, \Gamma$  σαμείων,  
τὸ δὲ  $Z$  χωρίον κρεμάμενον  
κατὰ τὸ  $A$  ἰσορροπὲς ἔστω τῷ  
 $\Gamma\Delta H$  τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι,  
ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ δει-  
χθήσεται τὸ  $Z$  χωρίον τρίτον μέρος τοῦ  $\Gamma\Delta H$  τριγώνου.

κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ  $A$  τρίτον μέρος  
ἔδον τοῦ  $B\Gamma H$  τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ  $B\Delta\Gamma$  τρίγωνον

τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ· εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΒΔΓ τὸ σημεῖον Θ κέντρον βάρους· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὰ Μηχανικά (Ἐπιπέδων Ἱσορ. I, 14). Ἐὰν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ παύσῃ νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, ἐξαρτηθῇ δὲ κατὰ τὸ Ε, θὰ μείνῃ ὅπως εἶναι τώρα· διότι ἕκαστον ἐκ τῶν ἐξηρητημένων παραμένει εἰς τοιαύτην θέσιν ἐκ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως, ὥστε τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐξηρητημένου νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ θὰ διατηρήσῃ τὴν κατάστασίν του ἔναντι τοῦ ζυγοῦ, ὁμοίως θὰ ἰσοροπήσῃ τὸ χωρίον Ζ. Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχει ἰσοροπία, ἐν ᾧ τὸ μὲν Ζ εἶναι ἐξηρητημένον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, εἶναι φανερόν, ὅτι ταῦτα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη, καὶ εἶναι  $AB : BE = \text{τρίγωνον } ΒΔΓ : \text{χωρίον } Ζ$  (Ἐπιπ. Ἱσορ. I, 6, 7). Εἶναι δὲ ἢ  $AB = 3 BE$ · καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τοῦ χωρίου Ζ.

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τοῦ χωρίου Ζ θὰ ἰσοροπήσωσι.

7

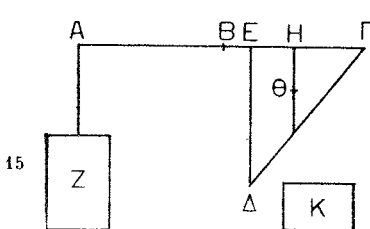
Ἐστω πάλιν ζυγὸς ἢ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτῆς ἔστω τὸ Β, καὶ ἄς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Β [ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ ], ἔστω δὲ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ ἀμβλυγώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην οὔσαν πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ζυγοῦ, καὶ ἄς ἐξαρτηθῇ τὸ τρίγωνον ΔΓΗ ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, τὸ δὲ χωρίον Ζ ἐξαρτηθὲν κατὰ τὸ Α ἔστω ὅτι ἰσοροπεῖ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ, εὐρισκόμενον ὅπως εἶναι τώρα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ χωρίον Ζ εἶναι τὸ ἐν τρίτον τοῦ τριγώνου ΓΔΗ.

Διότι ἄς ἐξαρτηθῇ καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α ὃν ἐν τρίτον τοῦ τριγώνου ΒΓΗ· θὰ ἰσοροπήσῃ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ πρὸς τὸ

τῷ  $Z\Lambda$ . ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  $B\Gamma H$  τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ  $\Lambda$ , τὸ δὲ  $B\Gamma\Delta$  τῷ  $Z\Lambda$ , καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ  $B\Gamma\Delta$  τὸ  $Z\Lambda$ , φανερόν, ὅτι καὶ τὸ  $\Gamma\Delta H$  τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ  $Z$ .

ἢ

- 5 Ἔστω ζυγὸς ὁ  $AB\Gamma$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $B$ , καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ  $B$ , τὸ δὲ  $\Gamma\Delta E$  τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ  $E$  γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ  $\Gamma$ ,  $E$ , τὸ δὲ  $Z$  χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ  $A$  καὶ ἰσορροπεῖται τῷ  $\Gamma\Delta E$  οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ  $AB$  ποτὶ τὰν  $BE$ , τοῦτον ἔχέτω τὸ  $\Gamma\Delta E$  τρίγωνον ποτὶ τὸ  $K$  χωρίον.



φαμί δὴ, τὸ  $Z$  χωρίον τοῦ μὲν  $\Gamma\Delta E$  τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ  $K$  μείζον.

λελάφθω γὰρ τοῦ  $\Delta E\Gamma$  τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους καὶ ἔστω τὸ  $\Theta$ , καὶ ἡ  $\Theta H$  ἄχθω παρὰ τὰν  $\Delta E$ . ἐπεὶ οὖν ἰσορ-

- 278 ροπεῖ τὸ  $\Gamma\Delta E$  τρίγωνον τῷ  $Z$  χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ  $\Gamma\Delta E$  χωρίον ποτὶ τὸ  $Z$ , ὃν ἡ  $AB$  ποτὶ τὰν  $BH$ . ὥστε ἔλασ-  
20 σὸν ἐστὶ τὸ  $Z$  τοῦ  $\Gamma\Delta E$ . καὶ ἐπεὶ τὸ  $\Gamma\Delta E$  τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ  $Z$  τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἡ  $BA$  ποτὶ τὰν  $BH$ , ποτὶ δὲ τὸ  $K$ , ὃν ἡ  $BA$  ποτὶ τὰν  $BE$ , ὁῶν, ὥς μείζονα λόγον ἔχει τὸ  $\Gamma\Delta E$  τρίγωνον ποτὶ τὸ  $K$  ἢ ποτὶ τὸ  $Z$ . ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ  $Z$  τοῦ  $K$ .

25

θ'

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν  $A\Gamma$  ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $B$ , τὸ δὲ  $\Gamma\Delta K$  τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν  $\Delta K$ , ὕψος δὲ τὰν  $E\Gamma$ , καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ  $\Gamma$ ,  $E$ , τὸ δὲ  $Z$  χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ  $A$  καὶ ἰσορροπεῖται τῷ  $\Delta\Gamma K$



$Z + \Lambda$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον  $B\Gamma\eta$  ἰσορροπεῖ πρὸς τὸ  $\Lambda$ , τὸ δὲ τρίγωνον  $B\Gamma\Delta$  πρὸς τὸ  $Z + \Lambda$ , καὶ τὸ  $Z + \Lambda$  εἶναι τὸ ἐν τρίτον τοῦ  $B\Gamma\Delta$ , εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον  $\Gamma\Delta\eta$  εἶναι τριπλάσιον τοῦ  $Z$ .

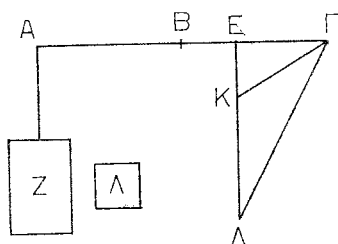
8

Ἐστω ὁ ζυγὸς  $AB\Gamma$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $B$ , καὶ ἄς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ  $B$ , τὸ δὲ τρίγωνον  $\Gamma\Delta\epsilon$  ἔστω ὀρθογώνιον ἔχον ὀρθὴν τὴν γωνίαν  $\epsilon$ , καὶ ἄς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα  $\Gamma, \epsilon$ , τὸ δὲ χωρίον  $Z$  ἄς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ  $A$  καὶ ἄς ἰσορροπήσῃ τὸ  $\Gamma\Delta\epsilon$  εὐρισκόμενον, ὅπως εἶναι τώρα, νὰ εἶναι δὲ ὡς ἡ  $AB : BE = \text{τρίγωνον } \Gamma\Delta\epsilon : \text{χωρίον } K$ . Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον  $Z$  τοῦ μὲν τριγώνου  $\Gamma\Delta\epsilon$  εἶναι μικρότερον, τοῦ δὲ  $K$  εἶναι μεγαλύτερον.

Διότι ἄς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου  $\Delta\epsilon\Gamma$  καὶ ἔστω τὸ  $\Theta$ , καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ  $\Theta\eta$  παράλληλος πρὸς τὴν  $\Delta\epsilon$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $\Gamma\Delta\epsilon$  ἰσορροπεῖ τὸ χωρίον  $Z$ , θὰ εἶναι  $\Gamma\Delta\epsilon : Z = AB : BH$  (Ἐπιπ. Ἱσορ. I, 6, 7). ὥστε τὸ  $Z$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $\Gamma\Delta\epsilon$ . Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον  $\Gamma\Delta\epsilon : Z = BA : BH$  καὶ  $\Gamma\Delta\epsilon : K = BA : BE$  (ἐξ ὑποθέσεως), εἶναι φανερόν, ὅτι  $\Gamma\Delta\epsilon : K > \Gamma\Delta\epsilon : Z$ . ὥστε  $Z > K$  (Εὐκλ. V, 10).

9

Ἐστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ  $A\Gamma$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $B$ , τὸ δὲ τρίγωνον  $\Gamma\Delta K$  νὰ εἶναι ἀμβλυγώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὴν  $\Delta K$ , ὕψος δὲ τὴν  $\epsilon\Gamma$ , καὶ ἄς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα  $\Gamma, \epsilon$ , τὸ δὲ χωρίον  $Z$  ἄς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ  $A$  καὶ ἄς ἰσορροπήσῃ



τριγώνω οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ  $AB$  ποτὶ τὰν  $BE$ , τοῦτον ἔχέτω τὸ  $\Gamma\Delta K$  τρίγωνον ποτὶ τὸ  $\Lambda$ . φαμί δὴ, τὸ  $Z$  τοῦ μὲν  $\Lambda$  μείζον εἶμεν, τοῦ δὲ  $\Delta\Gamma K$  ἔλασσον. δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

5

ι'

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν  $AB\Gamma$  ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ  $B$ , τὸ δὲ  $B\Delta H K$  τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς  $B, H$  σαμείους γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ  $K\Lambda$  πλευρὰν ἐπὶ τὸ  $\Gamma$  νεύουσαν, καὶ  
 Η 280 ὃν ἔχει λόγον ἡ  $AB$  ποτὶ τὰν  $BH$ , τοῦτον ἔχέτω τὸ  $B\Delta K H$   
 10 τραπέζιον ποτὶ τὸ  $\Lambda$ , κρεμάσθω δὲ τὸ  $B\Delta H K$  τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ  $B, H$  σαμεῖα, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ  $Z$  χωρίον κατὰ τὸ  $A$  καὶ ἰσορροπεῖτω τῷ  $B\Delta K H$  τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν ὑπόκειται. φαμί, τὸ  $Z$  χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ  $\Lambda$ .  
 τετμάσθω γὰρ ἡ  $A\Gamma$  κατὰ τὸ  $E$  οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον  
 15 ἡ διπλασία τὰς  $\Delta B$  καὶ ἡ  $K H$  ποτὶ τὰν διπλασίαν τὰς  $K H$  καὶ τὰν  $B\Delta$ , τοῦτον ἔχειν τὰν  $E H$  ποτὶ τὰν  $B E$ , καὶ διὰ τοῦ  $E$  παρὰ τὰν  $B\Delta$  ἀχθεῖσα ἡ  $E N$  τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Theta$ . τοῦ δὴ  $B\Delta H K$  τραπέζιου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ . δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. ἦν οὖν τὸ  $B\Delta H K$  τραπέζιον  
 20 κατὰ μὲν τὸ  $E$  κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν  $B, H$  σαμείων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατὰστασιν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ ἰσορροπεῖ τῷ  $Z$  χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ  $B\Delta H K$  τραπέζιον κατὰ τὸ  $E$  κρεμάμενον τῷ  $Z$  χωρίῳ κατὰ τὸ  $A$  κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται, ὥς ἡ  $AB$  ποτὶ τὰν  $B E$ , τὸ  $B\Delta H K$  τραπέ-  
 25 ζιον ποτὶ τὸ  $Z$  χωρίον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ  $B\Delta H K$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $Z$  ἢ περ ποτὶ τὸ  $\Lambda$ , ἐπεὶ καὶ ἡ  $AB$  ποτὶ τὰν  $B E$  μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ποτὶ τὰν  $B H$ . ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ  $Z$  τοῦ  $\Lambda$ .

πρὸς τὸ τρίγωνον  $\Delta\Gamma\text{Κ}$  τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι, ὅπως εὐρίσκεται τώρα, καὶ νὰ εἶναι  $AB : BE = \text{τρίγωνον } \Gamma\Delta\text{Κ} : \Lambda$ . Λέγω, ὅτι  $\Lambda < Z < \text{τρίγ. } \Delta\Gamma\text{Κ}$ .

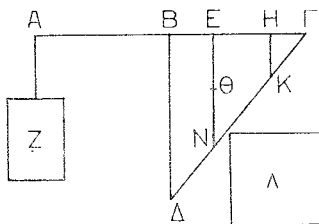
Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὅπως τὸ προηγούμενον.

10

Ἐστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ  $AB\Gamma$  καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ  $B$ , τὸ δὲ τραπέζιον  $B\Delta\text{ΗΚ}$  ἔχον ὀρθὰς μὲν τὰς παρὰ τὰ σημεῖα  $B, \text{Η}$  γωνίας, τὴν δὲ πλευρὰν  $\text{Κ}\Delta$  διευθυνομένην πρὸς τὸ  $\Gamma$ , καὶ νὰ εἶναι  $AB : BH = \text{τραπέζιον } B\Delta\text{ΚΗ} : \Lambda$ , ἃς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον  $B\Delta\text{ΗΚ}$  ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα  $B, \text{Η}$ , ἃς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ τὸ χωρίον  $Z$  κατὰ τὸ  $A$  καὶ ἃς ἰσορροπῇ πρὸς τὸ τραπέζιον  $B\Delta\text{ΚΗ}$  ἔχον, ὡς τώρα εὐρίσκεται. Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον  $Z$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $\Lambda$ .

Διότι ἃς τμηθῇ ἡ  $A\Gamma$  κατὰ τὸ  $E$  οὕτως, ὥστε  $2\Delta B + \text{ΚΗ} : 2\text{ΚΗ} + B\Delta = E\text{Η} : BE$  (Εὐκλ. VI, 10), καὶ διὰ τοῦ  $E$  ἀφοῦ ἀ-

χθῇ παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Delta$  ἡ  $EN$  ἃς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον διὰ τοῦ  $\Theta$  τοῦ τραπέζιου λοιπὸν  $B\Delta\text{ΗΚ}$  κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $\Theta$ . διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Μηχανικά (Ἐπιπ. Ἰσορ. I, 15). Ἐὰν λοιπὸν τὸ τραπέζιον  $B\Delta\text{ΗΚ}$  ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ  $E$ , λυθῇ δὲ ἀπὸ τῶν σημείων  $B, \text{Η}$ , θὰ μείνῃ εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν διὰ τοὺς αὐ-



τούς, ὡς καὶ πρότερον ἐκτεθέντας λόγους καὶ θὰ ἰσορροπήσῃ πρὸς τὸ χωρίον  $Z$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον  $B\Delta\text{ΗΚ}$  ἰσορροπεῖ ἐξαρτώμενον κατὰ τὸ  $E$ , πρὸς τὸ χωρίον  $Z$  ἐξαρτώμενον κατὰ τὸ  $A$ , θὰ εἶναι  $AB : BE = \text{τραπέζιον } B\Delta\text{ΗΚ} : \text{χωρίον } Z$ . εἶναι ἄρα  $\text{τραπέζιον } B\Delta\text{ΗΚ} : Z > \text{τραπ. } B\Delta\text{ΗΚ} : \Lambda$ , ἐπειδὴ καὶ  $AB : BE > AB : BH$  (Εὐκλ. V, 8)· ὥστε εἶναι  $Z < \Lambda$  (Εὐκλ. V, 10).

ια'

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν  $ΑΓ$  ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ  $B$ ,  
H 282 τὸ δὲ  $ΚΔΤΡ$  τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν  $ΚΔ$ ,  $ΤΡ$  πλευρὰς ἔχον  
ἐπὶ τὸ  $Γ$  γενούσας, τὰς δὲ  $ΔΡ$ ,  $ΚΤ$  καθέτους ἐπὶ τὰν  $ΒΓ$ , καὶ ἃ  
5  $ΔΡ$  ἐπὶ τὸ  $B$  πιπτέτω, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἃ  $ΑΒ$  ποτὶ τὰν  $ΒΗ$ ,  
τοῦτον ἔχέτω τὸ  $ΔΚΤΡ$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $Α$ , τὸ δὲ  $ΔΚΤΡ$   
τραπέζιον κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ  $B$ ,  $H$  καὶ τὸ  $Z$   
κατὰ τὸ  $A$ , καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ  $Z$  τῷ  $ΔΚΡΤ$  τραπεζίῳ οὕτως  
ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται  
10 ἔλασσον τὸ  $Z$  χωρίον τοῦ  $Α$ .

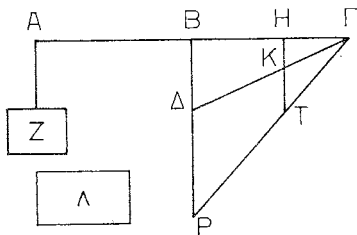
ιβ'

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν  $ΑΓ$  ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $B$ , τὸ  
δὲ  $ΔΕΚΗ$  τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς  $E$ ,  $H$  σαμείοις  
γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ  $ΚΔ$ ,  $ΕΗ$  γραμμὰς ποτὶ τὸ  $Γ$  γενού-  
15 σας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἃ  $ΑΒ$  ποτὶ τὰν  $ΒΗ$ , τοῦτον ἔχέτω  
τὸ  $ΔΚΕΗ$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $M$ , ὃν δὲ λόγον ἔχει ἃ  $ΑΒ$  ποτὶ  
τὰν  $ΒΕ$ , τοῦτον τὸν λόγον ἔχέτω τὸ  $ΔΚΕΗ$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  
 $Α$ , κρεμάσθω δὲ τὸ  $ΔΚΕΗ$  τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ  
 $E$ ,  $H$ , τὸ δὲ  $Z$  χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ  $A$ , καὶ ἰσορροπεῖτω  
20 τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν ὑπόκειται. φανὶ δὴ, τὸ  $Z$   
τοῦ μὲν  $Α$  μείζον εἶμεν, τοῦ δὲ  $M$  ἔλασσον.

ἔλαβον γὰρ τοῦ  $ΔΚΕΗ$  τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους,  
ἔστω δὲ τὸ  $Θ$ . λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον· καὶ ἄγω  
H 284 τὰν  $ΘΙ$  παρὰ τὰν  $ΔΕ$ . ἂν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμα-  
25 σθῇ κατὰ τὸ  $I$ , ἀπὸ δὲ τῶν  $E$ ,  $H$  λυθῇ, μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον  
κατάστασιν καὶ ἰσορροπήσει τῷ  $Z$  διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον.  
ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμώμενον κατὰ τὸ  $I$  τῷ  $Z$

11

Ἐστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ ΑΓ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΚΔΤΡ ἔστω ἔχον τὰς μὲν πλευράς ΚΔ, ΤΡ διευθυνομένας πρὸς τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΡ, ΚΤ καθέτους πλευράς ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ΔΡ ἄς πίπτῃ εἰς τὸ Β, καὶ ἄς εἶναι  $AB : BH = \text{τραπέζιον } \Delta KTP : \Lambda$ , τὸ δὲ τραπέζιον ΔΚΤΡ ἄς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ εἰς τὴν κατάστασιν αὐτὴν, ὅπως εἶναι τώρα, ἄς ἰσοροπῇ τὸ Ζ πρὸς τὸ τραπέζιον ΔΚΡΤ. Ἀποδεικνύεται, ὅπως προηγουμένως, ὅτι τὸ χωρίον  $Z < \Lambda$ .



12

Ἐστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ ΑΓ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΔΕΚΗ ἔστω ἔχον ὁρθὰς μὲν γωνίας τὰς πρὸς τὰ σημεῖα Ε, Η, τὰς δὲ πλευράς ΚΔ, ΕΗ διευθυνομένας πρὸς τὸ Γ, καὶ ἄς εἶναι  $AB : BH = \text{τραπέζιον } \Delta KEH : M$ , καὶ  $AB : BE = \text{τραπέζιον } \Delta KEH : \Lambda$ , ἄς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ΔΚΕΗ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Η, τὸ δὲ χωρίον Ζ ἄς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Α, καὶ ἄς ἰσοροπῇ πρὸς τὸ τραπέζιον εὐρισκόμενον εἰς αὐτὴν τὴν κατάστασιν, ὅπως εἶναι τώρα. Λέγω, ὅτι  $M > Z > \Lambda$ .

Διότι ἄς λάβω τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τραπέζιου ΔΚΕΗ καὶ ἔστω τὸ Θ· λαμβάνεται δὲ τοῦτο ὁμοίως, ὡς προηγουμένως· καὶ φέρω τὴν ΘΙ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ. Ἄν λοιπὸν τὸ τραπέζιον ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Ι, λυθῇ δὲ ἀπὸ τῶν Ε, Η, θὰ μείνῃ εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν καὶ θὰ ἰσοροπήσῃ πρὸς τὸ Ζ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τραπέζιον ἐξαρτώμενον κατὰ τὸ Ι





$ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΕ$ , ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὐται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεξεύχθωσαν ἐπὶ τὸ  $Γ$  καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαιμί δὴ τὸ τρίγωνον τὸ  $ΒΔΓ$  τῶν μὲν τραπεζίων τῶν  $ΚΕ, ΑΖ, ΜΗ, ΝΙ$  καὶ τοῦ  $ΞΙΓ$  τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ  
 5 τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπεζίων τῶν  $ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ$  καὶ τοῦ  $ΙΟΓ$  τριγώνου μείζον [ἐστίν] ἢ τριπλάσιον.

διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ  $ΑΒΓ$ , καὶ ἀπολελάφθω ἡ  $ΑΒ$  ἴσα τῇ  $ΒΓ$ , καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ  $ΑΓ$ . μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ  $Β$ · καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ  $Β$ , κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ  $ΒΔΓ$  ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ  $Β, Γ$ , ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ  $Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ$  χωρία κατὰ τὸ  $Α$ , καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ  
 10 μὲν  $Ρ$  χωρίον τῷ  $ΔΕ$  τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ  $Χ$  τῷ  $ΖΣ$  τραπεζίῳ, τὸ δὲ  $Ψ$  τῷ  $ΤΗ$ , τὸ δὲ  $Ω$  τῷ  $ΥΙ$ , τὸ δὲ  $Δ$  τῷ  $ΞΙΓ$  τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ  $ΒΔΓ$  τριγώνον τοῦ  $ΡΧΨΩΔ$  χωρίου. καὶ ἐπεὶ  
 15 ἐστὶν τμήμα τὸ  $ΒΓΘ$ , ὃ περιέχεται ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ  $Β$  παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται ἡ  $ΒΔ$ , ἀπὸ δὲ τοῦ  $Γ$  ἡ  $ΓΔ$  ἐπιφανύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ  $Γ$ , ἄκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον  
 20 ἡ  $ΣΕ$ , τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ  $ΒΓ$  ποτὶ τὰν  $ΒΕ$ , ὃν ἡ  $ΣΕ$  ποτὶ τὰν  $ΕΦ$ · ὥστε καὶ ἡ  $ΒΑ$  ποτὶ τὰν  $ΒΕ$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ  $ΔΕ$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $ΚΕ$ . ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἡ  $ΑΒ$   
 Η 288 ποτὶ τὰν  $ΒΖ$  τὸν αὐτὸν ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ  $ΣΖ$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $ΑΖ$ , ποτὶ δὲ τὰν  $ΒΗ$ , ὃν τὸ  $ΤΗ$  ποτὶ τὸ  
 25  $ΜΗ$ , ποτὶ δὲ τὰν  $ΒΙ$ , ὃν τὸ  $ΥΙ$  ποτὶ τὸ  $ΝΙ$ . ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τραπέζιον τὸ  $ΔΕ$  τὰς μὲν ποτὶ τοῖς  $Β, Ε$  σαμείους γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ  $Γ$  νευούσας, ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ  $Ρ$  κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $Α$  οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὥς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὥς ἡ  $ΒΑ$  ποτὶ



ΙΞ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων, κατὰ τὰ ὁποῖα τέμνουσιν αὗται τὴν παραβολήν, ἃς ἀχθῶσιν αἱ ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖαι καὶ ἃς προεκβληθῶσι. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ τριπλασίου τοῦ ἄθροίσματος τῶν τραπεζίων ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ σὺν τὸ τρίγωνον ΞΙΓ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ τριπλασίου τοῦ ἄθροίσματος τῶν τραπεζίων ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ, σὺν τὸ τρίγωνον ΙΟΓ.

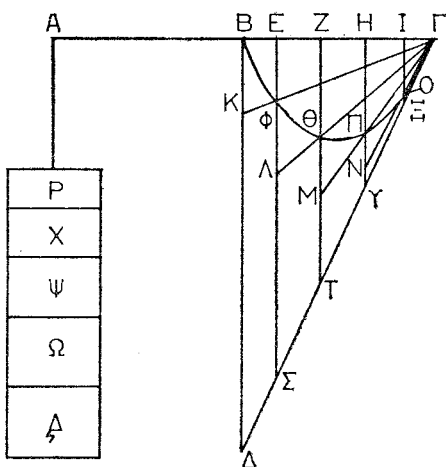
Διότι ἃς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ, καὶ ἃς ληφθῇ ΑΒ = ΒΓ, καὶ ἃς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΑΓ· μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β· καὶ ἃς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ Β, ἃς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐκ τοῦ ἄλλου δὲ μέρους τοῦ ζυγοῦ ἃς ἐξαρτηθῶσι τὰ χωρία Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ κατὰ τὸ Α, καὶ ἃς ἰσορροπήσῃ τὸ μὲν χωρίον Ρ πρὸς τὸ τραπέζιον ΔΕ ὅπως εὐρίσκεται, τὸ δὲ Χ πρὸς τὸ τραπέζιον ΖΣ, τὸ δὲ Ψ πρὸς τὸ ΤΗ, τὸ δὲ Ω πρὸς τὸ ΥΙ, τὸ δὲ Δ πρὸς τὸ τρίγωνον ΞΙΓ· θὰ ἰσορροπήσῃ δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων· ὥστε θὰ εἶναι τριπλάσιον τὸ τρίγωνον ΒΔΓ τοῦ χωρίου  $P + X + \Psi + \Omega + \Delta$  (θ. 6). Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει τμῆμα τὸ ΒΓΘ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, ἔχει δὲ ἀχθῇ καὶ ἄλλη παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΣΕ, θὰ εἶναι  $ΒΓ : ΒΕ = ΣΕ : ΕΦ$  (θ. 5)· ὥστε εἶναι καὶ  $ΒΑ : ΒΕ = \text{τραπέζιον } ΔΕ : \text{τραπέζιον } ΚΕ$ . Καθ' ὁμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι  $ΑΒ : ΒΖ = \text{τραπέζιον } ΣΖ : \text{τραπέζιον } ΛΖ$ , καὶ  $ΑΒ : ΒΗ = \text{τραπέζιον } ΤΗ : \text{τραπέζιον } ΜΗ$ , καὶ  $ΑΒ : ΒΙ = \text{τραπ. } ΥΙ : \text{τραπ. } ΝΙ$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει τὸ τραπέζιον ΔΕ ἔχον τὰς μὲν πρὸς τὰ σημεῖα Β, Ε γωνίας ὀρθὰς τὰς δὲ πλευράς συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ πρὸς αὐτὸ χωρίον τι τὸ Ρ ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α εὐρισκομένου τοῦ τραπεζίου ὅπως εἶναι τώρα, καὶ εἶναι  $ΒΑ : ΒΕ = \text{τραπέζιον } ΔΕ : \text{τραπ. } ΚΕ$ , εἰ-

τὰν  $BE$ , οὕτως τὸ  $\Delta E$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $KE$ , μείζον ἄρα ἐστὶν  
τὸ  $KE$  χωρίον τοῦ  $P$  χωρίου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ  
καὶ τὸ  $Z\Sigma$  τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς  $Z$ ,  $E$  γωνίας ὀρθὰς  
ἔχον, τὰν δὲ  $\Sigma T$  νεύουσιν ἐπὶ τὸ  $\Gamma$ , ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον  
5 τὸ  $X$  ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμáμενον κατὰ τὸ  $A$  οὕτως ἔχοντος τοῦ  
τραπέζιου, ὥς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὥς μὲν ἂ  $AB$  ποτὶ τὰν  
 $BE$ , οὕτως τὸ  $Z\Sigma$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $Z\Phi$ , ὥς δὲ ἂ  $AB$  ποτὶ  
τὰν  $BZ$ , οὕτως τὸ  $Z\Sigma$  τραπέζιον ποτὶ τὸ  $AZ$ · εἴη οὖν καὶ τὸ  
 $X$  χωρίον τοῦ μὲν  $AZ$  τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ  $Z\Phi$  μείζον·  
10 δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  $\Psi$  χωρίον τοῦ  
μὲν  $MH$  τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ  $\Theta H$  μείζον, καὶ τὸ  $\Omega$  χω-  
H.290 ρίον τοῦ μὲν  $NOIH$  τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ  $III$  μείζον, ὁ-  
μοίως δὲ καὶ τὸ  $\Delta$  χωρίον τοῦ μὲν  $\Xi I \Gamma$  τριγώνου ἔλασσον, τοῦ  
δὲ  $\Gamma I O$  μείζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  $KE$  τραπέζιον μείζόν ἐστι τοῦ  
15  $P$  χωρίου, τὸ δὲ  $AZ$  τοῦ  $X$ , τὸ δὲ  $MH$  τοῦ  $\Psi$ , τὸ δὲ  $NI$  τοῦ  $\Omega$ ,  
τὸ δὲ  $\Xi I \Gamma$  τρίγωνον τοῦ  $\Delta$ , φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα  
χωρία μείζονά ἐστι τοῦ  $PX\Psi\Omega\Delta$  χωρίου. ἔστιν δὲ τὸ  $PX\Psi$   
 $\Omega\Delta$  τρίτον μέρος τοῦ  $B\Gamma\Delta$  τριγώνου· δηλὸν ἄρα, ὅτι τὸ  $B\Gamma\Delta$   
20 τραπέζιον καὶ τοῦ  $\Xi I \Gamma$  τριγώνου. πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν  $Z\Phi$  τρα-  
πέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ  $X$  χωρίου, τὸ δὲ  $\Theta H$  τοῦ  $\Psi$ , τὸ δὲ  $III$   
τοῦ  $\Omega$ , τὸ δὲ  $I O \Gamma$  τρίγωνον τοῦ  $\Delta$ , φανερόν, ὅτι καὶ πάντα  
τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ  $\Delta\Omega\Psi X$  χωρίου· φανερόν οὖν,  
ὅτι καὶ τὸ  $B\Delta\Gamma$  τρίγωνον μείζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν  $\Phi Z$ ,  
25  $\Theta H$ ,  $III$  τραπέζιων καὶ τοῦ  $I \Gamma O$  τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τρι-  
πλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

ναι ἄρα χωρίον  $KE > \text{χωρίου } P$ · διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 10). Πάλιν δὲ καὶ τὸ τραπέζιον  $Z\Sigma$  ἔχον τὰς μὲν πρὸς τὰ σημεῖα  $Z$ ,  $E$  γωνίας ὀρθάς, τὴν δὲ  $\Sigma T$  συγκλίνουσιν πρὸς τὸ  $\Gamma$ , ἰσορροπεῖ δὲ πρὸς αὐτὸ τὸ χωρίον  $X$  ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $A$  εὐρισκομένου τοῦ τραπεζίου ὅπως εἶναι τώρα, καὶ εἶναι ὡς ἡ  $AB : BE = \text{τραπέζιον } Z\Sigma : \text{τραπ. } Z\Phi$ , ὡς δὲ ἡ  $AB : BZ = \text{τραπ. } Z\Sigma : \text{τραπ. } \Lambda Z$ · θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ  $\Lambda Z > X > Z\Phi$ · διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 10).

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ  $MH > \Psi > \Theta H$  καὶ  $NOIH > \Omega > \Pi I$ , ὁμοίως δὲ εἶναι καὶ  $\Xi I\Gamma > \Delta > \Gamma I O$  (θ.

8). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι  $\text{τραπ. } KE > \text{χωρ. } P$ ,  $\text{τραπ. } \Lambda Z > \text{χωρ. } X$ ,  $\text{τραπ. } MH > \text{χωρ. } \Psi$ , καὶ  $\text{τραπ. } NI > \Omega$ , τὸ δὲ  $\Xi I\Gamma$  τρίγωνον  $> \Delta$ , εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ὅλα τὰ εἰρημένα χωρία εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἀθροίσματος



$P + X + \Psi + \Omega + \Delta$ . Εἶναι δὲ τὸ ἄρθμισμα  $P + X + \Psi + \Omega + \Delta = \frac{1}{3}$   $\text{τριγώνου } B\Gamma\Delta$  (θ. 6)· εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον  $B\Gamma\Delta < 3 (KE + \Lambda Z + MH + NI \text{ τραπεζίων σὺν τὸ τρίγωνον } \Xi I\Gamma)$ . Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι  $\text{τραπ. } Z\Phi < X$ ,  $\Theta H < \Psi$ ,  $\Pi I < \Omega$ , τὸ δὲ τρίγ.  $I O \Gamma < \Delta$ , εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ὅλα τὰ εἰρημένα εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος  $\Delta + \Omega + \Psi + X$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον  $B\Delta\Gamma$  εἶναι μεγαλύτερον μὲν τοῦ  $3 (\Phi Z + \Theta H + \Pi I \text{ τραπεζίων σὺν τὸ τρίγωνον } I O \Gamma)$ , μικρότερον δὲ τοῦ τριπλασίου τῶν προεκτεθέντων.

ιε'

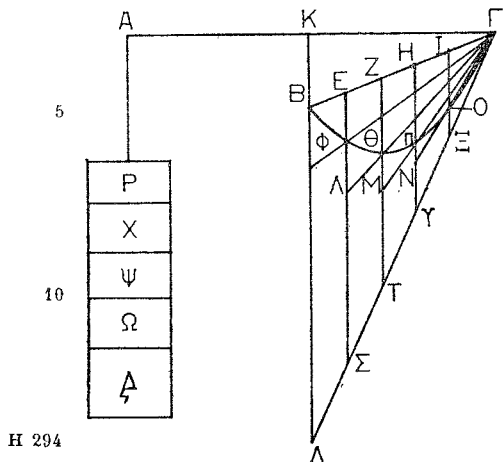
Ἔστω πάλιν τὸ  $BΘΓ$  τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας  
καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δὲ  $BΓ$  μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τῇ  
διαμέτρῳ· ἀναγκαῖον δὴ ἦτοι τὰν ἀπὸ τοῦ  $B$  σαμείου παρὰ  
5 τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμάματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ  
 $Γ$  ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν  $BΓ$ . ἔστω ἃ τὰν ἀμβλεῖαν  
ποιοῦσα ἃ ποτὶ τῷ  $B$ , καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ  
 $B$  ἃ  $ΒΔ$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Γ$  ἃ  $ΓΔ$  ἐπιπαύουσα τὰς τοῦ κώνου το-  
μᾶς κατὰ τὸ  $Γ$ , καὶ διηρήσθω ἃ  $BΓ$  εἰς τμάρματα ἴσα ὅποσαοῦν  
10 τὰ  $ΒΕ$ ,  $ΕΖ$ ,  $ΖΗ$ ,  $ΗΙ$ ,  $ΙΓ$ , ἀπὸ δὲ τῶν  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$ ,  $Ι$  παρὰ τὰν  
H 292 διάμετρον ἄχθωσαν αἱ  $ΕΣ$ ,  $ΖΤ$ ,  $ΗΥ$ ,  $ΙΕ$ , καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων,  
καθ' ἃ τέμνοντι αὐταὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ  
τὸ  $Γ$  καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φανὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ  $ΒΔΓ$  τρίγωνον  
τῶν μὲν τραπεζίων τῶν  $ΒΦ$ ,  $ΑΖ$ ,  $ΜΗ$ ,  $ΝΙ$  καὶ τοῦ  $ΓΙΕ$  τρι-  
15 γώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ  $ΖΦ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΙΠ$  καὶ  
τοῦ  $ΓΟΙ$  τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον.

ἐκβεβλήσθω ἃ  $ΔΒ$  ἐπὶ θάτερα. ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν  
 $ΓΚ$  τῇ  $ΓΚ$  ἴσαν ἀπέλαβον τὰν  $ΑΚ$ . νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον  
τὸ  $ΑΓ$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $Κ$ , καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ  $Κ$ , κρεμά-  
20 σθω δὲ καὶ τὸ  $ΓΚΔ$  τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ  
τὰ  $Γ$ ,  $Κ$  ἔχον, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ  
ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ  $Α$  τὰ  $Ρ$ ,  $Χ$ ,  $Ψ$ ,  $Ω$ ,  $Δ$  χωρία, καὶ  
τὸ μὲν  $Ρ$  τῷ  $ΔΕ$  τραπεζίῳ ἰσορροπεῖτω οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν  
κεῖται, τὸ δὲ  $Χ$  τῷ  $ΖΣ$  τραπεζίῳ, τὸ δὲ  $Ψ$  τῷ  $ΤΗ$ , τὸ δὲ  $Ω$  τῷ  
25  $ΥΙ$ , τὸ δὲ  $Δ$  τῷ  $ΓΙΕ$  τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ

Ἐστω πάλιν τὸ τμήμα ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἡ δὲ ΒΓ ἄς μὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον· κατ' ἀνάγκην λοιπὸν ἢ ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β πρὸς τὸ μέρος τῆς παραβολῆς παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΒΓ ἀμβλεῖαν γωνίαν ἢ ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ ἀμβλεῖαν γωνίαν πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος τῆς παραβολῆς. Ἐστω ἡ σχηματίζουσα τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Β, καὶ ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, καὶ ἄς διαιρεθῇ ἡ ΒΓ εἰς τμήματα ἴσα ὅσαδῇποτε τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Ι ἄς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΕ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων καθ' ἃ τέμνουσιν αὐταὶ τὴν παραβολὴν ἄς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὸ Γ καὶ ἄς προεκβληθῶσι πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος. Λέγω καὶ τώρα, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ τριπλασίου ἁθροίσματος τῶν τραπεζίων ΒΦ, ΑΖ, ΜΗ, ΝΙ σὺν τὸ τρίγωνον ΓΙΕ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ τριπλασίου ἁθροίσματος τῶν τραπεζίων ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ σὺν τὸ τρίγωνον ΓΟΙ.

Ἄς προεκβληθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη. Ἀφοῦ φέρω τὴν ΓΚ κάθετον ἐπ' αὐτὴν λαμβάνω  $AK = ΓΚ$ . Ἄς νοηθῇ δὲ πάλιν ζυγὸς ὁ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἄς στηριχθῇ εἰς τὸ Κ, ἄς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΚΔ ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Κ, ἔχον ὡς τώρα εὐρίσκεται, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ ζυγοῦ ἄς ἐξαρτηθῶσι κατὰ τὸ Α τὰ χωρία Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ, καὶ τὸ μὲν Ρ ἄς ἰσορροπῇ πρὸς τὸ τραπέζιον ΔΕ, ὅπως τοῦτο εὐρίσκεται, τὸ δὲ Χ πρὸς τὸ τραπέζιον ΖΣ, τὸ δὲ Ψ πρὸς τὸ ΤΗ, τὸ δὲ Ω πρὸς τὸ ΥΙ, τὸ δὲ Δ πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΙΕ· θὰ ἰσορροπήσῃ δὲ καὶ τὸ ἁθροί-

ὅλω· ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ  $\Delta B\Gamma$  τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ  $PX\Psi\Omega\Delta$  χωρίου. ὁ-



H 294

15

μοίως δὴ τῷ πρότερον  
δειχθήσεται τό τε  $B\Phi$   
τραπέζιον τοῦ  $P$  χω-  
ρίου μείζον, καὶ τὸ  
μὲν  $\Theta E$  τραπέζιον μεί-  
ζον ἐὼν τοῦ  $X$  χωρίου,  
τὸ δὲ  $Z\Phi$  ἔλαττον, καὶ  
τὸ μὲν  $MH$  τραπέζιον  
μείζον ἐὼν τοῦ  $\Psi$  χω-  
ρίου, τὸ δὲ  $H\Theta$  ἔλασ-  
σον, καὶ ἔτι τὸ μὲν  $NI$   
τραπέζιον μείζον ἐὼν  
τοῦ  $\Omega$  χωρίου, τὸ δὲ

$III$  ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν  $\Xi I\Gamma$  τρίγωνον μείζον τοῦ  $\Delta$  χωρίου,  
τὸ δὲ  $\Gamma I\Theta$  ἔλασσον· ὁῦλον οὖν ἐστίν.

ις'

\*Εστω πάλιν τμᾶμα τὸ  $B\Theta\Gamma$  περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ  
ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ  $B$  ἡ  $B\Delta$  παρὰ  
τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ  $\Gamma$  ἡ  $\Gamma\Delta$  ἐπιφαύουσα τᾶς τοῦ κώνου  
τομᾶς κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ἔστω δὲ τοῦ  $B\Delta\Gamma$  τριγώνου τρίτον μέρος τὸ  
 $Z$  χωρίον. φανί δὴ τὸ  $B\Theta\Gamma$  τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ  $Z$  χωρίῳ.

εἰ γὰρ μὴ ἐστίν ἴσον, ἥτοι μείζον ἐστίν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ  
πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζον· ἡ δὴ ὑπεροχά, ἣ ὑπερέχει τὸ  
 $B\Theta\Gamma$  τμᾶμα τοῦ  $Z$  χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἐναντῆ ἑσσεῖται  
μείζων τοῦ  $B\Gamma\Delta$  τριγώνου. δυνατόν δὲ ἐστὶ λαβεῖν τι χωρίον  
ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἑσσεῖται μέρος τοῦ  $B\Delta\Gamma$  τριγώνου.  
ἔστω δὴ τὸ  $B\Gamma E$  τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρηγμένης ὑπεροχᾶς

σμα τῶν μὲν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δέ· ὥστε θὰ εἶναι τὸ  $\Delta\text{ΒΓ}$  τρίγωνον  $= 3 (P + X + \Psi + \Omega + \Delta)$ , (θ. 7). Καθ' ὁμοιον τρόπον ὡς προηγουμένως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τραπέζιον  $\text{ΒΦ} > \text{χωρ. P}$ , καὶ τραπ.  $\text{ΘΕ} > \text{X} > \text{ΖΦ}$ ,  $\text{ΜΗ} > \Psi > \text{ΗΘ}$ ,  $\text{ΝΙ} > \Omega > \text{ΠΙ}$ ,  $\text{ΞΙΓ} > \Delta > \text{ΓΙΟ}$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν.

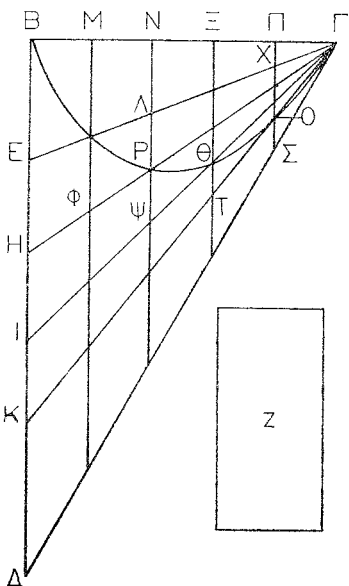
16

Ἐστω πάλιν τὸ τμήμα  $\text{ΒΘΓ}$  περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἅς ἀχθῇ διὰ μὲν τοῦ  $\text{Β}$  ἢ  $\text{ΒΔ}$  παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ  $\Gamma$  ἢ  $\text{ΓΔ}$  ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ἔστω δὲ τὸ χωρίον  $\text{Ζ}$  ἴσον πρὸς τὸ ἐν τρίτον τοῦ τριγώνου  $\text{ΒΔΓ}$ . Λέγω ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα  $\text{ΒΘΓ}$  εἶναι ἴσον πρὸς τὸ χωρίον  $\text{Ζ}$ .

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον.

Ἐστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον· ἢ ὑπεροχὴ δέ, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τμήμα  $\text{ΒΘΓ}$  τοῦ χωρίου  $\text{Ζ}$ , λαμβανομένη πολλὰς φορὰς θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου  $\text{ΒΓΔ}$  (ἀξίωμα συνεχείας). Εἶναι δὲ δυνατόν νὰ ληφθῇ χωρίον τι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, τὸ ὁποῖον

νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου  $\text{ΒΔΓ}$ . Ἐστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $\text{ΒΓΕ}$  μικρότερον τῆς εἰρημένης ὑπεροχῆς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου  $\text{ΒΔΓ}$ · θὰ εἶναι δὲ ἡ  $\text{ΒΕ}$  τὸ αὐτὸ μέρος τῆς  $\text{ΒΔ}$  (Εὐκλ. VI, 1). Ἄς διαι-



καὶ μέρος τοῦ  $ΒΔΓ$  τριγώνου· ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἂ  $ΒΕ$  μέρος  
 τᾶς  $ΒΔ$ . διηγήσθω οὖν ἂ  $ΒΔ$  ἐς τὰ μέρη, καὶ ἔστω τὰ τῶν  
 διαιρεσίων σαμεῖα τὰ  $Η, Ι, Κ$ , καὶ ἀπὸ τῶν  $Η, Ι, Κ$  σαμείων  
 ἐπὶ τὸ  $Γ$  εὐθεῖαι ἐπεξεύχθωσαν· τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ  
 5 κώνου τομάν, ἐπεὶ ἂ  $ΓΔ$  ἐπιφαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ  $Γ$ ·  
 καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν τομὰν αἱ εὐθεῖαι,  
 Η 296 ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ  $ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ$ · ἐσ-  
 σοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν  $ΒΔ$ . ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ  
 $ΒΓΕ$  τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει τὸ  $ΒΘΓ$  τμήμα  
 10 τοῦ  $Ζ$  χωρίου, δηλόν, ὥς τὰ συναμφοτέρα τό τε  $Ζ$  χωρίον καὶ  
 τὸ  $ΒΓΕ$  τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμήματος. καὶ τῷ  $ΒΓΕ$   
 τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζια ἐντι, δι' ὧν ἂ τοῦ κώνου τομὰ πο-  
 ρεύεται, τὰ  $ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ$ , καὶ τὸ  $ΓΟΣ$  τρίγωνον· τὸ μὲν  
 γὰρ  $ΜΕ$  τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ  $ΜΛ$  ἴσον τῷ  $ΦΛ$  καὶ τὸ  $ΛΞ$   
 15 ἴσον τῷ  $ΘΡ$  καὶ τὸ  $ΧΞ$  ἴσον τῷ  $ΟΘ$  καὶ τὸ  $ΓΧΠ$  τρίγωνον τῷ  
 $ΓΟΣ$  τριγώνῳ· τὸ δὴ  $Ζ$  χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων  
 τῶν  $ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ$  καὶ τοῦ  $ΠΟΓ$  τριγώνου. καὶ ἔστι τὸ  $ΒΔΓ$   
 τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ  $Ζ$  χωρίου· τὸ δὴ  $ΒΔΓ$  ἔλασσόν ἐστιν  
 ἢ τριπλάσιον τῶν  $ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ$  τραπεζίων καὶ τοῦ  $ΠΟΓ$  τρι-  
 20 γώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν ἢ τριπλάσιον.  
 οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ  $ΒΘΓ$  τμήμα τοῦ  $Ζ$  χωρίου.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον.  
 πάλιν ἄρα ἂ ὑπεροχά, ᾧ ὑπερέχει τὸ  $Ζ$  χωρίον τοῦ  $ΒΘΓ$  τμή-  
 ματος, αὐτὰ ἐαυτᾶ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ  $ΒΔΓ$  τρι-  
 25 γώνου. δυνατόν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς,  
 δ' ἐσσεῖται μέρος τοῦ  $ΒΔΓ$  τριγώνου. ἔστω οὖν τὸ  $ΒΓΕ$  τρίγω-  
 νον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ  $ΒΔΓ$  τριγώνου, καὶ  
 τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ  $ΒΓΕ$  τρίγω-  
 νον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει τὸ  $Ζ$  χωρίον τοῦ  $ΒΘΓ$   
 Η 298 τμήματος, τὸ  $ΒΕΓ$  τρίγωνον καὶ τὸ  $ΒΘΓ$  τμήμα ἀμφοτέρα



ρεθῇ λοιπὸν ἡ ΒΔ εἰς μέρη, καὶ ἔστω τὰ σημεία τῶν διαιρέσεων τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Η, Ι, Κ ἃς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὸ Γ· θὰ τέμνωσι λοιπὸν αὗται τὴν παραβολήν, ἐπεὶδὴ ἡ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη αὐτῆς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνουσι τὴν τομὴν (παραβολήν) αἱ εὐθεῖαι, ἃς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· θὰ εἶναι δὲ αὗται καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τμήμα ΒΘΓ τοῦ χωρίου Ζ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ χωρίου Ζ καὶ τοῦ τριγώνου ΒΓΕ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος. Καὶ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι ἴσα τὰ τραπέζια διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται ἡ παραβολή, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΟΣ· διότι τὸ μὲν τραπέζιον ΜΕ εἶναι κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ = ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ = ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ = ΟΘ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΧΠ = τρίγωνον ΓΟΣ· τὸ χωρίον λοιπὸν Ζ εἶναι μικρότερον τοῦ ἁθροίσματος τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ. Καὶ εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ τριπλάσιον τοῦ χωρίου Ζ· τὸ δὲ ΒΔΓ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἁθροίσματος τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη ὅτι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου. Δὲν εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερον τὸ τμήμα ΒΘΓ τοῦ χωρίου Ζ.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μικρότερον. Πάλιν ἄρα ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ χωρίον Ζ τοῦ τμήματος ΒΘΓ, λαμβανομένη πολλάκις ὑπερέχει τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Εἶναι δὲ δυνατόν νὰ ληθῇ χωρίον μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, τὸ ὅποιον νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Ἐστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ, καὶ τὰ ἄλλα ἃς κατασκευασθῶσιν ὡς προηγουμένως. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ χωρίον Ζ τοῦ τμήματος ΒΘΓ, τὸ τρίγωνον ΒΕΓ

ἐλάσσονά ἐστι τοῦ  $Z$ . ἔστιν δὲ καὶ τὸ  $Z$  χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν  $ΕΜ$ ,  $ΦΝ$ ,  $ΨΞ$ ,  $ΠΤ$  καὶ τοῦ  $ΓΠΣ$  τριγώνου· ἔστιν γὰρ τὸ  $ΒΔΓ$  τοῦ μὲν  $Z$  τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὥς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη· ἔλασσον ἄρα τὸ  $ΒΓΕ$  τρίγωνον καὶ τὸ  $ΒΘΓ$  τμήμα τῶν τετραπλεύρων τῶν  $ΕΜ$ ,  $ΦΝ$ ,  $ΞΨ$ ,  $ΠΤ$  καὶ τοῦ  $ΓΠΣ$  τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος ἔλασσον εἶη καὶ τὸ  $ΓΒΕ$  τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὶν τὸ  $ΒΕΓ$  τρίγωνον τοῖς  
 10 τραπεζίοις τοῖς  $ΕΜ$ ,  $ΦΔ$ ,  $ΘΡ$ ,  $ΘΟ$  καὶ τῷ  $ΓΟΣ$  τριγώνῳ, ἃ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ  $ΒΘΓ$  τμήμα τοῦ  $Z$  χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζον· ἴσον ἄρα τὸ τμήμα τῷ  $Z$  χωρίῳ.

ιζ'

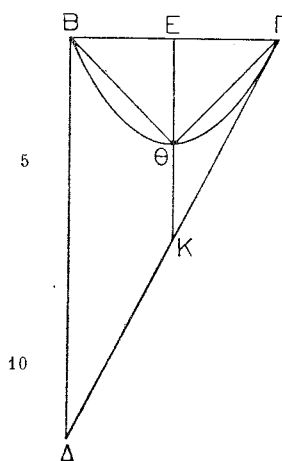
15 Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον.  
 ἔστω γὰρ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ  $Θ$  σαμεῖον, καὶ  
 20 ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ  $ΒΘΓ$  τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ  $Θ$  σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶ τοῦ τμήματος, ἃ ἀπὸ τοῦ  $Θ$  εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν  $ΒΓ$ , καὶ ἃ  $ΒΓ$  ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιφανέουσαν  
 Η 300 τᾶς τομαῖς κατὰ τὸ  $Θ$ . ἄχθω δὲ ἃ  $ΕΘ$  παρὰ τὰν διάμετρον, ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ  $Β$  παρὰ τὰν διάμετρον ἃ  $ΒΔ$ , ἀπὸ δὲ τοῦ  $Γ$  ἃ  $ΓΔ$  ἐπιφανέουσα τᾶς τοῦ κώνου τομαῖς κατὰ τὸ  $Γ$ . ἐπεὶ οὖν ἃ μὲν  $ΚΘ$  παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν, ἃ δὲ  $ΓΔ$  ἐπιφανέουσα τᾶς τομαῖς κατὰ τὸ  $Γ$ , ἃ δὲ  $ΕΓ$  παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιφανούσῃ

σὺν τὸ τμήμα ΒΘΓ εἶναι μικρότερα τοῦ Ζ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ χωρίον Ζ μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος, τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ, σὺν τὸ τρίγωνον ΓΠΣ· διότι τὸ ΒΔΓ εἶναι τοῦ μὲν Ζ τριπλασίον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων μικρότερον τοῦ τριπλασίου αὐτῶν, ὥς ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΕ σὺν τὸ τμήμα ΒΘΓ μικρότερα τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ, σὺν τὸ τρίγωνον ΓΠΣ. Ὡστε ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ τμήμα, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν καὶ εἰς τὰ δύο ἀθροίσματα, θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΒΕ μικρότερον τῶν ἀπομενόντων χωρίων· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τραπεζίων ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ σὺν τὸ τρίγωνον ΓΟΣ, τὰ ὁποῖα εἶναι μεγαλύτερα τῶν ἀπομενόντων χωρίων. Δὲν εἶναι ἄρα μικρότερον τὸ τμήμα ΒΘΓ τοῦ χωρίου Ζ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὔτε μεγαλύτερον εἶναι· εἶναι ἄρα τὸ τμήμα ἴσον πρὸς τὸ χωρίον Ζ.

17

Τούτου ἀποδειχθέντος εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἔστω τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, κορυφὴ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἃς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΒΘΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Θ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος, ἢ ἀπὸ τοῦ Θ ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Θ. Ἄς ἀχθῇ δὲ ἡ ΕΘ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἃς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΚΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ δὲ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΕΓ εἶναι παράλλη-



τὰς τομᾶς κατὰ τὸ  $\Theta$ , τὸ  $B\Delta\Gamma$  τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ  $B\Theta\Gamma$  τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ  $B\Delta\Gamma$  τρίγωνον τοῦ μὲν  $B\Theta\Gamma$  τμήματος τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ  $B\Theta\Gamma$  τριγώνου τετραπλάσιον, ὁῦλον, ὥς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ  $B\Theta\Gamma$  τμᾶμα τοῦ  $B\Theta\Gamma$  τριγώνου.

Τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὰν εὐθεϊαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἂ μέγιστα κάθετος ἄγεται.

15

ιη'

Εἴ κα ἐν τμήματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεΐα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμήματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἂ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν.

ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ  $AB\Gamma$  περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς  $A\Gamma$  ἄχθω ἡ  $\Delta B$  παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἡ  $B\Delta$  ἄκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ  $A\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$ , ὁῦλον, ὥς παραλλήλοι ἐντὶ ἡ τε  $A\Gamma$  καὶ ἡ κατὰ τὸ  $B$  ἐπιφαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερόν οὖν, ὅτι τὰν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν  $A\Gamma$  ἀγομενὰν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ  $B$  ἀγομένα· κορυφὰ οὖν ἐστὶν τοῦ τμήματος τὸ  $B$  σαμεῖον.

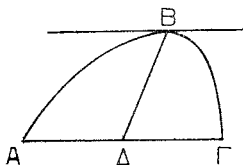
λος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ  $\Theta$ , τὸ τρίγωνον  $\text{ΒΔΓ}$  εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου  $\text{ΒΘΓ}$ . Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον  $\text{ΒΔΓ}$  τοῦ μὲν τμήματος  $\text{ΒΘΓ}$  εἶναι τριπλάσιον, τοῦ δὲ τριγώνου  $\text{ΒΘΓ}$  εἶναι τετραπλάσιον, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τμήμα  $\text{ΒΘΓ}$  εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου  $\text{ΒΘΓ}$ .

Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας καὶ καμπύλης γραμμῆς βάσιν μὲν καλῶ τὴν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὴν μεγίστην κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄγεται ἡ μεγίστη κάθετος.

18

Ἐὰν εἰς τμήμα, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς βάσεως εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, θὰ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ ἀχθεῖσα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τέμνει τὴν παραβολήν.

Διότι ἔστω τὸ τμήμα  $\text{ΑΒΓ}$  περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς  $\text{ΑΓ}$  ᾧς ἀχθῇ ἡ  $\text{ΔΒ}$  παράλληλος πρὸς

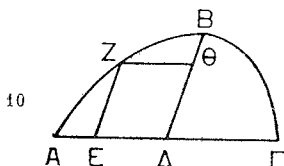


τὴν διάμετρον. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς παραβολὴν ἡ  $\text{ΒΔ}$  ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ αἱ  $\text{ΑΔ}$ ,  $\text{ΔΓ}$  εἶναι ἴσαι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ  $\text{ΑΓ}$  καὶ ἡ κατὰ τὸ  $\text{Β}$  ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἶναι παράλληλοι. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἐκ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς παραβολῆς ἐπὶ τὴν  $\text{ΑΓ}$  μεγίστη θὰ εἶναι ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ  $\text{Β}$  κορυφὴ λοιπὸν τοῦ τμήματος εἶναι τὸ σημεῖον  $\text{Β}$ .

ιθ'

Ἐν τμήματι περιεχομένῳ ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἡ ἀπὸ μέσας τῆς βάσεως ἀχθεῖσα τῆς ἀπὸ μέσας τῆς ἡμισείας ἀγομένης ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει.

5 ἔστω γὰρ τὸ  $AB\Gamma$  τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἡ μὲν



10

$B\Delta$  ἀπὸ μέσας τῆς  $AG$ , ἡ δὲ  $EZ$  ἀπὸ μέσας τῆς  $AL$ , ἄχθω δὲ καὶ ἡ  $Z\Theta$  παρὰ  $AG$ . ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ κώνῳ τομᾶ ἡ  $B\Delta$  παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται, καὶ αἱ  $AL$ ,  $Z\Theta$  παρὰ τὰν κατὰ τὸ  $B$  ἐπιφανοῦσάν ἐντι, δηλόν,

ὥς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ  $B\Delta$  ποτὶ τὰν  $B\Theta$  μάκει, ὅν ἡ  $AL$  ποτὶ τὰν  $Z\Theta$  δυνάμει τετραπλασία ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ  $B\Delta$  τῆς  $B\Theta$   
15 μάκει. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπίτριτος ἐστὶν ἡ  $B\Delta$  τῆς  $EZ$  μάκει.

κ'

Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μείζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν  
20 τρίγωνον ἢ ἡμισυ τοῦ τμήματος.

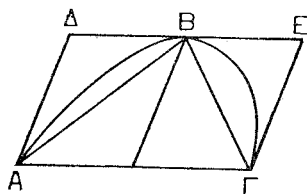
ἔστω γὰρ τὸ  $AB\Gamma$  τμήμα, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$  τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμήματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον, τὸ  $B$  σαρμεῖον κορυφὰν  
25 εἶμεν τοῦ τμήματος· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AG$  τῇ κατὰ τὸ  $B$  ἐπιφανοῦσᾷ τῆς τομᾶς. ἄχθω ἡ  $AE$  διὰ τοῦ  $B$  παρὰ τὰν  $AG$  καὶ ἀπὸ τῶν  $A$ ,  $\Gamma$  αἱ  $AL$ ,  $GE$  παρὰ τὰν διάμετρον πε-

Εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς βάσεως τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἡμισείας εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα κατὰ τὸ μῆκος.

Διότι ἔστω τὸ τμήμα  $AB\Gamma$  περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἄς ἀχθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν διάμετρον ἡ μὲν  $BD$  ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς  $AG$ , ἡ δὲ  $EZ$  ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς  $AD$ , ἄς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ  $Z\Theta$  παράλληλος πρὸς τὴν  $AG$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς παραβολὴν ἡ  $BD$  ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ αἱ  $AD$ ,  $Z\Theta$  παράλληλοι πρὸς τὴν κατὰ τὸ  $B$  ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, εἶναι φανερόν, ὅτι  $BD : B\Theta = AD^2 : Z\Theta^2$ . εἶναι ἄρα καὶ ἡ  $BD = 4 B\Theta$ . Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ  $BD$  εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τῆς  $EZ$  κατὰ τὸ μῆκος.

Ἐὰν εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τὸ ἐγγραφέν τμήμα θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τμήματος.

Διότι ἔστω τὸ τμήμα  $AB\Gamma$ , ὡς ἐλέχθη, καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ ὅλον καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸ τμήμα, εἶναι ἀναγκαῖον, τὸ σημεῖον  $B$  νὰ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος· εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ  $AG$  πρὸς τὴν κατὰ τὸ  $B$  ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς. Ἄς ἀχθῇ ἡ  $\Delta E$  διὰ τοῦ  $B$  παράλληλος πρὸς τὴν  $AG$  καὶ ἀπὸ τῶν σημείων  $A$ ,  $\Gamma$  ἄς ἀχθῶσιν αἱ  $AD$ ,  $\Gamma E$  παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον· θὰ πέσωσι δὲ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμήματος.



σοῦνται δὴ αὐταὶ ἐκτὸς τοῦ τμήματος. ἐπεὶ οὖν ἡμισὺ ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τοῦ  $AΔE\Gamma$  παραλληλογράμμου, φανερόν, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

- 5      *Λεδειγμένον δὲ τούτου δῆλον, ὅτι ὥς ἐς τοῦτο τὸ τμήμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράφαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μεῖζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι ἐλάσσοντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα ποιήσομεν*  
 10 *ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.*

H 306

κα'

- Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέντων δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα ἐς*  
 15 *τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμημάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμήμα ἐγγραφέν.*

- ἔστω τὸ  $AB\Gamma$  τμήμα, οἷον εἴρηται, καὶ τετμάσθω ἃ  $ΑΓ$*   
 20 *δίχα τῷ  $Δ$ , ἃ δὲ  $ΒΔ$  ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον· τὸ  $Β$  ἄρα σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶν τοῦ τμήματος. τὸ ἄρα  $AB\Gamma$  τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἃ  $ΑΔ$  τῷ  $Ε$ , καὶ ἄχθω ἃ  $ΕΖ$  παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω δὲ ἃ  $AB$  κατὰ τὸ  $Θ$ · τὸ ἄρα  $Z$  σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶ*  
 25 *τοῦ τμήματος τοῦ  $AZB$ . τὸ δὴ  $AZB$  τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ  $[AZB]$  τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον, ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τοῦ  $AZB$  τριγώνου.*



Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου  $A\Delta E\Gamma$ , εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τμήματος.

#### ΠΟΡΙΣΜΑ

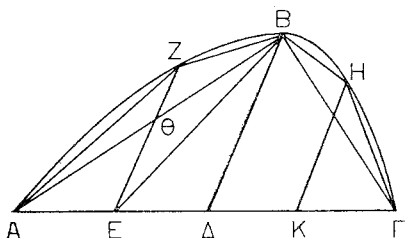
Ἀφοῦ δὲ τοῦτο ἀπεδείχθη, εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τὸ τμήμα τοῦτο εἶναι δυνατόν νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπομένοντα τμήματα νὰ εἶναι πάντοτε μικρότερα τοῦ προτεθέντος χωρίου· διότι ἀφαιρουμένου πάντοτε μεγαλύτερου τοῦ ἡμίσεος εἶναι διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι τὰ ἀπομένοντα τμήματα δυνάμεθα νὰ τὰ κάμωμεν μικρότερα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου (Εὐκλ. X, 1).

#### 21

Ἐὰν εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς αὐτό, ἐγγραφῶσι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὰ τμήματα, ἐκάστου τῶν τριγώνων τῶν ἐγγραφέντων εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα θὰ εἶναι ὀκταπλάσιον τὸ τρίγωνον τὸ ἐγγραφὲν εἰς τὸ ὅλον τμήμα.

Ἐστω τὸ τμήμα  $AB\Gamma$ , ὡς ἐλέχθη, καὶ ἄς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ  $AG$  κατὰ τὸ  $\Delta$ , ἡ δὲ  $BA$  ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον· τὸ σημεῖον ἄρα  $B$  εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος (θ. 18). Τὸ τρίγωνον ἄρα  $AB\Gamma$  ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Πάλιν ἄς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ  $AD$  κατὰ τὸ  $E$  καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ  $EZ$  παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἄς τμηθῇ δὲ ἡ  $AB$  κατὰ τὸ  $\Theta$ · τὸ σημεῖον  $Z$  ἄρα εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος  $AZB$ . Τὸ τρίγωνον λοιπὸν  $AZB$  ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμήμα  $[AZB]$  καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου  $AZB$ .

ἔστιν οὖν ἡ  $ΒΔ$  τᾶς μὲν  $ΕΖ$  ἐπίτριτος, τᾶς δὲ  $ΕΘ$  διπλασία·  
διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΕΘ$  τᾶς  $ΘΖ$ . ὥστε καὶ τὸ  $ΑΕΒ$  τριγώνον  
διπλάσιόν ἐστι τοῦ  $ΖΒΑ$ · τὸ μὲν γὰρ  $ΑΕΘ$  διπλάσιόν ἐστι τοῦ



$ΑΘΖ$ , τὸ δὲ  $ΘΒΕ$  τοῦ  $ΖΘΒ$ . ὥστε τὸ  $ΑΒΓ$  τοῦ  $ΑΖΒ$  ἐστὶν  
Η 308 ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ  $ΒΗΓ$   
τμᾶμα ἐγγραφέντος.

κβ'

Εἴ κα ἡ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου  
κῶνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἐξῆς ὅποσαοῦν ἐν τῷ τετρα-  
10 πλάσιονι λόγῳ, ἡ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τρι-  
γώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό,  
σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμᾶματος.

ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ  $ΑΔΒΕΓ$  περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας  
καὶ ὀρθογωνίου κῶνου τομᾶς, χωρία δὲ ἔστω ὅποσαοῦν ἐξῆς  
15 κείμενα τὰ  $Ζ, Η, Θ, Ι$ , τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἀγούμενον  
τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ  $Ζ$ , καὶ ἔστω τὸ  $Ζ$  ἴσον  
τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ὕψος  
ἴσον. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν  $Ζ, Η, Θ, Ι$  χωρίων μεῖζόν ἐστιν.

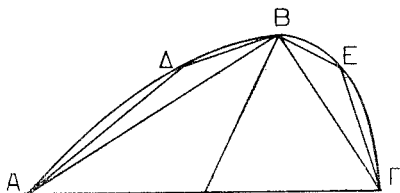
ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμᾶματος κορυφαὶ τὸ  $Β$ , τῶν δὲ περι-  
20 λειπομένων τμαμάτων τὰ  $Δ, Ε$ . ἐπεὶ οὖν τὸ  $ΑΒΓ$  τριγώνον

Εἶναι λοιπὸν ἡ ΒΔ τῆς μὲν ΕΖ τὰ τέσσαρα τρίτα (θ. 19), τῆς δὲ ΕΘ διπλασία· εἶναι ἄρα διπλασία ἡ ΕΘ τῆς ΘΖ. Ὡστε καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΖΒΑ· διότι τὸ μὲν ΑΕΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΘΖ, τὸ δὲ ΘΒΕ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΖΘΒ (Εὐκλ. VI, 1). Ὡστε τὸ  $ΑΒΓ = 8 ΑΖΒ$ . Καθ' ὁμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον  $ΑΒΓ = 8 ΒΗΓ$ .

22

Ἐὰν ὑπάρχη τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ χωρία τεθῶσι κατὰ σειρὰν ὅσαδήποτε ἀποτελοῦντα φθίνουσιν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον ἓν τέταρτον, εἶναι δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χωρίων θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος.

Διότι ἔστω τὸ τμήμα ΑΔΒΕΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἔστω δὲ ὅσαδήποτε χωρία εἰς συνεχῆ πρόοδον τὰ Ζ, Η, Θ, Ι, ἔστω δὲ νὰ εἶναι τετραπλάσιον τὸ προηγούμενον τοῦ ἐπομένου,



μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἔστω τὸ Ζ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι τὸ τμήμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄθροισματος τῶν χωρίων Ζ, Η, Θ, Ι.

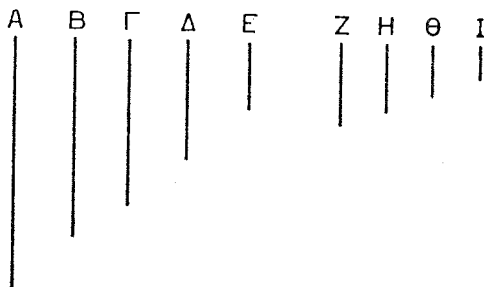
Ἐστω τοῦ ὅλου μὲν τμήματος κορυφὴ τὸ Β, τῶν δὲ ἀπομενόντων τμημάτων κορυφαὶ αἱ Δ, Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ

ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν  $ΑΔΒ$ ,  $ΒΕΓ$  τριγώνων, δη-  
 λον, ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ  
 τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ  $Ζ$  χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ  
 τὰ  $ΑΔΒ$ ,  $ΒΕΓ$  τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ  $Η$  χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δει-  
 5 χθήσεται, ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγρα-  
 φόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν  
 Η 310 καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ τῷ  $Θ$  καὶ τὰ ἐς τὰ ὕστερον γενόμενα  
 τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ  $Ι$  χωρίῳ· σύμπαντα  
 ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγ-  
 10 γραφέντι εἰς τὸ τμᾶμα. φανερόν οὖν, ὅτι ἐλάσσονά ἐστι τοῦ  
 τμήματος.

κγ'

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἐξῆς ἐν τῷ τετραπλάσιονι λόγῳ,  
 τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ  
 15 αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

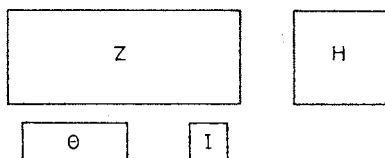
ἔστω οὖν ὅποσαοῦν μεγέθεα ἐξῆς κείμενα τὰ  $A$ ,  $B$ ,  $Γ$ ,  $Δ$ ,



$E$  τετραπλάσιονα ἕκαστον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ  
 $A$ , ἔστω δὲ τὸ μὲν  $Ζ$  τρίτον τοῦ  $B$ , τὸ δὲ  $Η$  τοῦ  $Γ$ , τὸ δὲ  $Θ$   
 τοῦ  $Δ$ , τὸ δὲ  $Ι$  τοῦ  $E$ . ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  $Ζ$  τοῦ  $B$  τρίτον μέρος

# ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ

εἶναι ὀκταπλάσιον ἐκάστου τῶν τριγώνων  $\Lambda\Delta\text{B}$ ,  $\text{B}\Gamma\text{E}$  (θ. 21), εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦ ἄθροίσματος αὐτῶν εἶναι τετραπλάσιον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον  $\text{AB}\Gamma = \text{Z}$  θὰ εἶναι καὶ  $\Lambda\Delta\text{B} + \text{B}\Gamma\text{E} = \text{H}$ . Ὅμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἐγγραφόμενα



τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ  $\Theta$  καὶ τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ χωρίον  $\text{I}$  εἰς τὰ κατόπιν δημιουργούμενα τμήματα· ὅλα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία θὰ ἰσῶνται πρὸς πολὺγώνον τι ἐγγραφὲν εἰς τὸ τμήμα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμὰ των εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος.

## 23

Ἐὰν ὑπάρχωσι μεγέθη εἰς συνεχῇ φθίνουσιν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον ἓν τέταρτον καὶ ὅλα τὰ μεγέθη προστεθῶσι καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα προστεθῇ τὸ ἓν τρίτον τοῦ μικροτέρου ὅρου, τὸ συνολικὸν ἄθροισμα θὰ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ μεγίστου ὅρου.

Ἐστω λοιπὸν ὅσαδήποτε μεγέθη εἰς φθίνουσιν συνεχῇ γεωμετρικὴν πρόοδον τὰ  $\text{A}$ ,  $\text{B}$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $\text{E}$  ἕκαστον δὲ νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ  $\text{A}$ , ἔστω δὲ τὸ μὲν  $\text{Z} = \frac{1}{3} \text{B}$ ,  $\text{H} = \frac{1}{3} \Gamma$ ,  $\Theta = \frac{1}{3} \Delta$ ,  $\text{I} = \frac{1}{3} \text{E}$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν  $\text{Z} = \frac{1}{3} \text{B}$ , τὸ δὲ  $\text{B} = \frac{1}{4} \text{A}$ , θὰ εἶναι  $\text{B} + \text{Z} = \frac{1}{3} \text{A}$ . Διὰ τοὺς αὖ-

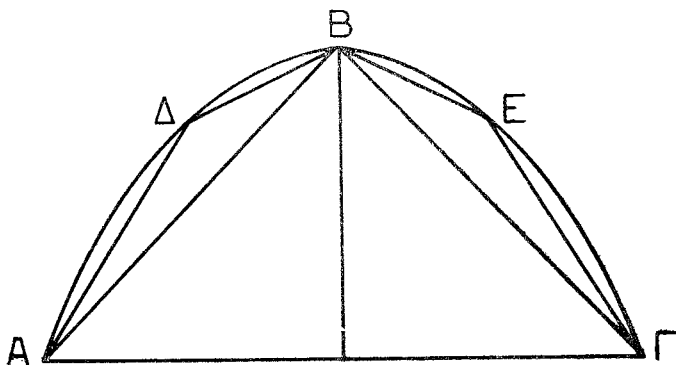
ἐστίν, τὸ δὲ  $B$  τοῦ  $A$  τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφοτέρωτα τὰ  $B, Z$  μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ  $A$ . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ  $H, \Gamma$  τοῦ  $B$  καὶ τὰ  $\Theta, \Delta$  τοῦ  $\Gamma$  καὶ τὰ  $I, E$  τοῦ  $\Delta$  καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ  $B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I$  τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν  
 5  $A, B, \Gamma, \Delta$ . ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ  $Z, H, \Theta$  τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν  $B, \Gamma, \Delta$  καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ  $B, \Gamma, \Delta, E, I$  τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ  $A$ . ὁμολον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ  $A, B, \Gamma, \Delta, E$  καὶ τὸ  $I$ , τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ  $E$ , τοῦ  $A$  ἐστὶν ἐπί-  
 τριτα.

Η 312

κδ'

Πᾶν τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

ἔστω γὰρ τὸ  $ΑΒΕΓ$  τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας



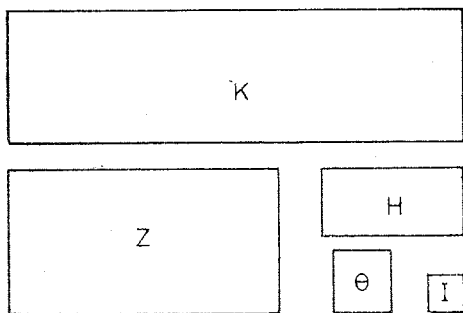
15 καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ δὲ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, τοῦ δὲ  $ΑΒΓ$  τρι-

τοὺς λόγους εἶναι καὶ  $H + \Gamma = \frac{1}{3} B$ ,  $\Theta + \Delta = \frac{1}{3} \Gamma$  καὶ  $I + E = \frac{1}{3} \Delta$ . θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα  $B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \frac{1}{3} (A + B + \Gamma + \Delta)$ . Εἶναι δὲ καὶ  $Z + H + \Theta = \frac{1}{3} (B + \Gamma + \Delta)$  (ἐξ ὑποθέσεως)· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα  $B + \Gamma + \Delta + E + I$  θὰ εἶναι τοῦ λοιποῦ  $= \frac{1}{3} A$ . Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ συνολικὸν ἄθροισμα  $(A + B + \Gamma + \Delta + E)$  σὺν  $I$ , τουτέστι τὸ  $\frac{1}{3} E$  εἶναι  $= \frac{4}{3} A$ .

24

Πᾶν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸ καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἔστω τὸ τμήμα  $A\Delta BE\Gamma$  περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ



παραβολῆς, τὸ δὲ τρίγωνον  $AB\Gamma$  ἔστω ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς τὰ τέσσαρα τρίτα δὲ τοῦ τριγώνου

γώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ  $K$  χωρίον. δεικτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ  $AΔΒΕΓ$  τμήματι.

- εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω  
 πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ  $AΔΒΕΓ$  τμήμα τοῦ  $K$  χωρίου.
- 5 ἐνέγραφα δὴ τὰ  $AΔΒ$ ,  $ΒΕΓ$  τρίγωνα, ὡς εἴρηται, ἐνέγραφα  
 δὲ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν  
 βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ αἰεὶ εἰς  
 τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐ-  
 τὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦν-
- 10 ται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾷς ὑπεροχᾷς, ἧ  
 ὑπερέχει τὸ  $AΔΒΕΓ$  τμήμα τοῦ  $K$  χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγρα-  
 φόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ  $K$ · ὅπερ ἀδύνατον.
- Η 314 ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἐξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ,  
 πρῶτον μὲν τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν  $AΔΒ$ ,  $ΒΕΓ$
- 15 τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἐπό-  
 μενα τμήματα ἐγγραφέντων καὶ αἰεὶ οὕτω, δηλον, ὡς σύμπαν-  
 τα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ  
 $K$  ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον  
 τὸ  $AΔΒΕΓ$  τμήμα τοῦ  $K$  χωρίου.
- 20 ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν  $ΑΒΓ$  τρί-  
 γωνον ἴσον τῷ  $Z$ , τοῦ δὲ  $Z$  τέταρτον τὸ  $H$ , καὶ ὁμοίως τοῦ  
 $H$  τὸ  $Θ$ , καὶ αἰεὶ ἐξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται τὸ ἔσχατον ἔ-  
 λασσον τᾷς ὑπεροχᾷς, ἧ ὑπερέχει τὸ  $K$  χωρίον τοῦ τμήματος,  
 καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ  $I$ · ἐστὶν δὴ τὰ  $Z$ ,  $H$ ,  $Θ$ ,  $I$  χωρία καὶ τὸ
- 25 τρίτον τοῦ  $I$  ἐπίτριτα τοῦ  $Z$ . ἔστιν δὲ καὶ τὸ  $K$  τοῦ  $Z$  ἐπίτριτον·  
 ἴσον ἄρα τὸ  $K$  τοῖς  $Z$ ,  $H$ ,  $Θ$ ,  $I$  καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ  $I$ . ἐπεὶ  
 οὖν τὸ  $K$  χωρίον τῶν μὲν  $Z$ ,  $H$ ,  $Θ$ ,  $I$  χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσο-



ΑΒΓ ἔστω ἴσον τὸ χωρίον Κ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι  $K =$  πρὸς τὸ ΑΔΒΕΓ τμήμα.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἐστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον τὸ τμήμα ΑΔΒΕΓ τοῦ χωρίου Κ. Ἐγγράφω λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ, ὡς ἐλέχθη, ἐγγράφω δὲ καὶ εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἄλλα τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ πάντοτε εἰς τὰ γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος τὸ αὐτό· θὰ εἶναι λοιπὸν τὰ ἀπομένοντα τμήματα μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τμήμα ΑΔΒΕΓ τοῦ χωρίου Κ. Ὡστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Κ· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ἐπειδὴ ὑπάρχουν χωρία εἰς φθίνουσιν συνεχῇ γεωμετρικὴν πρόοδον, μὲ λόγον ἓν τέταρτον, πρῶτον μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΕΓ (θ. 21), ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα εἶναι τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἐπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χωρίων εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων τρίτων τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ Κ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ μεγίστου χωρίου. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερον τὸ τμήμα ΑΔΒΕΓ τοῦ χωρίου Κ.

Ἐστω δέ, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μικρότερον. Ἄς ληφθῇ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον  $ΑΒΓ = Z$ ,  $H = \frac{1}{4} Z$ ,  $\Theta = \frac{1}{4} H$  καὶ ἄς λαμβάνωνται οὕτω καθ' ἐξῆς πάντοτε, μέχρις ὅτου τὸ τελευταῖον γίνῃ μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τοῦ τμήματος τὸ χωρίον Κ, καὶ ἔστω μικρότερον τὸ Ι· εἶναι λοιπὸν τὰ χωρία  $Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z$  (θ. 23). Εἶναι δὲ καὶ τὸ  $K = \frac{4}{3} Z$ · εἶναι ἄρα τὸ  $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ χωρίον Κ τῶν μὲν χωρίων  $Z, H, \Theta, I$  ὑπερέχει ὀλιγώτερον τοῦ Ι, τοῦ δὲ τμή-

νι τοῦ  $I$ , τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ  $I$ , δῆλον, ὥς μείζονά ἐντι  
 τὰ  $Z, H, \Theta, I$  χωρία τοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη  
 γάρ, ὅτι, ἐὰν ᾗ ὅποσαοῦν χωρία ἐξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι  
 λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾗ τῷ εἰς τὸ τμήμα ἐγγραφομένῳ  
 5 τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμή-  
 ματος. οὐκ ἄρα τὸ  $A\Delta B E \Gamma$  τμήμα ἐλασσόν ἐστι τοῦ  $K$  χωρίου.  
 ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ  $K$ . τὸ δὲ  $K$   
 χωρίον ἐπίτρίτον ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ  $A B \Gamma$ · καὶ τὸ  $A\Delta B E \Gamma$   
 ἄρα τμήμα ἐπίτρίτον ἐστι τοῦ  $A B \Gamma$  τριγώνου.

ματος περισσότερον τοῦ I, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ χωρία Z, H, Θ, I εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν ὑπάρχωσι ὅσαδήποτε χωρία εἰς φθίνουσιν γεωμετρικὴν πρόοδον συνεχῇ μὲ λόγον ἕν τέταρτον, τὸ δὲ μέγιστον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ εἰς τὸ τμήμα ἐγγραφόμενον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος. Δὲν εἶναι ἄρα τὸ τμήμα AΔBEΓ μικρότερον τοῦ χωρίου K. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερον· εἶναι ἄρα ἴσον πρὸς τὸ χωρίον K. Τὸ δὲ χωρίον K εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου ABΓ· καὶ τὸ τμήμα ἄρα AΔBEΓ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου ABΓ.

---



ΠΕΡΙ ΟΧΟΥΜΕΝΩΝ

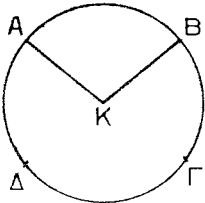
ΒΙΒΛΙΑ Α' καὶ Β'

Ὑποκείσθω τὸ ὕγρὸν φύσιν ἔχον | τοιαύταν, ὥστε τῶν  
μερέων αὐτοῦ | τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνε | χέων ἐόντων  
ἐξωθεῖσθαι τὸ ἥσσον | θλιβόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον θλι | βο-  
15 μένου, καὶ ἕκαστον δὲ τῶν μερέων | αὐτοῦ θλίβεσθαι τῷ ὑπε-  
ράνω αὐ | τοῦ ὑγροῦ κατὰ κάθετον ἐόντι, εἴ | κα μὴ τὸ ὕγρὸν  
ἦ καθειρωγμένον ἐν | τινι καὶ ὑπὸ ἄλλου τινὸς θλιβόμε | νον.

α'

Εἴ κα ἡ ἐπιφάνειά τις ἐπιπέ | δῳ τεμνομένα διὰ τινος  
10 αἰ τοῦ | αὐτοῦ σαμείου τὰν τομὰν ποιεόντι |

*circuli periferiam centrum habentem signum, per quod  
plano secatur, sperae erit superficies.*

15  *sit enim superficies aliqua secta  
per signum K plano semper sectionem  
faciente circuli periferiam, centrum  
autem ipsius K. si igitur ipsa super-  
ficies non est sperae superficies, non  
erunt omnes quae a centro ad supe-  
rficiem occurrentes lineae aequales.  
20 sint itaque quae A, B, G, D signa in*

*superficie, et inaequales quae AK, KB, per ipsas autem  
H 319 KA, KB planum educatur et faciat sectionem in super-  
ficie lineam DABG; circuli ergo est ipsa, centrum autem  
ipsius K, quoniam supposebatur superficies talis. non*

'Αρχιμήδους 'Οχουμένων α'  
( 'Αρχιμήδους 'Υδροστατικῆς βιβλίον 1 )

"Ας ὑποτεθῇ ὅτι ἐν ὑγρὸν ἔχει τοιαύτην φυσικὴν ἰδιότητα, ὥστε ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ τῶν κειμένων ὁμοιομόρφως καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ ἐν πρὸς τὸ ἄλλο, τὸ ὀλιγώτερον πιεζόμενον νὰ ἐξωθῇται ὑπὸ τοῦ περισσότερον πιεζομένου, καὶ ἕκαστον δὲ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ νὰ πιέζεται κατὰ κάθετον (πρὸς τὰ κάτω) ὑπὸ τοῦ ὑπεράνω αὐτοῦ εὐρισκομένου ὑγροῦ, ἐὰν τὸ ὑγρὸν δὲν ἐμποδίζεται ὑπὸ τινος καὶ δὲν πιέζεται ὑπὸ ἄλλου τινός.

1

'Εὰν ἐπιφάνειά τις τέμνηται δι' ἐπιπέδου διερχομένου πάντοτε διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἡ τομὴ εἶναι

περιφέρεια κύκλου, ὅστις ἔχει ὡς κέντρον τὸ σημεῖον αὐτὸ διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι σφαίρας ἐπιφάνεια.

"Εστω ὅτι ἐπιφάνειά τις τέμνεται δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ σημείου Κ καὶ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι περιφέρεια κύκλου μὲ κέντρον τὸ Κ. Λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τῆς τομῆς ἐπιφάνεια εἶναι ἐπιφάνεια σφαίρας. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ὅλαι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι εὐθεῖαι δὲν θὰ εἶναι ἴσαι. "Εστω ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΚΒ εἶναι ἄνισοι. "Ας ἀχθῇ διὰ τῶν ΚΑ, ΚΒ ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ τομὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἡ γραμμὴ ΔΑΒΓ. Τότε εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἐπιφανείας ἡ τομὴ περι-

*sunt ergo inaequales lineae KA, KB; necessarium igitur est, superficiem esse sperae superficiem.*

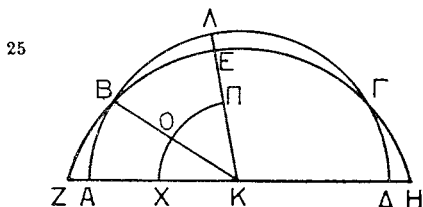
## II.

*Omnis humidi consistentis ita, ut maneat inmotum, su-*  
*perfacies habebit figuram sperae habentis centrum idem*  
*cum terra.*

*Intelligatur enim humidum consistens ita, ut maneat non motum, et secetur ipsius superficies plano per centrum terrae, sit autem terrae centrum  $K$ , superficiei autem sectio 10 linea  $ABGD$ . dico itaque, lineam  $ABGD$  circuli esse periferiam, centrum autem ipsius  $K$ .*

*si enim non est, rectae a K ad lineam ABGD occurrentes non erunt aequales. sumatur itaque aliqua recta, quae*  
H 320 *est quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD*  
15 *maior, quarundam autem minor, et centro quidem K, distantia autem sumptae lineae circulus describatur; cadet*  
*igitur periferia circuli habens hoc quidem extra lineam*  
*ABGD, hoc autem intra, quoniam quae ex centro quarundam*  
20 *quidem a K occurrentium ad lineam ABGD est maior,*  
*quarundam autem minor. sit igitur descripti circuli periferia*  
*quae ZBH, et a B ad K recta ducatur, et copulentur*  
*quae ZK, KEL aequales facientes angulos, describatur autem*  
*et centro K periferia quaedam quae XOP in plano et in*

*humido; partes itaque  
humidi quae secundum  
XOP periferiam ex ae-  
quo sunt positae et con-  
tinue inuicem. et pre-  
muntur quae quidem*





φέρεια κύκλου με κέντρον τὸ Κ· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισοι αἱ γραμμαὶ ΚΑ, ΚΒ· εἶναι ἄρα ἡ ἐπιφάνεια, σφαίρας ἐπιφάνεια.

2

Ἡ ἐπιφάνεια, οἷουδῆποτε ἰσοπύκνου ὑγροῦ, εὕρισκομένη ἐν ἡρεμῇ, εἶναι σφαιρικὴ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας αὐτῆς συμπίπτει πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς.

Ἄς νοήσωμεν ὅτι ὑπάρχει ὑγρόν τι ἐν ἡρεμίᾳ καὶ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τέμνεται δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἔστω δὲ τὸ κέντρον τῆς γῆς Κ καὶ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ. Λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ εἶναι περιφέρεια κύκλου με κέντρον τὸ Κ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι αἱ ἐκ τοῦ Κ πρὸς τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἄνισοι. Ἄς ληθῇ μία εὐθεῖα γραμμὴ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν μερικῶν ἐκ τοῦ Κ πρὸς τὴν ΑΒΓΔ ἀγομένων εὐθειῶν, μικροτέρα δὲ μερικῶν ἄλλων ἐξ αὐτοῦ, καὶ ἃς γραφῇ με αὐτὴν ὡς ἀκτῖνα καὶ κέντρον τὸ Κ κύκλος· ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου αὐτοῦ θὰ πίπτῃ ἐν μέρει μὲν ἐκτός, ἐν μέρει δὲ ἐντὸς τῆς γραμμῆς ΑΒΓΔ, ἐπεὶδὴ ἡ ἀκτὶς εἶναι μεγαλυτέρα μερικῶν καὶ μικροτέρα ἄλλων πρὸς αὐτὴν ἐκ τοῦ Κ ἀγομένων γραμμῶν. Ἡ περίμετρος τοῦ γραφέντος κύκλου ἔστω ΖΒΗ καὶ ἃς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Κ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΖΚ, ΚΕΛ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν με ἐκείνην γωνίας ἴσας. Ἄς γραφῇ ἀκόμη με κέντρον τὸ Κ τὸ τόξον ΧΟΠ εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ εἰς τὸ ὑγρόν· τότε τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὸ τόξον ΧΟΠ, θὰ εὕρισκωνται μεταξὺ των ὁμοιομόρφως καὶ ἄνευ κενῶν, τὰ τμήματα ὁμῶς τὰ εἰς τὸ τό-

*secundum XO periferiam humido quod secundum ZB locum, quae autem secundum periferiam OP humido quod secundum BE locum; inaequaliter igitur premuntur partes humidi quae secundum periferiam XO ei quae*

- 5 [ἦ] κατὰ τὰν ΟΠ· ὥστε ἐξωθήσον | ται τὰ ἦσσον θλιβόμενα  
ὑπὸ τῶν | μᾶλλον θλιβομένων· οὐ μένει ἄρα | τὸ ὑγρόν. ὑπέ-  
κειτο δὲ καθεστα | κὸς εἶμεν ὥστε μένειν ἀκίνη | τον· ἀνα-  
γκαῖον ἄρα τὰν ΑΒΓΔ | γραμμὰν κύκλον περιφέρειαν εἶ- |  
μεν καὶ κέντρον αὐτᾶς τὸ Κ. ὁμοί | ως δὴ δειχθήσεται καί,  
10 ὅπως κα | ἄλλως ἂ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἐ | πιπέδῳ τμαθῇ διὰ  
τοῦ κέντρον | τᾶς γᾶς, ὅτι ἂ τομὰ ἐσσεῖται κύ | κλον περιφέ-  
φείρια, καὶ κέντρον | αὐτᾶς ἐσσεῖται, δ καὶ τᾶς γᾶς | ἐστι  
κέντρον. δῆλον οὖν, ὅτι ἂ ἐπιφά | νεια τοῦ ὑγροῦ καθεστακό-  
τος | ἀκινήτου σφαίρας ἔχει τὸ σχῆ | μα τὸ αὐτὸ κέντρον  
15 ἔχούσας τᾷ | γᾶ, ἐπειδὴ τοιαῦτα ἐστίν, ὥστε | <διὰ τοῦ αὐτοῦ  
σαμεῖον τμαθεῖς> | αν τὰν τομὰν ποιεῖν περιφέρει | αν κύκλον  
κέντρον ἔχοντος τὸ | σαμεῖον, δι' οὗ τέμνεται τῷ ἐπιπέδῳ.

γ'

Τῶν στερεῶν μεγεθέων τὰ | ἰσοβαρέοντα τῷ ὑγρῷ ἀφε-  
H 322 θέν | τα εἰς τὸ ὑγρὸν καταβασοῦνται, | ὥστε τᾶς ἐπιφανείας  
τᾶς τοῦ ὑ | γροῦ μὴ ὑπερέχειν μηδέν, καὶ | οὐκέτι οἰσθήσον-  
ται ἐπὶ τὰ κάτω.

ἀφείσθω γάρ τι στερεὸν μέ | γθος εἰς τὸ ὑγρὸν τῶν ἰσο-  
βαρέων | τῷ ὑγρῷ, καί, εἰ δυνατόν, ὑπερεχέ | τω τι αὐτοῦ  
25 τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα | νείας, καθεστάτω δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε |  
μένειν ἀκίνητον. νοείσθω δὴ τι ἐ | πίπεδον ἐκβεβλημένον διὰ  
τε | τοῦ κέντρον τᾶς γᾶς καὶ τοῦ ὑγροῦ | καὶ διὰ τοῦ στερεοῦ

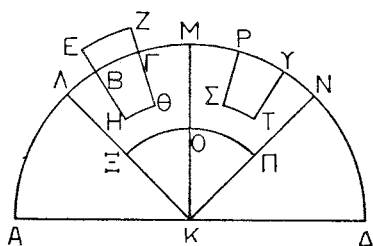
ξον ΧΟ θὰ πιέζωνται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ὑπὸ τὸν τόπον ΖΒ, ἐν ᾧ τὰ τμήματα εἰς τὸ τόξον ΟΠ θὰ πιέζωνται ὑπὸ τὸν τόπον ΒΕ, ὅποτε ὑφίστανται ἄνισον πίεσιν τὰ τμήματα τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ τόξα ΧΟ

καὶ ΟΠ· ὥστε θὰ ἐξωθηθῶσι καὶ τὰ ὀλιγώτερον πιεζόμενα ὑπὸ τῶν περισσότερον πιεζομένων· δὲν ἰσορροπεῖ ἄρα τὸ ὑγρὸν· ὑπετέθη δὲ ὅτι ἰσορροπεῖ, ὥστε νὰ μένη ἀκίνητον· εἶναι ἄρα ἀναγκαῖον ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ νὰ εἶναι περιφέρεια κύκλου καὶ κέντρον αὐτῆς νὰ εἶναι τὸ Κ. Ὅμοιως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἂν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον τμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἡ τομὴ θὰ εἶναι περιφέρεια κύκλου, καὶ κέντρον αὐτῆς θὰ εἶναι, ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τῆς γῆς κέντρον. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἡρεμοῦντος ὑγροῦ ἔχει τὸ σχῆμα ἀκινήτου σφαίρας ἐχούσης τὸ αὐτὸ κέντρον πρὸς τὴν γῆν, ἐπειδὴ εἶναι τοιαύτη, ὥστε τμηθεῖσα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (πάντοτε) νὰ σχηματίζῃ τομὴν περιφέρειαν κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸ σημεῖον διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

3

Ἐκ τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρὸν ἀφθεέντα εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ βυθισθῶσι τόσον, ὥστε νὰ μὴ ὑπερέχῃσι καθόλου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀκόμη δὲν θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ κάτω.

Διότι ἂς ἀφθεῇ στερεόν τι μέγεθος εἰς ὑγρὸν ἐκ τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρὸν, καί, εἰ δυνατόν, ἂς ὑπερέχῃ κατὰ τι τὸ στερεὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἂς εὑρίσκηται δὲ τὸ ὑγρὸν ἐν ἡρεμίᾳ. Ἄς νο-



θηθῇ τώρα ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ διὰ

μεγέθεος, τομὰ | δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὕ | γροῦ ἁ  
 ΑΒΓΔ περιφέρεια, τοῦ δὲ στερεοῦ μεγέθεος τὸ ΕΖΗΘ σχῆ- |  
 μα, κέντρον δὲ τᾶς γᾶς τὸ Κ. ἔστω | δὴ τοῦ μὲν στερεοῦ τὸ μὲν  
 ΒΓΗΘ | ἐν τῷ ὕγρῳ, τὸ δὲ ΒΕΖΓ ἐκτός. νο | εἰσθω δὴ τὸ  
 5 στερεὸν σχῆμα περιλαμ | βανόμενον πυραμοειδεῖ βάσιν | μὲν  
 ἔχοντι τὸ παραλληλόγραμ | μον τὸ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὕ- |  
 γροῦ, κορυφὰν δὲ τὸ κέντρον τᾶς γᾶς, | <τομὰ δὲ ἔστω τοῦ τε  
 ἐπιπ>έδου, ἐν ᾧ | ἔστιν ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, καὶ τῶν | τᾶς  
 πυραμίδος ἐπιπέδων αἱ | ΚΛ, ΚΜ. γεγράφθω τις ἄλλας σφαί- |  
 10 ρας ἐπιφάνεια περὶ κέντρον | τὸ Κ ἐν τῷ ὕγρῳ τῷ ὑπὸ τοῦ  
 ΕΖΗΘ | καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδῳ, λελάφθω | δέ τις καὶ ἄλλα  
 πυραμὶς ἴσα καὶ ὁ | μοία τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ | στερεὸν συνε-  
 χῆς αὐτᾷ, τομὰ δὲ | ἔστω τῶν ἐπιπέδων αὐτᾶς αἱ | ΚΜ, ΚΝ, καὶ  
 ἐν τῷ ὕγρῳ νοεῖσθω | τι μέγεθος τοῦ ὕγροῦ ἀπολαμ | βανόμενον  
 15 τὸ ΡΣΤΥ ἴσον καὶ ὁ | μοιον τῷ στερεῷ τῷ κατὰ τὰ | Β, Η,  
 Η 324 Θ, Γ, ὃ ἔστιν αὐτοῦ ἐν τῷ ὕγρῳ. | τὰ δὴ μέρη τοῦ ὕγροῦ τὰ  
 τε ἐν | τᾷ πρώτῃ πυραμίδι τὰ ὑπὸ | τὰν ἐπιφάνειαν, ἐν ᾧ ἔστιν  
 ἁ ΕΟ | περιφέρεια, καὶ τὰ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ, | ἐν ᾧ ἔστιν ὁ ΠΟ,  
 ἐξ ἴσου τέ ἐντι κεί | μενα καὶ συνεχέα. οὐχ ὁμοίως δὲ | θλίβον-  
 20 ται· τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὰν | ΕΟ θλίβεται τῷ στερεῷ τῷ ΘΗ |  
 ΕΖ καὶ τῷ ὕγρῳ τῷ μεταξὺ τᾶν | ἐπιφανειᾶν τᾶν κατὰ τὰς  
 ΕΟ, | ΑΜ καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐ | πιπέδων, τὸ δὲ κατὰ τὰν  
 ΠΟ τῷ | ὕγρῳ τῷ μεταξὺ τᾶν ἐπιφα | νειᾶν τᾶν κατὰ τὰς  
 ΠΟ, ΜΝ καὶ | τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων. ἔλασσον δὲ ἐσ-  
 25 σεῖται τὸ βάρος τοῦ ὕ | γροῦ τοῦ κατὰ τὰς ΜΝ, ΟΠ· τὸ | μὲν  
 γὰρ κατὰ τὸ ΡΣΤΥ ἔλασσόν | ἔστι τοῦ ΕΖΗΘ στερεοῦ· αὐτῷ  
 γὰρ | τῷ κατὰ τὸ ΗΒΓΘ ἴσον ἔστιν διὰ | τὸ τῷ μεγέθει ἴσον  
 εἶμεν καὶ ἰ | σόβαρὲς ὑποκεῖσθαι τὸ στερεὸν | <τῷ ὕγρῳ· τὸ  
 δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ> | ἴσον ἐστί. δῆλον οὖν, ὅτι ἐξω | θήσεται  
 30 τὸ μέρος τὸ κατὰ τὰν | ΟΠ περιφέρειαν ὑπὸ τοῦ κατὰ | τὰν

τοῦ ὕγρου καὶ διὰ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, τομὴ δὲ ἔστω τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου τὸ τόξον κύκλου ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ στερεοῦ μεγέθους τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ, κέντρον δὲ τῆς γῆς τὸ Κ. Ἔστω δὲ τοῦ μὲν στερεοῦ τὸ ΒΓΗΘ ἐντὸς τοῦ ὕγρου, τὸ δὲ ΒΕΖΓ ἐκτός. Ἄς νοηθῇ λοιπὸν τὸ στερεὸν ὡς περιλαμβανόμενον ὑπὸ σχήματος ἔχοντος βάσιν μὲν πυραμοειδῇ τὸ παραλληλόγραμμον τὸ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγρου, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς γῆς, τομὴ δὲ ἔστω καὶ τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει τὸ τόξον ΑΒΓΔ καὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος αἱ εὐθεῖαι ΚΛ, ΚΜ. Ἄς γραφῇ δὲ ἐπιφάνεια ἄλλης σφαίρας περὶ κέντρον τὸ Κ εἰς τὸ ὕγρον τὸ ὑπὸ τοῦ ΕΖΗΘ ὀριζόμενον καὶ ἃς τέμνηται δι' ἐπιπέδου, ἃς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλη πυραμὶς ἴση καὶ ὁμοία πρὸς τὴν περιλαμβάνουσιν τὸ στερεόν, συνεχῆς πρὸς αὐτήν, τομὴ δὲ ἔστω τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς αἱ εὐθεῖαι ΚΜ, ΚΝ, καὶ ἃς νοηθῇ εἰς τὸ ὕγρον μέγεθος τι ἐξ ὕγρου τὸ ΡΣΤΥ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ στερεὸν τὸ κατὰ τὸ Β, Η, Θ, Γ, τὸ εὐρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ὕγρου· τὰ μέρη λοιπὸν τοῦ ὕγρου καὶ τὰ εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα, τὰ εὐρισκόμενα ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχει τὸ τόξον ΕΟ, καὶ τὰ εἰς τὴν ἄλλην, ὅπου ὑπάρχει ἡ ΠΟ, ὑπάρχουσιν εὐρισκόμενα ἐξ ἴσου καὶ ἐν συνεχείᾳ. Δὲν πιέζονται δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· διότι τὸ μὲν κατὰ τὴν ΕΟ πιέζεται κατὰ τὸ στερεὸν ΘΗ|ΕΖ καὶ κατὰ τὸ ὕγρον τὸ μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κατὰ τὰς ΕΟ, |ΑΜ καὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος, τὸ δὲ κατὰ τὴν ΠΟ πιέζεται κατὰ τὸ ὕγρον τὸ μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κατὰ τὰς ΠΟ, ΜΝ καὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος. Θὰ εἶναι δὲ μικρότερον τὸ βάρος τοῦ ὕγρου τοῦ κατὰ τὰς ΜΝ, ΟΠ· διότι τὸ μὲν κατὰ τὸ ΡΣΤΥ εἶναι μικρότερον τοῦ στερεοῦ ΕΖΗΘ· διότι πρὸς αὐτὸ εἶναι ἴσον τὸ κατὰ τὸ ΗΒΓΘ, διότι ὑπετέθη, ὅτι τὸ στερεὸν εἶναι ἴσον κατὰ τὸ μέγεθος καὶ ἰσοβαρὲς πρὸς τὸ ὕγρον· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ ἐξωθηθῇ τὸ μέρος τὸ κατὰ τὸ τόξον ΟΠ ὑπὸ τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΟΕ, καὶ τὸ ὕγρον θὰ

ΟΞ περιφέρειαν, καὶ οὐκ ἔσσει | ται τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. ὅ | πό-  
 κειται δὲ ἀκίνητον ἐόν· οὐκ ἄ | ρα ὑπερέξει τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπι- |  
 φανείας οὐδὲν τοῦ στερεοῦ με | γέθεος. καταδὸν δὲ τὸ στερε- |  
 ὸν οὐκ οἰσθήσεται ἐς τὰ κάτω· | ὁμοίως γὰρ πάντα θλιβησοῦν-  
 5 τι | τὰ μέρεια τοῦ ὑγροῦ τὰ ἐξ ἴσου | κείμενα διὰ τὸ ἰσοβαρέα  
 εἶμεν | τὸ στερεὸν καὶ τὸ ὑγρόν.

δ'

Τῶν στερεῶν μεγεθῶν ὁ κα | κουφότερον ἢ τοῦ ὑγροῦ,  
 Η 326 ἀφεθὲν | ἐς τὸ ὑγρὸν οὐ καταδύσεται ὅλον, | ἀλλὰ ἔσσειται τι  
 10 αὐτοῦ ἐκτὸς τὰς | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ἔστω γὰρ | στερεὸν μέγεθος κουφότερον | τοῦ ὑγροῦ καὶ  
 ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν | δεδυκέτω ὅλον, εἰ δυνατόν, καὶ μη | δὲν  
 αὐτοῦ ἔστω ἐκτὸς τὰς τοῦ ὅ | γρου ἐπιφανείας, καθεστακέτω |  
 δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. | νοείσθω δὴ τι ἐπίπεδον  
 15 ἐκβε | βλημένον διὰ τοῦ κέντρου τὰς | γὰς καὶ διὰ τοῦ ὑγροῦ  
 καὶ τοῦ | στερεοῦ μεγέθεος, τεμνέσθω | δὲ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου  
 τούτου ἢ μὲν | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνεια κατὰ τὰν | ΑΒΓ περιφέ-  
 ρειαν, τὸ δὲ στερεὸν | μέγεθος κατὰ τὸ σχῆμα, ἐν ᾧ Ζ, κέν- |  
 20 τρον δὲ ἔστω τὰς γὰς τὸ Κ, νοείσθω | δέ τις πυραμὶς περι-  
 λαμβάνον | σα τὸ Ζ σχῆμα, καθ' ἃ καὶ πρότε | ρον, κορυφὰν ἔ-  
 χουσα τὸ Κ σαρμεῖ | ον, τεμνέσθω δὲ αὐτὰς τὰ ἐπίπεδ | α ὑπὸ  
 τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κατὰ | τὰς ΑΚ, ΚΒ, λελάφθω δέ τις  
 καὶ | ἄλλα ἴσα πυραμὶς καὶ ὁμοία ταύ | τα, τεμνέσθω δὲ αὐ-  
 τὰς τὰ ἐπίπε | δα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰς | ΚΒ, ΚΓ,  
 25 γεγράφθω δέ τις καὶ ἄλλας | σφαίρας ἐπιφάνεια ἐν τῷ ὑγρῷ |  
 περὶ κέντρον τὸ Κ, ὑποκάτω δὲ τοῦ | στερεοῦ μεγέθεος, τε-  
 μνέσθω δ' αὖ | τα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κα | τὰ τὰν ΕΟΠ

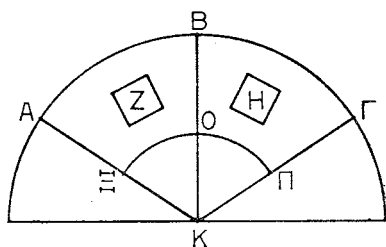
εὐρίσκεται ἐν ἡρεμίᾳ. Ὑπετέθη δὲ ὅτι δὲν ἦτο ἐν ἡρεμίᾳ· δὲν θὰ ὑπερέχη ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ κατ' οὐδὲν τὸ στερεὸν μέγεθος. Ἀλλὰ καὶ πρὸς τὰ κάτω δὲν θὰ φερθῇ τὸ στερεόν· διότι ὅλα τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ θὰ πιεσθῶσιν ὁμοίως, τὰ ἐξ ἴσου κείμενα, διότι τὸ στερεὸν καὶ τὸ ὑγρὸν εἶναι ἰσοβαρῇ.

4

Ἐκ τῶν στερεῶν μεγεθῶν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν δὲν θὰ βυθισθῇ ὅλον, ἀλλὰ θὰ μείνῃ μέρος τι αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Διότι ἔστω στερεὸν μέγεθος ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ἃς βυθισθῇ ὅλον, εἰ δυνατόν, καὶ οὐδὲν μέρος αὐτοῦ ἔστω ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἃς ἀφεθῇ δὲ τὸ ὑγρὸν νὰ παραμένῃ ἐν ἡρεμίᾳ. Ἄς νοηθῇ τῶρα ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ διὰ τοῦ ὑ-

γροῦ καὶ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, ἃς τέμνηται δὲ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓ, τὸ δὲ στερεὸν μέγεθος κατὰ τὸ σχῆμα εἰς τὸν ὁποῖον ὑπάρχει τὸ γράμμα Ζ, ἔστω δὲ κέντρον τῆς γῆς τὸ Κ, ἃς νοηθῇ δὲ



πυραμῖς τις περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα Ζ, ὥς καὶ πρότερον ἐλέχθη, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ, ἃς τέμνωνται δὲ τὰ ἐπίπεδα αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΚ, ΚΒ, ἃς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλη τις πυραμῖς ἴση καὶ ὁμοία πρὸς ταύτην, ἃς τέμνωνται δὲ τὰ ἐπίπεδα αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰς ΚΒ, ΚΓ, ἃς γραφῇ δὲ καὶ ἄλλη ἐπιφάνεια σφαίρας εἰς τὸ ὑγρὸν περὶ κέντρον τὸ Κ, ὑποκάτω δὲ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, ἃς τέμνηται δὲ αὕτη ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπι-

περιφέρειαν, νοείσθω | δὲ καὶ μέγεθος ἀπολαμβάνο | μενον τοῦ  
 ὑγροῦ τὸ κατὰ τὸ *H* ἐν τῇ | ὕστερον πυραμίδι ἴσον τῷ κατὰ |  
 τὸ *Z* στερεῶ· τὰ δὲ μέρη τοῦ ὕ | γροῦ, τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ πυρα- |  
 μίδι τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν | κατὰ τὰν *ΞΟ* περιφέρειαν  
 5 καὶ τοῦ | ἐν τῇ δευτέρῃ τὰ ὑπὸ τὰν ἐπι | φάνειαν τὰν κατὰ τὰν  
*ΟΠ* περι | φέρειαν ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα | καὶ συνεχέα ἀλ-  
 Η 328 λάλοις. οὐχ ὁμοίως | δὲ θλίβονται· τὸ μὲν γὰρ ἐν τῇ πρώτῃ | τῇ  
 πυραμίδι θλίβεται τῷ κατὰ | τὸ *Z* στερεῶ μεγέθει καὶ τῷ  
 περιέ | χοντι ὑγρῷ αὐτὸ καὶ ἐόντι ἐν τῷ | τόπῳ τῆς πυραμίδος  
 10 τῷ κατὰ | τὰ *A, B, O, Ξ*, τὸ δ' ἐν τῇ ἐτέρῃ πυραμίδι θλίβεται  
 τῷ ὑγρῷ τῷ πε | ριέχοντι αὐτὸ καὶ ἐόντι τῆς πυρα | μίδος ἐν τῷ  
 τόπῳ τῷ κατὰ | τὰ *Π, O, B, Γ*, ἔστι δὲ τὸ βάρος τὸ κατὰ | <τὸ  
*Z* ἔλασσον τοῦ βάρους τοῦ κατὰ τὸ> *H*, ἐπειδὴ τῷ μὲν μεγέθει  
 ἴσον | ἔστιν, κορυφώτερον δὲ ὑπόκειται | τὸ στερεὸν μέγεθος εἰ-  
 15 μεν τοῦ ὕ | γροῦ, τὰ δὲ τοῦ περιέχοντος ὑγροῦ τὰ | *Z, H* μεγέ-  
 θεα ἐν ἑκατέρῃ τῶν πυρα | μίδων ἴσα· μᾶλλον οὖν θλιβή | σεται  
 τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ τὸ ὑπὸ | τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν | *ΟΠ*  
 περιφέρειαν· ἐξωθήσει οὖν | τὸ ἥσσον θλιβόμενον, καὶ οὐ με- |  
 νεῖ τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. ὑπέκει | το δέ· οὐκ ἄρα καταδύσεται  
 20 ὅλον, | ἀλλ' ἐσσεῖται τι αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ε'

Τῶν στερεῶν μεγεθέων δ κα ἧ κορυ | φώτερον τοῦ ὑγροῦ,  
 ἀφεθὲν εἰς τὸ ὕ | γρὸν ἐς τοσοῦτο καταδύσεται, ὥστε | ταλι-  
 κοῦτον ὄγκον τοῦ ὑγροῦ, ἀλίκοις | ἔστιν ὁ τοῦ καταδευκότος  
 25 ὄγκος, | ἴσον βάρος ἔχειν ὅλῳ τῷ μεγέθει.

κατεσκευάσθω ταῦτά τοις πρότε | ρον, καὶ ἔστω τὸ ὑγρὸν  
 ἀκίνητον, | ἔστω δὲ κορυφώτερον τοῦ ὑγροῦ τὸ *EZ* | *HΘ* μέγε-  
 θος. ἐπεὶ οὖν ἀκίνητόν ἐστιν | τὸ ὑγρὸν, ὁμοίως θλιβήσεται τὰ |



πέδου κατὰ τὸ τόξον  $\Xi O \Pi$ , ἃς νοηθῇ δὲ τὸ ἀπολαμβανόμενον μέγεθος τοῦ ὑγροῦ τὸ κατὰ τὸ  $H$  εἰς τὴν δευτέραν ληφθεῖσαν πυραμίδα ἴσον πρὸς τὸ κατὰ τὸ  $Z$  στερεόν· θὰ εἶναι λοιπὸν τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ τοῦ εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα, τὰ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὸ τόξον  $\Xi O$  καὶ τοῦ εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα τὰ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὸ τόξον  $O \Pi$ , ἐξ ἴσου κείμενα καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς ἄλληλα. Δὲν πιέζονται δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· διότι τὸ μὲν εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα πιέζεται κατὰ τὸ στερεὸν μέγεθος  $Z$  καὶ τὸ περιέχον αὐτὸ ὑγρὸν, τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸν τόπον τῆς πυραμίδος τὸν κατὰ τὰ  $A, B, O, \Xi$ , τὸ δὲ εἰς τὴν ἄλλην πυραμίδα πιέζεται κατὰ τὸ ὑγρὸν τὸ περιέχον αὐτό, τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸν τόπον τῆς πυραμίδος τὸν κατὰ τὰ  $\Pi, O, B, \Gamma$ , εἶναι δὲ τὸ βάρος τὸ κατὰ τὸ  $Z$  μικρότερον τοῦ βάρους τοῦ κατὰ τὸ  $H$ , ἐπειδὴ πρὸς μὲν τὸ μέγεθος εἶναι ἴσον, ὑπετέθη δὲ τὸ στερεὸν μέγεθος, ὅτι εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, τὰ δὲ μεγέθη τοῦ περιέχοντος ὑγροῦ τὰ  $Z, H$ , εἰς ἐκάστην τῶν πυραμίδων εἶναι ἴσα· θὰ πιεσθῇ λοιπὸν περισσότερον τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ τὸ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὸ τόξον  $O \Pi$ · θὰ ἐξωθήσῃ λοιπὸν τὸ ὀλιγώτερον πιεζόμενον, καὶ δὲν θὰ παραμείνῃ τὸ ὑγρὸν ἐν ἡρεμίᾳ. Ὑπετέθη δὲ ὅτι ἡρεμεῖ· δὲν θὰ βυθισθῇ ἄρα ὅλον, ἀλλὰ μέρος τι αὐτοῦ θὰ εὐρίσκηται ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

5

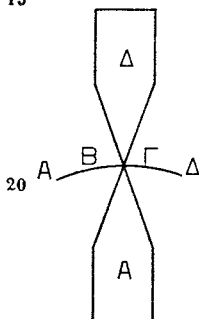
Ἐκ τῶν στερεῶν μεγεθῶν, τὸ ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ βυθισθῇ τόσον, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ ὁ ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ βυθισθέντος στερεοῦ, νὰ ἔχῃ ἴσον βάρος πρὸς τὸ βάρος ὅλου τοῦ μεγέθους.

Ἄς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ προηγούμενα, καὶ ἔστω τὸ ὑγρὸν ἐν ἡρεμίᾳ, ἔστω δὲ τὸ μέγεθος  $EZH\Theta$  ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὑγρὸν εὐρίσκεται ἐν ἡρεμίᾳ, τὰ μέρη αὐτοῦ

μέρεα αὐτοῦ τὰ ἐξ ἴσον κείμενα· | ὁμοίως ἄρα θλιβήσεται  
τὸ ὑγρὸν | τὸ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν καὶ τὰς  $\Xi O$  καὶ  $\Pi O$   
H 330 περιφερείας· ὥσ' | τε ἴσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ θλίβον | ται. ἔστι  
δὲ καὶ τοῦ ὑγροῦ τὸ βάρος | τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι χωρὶς |  
5 τοῦ  $BH\Theta\Gamma$  στερεοῦ ἴσον τῷ βάρει τῷ | <τοῦ ἐν τῇ ἐτέρῃ  
πυραμίδι> | χωρὶς τοῦ  $P\Sigma T Y$  ὑγροῦ· ὁῦν, ὅτι | τὸ τοῦ  
 $EZH\Theta$  μεγέθος βάρος ἴσον | ἐστὶ τῷ τοῦ  $P\Sigma T Y$  ὑγροῦ βά-  
ρει. φα | νερόν οὔν, ὅτι ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ | ὑγροῦ, ἀλίκον  
ἐστὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ στε | ρεοῦ μεγέθους, ἴσον βάρος ἔχει | ὅλῳ  
10 τῷ μεγέθει.

ζ'

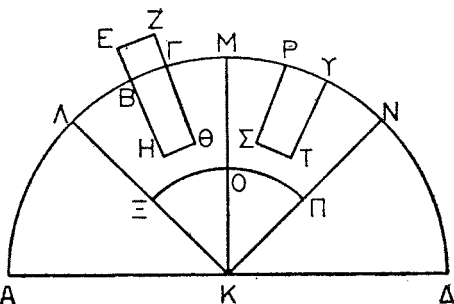
Τὰ κορυφώτερα στερεὰ τοῦ ὑγροῦ | βιασθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν  
ἀναφέρεται | τοσαύτα βία ἐς τὸ ἄνω, ὅσον | ἐστὶ τὸ βάρος,  
ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ | μεγέθους τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον |  
15 ἔχον τῷ μεγέθει.



ἔστω τι μέγεθος | τὸ  $A$   
κορυφώτερον τοῦ ὑγροῦ, ἔστω |  
δὲ τοῦ μὲν μεγέθους τοῦ ἐν ᾧ  
 $A$  | βάρος τὸ  $B$ , τοῦ δὲ ὑγροῦ  
τοῦ ἴσον ὄγ | κον ἔχοντος τῷ  $A$   
τὸ  $B\Gamma$ . δεικτέον, ὅτι | τὸ  $A$  μέ-  
γεθος βιασθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν ἀ-  
νοισεῖται ἐς τὸ ἐπάνω τοσαύτα  
βία, | ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος τὸ  $\Gamma$ .

25 λελάφθω γάρ | τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ  $\Delta$  βάρος ἴσον | ἔχον  
τῷ  $\Gamma$ . τὸ δὲ μέγεθος τὸ ἐξ ἀμ | φοτέρων τῶν ἐν οἷς  $A, \Delta$  μεγα-  
θέων | ἐς τὰ αὐτὰ συντεθέντων κορυφώτερόν | ἐστι τοῦ ὑγροῦ·  
ἔστι γὰρ τοῦ μὲν με | γέθους τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρος | τὸ

τὰ εὐρισκόμενα εἰς ἴσας θέσεις θὰ πιέζωνται ὁμοίως· ὁμοίως ἄρα θὰ πιεσθῇ τὸ ὑγρὸν τὸ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὰ τόξα  $\Xi\Theta$  καὶ  $\Pi\Theta$ · ὥστε τὸ βάρος ὑπὸ τὸ ὁποῖον πιέζονται εἶναι ἴσον. Εἶναι δὲ καὶ τοῦ ὑγροῦ τὸ βάρος τοῦ εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα, ἄνευ τοῦ στερεοῦ  $B\Theta\Gamma$ , ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ εἰς τὴν ἄλλην πυραμίδα ὑγροῦ, ἄνευ τοῦ ὑγροῦ  $\rho\sigma\tau\gamma$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ βάρος τοῦ μεγέθους  $EZH\Theta$  εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ  $\rho\sigma\tau\gamma$ . Φανερόν λοιπὸν εἶναι, ὅτι τόσος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ὅσον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ βυθισθέντος στερεοῦ, ἔχει βάρος ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὅλου μεγέθους.



6

Τὰ ἐλαφρότερα τοῦ ὑγροῦ στερεὰ τιθέμενα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρονται μὲ τόσην δύναμιν πρὸς τὰ ἄνω, ὅσον εἶναι τὸ βάρος, καθ' ὃ τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον πρὸς τὸ μέγεθος εἶναι βαρύτερον τοῦ μεγέθους.

Ἐστω μέγεθος τι τὸ  $A$  ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔστω δὲ  $B$  τὸ βάρος τοῦ μεγέθους  $A$ , τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ  $A$  βάρος τὸ  $\Gamma$ . Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ μέγεθος  $A$  τιθέμενον εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ ὑφίσταται ἄνωσιν μὲ τόσην δύναμιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος  $\Gamma$ .

Διότι ἂς ληφθῇ μέγεθος τι, ὅπου τὸ  $\Delta$ , ἔχον ἴσον βάρος πρὸς τὸ  $\Gamma$ · τὸ μέγεθος λοιπὸν τὸ ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν  $A$ ,  $\Delta$  θεωρούμενον ὡς  $\Xi$ ν θὰ εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ· διότι τὸ βάρος τοῦ μεγέθους τοῦ

ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον | ἔχοντος αὐτῷ μείζον τοῦ  
 332 ΒΓ διὰ τὸ τοῦ ἴσον ἔχοντος ὄγκον τῷ τοῦ | Α τὸ βάρος εἶμεν  
 τὸ ΒΓ. ἄφε|θὲν οὖν ἐς τὸ ὑγρὸν τὸ μέγεθος | τὸ ἐξ ἀμφοτέρων  
 τῶν Α, Δ συγ|κείμενον ἐς τοσοῦτον δύσεται, | <ἔστε κα τα-  
 5 λικοῦτος ὄγκος τοῦ> | ὑγροῦ, ἀλίκον καὶ τὸ δεδυνκὸς τοῦ |  
 μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχη τῷ | ὅλῳ μεγέθει· δέδεικται γὰρ  
 τοῦ | το. ἔστω δὴ ἐπιφάνειά τινος ὑ | γροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια.  
 ἐπεὶ | οὖν ὁ ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ ὑ | γροῦ, ἀλίκον ἐστὶ τὸ Α  
 μέγεθος, | ἴσον βάρος ἔχει τοῖς Α, Δ μεγέθε | σιν, δηλον, ὅτι  
 10 τὸ δεδυνκὸς αὐτοῦ | ἐσσεῖται τὸ Α μέγεθος, τὸ δὲ λοιπὸν |  
 αὐτοῦ, ἐν ᾧ Α, ἐσσεῖται ὅλον ὑπὲρ | τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας·  
 εἰ γὰρ α | . . . δέδυνκεν τὸ στερεόν, ἔπεται | . . . . . τούτου  
 δεδειγμένον. δη|λον οὖν, ὅτι . . . . . ἐς τὸ ἄνω φέρεται | τὸ Α  
 μέγεθος . . . . . | . . . . . ὑπὸ τοῦ ἄνω τοῦ Δ | ἐς  
 15 τὸ κάτω, ἐπεὶ οὐδέτερον ὑπ' οὐ | δετέρου ἐξωθεῖτο. ἀλλὰ τὸ  
 Α ἐς τὸ | κάτω θλίβει τοσοῦτῳ βάρει, ἀλίκον | ἐστὶ τὸ Γ·  
 ὑπέκειτο γὰρ τὸ βάρος | τοῦ ἐν ᾧ τὸ Α εἶμεν ἴσον τῷ Γ·  
 δη|λον οὖν, ὃ ἔδει δείξαι.

ζ'

20 Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ ἀφεθέντα | εἰς τὸ ὑγρὸν οἰσεῖται  
 Η 334 κάτω, ἔστ' ἂν | καταβᾶντι, καὶ ἐσσοῦνται κονφότε | ρα ἐν τῷ  
 ὑγρῷ τοσοῦτον, ὅσον | ἔχει τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ ταλικοῦ- |  
 τον ὄγκον ἔχοντος, ἀλίκος ἐστὶν | ὁ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος ὄ-  
 γκος.  
 25 ὅτι | μὲν οὖν οἰσεῖται ἐς τὸ κάτω, ἔστ' ἂν | καταβᾶντι,  
 δηλον· τὰ γὰρ ὑπο | κάτω αὐτοῦ μέρη τοῦ ὑγροῦ θλι | βησοῦν-  
 ται μᾶλλον τῶν ἐξ ἴσον αὐτοῖς | κειμένων μερέων, ἐπειδὴ  
 βαρὺ | τερον ὑπόκειται τὸ στερεὸν μέ | γεθος τοῦ ὑγροῦ· ὅτι δὲ

ἀποτελουμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν εἶναι τὸ  $B + \Gamma$ , τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς αὐτὸ (δὴλ.  $A + \Delta$ ) εἶναι μεγαλύτερον τοῦ  $B + \Gamma$ , διότι τὸ βάρος τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ  $A$  εἶναι τὸ  $B + \Gamma$ . Ἐὰν λοιπὸν τὸ μέγεθος τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν  $A + \Delta$  ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ βυθισθῇ τόσον, ὥστε τὸ βάρος ἴσου ὄγκου πρὸς τὸ βυθισθὲν σῶμα ὑγροῦ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος ὅλου τοῦ μεγέθους· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 5). Ἔστω λοιπὸν ἐπιφάνεια ὑγροῦ τινος ἡ κατὰ τὸ τόξον  $AB\Gamma\Delta$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν, ὁ τόσος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ὅσος εἶναι τὸ μέγεθος  $A$ , ἔχει ἴσον βάρος πρὸς τὰ μεγέθη  $A + \Delta$ , εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ βυθισμένον μέρος αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ μέγεθος  $A$ , τὸ δὲ ἄλλο, ὅπου τὸ  $\Delta$ , θὰ εὐρίσκηται ὅλον ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ· ἐὰν λοιπὸν ἡ . . . ἔχει βυθισθῇ τὸ στερεόν, ἔπεται . . . . . διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι . . . . . τὸ μέγεθος  $A$  φέρεται πρὸς τὰ ἄνω . . . . . ὑπὸ τοῦ ἄνω τοῦ  $\Delta$  εἰς τὸ κάτω, ἐπειδὴ κανὲν δὲν ἐξωθεῖτο ὑπὸ κανενός. Ἀλλὰ τὸ  $\Delta$  εἰς τὸ ὑποκάτω πιέζει κατὰ τοσοῦτον βάρος, ὅσον εἶναι τὸ  $\Gamma$ · διότι ὑπετέθη τὸ βάρος ὅπου τὸ  $\Delta$  ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς τὸ  $\Gamma$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθῇ.

## 7

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ στερεὰ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ φέρονται πρὸς τὰ κάτω, ὅσον εἶναι δυνατόν νὰ βυθίζωνται, καὶ θὰ εἶναι ἐλαφρότερα ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τόσον, ὅσον βάρος ἔχει τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον τόσον ὄγκον, ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ μεγέθους.

Ὅτι μὲν λοιπὸν θὰ φέρονται πρὸς τὰ κάτω, ὅσον εἶναι δυνατόν νὰ κατέρχωνται, εἶναι φανερόν· διότι τὰ κάτωθεν αὐτοῦ μέρη τοῦ ὑγροῦ θὰ πιέζωνται περισσότερον ἢ τὰ ἐξ ἴσου πρὸς αὐτὰ κείμενα μέρη τοῦ ὑγροῦ, ἐπειδὴ τὸ στερεὸν μέγεθος ὑπετέθη βαρύτερον τοῦ

κουφότερα | ἐσσοῦνται, ὡς εἴρηται, δειχθήσεται. |

ἔστω τι μέγεθος τὸ  $A$ , ὃ ἐστι βαρύτερον τοῦ | ὑγροῦ, βά-  
ρος δὲ ἔστω τοῦ μὲν ἐν  $\tilde{\omega}$  |  $A$  μεγέθεος τὸ  $B\Gamma$ , τοῦ δὲ ὑγροῦ  
τοῦ | ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ  $A$  τὸ  $B$ . δεικτέον, ὅτι τὸ  $A$   
5 μέγεθος ἐν τῷ ὑγρῷ | ἐὼν βάρος ἔξει ἴσον τῷ  $\Gamma$ .

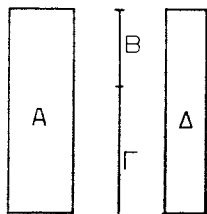
λελά|φθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν  $\tilde{\omega}$  τὸ  $\Delta$  | <κουφότερον  
τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἴσον | ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ, ἔστω> | δὲ τοῦ  
μὲν ἐν  $\tilde{\omega}$  τὸ  $\Delta$  μεγέθεος βάρος | ἴσον τῷ  $B$  βάρει, τοῦ δὲ ὑγροῦ  
τοῦ  $\tilde{\iota}$  | σον ὄγκον ἔχοντος τῷ  $\Delta$  μεγέθει | τὸ βάρος ἔστω ἴσον  
10 τῷ  $B\Gamma$  βάρει. | συντεθέντων δὴ ἐς τὸ αὐτὸ τῶν με | γεθέων,  
ἐν οἷς τὰ  $A$ ,  $\Delta$ , τὸ τῶν συν | αμφοτέρων μέγεθος ἰσοβαρὲς | ἐσ-  
σεῖται τῷ ὑγρῷ· ἔστι γὰρ τῶν | μεγεθέων συναμφοτέρων τὸ  
βάρος | ἴσον συναμφοτέροις τοῖς βάρε | σιν τῷ τε  $B\Gamma$  καὶ τῷ  
 $B$ , τοῦ δὲ  $\tilde{\iota}$  | γροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος ἄμ | φοτέροις τοῖς  
15 μεγέθεσι τὸ βά | ρος ἴσον ἐστὶ τοῖς αὐτοῖς βάρε | σιν. ἀφελέν-  
των οὖν τῶν μεγεθέων ἐς τὸ ὑγρὸν ἰσορροπήσουν | ται τῷ ὑγρῷ  
H 336 καὶ οὔτε εἰς τὸ ἄνω | οἰσοῦνται οὔτε εἰς τὸ κάτω διὸ τὸ  
μὲν ἐν  $\tilde{\omega}$   $A$  μέγεθος οἰσεῖ | <ται ἐς τὸ κάτω καὶ τοσαῦτα βία  
 $\tilde{\iota}$ > | πὸ τοῦ ἐν  $\tilde{\omega}$   $\Delta$  μεγέθεος ἂν | ἐλκεται ἐς τὸ ἄνω, τὸ δὲ ἐν  
20  $\tilde{\omega}$   $\Delta$  | μέγεθος, ἐπεὶ κουφότερόν ἐστι | τοῦ ὑγροῦ, ἀνοισεῖται  
εἰς τὸ ἄνω | τοσαῦτα βία, ὅσον ἐστὶ τὸ  $\Gamma$  βά | ρος· δέδεικται  
γάρ, ὅτι τὰ κουφότερα | τοῦ ὑγροῦ μεγέθεα στερεὰ βιασ | θέντα  
ἐς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρονται | τοσαῦτα βία ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ |  
τὸ βάρος,  $\tilde{\omega}$  βαρύτερόν ἐστι τοῦ | μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσογ-  
25 κον | τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ τῷ  $\Gamma$  βάρει | βαρύτερον τοῦ  $\Delta$   
μεγέθεος τὸ ὑγρὸν | τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ  $\Delta$ · δηλὸν οὖν, ὅτι  
καὶ | τὸ ἐν  $\tilde{\omega}$   $A$  μέγεθος ἐς τὸ κάτω οἰσεῖ | <ται τοσοῦτω βά-  
ρει, ὅσον ἐστὶ τὸ  $\Gamma$ >).

Ὑποκεί <σθω, τῶν ἐν τῷ ὑγρῷ ἄνω > | φερομένων ἕκαστον

ύγροῦ· ὅτι δὲ θὰ γίνωνται τόσον ἐλαφρότερα, ὅσον ἐλέχθη, θὰ δειχθῇ.

Ἐστω μέγεθος τι τὸ Α, τὸ ὅποιον εἶναι βαρύτερον τοῦ ὑγροῦ, βάρος δὲ τοῦ σώματος τοῦ ἔχοντος μέγεθος Α, ἔστω τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ὄγκον ἴσον πρὸς τὸ Α, βάρος τὸ Β. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέγεθος Α εὐρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ ἔχῃ βάρος ἴσον πρὸς τὸ Γ.

Διότι ἂς ληθῇ μέγεθος τι Δ ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς αὐτό, ἔστω δὲ τοῦ μὲν μεγέθους Δ τὸ βάρος ἴσον πρὸς βάρος Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ὄγκον ἴσον πρὸς τὸ μέγεθος Δ τὸ βάρος ἔστω ἴσον πρὸς τὸ βάρος ΒΓ. Διότι ἐὰν προστεθῶσι τὰ μεγέθη



Α, Δ, τὸ ἐκ τοῦ ἄθροίσματος μέγεθος θὰ εἶναι ἰσοβαρές πρὸς τὸ ὑγρόν· διότι καὶ τῶν δύο μεγεθῶν τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἄθροίσματος  $(B + \Gamma) + B$ , τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ὄγκον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν δύο μεγεθῶν τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς τὰ βάρη αὐτῶν. Ὅταν λοιπὸν ἀφεθῶσι τὰ μεγέθη εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ ἰσορροπήσωσι καὶ οὔτε θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ ἄνω οὔτε πρὸς τὰ κάτω· διότι τὸ μὲν μέγεθος Α θὰ φέρεται πρὸς τὰ κάτω (ὥς βαρύτερον τοῦ ὑγροῦ) θὰ ἀνέλκηται ὁμῶς πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ τοῦ μεγέθους Δ, ἐν ᾧ τὸ μέγεθος Δ, ἐπειδὴ εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, θὰ ὑφίσταται τόσην ἄνωσιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος Γ· διότι ἀπεδείχθη, ὅτι τὰ στερεὰ μεγέθη τὰ ἐλαφρότερα τοῦ ὑγροῦ βυθιζόμενα εἰς τὸ ὑγρὸν ὑφίστανται τόσην ἄνωσιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος, καθ' ὃ τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ μέγεθος εἶναι βαρύτερον τοῦ μεγέθους. Εἶναι δὲ τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον ὄγκον ἴσον πρὸς Δ, κατὰ τὸ βάρος Γ, βαρύτερον τοῦ μεγέθους Δ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ μέγεθος Α θὰ ἔλθῃ πρὸς τὰ κάτω μὲν τόσην δύναμιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος Γ.

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ εἰς τὸ ὑγρὸν εὐρισκόμενα σώματα ὠθοῦ-

ἀναφέρεσθαι | κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ κέν | τρου τοῦ  
βάρεος αὐτοῦ ἀγμέναν.

ἦ'

Εἴ κα στερεόν τι μέγεθος κουφότε | ρον τοῦ ὕγρου σφαίρας  
5 τμάματος | ἔχον σχῆμα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφεθῇ οὕτως, | ὥστε  
τὰν βάσιν τοῦ τμάματος μὴ | ἄπτεσθαι τοῦ ὕγρου, ὀρθὸν κατα-  
| στασεῖται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὸν | ἄξονα τοῦ τμάματος  
κατὰ κά | θετον εἶμεν· καὶ εἴ κα ὑπό τινος | ἔλκεται τὸ σχῆμα  
οὕτως, ὥστε τὰν | βάσιν τοῦ τμάματος ἄπτεσθαι τοῦ | ὕγρου,  
10 οὐ μενεῖ κεκλιμένον, εἴ | κα ἀφεθῇ, ἀλλ' ὀρθὸν ἀποκα | ταστα-  
σεῖται.

Η 338 νοείσθω γάρ τι μέγε |θος, οἷον εἴρηται, ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφε |  
<θέν, καὶ διὰ τε τοῦ ἄξονος τοῦ> | τμάματος καὶ τοῦ κέντρον  
τᾶς | γὰς νοείσθω ἐπίπεδον ἐκβεβλ | ημένον, τομὰ δ' ἔστω  
15 τᾶς μὲν | ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου ἅ ΑΒΓΔ, | τοῦ δὲ σχήματος  
τοῦ ἐς τὸ ὑγρὸν ἅ | φεθέντος ἅ ΕΖΗΘ περιφέρει | α, ἄξων δὲ  
τοῦ τμάματος ἔστω δ | ΘΖ· τὸ δὲ κέντρον τᾶς σφαίρας ἔστιν  
ἐπὶ τᾶς ΘΖ.

πρῶτον μὲν, εἰ | μεῖζόν ἐστιν ἡμισφαίριον τὸ τμᾶμα,  
20 ἔστω τὸ Κ, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, | κεκλιμένον τὸ σχῆμα ἥτοι  
ὑπό | τινος κλιθὲν ἢ καθ' αὐτό. δεικτέον | οὖν, ὅτι οὐ μενεῖ,  
ἀλλ' εἰς ὀρθὸν ἀποκα | ταστασεῖται, ὥστε τὰ Ζ, Θ κατὰ | κά-  
θετον εἶμεν.

ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται κε | κλίσθαι τὸ σχῆμα, οὐκ ἔστι τὰ Ζ, Θ  
25 κα | τὰ κάθετον. ἄχθω δὲ διὰ τοῦ Κ καὶ | τοῦ Α ἅ ΚΛ, τὸ δὲ  
Α κέντρον ὑποκείσ | θω τᾶς γὰς· τὸ δὲ σχῆμα τὸ ἐν τῷ | ὕγρῳ

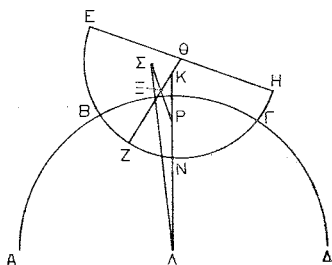


μενα πρὸς τὰ ἄνω, διευθύνονται κατὰ τὴν κατακόρυφον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους αὐτῶν.

8

Ἐάν στερεόν τι μέγεθος ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔχον σχῆμα τμήματος σφαίρας, ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις τοῦ τμήματος νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, τὸ σχῆμα θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν ἰσορροπίας, ὥστε ὁ ἄξων τοῦ τμήματος νὰ εἶναι κατακόρυφος· καὶ ἐάν τὸ σχῆμα ἔλκηται ὑπὸ τινος οὕτως, ὥστε ἡ βάσις τοῦ τμήματος νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἐάν ἀφεθῇ, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ εἰς τὴν κατακόρυφον θέσιν του.

Διότι ἂς νοηθῇ μέγεθός τι, ὡς ἐλέχθη, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν, καὶ ἂς νοηθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἔστω δὲ τομὴ τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ σχήματος τοῦ ἀ-



φεθέντος εἰς τὸ ὑγρὸν τὸ τόξον ΕΖΗΘ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ὁ ΘΖ· τὸ κέντρον λοιπὸν τῆς σφαίρας θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΘΖ.

Πρῶτον μὲν, ἐάν τὸ τμήμα εἶναι μεγαλύτερον ἡμισφαιρίου, ἔστω τὸ Κ, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ σχῆμα κεκλιμένον, δηλ. ἢ νὰ ἔχῃ κλιθῇ ὑπὸ τινος ἢ νὰ ἔχῃ κλίνει μόνον του. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι δὲν θὰ παραμείνῃ εἰς τὴν θέσιν αὐτήν, ἀλλὰ θὰ λάβῃ θέσιν ἡρεμίας τοιαύτην, ὥστε τὰ Ζ, Θ νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς κατακορύφου.

Διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι τὸ σχῆμα ἔχει κλιθῇ, τὰ Ζ, Θ δὲν εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς κατακορύφου. Ἄς ἀχθῇ λοιπὸν διὰ τοῦ Κ καὶ τοῦ Λ, ἡ ΚΛ, ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι τὸ Λ εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς· τὸ σχῆμα

ἀπολελαμμένον ὑπὸ τᾶς | τοῦ ὕγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα |  
 ἔχει ἐπὶ τᾶς ΚΛ· εἰ γάρ κα δύο σφαι | ρῶν ἐπιφάνειαι τέμνωντι  
 ἀλλήλας, ἃ | τομὰ κύκλος ἐστὶν ὀρθὸς ποτὶ τὰν | εὐθεϊαν τὰν  
 ἐπιζευγνύουσαν τὰ | κέντρα τᾶν σφαιρῶν. ἔστιν οὖν | τοῦ σχή-  
 5 ματος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ | περιφέρειαν ἀπολαμβανομένου |  
 ἐν τῷ ὕγρῳ τὸ κέντρον τοῦ βάρε | ος ἐπὶ τᾶς ΚΛ· ἔστω τὸ Ρ.  
 τοῦ δὲ τμᾶ | ματος ὅλου τοῦ κατὰ τὰν ΘΗΖΕ περι | φέριαν τὸ  
 κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρε | ος ἐπὶ τᾶς ΖΘ· ἔστω τὸ Ξ. τοῦ ἄρα |  
 <λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐκτὸς> | τᾶς τοῦ ὕγροῦ ἐπιφανείας τὸ  
 10 κέν | τρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΡΞ ἐστὶν ἐκβλή | θείσας καὶ ἀπο-  
 Η 340 λαφθείσας τινὸς τᾶς ΣΞ | ποτὶ τὰν ΞΡ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχού-  
 σας, ὃν | ἔχει τὸ βάρος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ | περιφέρειαν τοῦ  
 τμᾶματος ποτὶ | τὸ βάρος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὕγροῦ· δέδει | κται  
 γὰρ ταῦτα. ἔστω δὴ τὸ Σ κέν | τρον τοῦ εἰρημένου σχήματος.  
 15 | ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν σχήματος, ὃ ἐστὶν | ἐκτὸς τοῦ ὕγροῦ, τὸ  
 βάρος ἐς τὸ κάτω | φέρεται κατὰ τὰν εὐθεϊαν τὰν ΛΣ, | τὸ  
 δὲ ἐν τῷ ὕγρῳ ἐς τὸ ἄνω κατὰ | τὰν εὐθεϊαν τὰν ΡΚ, δῆλον,  
 ὥς | οὐ μινεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ πο | τὶ τῷ Ε μέρεα αὐτοῦ ἐς  
 τὸ κάτω | οἰσοῦνται, τὰ δὲ ποτὶ τῷ Η ἐς τὸ | ἄνω, καὶ ἀεὶ ἐς  
 20 τὸ αὐτὸ οἰσοῦνται, ἔ | ως κα ἃ ΖΘ κατὰ κάθετον γέ | νη-  
 ται. κατὰ κάθετον δὲ γενομέ | νας τᾶς ΖΘ τὰ κέντρα τοῦ  
 βά | ρεος ἐσσοῦνται τοῦ ἐν τῷ ὕγρῳ καὶ | τοῦ ἐκτὸς ἐπὶ  
 τᾶς αὐτᾶς καθέ | τον· ἐπὶ γὰρ τᾶς ΖΘ ἐσσοῦνται· | ἀντιθλι-  
 ποῦνται οὖν ἀλλήλοις τὰ | βάρεα κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον,  
 25 τὸ | μὲν ἐς τὸ κάτω φερόμενον, τὸ δὲ ἐς | τὸ ἄνω. ὥστε μένει  
 τὸ σχῆμα· | οὐδέτερον γὰρ ὑπ' οὐδετέρον ἐξωθή | σει.  
 τὰ δ' αὐτὰ ἐσσεῖται καί, εἰ κα | τὸ σχῆμα ἡμισφαίριον  
 ἦ ἦ ἔλασ | σον ἡμισφαίριον.

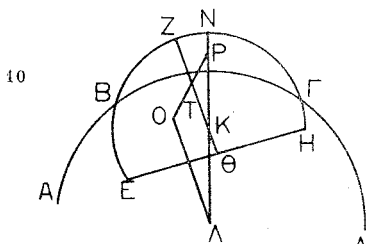
λοιπὸν τὸ εἰς τὸ ὑγρὸν ἀποληφθὲν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἔχει τὸν ἄξονα ἐπὶ τῆς ΚΛ· διότι ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν τέμνωνται πρὸς ἀλλήλας, ἡ τομὴ των εἶναι κύκλος κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἐνοῦσαν τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. Εἶναι λοιπὸν τοῦ σχήματος τοῦ ἀπολαμβανομένου εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τὸ τόξον ΒΝΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΚΛ· ἔστω τὸ Ρ. Ὁλου δὲ τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΘΗΖΕ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΖΘ· ἔστω τὸ Ξ. Τοῦ λοιποῦ ἄρα σχήματος τοῦ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΡΞ, εἰς τοιαύτην δηλ. προέκτασίν της (ΣΞ), ὥστε ΣΞ πρὸς ΞΡ νὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΒΝΓ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ· διότι ταῦτα ἔχουσιν ἀποδειχθῇ. Ἐστω λοιπὸν Σ τὸ κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος. Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν σχήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ βάρος διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΛΣ, τὸ δὲ βάρος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΡΚ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα δὲν θὰ ἡρεμήσῃ, ἀλλὰ τὰ πρὸς τὸ Ε μέρη αὐτοῦ θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ κάτω, τὰ δὲ πρὸς τὸ Η πρὸς τὰ ἄνω, καὶ πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ θὰ φέρονται, ἕως ὅτου ἡ ΖΘ γίνῃ κατακόρυφος. Ὅταν δὲ ἡ ΖΘ γίνῃ κατακόρυφος τὰ κέντρα τοῦ βάρους τοῦ εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου· διότι θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΖΘ· θὰ πιεσθῶσι λοιπὸν ἀντιθέτως μεταξὺ των τὰ βάρη κατὰ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον, τὸ μὲν φερόμενον πρὸς τὰ κάτω, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἄνω. Ὡστε τὸ σχῆμα θὰ ἡρεμῇ· διότι οὐδὲν ἐκ τῶν σχημάτων θὰ πιεσθῇ ὑπὸ τοῦ ἄλλου περισσότερον.

Τὰ αὐτὰ δὲ θὰ συμβῶσι καί, ἐὰν τὸ σχῆμα εἶναι ἡμισφαίριον ἢ μικρότερον ἡμισφαίριον.

$\theta'$ 

Καὶ τοίνυν, εἴ κα τὸ σχῆμα κορυφότερον ἐὼν | τοῦ ὑγροῦ  
ἀφελθῇ ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν  
| ἐν τῷ ὑγρῷ, ὁρθὸν καταστασεῖται | τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε  
τὸν ἄξονα | αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν.

H 342      νοεῖσθω | γάρ τι μέγεθος, οἷον εἴρηται, εἰς | τὸ ὑγρὸν  
ἀφαιτωμένον, νοεῖσθω δὲ | καὶ ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ



15  $\Delta$  ἡ ΖΘ. | εἰ οὖν δυνατόν, μὴ  
κατὰ κάθετον | ἔστω ἡ ΖΘ· δεικτέον οὖν, ὅτι οὐ μινεῖ | τὸ  
σχῆμα, ἀλλὰ ἐπ' ὀρθὸν κατασ | τασειται.

ἔστι δὴ τὸ κέντρον τᾶς | σφαίρας ἐπὶ τᾶς ΖΘ· πάλιν γὰρ  
 μείζον | ἡμισφαιρίον ἔστω πρῶτον τὸ σχῆμα· | καὶ ἔστω τὸ  
 20 Κ· διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τοῦ | κέντρον τᾶς γᾶς τοῦ Α ἄχθω | ἄ  
 ΚΑ· τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐκτὸς τοῦ υἽ | γροῦ ἀπολαμβάνομενον ὑπὸ  
 τᾶς | τοῦ ὕγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα | ἔχει ἐπὶ τᾶς διὰ τοῦ  
 Κ, καὶ διὰ ταῦτα | τοῖς πρότερον ἔστιν αὐτοῦ τὸ κέν | τρον  
 τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΝΚ· ἔστω | [γὰρ] τὸ Ρ. τοῦ δὲ ὅλου τμά-  
 25 ματος τὸ κέν | τρον τοῦ βάρους ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΖΘ) | μεταξὺ  
 τῶν Κ, Ζ· ἔστω τὸ Τ. τοῦ ἄρα | λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ  
 υἽ | γρῷ τὸ κέντρον ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς | ΤΡ εὐθείας ἐκβληθείσας  
 καὶ ἀπολαφθείσας τινός, | ἃ ἔξει ποτὶ τὰν ΤΡ τὸν αὐτὸν λόγον,  
 ὃν | ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμάματος τοῦ ἐκ | τὸς τοῦ ὕγροῦ ποτὶ τὸ

Καὶ ἀκόμῃ, ἐὰν τὸ σχῆμα εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφε-  
θῇ εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ ὅλη νὰ εἶναι εἰς τὸ  
ὑγρὸν, τὸ σχῆμα θὰ ὀρθωθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων αὐ-  
τοῦ νὰ εἶναι κατακόρυφος.

Διότι ἂς νοηθῇ μέγεθός τι, ὡς ἐλέχθη, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν,  
ἂς νοηθῇ δὲ καὶ ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος  
καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἔστω δὲ τομὴ τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ  
ὑγροῦ τὸ τόξον ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ σχήματος τὸ τόξον ΕΖΗ καὶ ἡ εὐθεῖα  
ΕΗ, ἔστω δὲ ἄξων τοῦ τμήματος ἡ ΖΘ. Ἐὰν λοιπὸν εἶναι δυνατὸν,  
ἔστω ὅτι ἡ ΖΘ δὲν εἶναι κατακόρυφος· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ  
σχῆμα δὲν θὰ ἰσοροπήσῃ εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν, ἀλλὰ θὰ λάβῃ θέσιν  
κατακόρυφον.

Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εὐρίσκεται βέβαια ἐπὶ τῆς ΖΘ· διότι  
πάλιν ἔστω πρῶτον τὸ σχῆμα μεγαλύτερον ἡμισφαιρίου· καὶ ἔστω  
τὸ Κ· διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΛ· τὸ  
σχῆμα λοιπὸν τὸ εὐρισκόμενον ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἔχει  
τὸν ἄξωνα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Κ, καὶ διὰ τοὺς  
αὐτοὺς λόγους, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐ-  
τοῦ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς ΝΚ· ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Ρ. Ὁλοῦ δὲ τοῦ τμή-  
ματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΖΘ μεταξὺ τῶν Κ, Ζ·  
ἔστω τὸ Τ. Τοῦ λοιποῦ ἄρα τμήματος τοῦ εἰς τὸ ὑγρὸν εὐρισκομένου  
τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΤΡ ἀφοῦ προεκβληθῇ  
αὕτη καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τμημὰ τι τὸ ὅποῖον θὰ ἔχη πρὸς  
τὴν ΤΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος τοῦ ἐκτὸς  
τοῦ ὑγροῦ πρὸς τὸ βάρος τοῦ σχήματος τοῦ εὐρισκομένου εἰς τὸ

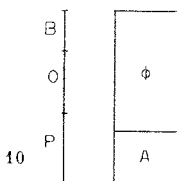
βάρος τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ· καὶ ἔστω | τὸ *O* κέν-  
 τρον τοῦ εἰρημένου σχήματος, καὶ | διὰ τοῦ *O* κάθετος ἔστω ἄ  
 Η 344 *ΟΛ*· οἱ | σεῖται οὖν τὸ βάρος τοῦ μὲν τμά | ματος, ὃ ἐστὶν ἐκτὸς  
 τοῦ ὑγροῦ, | κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν *ΡΛ* ἐς τὸ | κάτω, τοῦ δ' ἐν  
 5 τῷ ὑγρῷ σχήματος | κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν *ΟΛ* ἐς τὸ | ἄνω.  
 οὐκ ἄρα μενεῖ τὸ σχῆμα, | ἀλλὰ τοῦ σχήματος τὰ μὲν | ποτὶ  
 τῷ *H* μέρει οἰσοῦνται ἐς τὸ κάτω, | τὰ δὲ ποτὶ τῷ *E* ἐς τὸ  
 ἄνω, καὶ αἰεὶ | τοῦτο ἐσσεῖται, ἔστε καὶ *ΘΖ* κατὰ κά | θετον  
 γένηται.

ὕγρον· καὶ ἔστω  $O$  τὸ κέντρον βάρους τοῦ εἰρημένου σχήματος, καὶ διὰ τοῦ  $O$  ἔστω κάθετος ἡ  $ΟΛ$ · θὰ φέρεται λοιπὸν τὸ βάρος τοῦ μὲν τμήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς τοῦ ὕγροῦ πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν εὐθεΐαν  $ΡΛ$ , τοῦ δὲ σχήματος τοῦ εὐρισκομένου εἰς τὸ ὕγρον θὰ φέρεται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν εὐθεΐαν  $ΟΛ$ . Δὲν θὰ ἡρεμῇ ἄρα τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τοῦ σχήματος τὰ μὲν πρὸς τὸ  $H$  μέρη θὰ φέρονται πρὸς τὰ κάτω, τὰ δὲ πρὸς τὸ  $E$  πρὸς τὰ ἄνω, καὶ τοῦτο θὰ γίνεται πάντοτε μέχρις ὅτου ἡ  $ΘΖ$  γίνῃ κατακόρυφος.

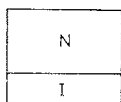
α'

Εἴ κα τι μέγεθος κουφότερον ἐὼν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔξει τὸν λόγον τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ἔχει τὸ δεδυκὸς μέγεθος ποτὶ τὸ ὅλον μέγεθος.

5



10



15

ἀφείσθω γάρ τι εἰς τὸ ὑγρόν μέγεθος στερεῒ | ὃν τὸ ΦΑ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ ἐόν, | ἔστω δὲ τὸ μὲν δεδυκὸς αὐτοῦ τὸ Α, | τὸ δὲ ἔκτος τοῦ ὑγροῦ τὸ Φ. δεικτέον, | ὅτι τὸ ΦΑ τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν | τὸ ἴσogκον τοῦτον ἔχει | τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ.

λελάφθω | γάρ τι τοῦ ὑγροῦ μέγεθος τὸ ΝΙ ἴσον | ὅγκον ἔχον τῷ ΦΑ, καὶ τῷ μὲν Φ ἴσον ἔσ | τω τὸ Ν, τῷ δὲ Α τὸ Ι, καὶ ἔτι τὸ μὲν | τοῦ ΦΑ μεγέθεος βάρος ἔστω τὸ Β, | τοῦ δὲ

ΝΙ τὸ ΡΟ, τοῦ δὲ Ι τὸ Ρ· τὸ ΦΑ | ἄρα ποτὶ τὸ ΝΙ τοῦτον ἔχει τὸν λό | γον, ὃν τὸ Β ποτὶ τὸ ΡΟ. ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ΦΑ | μέγεθος ἐς τὸ ὑγρόν ἀφείθη κου | φότερον ὑπάρχον τοῦ ὑγροῦ, δῆ | λον, ὥς ὁ τοῦ δεδυκὸτος μεγέ | θεος ὅγκος ἴσον βάρος ἔχει τῷ | ΦΑ

Η 348

μεγέθει· δέδεικται γὰρ τοῦτο· | ἴσον ἄρα τὸ Β βάρος τῷ Ρ, ἐπειδὴ | τὸ μὲν Β τὸ βάρος ἐστὶ ὅλον τοῦ ΦΑ | μεγέθεος, τὸ δὲ Ρ τοῦ Ι ὑγροῦ, ὃ τῷ | μεγέθει ἐγένετο ἴσον τῷ ἴσον ὅγκον



Ἀρχιμήδους Ὀχουμένων β'  
(Ἀρχιμήδους Ὑδροστατικῆς βιβλίον 2)

1

Ἐάν ὑπάρχη μέγεθός τι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρόν, τὸ βάρος τοῦ μεγέθους πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βυθισθὲν μέγεθος πρὸς τὸ ὅλον μέγεθος.

Διότι ὥς ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρόν τὸ στερεὸν μέγεθος  $\Phi A$  τὸ ὁποῖον εἶναι ἐλαφρότερον ἴσου ὄγκου ὑγροῦ, ἔστω δὲ τὸ μὲν βυθισθὲν μέρος αὐτοῦ τὸ  $A$ , τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ  $\Phi$ . Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ βάρος τοῦ  $\Phi A$  πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Phi A$ .

Διότι ὥς ληθῇ μέγεθός τι τοῦ ὑγροῦ τὸ  $NI$  ἔχον ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ  $\Phi A$ , καὶ ἔστω  $\Phi = N$  καὶ  $A = I$ , καὶ προσέτι τὸ βάρος τοῦ μὲν μεγέθους  $\Phi A$  ἔστω τὸ  $B$ , τοῦ δὲ  $NI$  τὸ  $PO$ , τοῦ δὲ  $I$  τὸ  $P$ . θὰ εἶναι ἄρα  $\Phi A : NI = B : PO$ . Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ εἰς τὸ ὑγρόν ἀφεθὲν μέγεθος  $\Phi A$  εἶναι ἐλαφρότερον ἴσου ὄγκου ὑγροῦ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ ἐν βυθίσει μέγεθος θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ μεγέθους  $\Phi A$ . διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (1, 5). εἶναι ἄρα τὸ βάρος  $B = P$ , ἐπειδὴ τὸ μὲν  $B$  εἶναι τὸ βάρος ὅλου τοῦ μεγέθους  $\Phi A$ , τὸ δὲ  $P$  τοῦ ὑγροῦ  $I$ , τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ἐν βυθίσει εὐρισκομένου μεγέ-

| ἔχοντι τῷ δεδυνότι μεγέθει τῷ |  $A$ · ἔχει ἄρα τὸ  $\Phi A$  μέγεθος  
τῷ | βάρει ποτὶ τὸ  $NI$ , ὡς τὸ  $P$  ποτὶ τὸ |  $PO$ . ὃν δὲ λόγον  
ἔχει τὸ  $P$  ποτὶ τὸ |  $PO$ , τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ  $I$  ποτὶ | τὸ  
 $IN$  καὶ τὸ  $A$  ποτὶ τὸ  $\Phi A$ · δέδεικται | ἄρα τὸ προτεθέν.

5

β'

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὅταν τὸν  
ἄξονα ἔξη | μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέ | χρι τοῦ ἄξονος,  
πάντα λόγον ἔχον | ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφ' ἑνὸς εἰς | τὸ  
ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ,  
10 τεθὲν | κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμέ | νον, ἀλλὰ ἀποκαταστα-  
σεῖται ὀρθόν. | ὀρθὸν δὲ λέγω καθεστακέναι τὸ | τοιοῦτο  
τμᾶμα, ὁπόταν τὸ ἀπο | τετμακὸς αὐτὸ ἐπίπεδον παρὰ | τὰν  
ἐπιφάνειαν ἢ τοῦ ὑγροῦ.

ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοει | δέος, οἷον εἴρηται, καὶ  
15 κείσθω | κεκλιμένον. δεικτέον, ὅτι οὐ με | νεῖ, ἀλλ' ἀποκατα-  
στασεῖται ὀρθόν.

τμαθέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ | διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ  
τὸ |  $\langle$ ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας $\rangle$  | τοῦ ὑγροῦ τμᾶματος  
H 350 ἔστω το | μὰ ἡ  $AΠΟΛ$  ὀρθογωνίου κώνου | τομὰ, ἄξων δὲ  
20 τοῦ τμᾶματος | καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἡ |  $NO$ , τᾶς δὲ τοῦ  
ὑγροῦ ἐπιφανείας | τομὰ ἡ  $ΙΣ$ . ἐπεὶ οὖν τὸ τμᾶμα οὐ | κ' ἐστὶν  
ὀρθόν, οὐκ ἂν εἴη παράλ | ληλος ἡ  $ΑΛ$  τῇ  $ΙΣ$ · ὥστε οὐ ποι | ῆσει  
ὀρθὰν γωνίαν ἡ  $NO$  ποτὶ τὰν |  $ΙΣ$ . ἄχθω οὖν παράλληλος ἡ  
ἐ | φαπτομένα ἡ  $KΩ$  τᾶς | τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ  $\Pi$ , καὶ |  
25 ἀπὸ τοῦ  $\Pi$  παρὰ τὰν  $NO$  ἄχθω ἡ  $\Pi\Phi$ · τέ | μνει δὴ ἡ  $\Pi\Phi$   
δίχα τὰν  $ΙΣ$ · δέδει | κται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. τετμάσ | θω ἡ

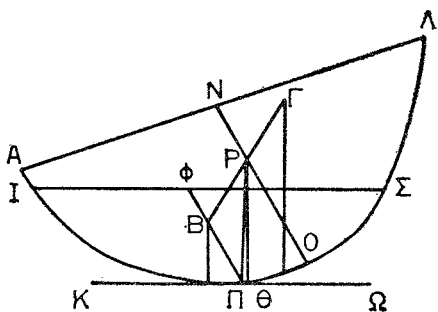
θους Α· εἶναι ἄρα τὸ βάρος τοῦ ΦΑ : ΝΙ = Ρ : ΡΟ. Εἶναι δὲ Ρ : ΡΟ = Ι : ΙΝ = Α : ΦΑ· ἀπεδείχθη ἄρα τὸ ζητούμενον.

2

Τὸ ὀρθὸν τμήμα τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς, ὅταν ὁ ἄξων του δὲν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 : 2 τῆς ἀποστάσεως μέχρι τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου (δηλ. τῆς παραμέτρου), εὐρίσκεται δὲ εἰς οἰανδήποτε σχέσιν κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρὸν, ἀφενὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, ἐὰν τεθῇ κεκλιμένον δὲν θὰ παραμείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ ὀρθόν. Λέγω δὲ ὅτι τὸ τοιοῦτον τμήμα ἀποκαθίσταται ὀρθόν, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς αὐτοῦ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ.

Ἐστω τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἄς κεῖται κεκλιμένον. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ ὀρθόν.

Διότι ἀφοῦ τμηθῇ δι' ἐπίπεδον διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ παραβολοειδοῦς καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τμή-



ματος ἔστω τομὴ ἢ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς τομῆς ἢ ΝΟ, τῆς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τομὴ ἢ ΙΣ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμήμα δὲν εἶναι ὀρθὸν δὲν θὰ εἶναι παράλληλος ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΙΣ· ὥστε ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΙΣ δὲν θὰ σχηματίσῃ ὀρθὴν γωνίαν. Ἄς ἀχθῇ λοιπὸν παράλληλος ἡ ἐφαπτομένη ΚΩ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Π, καὶ ἀπὸ τοῦ Π ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΟ ἢ ΠΦ· τέμνει λοιπὸν ἡ ΠΦ τὴν ΙΣ εἰς τὸ μέσον· διότι τοῦτο ἔχει ἀπο-

$\Pi\Phi$ , ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν |  $\Pi B$  τὰς  $B\Phi$ , καὶ ἡ  $NO$  κατὰ  
 τὸ  $P$  τετμά | σθω, ὥστε καὶ τὰν  $OP$  τὰς  $PN$  διπλασίαν | εἶμεν·  
 ἐσσεῖται δὴ τοῦ μείζονος ἂπ | οτμάματος τοῦ στερεοῦ κέν | τρον  
 τοῦ βάρους τὸ  $P$ , τοῦ δὲ κατὰ | τὰν  $\Pi O \Sigma$  τὸ  $B$ · δέδεικται  
 5 γὰρ | ἐν ταῖς Ἱσορροπίαις, ὅτι παν | τὸς ὀρθογωνίου κωνοειδέ-  
 ος | τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βά | ρεός ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος  
 διη | ρημένου οὕτως, ὥστε τὸ ποτὶ  $t\bar{a}$  | κορυφῇ τοῦ ἄξονος  
 τμᾶμα | διπλάσιον εἶμεν τοῦ λοιποῦ. ἂ | φαιρεθέντος δὴ τοῦ  
 κατὰ τὰν |  $\Pi O \Sigma$  τμάματος στερεοῦ ἂ | πὸ τοῦ ὅλου τοῦ λοι-  
 10 ποῦ κέν | τρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους ἐπὶ τὰς |  $B\Gamma$  εὐθείας· δέ-  
 δεικται γὰρ τοῦ | το ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχανικῶν, ὅτι,  
 εἴ κα μέγεθος ἀφαιρεθῇ μὴ | τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τοῦ βάρους |  
 τῷ ὅλῳ μεγέθει, τοῦ λοιποῦ τὸ | κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βά-  
 ρους ἐπὶ τὰς | εὐθείας τὰς ἐπιζευγνυούσας | τὰ κέντρα τοῦ τε  
 15 ὅλου μεγέθους | καὶ τοῦ ἀφηρημένου ἐκβεβλημένας ἐπὶ τὰ αὐ-  
 τά, | ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέ | θεός ἐστίν. ἐκβεβλήσθω  
 δὴ ἡ  $BP$  ἐπὶ | τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἔστω τὸ  $\Gamma$  τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ |  
 λοιποῦ μεγέθους. ἐπεὶ οὖν ἡ  $NO$  | τὰς μὲν  $OP$  ἡμιοῖα, τὰς  
 δὲ μέχρι | τοῦ ἄξονος οὐ μείζων ἢ ἡμιοῖα | α, δῆλον, ὅτι ἡ  
 H 352  $PO$  τὰς μέχρι τοῦ | ἄξονος οὐκ ἐστὶ μείζων ἢ  $PP$  ἄρα | ποτὶ  
 τὰν  $K\Omega$  γωνίας ἀνίσους | ποιεῖ, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν  $P\Pi\Omega$  γίνεται  
 | ὀξεῖα· ἡ ἀπὸ τοῦ  $P$  ἄρα κάθετος ἐπὶ | τὰν  $\Pi\Omega$  ἀγομένα μετα-  
 ξὺν πεσεῖται | τῶν  $\Pi, \Omega$ , πιπτέτω ὡς ἡ  $P\Theta$ · ἡ  $P\Theta$  | ἄρα ὀρθή  
 ἐστὶν ποτὶ τὸ . . . . . κ . | . ος ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἡ  $\Sigma I$ ,  
 25 ὅ | ἐστὶν ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας τοῦ | ὕγροῦ. ἄχθωσαν δὴ τινες  
 ἀπὸ τῶν |  $B, \Gamma$  παρὰ τὰν  $P\Theta$ · ἐνεχθήσεται δὴ | τὸ μὲν ἐκτὸς  
 τοῦ ὕγροῦ τοῦ μεγέ | θεος εἰς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ |  $\Gamma$   
 ἀγομένην κάθετον· ὑπόκειται γὰρ | ἕκαστον τῶν βαρέων εἰς τὸ  
 κάτω | φέρεσθαι κατὰ τὰν κάθετον τὰν | διὰ τοῦ κέντρον

δειχθῇ εἰς τὰ κωνικά (Τετραγ. Παραβολῆς 1). Ἄς τμηθῇ ἡ ΠΦ, ὥστε νὰ εἶναι  $PB = 2B\Phi$ , καὶ ἡ ΝΟ ἄς τμηθῇ κατὰ τὸ Ρ, ὥστε νὰ εἶναι καὶ  $OP = 2PN$ . θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μεγαλυτέρου ἀποτμήματος τοῦ στερεοῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ, τοῦ δὲ κατὰ τὴν ΠΠΟΣ θὰ εἶναι τὸ Β· διότι ἔχει δειχθῇ εἰς τὰ περὶ Ἰσορροπιῶν (πραγματεία ἀπολεσθεῖσα), ὅτι παντὸς τμήματος παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος διηρημένου οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ ἄξονος τμήμα νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ λοιποῦ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ κατὰ τὴν ΠΠΟΣ στερεὸν τμήμα ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου, τοῦ λοιποῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν, ὅτι, ἐὰν ἀφαιρεθῇ μέγεθος μὴ ἔχον τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὅλου μεγέθους, τοῦ λοιποῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα καὶ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος, προεκβληθείσης πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους (Μηχανικά 1, 8). Ἄς προεκβληθῇ λοιπὸν ἡ ΒΡ πρὸς τὸ Γ, καὶ ἔστω τὸ Γ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΝΟ τῆς μὲν ΟΡ εἶναι τὰ τρία δεύτερα, τῆς δὲ μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου) δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῶν τριῶν δευτέρων, εἶναι φανερόν, ὅτι ΡΟ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος· ἡ ΠΡ ἄρα μετὰ τῆς ΚΩ σχηματίζει γωνίας ἀνίσους, καὶ ἡ γωνία ΡΠΩ γίνεταί ὀξεῖα· ἡ ἀπὸ τοῦ Ρ ἄρα ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΩ θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν Π, Ω. Ἄς πέσῃ ὡς ἡ ΡΘ· ἡ ΡΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ . . . . . τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εἶναι ἡ ΣΙ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου. Ἄς ἀχθῶσι λοιπὸν εὐθεῖαι τινες ἀπὸ τῶν σημείων Β, Γ παράλληλοι πρὸς τὴν ΡΘ· θὰ ἔλθῃ λοιπὸν τὸ μὲν μέρος τοῦ μεγέθους τὸ ἐκτὸς τοῦ ὕγρου πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν διὰ τοῦ Γ ἀγομένην κάθετον· διότι ὑπετέθη ὅτι ἕκαστον τῶν βαρῶν φέρε-

ἀγομέναν· τὸ δὲ | ἐν τῷ ὑγρῷ μέγεθος, ἐπεὶ κορυφὴ | τερον  
γίνεται τοῦ ὑγροῦ, ἐνεχθή | σεται εἰς τὸ ἄνω κατὰ τὰν κάθε- |  
τον τὰν διὰ τοῦ *B* ἀγομέναν. ἐπεὶ | δὲ οὐ κατὰ τὰν αὐτὰν κά-  
θετον | ἀλλάλοις ἀντιθλίβονται, | <οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ  
5 τὰ μὲν κατὰ> | τὸ *A* εἰς τὸ ἄνω ἐνεχθήσεται, τὰ | δὲ κατὰ τὸ  
*A* εἰς τὸ κάτω, καὶ τοῦτο ἀεὶ ἐσσεῖται, | ἕως ἂν ὀρθὸν ἀποκα-  
τασταθῇ.

γ'

Ὅρθον τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κω | νοειδέος, ὅταν τὸν ἄξο-  
10 να ἔχη | μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχει | τοῦ ἄξονος, πάντα  
λόγον ἔχον | ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφ' ἑνὸς | εἰς τὸ ὑγρὸν  
οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ ὅλαν εἴμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, τε | θὲν  
κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλι | μένον, ἀλλ' ἀποκαταστασεῖται |  
οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κα | τὰ κάθετον εἴμεν.

Η 354 ἀφείσθω γάρ τι | τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρὸν, οἷον εἴρηται, | καὶ ἔστω  
αὐτοῦ ἡ βάσις ἐν τῷ ὑ | γρῷ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέ | δω  
διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ το | μὰ  
ἔστω ἡ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου | κώνον τομά, ἄξων δὲ τοῦ τμά- |  
ματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἡ ΠΦ, | τᾶς δὲ ἐπιφανείας  
20 τοῦ ὑγροῦ το | μὰ ἡ ΙΣ. ἐπειδὴ οὖν κεκλιμένον | κεῖται τὸ τμᾶ-  
μα, οὐκ ἐσσεῖται κα | τὰ κάθετον ὁ ἄξων· οὐκ ἄρα | ποιήσει ἡ  
ΠΦ ἴσας γωνίας | ποτὶ τὰν ΙΣ. ἄχθω δὴ τις | <ἡ ΚΩ παρὰ  
τὰν ΙΣ ἐφαπτομένα κατὰ> | τὸ *O* τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς, καὶ τοῦ  
μὲν | ΑΠΟΛ στερεοῦ κέντρον ἔστω τοῦ βάρους | τὸ *P*, τοῦ  
25 δὲ ΠΠΟΣ στερεοῦ τὸ *B*, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΡ ἐκβεβλήσ | θω,  
καὶ ἔστω κέντρον τοῦ βάρους τὸ *Γ* | τοῦ ΙΣΛΑ. ὁμοίως δὴ  
δειχθήσεται ἡ | μὲν ὑπὸ τὰν ΡΟ, ΟΚ γωνία ὀξεῖ | α, ἡ δὲ ἀπὸ  
τοῦ *P* κάθετος ἐπὶ τὰν | ΚΩ ἀγομένα μεταξὺ πίπτουσα | τῶν

ται πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ κέντρου· τὸ δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ μέγεθος, ἐπειδὴ εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἔλθῃ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ Β. Ἐπειδὴ δὲ δὲν ἀντιπιέζονται μεταξὺ των κατὰ τὴν αὐτὴν κάθετον, δὲν θὰ ἰσορροπῇ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ μὲν κατὰ τὸ Α θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ ἄνω, τὰ δὲ κατὰ τὸ Λ πρὸς τὰ κάτω, καὶ τοῦτο θὰ γίνεται πάντοτε, μέχρις ὅτου τὸ σχῆμα ἀποκατασταθῇ ὀρθόν.

3

Ὄρθον τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἔχῃ τὸν ἄξονα οὐχὶ μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), ἔχον οἰονδήποτε λόγον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, ἀφ' ἑνὸς εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι ὅλη εἰς τὸ ὑγρὸν, ἐὰν τεθῇ κεκλιμένον δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ οὕτως, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ εἶναι κατακόρυφος.

Διότι ἂς ἀφ' ἑνὸς τμήμα τι εἰς τὸ ὑγρὸν, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἔστω ἡ βάσις αὐτοῦ εἰς τὸ ὑγρὸν, ἀφ' οὗ δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΠΦ, τομὴ δὲ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΙΣ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμήμα εὐρίσκεται κεκλιμένον, ὁ ἄξων δὲν θὰ εἶναι κατακόρυφος· δὲν θὰ σχηματίσῃ ἄρα ἡ ΠΦ ἴσας γωνίας πρὸς τὴν ΙΣ. Ἄς ἀχθῇ λοιπὸν ἡ ΚΩ παράλληλος πρὸς τὴν ΙΣ, ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Ο, καὶ τοῦ μὲν στερεοῦ ΑΠΟΛ ἔστω κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ, τοῦ δὲ στερεοῦ ΙΠΟΣ ἔστω τὸ Β, καὶ ἀφ' οὗ ἀχθῇ ἡ ΒΡ ἂς προεκβληθῇ, καὶ ἔστω τοῦ ΙΣΛΑ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ μὲν γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν ΡΟ, ΟΚ εἶναι ὀξεία, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ ἐπὶ τὴν ΚΩ ἀγομένη κάθετος,

*K, O · ἔστω ἡ PΘ. ἐὰν δὴ ἀπὸ | τῶν Γ, Β ἀχθέωντί τινες παρὰ τὰν PΘ, | τὸ μὲν ἐν τῷ ὕψω ἀπολαφθὲν | ἐνεργήσεται ἄνω*

κατὰ τὰν διὰ | τοῦ

Γὰρ ἀγομένην, τὸ δ'

ἐκτὸς τοῦ | ὑγροῦ

κατὰ τὰν διὰ τοῦ

Β ἀγομέ | ναν κά-

τω, καὶ οὐ μένει

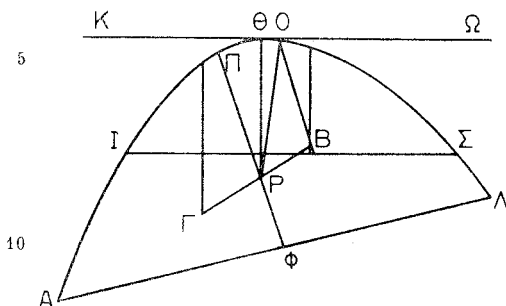
τὸ ΑΠΘΛ | στρε-

ρεὸν οὕτως ἔχον

ἐν τῷ ὑγρῷ, | ἀλ-

λὰ τὸ μὲν κατὰ τὸ

$A$  ἄνω τὰν | φορὰν ἔξει, τὸ δὲ κατὰ τὸ  $A$  κάτω, | ἕως ἂν γέ-  
νηται ἡ  $\Pi\Phi$  κατὰ κάθε | εἶπον.



15

 $\delta'$ 

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὁπότεν

Η 356 κουφότερον ἢ τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιό-

λιον τᾱς μέ|χρι τοῦ ἄξονος, ὅταν τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ἰσογκον

ὕγρὸν μὴ ἐλάσ | *κ*σωνα λόγον ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει | τὸ τετράγωνον

<sup>20</sup> τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς

μέχρι τοῦ ἄξονος, | ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ | ἄξονος,

ἀφ' ἑνὸς εἰς τὸ ὑγρὸν | οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ | μὴ ᾧ-

πτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν | κεκλιμένον οὐ μινεῖ κεκλιμέ | νον,

ἀλλὰ ἀποκαταστασεῖται | εἰς ὀρθόν.

25 ἔστω τμήμα ὀρθο | γωνίου κωνοειδέος, οἷον εἴρη | ται, καὶ

ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, εἰ δυ | νατόν, ἔστω μὴ ὀρθόν, ἀλλὰ | κε-

κλιμένον, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ | ἐπιπέδω διὰ τοῦ ἄξονος ὀρ | θῶ

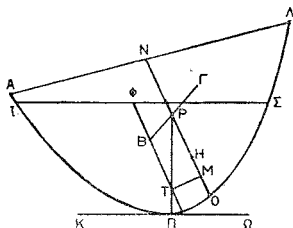
ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ | ὑγροῦ τοῦ μὲν τμάματος τομὰ



ὅτι πίπτει μεταξύ τῶν Κ, Ο· ἔστω ἡ ΡΘ. Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τῶν Γ, Β ἀχθῶσι μερικαὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΡΘ, τὸ μὲν εἰς τὸ ὑγρὸν μένον τμήμα θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ Γ, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ Β, καὶ δὲν θὰ μείνῃ τὸ ΑΠΟΛ στερεὸν εἰς τὸ ὑγρὸν ἔχον οὕτω πως, ἀλλὰ τὸ μὲν κατὰ τὸ Α θὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω, τὸ δὲ κατὰ τὸ Λ θὰ ἔχῃ πρὸς τὰ κάτω, μέχρις ὅτου ἡ ΠΦ γίνῃ κατακόρυφος.

4

Τὸ ὀρθὸν τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), ὅταν κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον ἴσον ὄγκον, δὲν ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, ἐὰν τεθῇ κεκλιμένον δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ εἰς θέσιν κατακόρυφον.



Ἐστω τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὡς ἐλέχθη, καὶ ὅταν ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν ἔστω, ὅτι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, δὲν εἶναι κατακόρυφον, ἀλλὰ κεκλιμένον, ἐὰν τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, τοῦ μὲν τμήματος τομῇ

*sit rectanguli coni sectio [De Conoid. 11 a] quae APOL, axis autem portionis et diameter <sectionis> quae NO, superficie autem humidi sectio sit IS. si igitur portio non est recta, non faciet quae NO ad IS angulos aequales [σ. 296, 5 11 κ.έ.]. ducatur autem quae KΩ contingens sectionem rectanguli coni penes P, aequedistans autem ipsi IS, a P autem aequedistanter ipsi ON ducatur quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et erit solidi quidem APOL centrum R, eius autem, quod intra humidum, centrum B, et copuletur quae BR et educatur ad G, et sit solidi, quod supra humidum, centrum grauitatis G [cfr. De plan. aequil. I, 8]. et  
 H 357 quoniam quae NO ipsius quidem RO est emiolia [σ. 296, 20 κ.έ.], eius autem, quae usque ad axem, est maior quam emiolia, palam, quod quae RO est maior quam quae usque ad  
 15 axem. sit igitur quae RM aequalis ei, quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM. quoniam igitur fit quae quidem NO ipsius RO emiolia, quae autem HO ipsius OM, et reliqua quae NH reliquae, scilicet RM, emiolia est;<sup>1)</sup> ipsi HO igitur maior quam emiolius est axis eius, quae usque  
 20 ad axem, scilicet RM.<sup>2)</sup> et quoniam supponebatur portio ad humidum in grauitate non minorem proportionem habens illa, quam habet tetragonum, quod ab excessu, quo axis  
 H 358 est maior quam emiolius eius, quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, palam, quod non minorem proportionem habet portio ad humidum in grauitate illa propor-  
 25 tionem, quam habet tetragonum quod ab HO ad id quod ab NO. quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habet demersa ipsius portio ad totam soli-*

1)  $NH = NO \div HO = \frac{3}{2} PO \div \frac{3}{2} OM$  (Eucl. I  $\kappa\omicron\upsilon\nu$ . ένν. 3)  $= \frac{3}{2} (PO \div OM) = \frac{3}{2} PM$ .

2)  $NO = NH + HO = \frac{3}{2} PM + HO$ , et PM dimidia parametris est (Apollon. Con. V, 13) siue recta usque ad axem ducta (ZMP. XXV p. 51 nr. 13).

ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ἡ ΝΟ, τομὴ δὲ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΙΣ. Ἐὰν ἡ τομὴ δὲν εἶναι κατακόρυφος, αἱ εὐθεῖαι ΝΟ καὶ ΙΣ δὲν θὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας. Ὡς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΙΣ παράλληλος ἡ εὐθεῖα ΚΩ, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτηται τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Π, καὶ ἀπὸ τοῦ Π ἄς ἀχθῇ ἡ ΠΦ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΝ καὶ ἄς ληφθῶσιν τὰ κέντρα βάρους, καὶ ἔστω τοῦ στερεοῦ ΑΠΟΛ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ, καὶ τοῦ ἐν βυθίσει κέντρον τοῦ βάρους τὸ Β, καὶ ἄς προεκβληθῇ ἡ ἐνοῦσα αὐτὰ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΡ μέχρι τοῦ Γ, ὥστε τοῦ ὑπὲρ τὸ ὑγρὸν στερεοῦ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Γ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα  $NO = \frac{3}{2} PO$  ἡ ὁποία εἶναι τρία

δεύτερα μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος (παραμέτρου) εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ΡΟ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου). Ἐστω ἡ ΡΜ ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἡ ΟΜ = 2ΗΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ

$NO = \frac{3}{2} PO$ , καὶ  $HO = \frac{3}{2} OM$ , εἶναι ἄρα ἡ ὑπόλοιπος

$NH = \frac{3}{2} PM$ . Εἶναι ἄρα ὁ ἄξων μεγαλύτερος τῆς εὐθείας ΗΟ

κατὰ τρία δεύτερα τῆς παραμέτρου, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν ΡΜ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὅγκου ὑγροῦ δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἄξονος κατὰ τρία τέταρτα τῆς παραμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὅγκου τοῦ ὑγροῦ δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου  $HO^2 : NO^2$ . Ἀλλὰ ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ

dam portionem; demonstratum est enim hoc [prop. I]; sed  
 quam habet proportionem demersa portio ad totam, hanc  
 habet tetragonum quod a  $PF$  ad tetragonum quod ab  $NO$ ;  
 demonstratum est enim in his, quae de conoidalibus, quod,  
 5 si a rectangulo conoidali duae portiones qualitercunque  
 productis planis abscindantur, portiones adinuicem ean-  
 dem habebunt proportionem quam tetragona quae ab axibus  
 ipsorum [De conoid. 24]. non minorem ergo proportionem  
 habet tetragonum quod a  $PF$  ad tetragonum quod ab  $NO$   
 10 quam tetragonum quod ab  $HO$  ad tetragonum quod ab  $NO$ ;  
 quare quae  $PF$  non est minor quam  $HO$  [Eucl. V, 7 - 8],  
 neque quae  $BP$  quam  $MO$ ;<sup>1)</sup> si igitur ab  $M$  ipsi  $NO$  recta  
 ducatur, cadet inter  $B$  et  $P$ . quoniam igitur quae quidem  
 $PF$  est aequedistanter diametro, quae autem  $MT$  est per-  
 15 pendicularis ad diametrum, et quae  $RM$  aequalis ei quae  
 usque ad axem, ab  $R$  ad  $T$  copulata et educta faciet angu-  
 los rectos ad contingentem secundum  $P$ ;<sup>2)</sup> quare et ad  $IS$  et  
 ad eam quae per  $IS$  superficiem humidi faciet aequales an-  
 gulos.<sup>3)</sup> si autem per  $B$ ,  $G$  ipsi  $RT$  aequedistantes ducan-  
 20 tur, anguli recti erunt facti ad superficiem humidi, et quod  
 quidem in humido absumitur solidum conoidalis, sursum  
 H 359 feretur secundum eam quae per  $B$  aequedistantem ipsi  $RT$   
 [σ. 284, 29], quod autem extra humidum absumptum deor-  
 sum feretur in humidum secundum productam per  $G$  ae-  
 25 quedistantem ipsi  $RT$ , et per totum idem erit, donec utique  
 conoidale rectum restituatur.

1) Nam  $BP = \frac{2}{3} PF$  (p. 350, 11 sq.), et  $MO = \frac{2}{3} HO$ .

2) ZMP. XXV p. 54 nr. 21.

3) Eucl. I, 29; nam  $IS \parallel K\Omega$ .

ἐν βυθίσει τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὅλου τμήματος εἶναι ὁ αὐ-  
 τὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου  
 ὄγκου τοῦ ὑγροῦ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ· καὶ ὁ λόγος  $\Pi\Phi^2$  :  
 $\text{NO}^2$  εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἐν βυθίσει τμήματος πρὸς τὸ  
 ὅλον τμήμα· διότι εἰς τὸ περὶ Κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων ἀπε-  
 δείχθη, ὅτι ἐὰν ἐν παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμηθῇ εἰς δύο τμή-  
 ματα διὰ τυχόντος ἐπιπέδου, τὰ τμήματα εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ τε-  
 τράγωνα τῶν ἀξόνων των (θ. 24). Ὁ λόγος λοιπὸν  $\Pi\Phi^2$  :  $\text{NO}^2$  δὲν εἶναι  
 μικρότερος τοῦ λόγου  $\text{HO}^2$  :  $\text{NO}^2$ · δὲν εἶναι ἄρα ἡ  $\Pi\Phi$  μικροτέρα τῆς  
 $\text{HO}$ , οὔτε ἡ  $\text{B}\Pi$  μικροτέρα τῆς  $\text{MO}$ . Ἐὰν ἐκ τοῦ  $\text{M}$  ἀχθῇ κάθετος  
 πρὸς τὴν  $\text{NO}$  θὰ πέσῃ αὕτη μεταξὺ τῶν σημείων  $\text{B}$  καὶ  $\Pi$  (ἔστω κατὰ  
 τὸ  $\text{T}$ ). Καὶ ἐπειδὴ ἡ  $\Pi\Phi$  εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ ἡ  
 $\text{MT}$  εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἡ εὐθεῖα  $\text{PM}$  εἶναι ἴση  
 πρὸς τὴν παράμετρον, ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰ σημεῖα  $\text{P}$ ,  $\text{T}$  προεκβαλ-  
 λομένη θὰ σχηματίζῃ γωνίας ὀρθὰς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ  
 σημεῖον  $\Pi$ · θὰ σχηματίζῃ ἄρα καὶ πρὸς τὴν  $\text{I}\Sigma$  καὶ τὴν δι' αὐτῆς  
 διερχομένην ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίας ἴσας. Ἐὰν λοιπὸν διὰ τῶν  
 σημείων  $\text{B}$ ,  $\Gamma$  φέρωμεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν  $\text{PT}$  θὰ σχηματί-  
 ζωσιν αὗται μετὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ γωνίας ὀρθὰς καὶ τὸ  
 ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εὐρισκόμενον τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περι-  
 στροφῆς θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διὰ τοῦ  $\text{B}$  διερχομένην  
 παράλληλον πρὸς τὴν  $\text{PT}$ , καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ εὐρισκόμενον  
 τμήμα θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὴν διὰ τοῦ  
 $\Gamma$  διερχομένην παράλληλον πρὸς τὴν  $\text{PT}$ · καὶ τοῦτο θὰ συνεχι-  
 σθῇ μέχρις ὅτου τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς λάβῃ θέσιν  
 κατακόρυφον.

V.

*Recta portio rectanguli conoidalis, quando leuior existens humido habuerit axem maiorem quam emolium eius quae usque ad axem, si ad humidum in grauitate non maiorem proportionem habeat illa, quam habet excessus, quo  
5 maius est tetragonum quod ab axe tetragono quod ab excessu, quo axis est maior quam emolium eius quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius tota sit in humido, posita inclinata non manet inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpen-  
10 dicularem sit.*

*dimittatur enim in humidum aliqua portio, qualis dicta est, et sit basis ipsius tota in humido, secta autem ipsa plano per axem recto ad superficiem humidi erit sectio rectanguli coni sectio [De conoid. 11 a], et sit quae APOL, axis autem  
15 <portionis> et diameter sectionis quae NO, superficiei autem humidi sectio quae IS. et quoniam non est axis secundum perpendicularem, non faciet quae NO ad IS angulos aequales. ducatur autem quae KΩ contingens sectionem APOL secundum P aequedistans ipsi IS et per P ipsi  
20 NO aequedistans quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et sit ipsius quidem APOL centrum R, eius autem quod extra humidum B, et copulata quae BR educatur ad G, et sit G centrum grauitatis solidi absumpti in humido  
H 360 [cfr. De plan. aequil. I, 8], et accipiatur quae RM aequalis  
25 ei quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM, et alia fiant consimiliter superiori [prop. IV σ. 304, 1]. quoniam igitur supponitur portio ad humidum in grauitate*

Τὸ ὀρθὸν τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), καὶ ὅταν ὁ λόγος τοῦ βάρους του πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ δὲν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς παραμέτρου, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι καθ' ὀλοκληρίαν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ τεθὲν κεκλιμένον δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ εἰς ὀρθὸν (κατακόρυφον).

Ἐστω τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν νὰ ἔχῃ τὴν βάσιν του ὅλην ἐντὸς αὐτοῦ, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, τοῦ τμήματος τομῇ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ἡ ΝΟ καὶ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΙΣ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων δὲν εἶναι κατακόρυφος, ἡ ΝΟ δὲν θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΙΣ γωνίας ἴσας. Ἄς ἀχθῇ ἡ ΚΩ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Π καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΙΣ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Π ἄς ἀχθῇ ἡ ΠΦ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΟ καὶ ἄς ληφθῶσι τὰ κέντρα βάρους καὶ ἔστω Ρ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ στερεοῦ ΑΠΟΛ, Β τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΡ ἄς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Γ, καὶ ἔστω Γ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐν βυθίσει εὐρισκομένου τμήματος, καὶ ἄς ληφθῇ ἡ ΡΜ ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἄξονος (ἴση πρὸς τὴν παράμετρον), καὶ ἔστω  $OM = 2HM$  καὶ αἱ λοιπαὶ κατασκευαὶ ἄς γίνωνται ὡς εἰς τὸ προηγούμενον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμή-

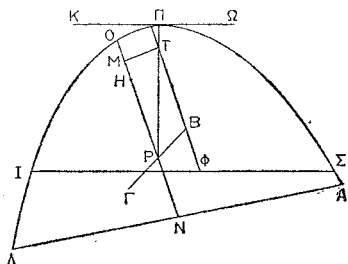
non maiorem proportionem habens proportione, quam habet  
 excessus, quo maius est tetragonum quod ab  $NO$  tetragono  
 quod ab  $HO$ , ad tetragonum quod ab  $NO$ , sed quam propor-  
 tionem habet in grauitate portio ad humidum aequalis molis,  
 5 hanc proportionem habet demersa ipsius portio ad totum  
 solidum (demonstratum est enim hoc in primo theoremate),  
 non maiorem ergo proportionem habet demersa magnitudo  
 portionis ad totam portionem, quam sit dicta proportio;  
 quare non maiorem proportionem habet tota portio ad eam  
 10 quae extra humidum portionem, quam habet tetragonum  
 quod ab  $NO$  ad tetragonum quod ab  $HO$ .<sup>1)</sup> habet autem tota  
 portio ad portionem quae extra humidum eandem propor-  
 tionem, quam habet tetragonum quod ab  $NO$  ad id quod a  
 $PF$  [De conoid. 24]; non maiorem ergo proportionem habet  
 15 quod ab  $NO$  ad id quod a  $PF$ , quam quod ab  $NO$  ad id  
 quod ab  $HO$ . non minor ergo fit quae  $PF$  quam quae  $OH$ ;  
 quare nec quae  $PB$  quam  $MO$  [σ. 306 ὑποσ. 1]. quae ergo  
 ab  $M$  producitur ipsi  $RO$  ad rectos angulos, concidet ipsi  
 $BP$  inter  $P$  et  $B$ ; concidat secundum  $T$ . et quoniam in  
 20 rectanguli coni sectione quae  $PF$  est aequedistanter diame-  
 tro  $RO$ , quae autem  $MT$  perpendicularis super diametrum,  
 quae autem  $RM$  aequalis ei quae usque ad axem, palam,  
 quod quae  $RT$  educta facit angulos rectos ad  $KP\Omega$ ; quare

1) Quoniam  $ISAL : APOL \equiv NO^2 \div HO^2 : NO^2$  siue  $APOL : ISAL \equiv NO^2 : NO^2 \div HO^2$ , erit conuertendo (Eucl. V, 19 coroll., Pappus VII, 48 p. 686)

$$APOL : APOL \div ISAL \equiv NO^2 : HO^2.$$



ματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ δὲν εἶναι μεγαλύτερος τῆς  
 ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τῆς NO ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς HO  
 πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς NO,  $(NO^2 - HO^2 : NO^2)$ , καὶ ὅτι τὸ βάρος  
 τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ ἔχει λόγον, οἷον τὸ  
 ἐν βυθίσει εὐρισκόμενον τμήμα πρὸς τὸ ὅλον τμήμα, ὅπερ ἀπεδείχθη  
 εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα, θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ ἐν βυθίσει τμή-  
 ματος πρὸς τὸ ὅλον τμήμα ὅχι με-  
 γαλύτερος πρὸς τὸν λεχθέντα· δὲν  
 εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ λόγος ὅ-  
 λου τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἐκτὸς  
 τοῦ ὑγροῦ τμήμα, πρὸς τὸν λόγον  
 τοῦ τετραγώνου τῆς NO πρὸς τὸ  
 τετράγωνον τῆς HO. Ἀλλὰ ὁ λό-  
 γος τοῦ ὅλου τμήματος πρὸς τὸ



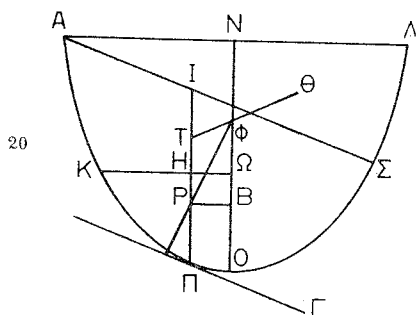
ἐκτὸς τοῦ ὕγρου τμήμα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου  
τῆς ΝΟ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΠΦ· δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ  
λόγος  $ΝΟ^2 : ΠΦ^2$  τοῦ λόγου  $ΝΟ^2 : ΗΟ^2$  καὶ ἄρα ἡ ΠΦ δὲν εἶναι  
μικροτέρα τῆς ΟΗ, καὶ ἡ ΗΒ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΜΟ. Ἐὰν  
λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Μ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΡΟ αὕτη θὰ  
συναντήσῃ τὴν ΒΠ μεταξὺ τῶν σημείων Π καὶ Β εἰς τι σημεῖον  
ἕστω Τ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν παραβολὴν ἡ ΠΦ εἶναι παράλληλος πρὸς  
τὴν διάμετρον ΡΟ, καὶ ἡ ΜΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ  
ἡ εὐθεῖα ΡΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ  
εὐθεῖα ΡΤ προεκτεινομένη θὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς ΚΠΩ γωνίας

et ad IS. quae ergo RT est perpendicularis ad superficiem  
H 361 humidi, et per signa B, G aequedistanter ipsi RT productae  
erunt perpendiculares ad superficiem humidi; quae quidem  
igitur extra humidum portio deorsum feretur in humidum  
5 secundum productam per B perpendicularem, quae autem  
intra humidum sursum feretur secundum perpendicularem  
quae per G, et non manet solida portio APOL, sed intra  
humidum erit motum, donec utique quae NO fiat secun-  
dum perpendicularem.

10

*VI.*

*Recta portio rectanguli conoidalis, quando humido leuior  
existens axem habuerit maiorem quidem quam hemiolium,  
minorem autem, quam ut hanc habeat proportionem ad eam  
quae usque ad axem, quam habent quindecim ad quattuor,  
15 dimissa in humidum ita, ut basis ipsius contingat humi-*



dum, numquam stabit  
inclinata ita, ut basis  
ipsius secundum unum  
signum contingat hu-  
midum.

*sit portio, qualis dicta est, et dimissa in humidum consistat, sicut ostensum est, ita ut basis ipsius secundum unum*

*signum contingat humidum, secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi sectio superficiei portio-  
nis sit quae APOL rectanguli conii sectio [De conoid. 11 a],*

ἴσας καὶ πρὸς τὴν ΙΣ ὁμοίως. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεΐα ΡΤ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγροῦ, καὶ αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΡΤ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγροῦ. Τὸ μέρος ἄρα τοῦ τμήματος τὸ ἐκτὸς τοῦ ὕγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω, ἐντὸς τοῦ ὕγροῦ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης διὰ τοῦ Β, καὶ τὸ μέρος τοῦ τμήματος τὸ ἐν βυθίσει θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης ἐκ τοῦ Γ. Τὸ τμήμα ἄρα ΑΠΟΛ δὲν θὰ μείνῃ ἐν ἡρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κινήθῃ ἐντὸς τοῦ ὕγροῦ μέχρις ὅτου ἡ εὐθεΐα ΝΟ γίνῃ κατακόρυφος.

6

Ἐὰν ὀρθὸν τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἐλαφρότερον τοῦ ὕγροῦ, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν  $\frac{3}{4}$  τῆς παραμέτρου, ἀλλὰ ὁ λόγος τούτου πρὸς τὸ  $\frac{1}{2}$  τῆς παραμέτρου νὰ εἶναι μικρότερος τῶν  $\frac{15}{4}$ , καὶ ἐὰν τὸ τμήμα τούτου εἶναι βυθισμένον εἰς τὸ ὕγρὸν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὕγροῦ, τότε τοῦτο οὐδέποτε θὰ λάβῃ τοιαύτην κλίσιν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὕγροῦ μόνον κατὰ ἓν σημεῖον.

Ἐστω τμήμα, ὡς ἐλέχθη, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὕγρὸν κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ βάσις του νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὕγροῦ κατὰ ἓν μόνον σημεῖον καὶ ἡ τομὴ τούτου δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγροῦ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕγροῦ ἡ ΑΣ καὶ ὁ ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ διά-

superficiei autem humidi quae  $AS$ , axis autem portionis et  
 diameter  $\langle$ sectionis $\rangle$  sit quae  $NO$ , et secetur secundum  $F$   
 quidem ita, ut quae  $OF$  sit dupla ipsius  $FN$ , secundum  
 $\Omega$  autem ita, ut quae  $NO$  ad  $F\Omega$  habeat proportionem, quam  
 5 quindecim ad quattuor, et ipsi  $NO$  adducatur quae  $\Omega K$ .  
 quae autem  $NO$  maiorem proportionem habet ad  $F\Omega$  quam  
 ad eam quae usque ad axem. sit quae  $FB$  aequalis ei quae  
 usque ad axem, et ducatur quae quidem  $PC$  aequedistanter  
 ipsi  $AS$  contingens sectionem  $APOL$  secundum  $P$ , quae  
 10 autem  $PI$  aequedistanter ipsi  $NO$ ; secet autem quae  $PI$   
 prius ipsam  $K\Omega$ . quoniam igitur in portione  $APOL$  con-  
 H 362 tenta a recta et a sectione rectanguli conii quae quidem  $KH$   
 aequedistanter ipsi  $AL$ , quae autem  $PI$  aequedistanter dia-  
 metro secta ipsa  $K\Omega$ , quae autem  $AS$  aequedistanter contin-  
 15 genti secundum  $P$ , necessarium est, ipsam  $PI$  aut eandem  
 proportionem habere ad  $PH$ , quam habet quae  $N\Omega$  ad  $\Omega O$ ,  
 aut maiorem proportionem; demonstratum est enim hoc  
 per sumpta.<sup>1)</sup> quae autem  $\Omega N$  est emiolia ipsius  $\Omega O$ ;<sup>2)</sup> et  
 quae  $IP$  ergo aut emiolia est ipsius  $HP$  aut maior quam  
 20 emiolia; quae ergo  $PH$  ipsius  $HI$  aut dupla est aut minor  
 quam dupla.<sup>3)</sup> sit autem quae  $PT$  ipsius  $TI$  dupla; cen-  
 trum ergo grauitatis eius quod in humido est signum  $T$

1) H. e. διὰ λημμάτων, quae sine dubio huic libro ab ipso  
 Archimede adiuncta erant, sed nunc perierunt. de re u. Nizzius p.  
 238 sq.

2) Fecimus enim  $FO = 2 FN$  siue  $FN : NO = 5 : 15$ . erat au-  
 tem  $F\Omega : NO = 4 : 15$ ; addendo igitur

$$FN + F\Omega : NO = 9 : 15 = N\Omega : NO,$$

unde (Eucl. V, 7 coroll.; 17)  $O\Omega : N\Omega = 6 : 9$ .

3) Quoniam  $PI : PH \cong N\Omega : O\Omega = 3 : 2$ , erit  $HI = PI \div PH$   
 $\cong \frac{1}{2} PH$  siue  $PH \cong 2 HI$ .



[p. 350, 13 sq.]. et copulata quae  $TF$  educatur, et sit centrum  
 grauitatis eius quod extra humidum  $G$  [cfr. De plan. ae-  
 quil. I, 8], et a  $B$  ipsi  $NO$  recta quae  $BR$ . quoniam igitur  
 est quae quidem  $PI$  aequedistanter diametro  $NO$ , quae au-  
 5 tem  $BR$  perpendicularis super diametrum, quae autem  $FB$   
 aequalis ei quae usque ad axem, palam, quod quae  $FR$  edu-  
 Η 363 cta aequales facit angulos ad contingentem sectionem  $APOL$   
 secundum  $P$ ; quare et ad  $AS$  et ad superficiem aquae.  
 ductis autem per  $T$ ,  $G$  aequedistanter ipsi  $FR$  erunt et  
 10 ipsae perpendiculares ad superficiem aquae, et magnitu-  
 do quidem intra humidum absumpta ex solido  $APOL$   
 sursum feretur secundum eam quae per  $T$  perpen-  
 dicularem, quae autem extra humidum deorsum feretur  
 in humidum secundum eam quae per  $G$  perpendicularem.  
 15 reuoluetur ergo solidum  $APOL$ , et basis ipsius non tanget  
 superficiem humidi secundum unum signum.

si autem quae  $PI$  non secuerit lineam  $KΩ$ , sicut in  
 secunda figura descriptum est, manifestum, quod signum  
 $T$ , quod est centrum grauitatis demersae portionis, cadet  
 20 inter  $P$  et  $I$ , et reliqua similiter demonstrabuntur.

ζ'

Η 364 Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν  
 τοῦ ὑγροῦ κον | φότερον ἢ καὶ τὸν ἄξονα ἔχη | μείζονα μὲν  
 ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχει τοῦ | ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε |  
 25 λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχει τοῦ | ἄξονος, ὃν τὰ  $\overline{ιε}$  ποτὶ  $\overline{δ}$ ,  
 ἀφεθὲν εἰς | τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν  $\overline{δ}$  | λαν εἶμεν  
 ἐν τῷ ὑγρῷ, οὐδέποτε | καταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὰν

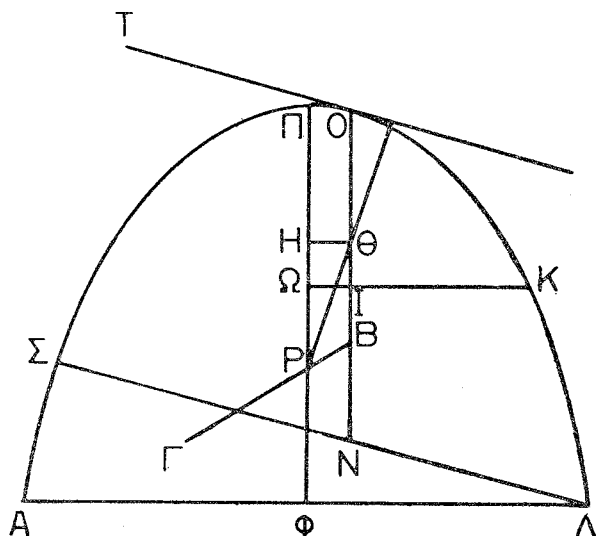
τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εὐρισκομένου τμήματος. Ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ ΤΦ καὶ ἄς προσκβληθῇ μέχρι τοῦ Θ καὶ ἔστω τὸ Θ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΒΡ κάθετος πρὸς τὴν ΝΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΠΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΝΟ, καὶ ἡ ΒΡ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον αὐτήν, καὶ ἡ εὐθεῖα ΦΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, ἡ εὐθεῖα ΦΡ ἐκβληθεῖσα θὰ σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ εἰς τὸ σημεῖον Π γωνίας ἴσας καὶ πρὸς τὴν ΑΣ, τουτέστι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων Τ, Θ παράλληλοι πρὸς τὴν ΦΡ, θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ μὲν μέγεθος ἐκ τοῦ στερεοῦ ΑΠΟΛ τὸ εὐρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φέρεται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης ἐκ τοῦ σημείου Τ, τὸ δὲ μέγεθος τὸ εὐρισκόμενον ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φέρεται πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης ἐκ τοῦ σημείου Θ. Θὰ κλίνη ἄρα τὸ στερεὸν ΑΠΟΛ καὶ ἡ βάσις του δὲν θὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον.

Ἔστω τώρα ὅτι ἡ εὐθεῖα ΠΙ δὲν τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΚΩ, ὥς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σημεῖον Τ, τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος, θὰ πέσῃ μεταξύ τῶν σημείων Π καὶ Ι καὶ τὰ λοιπὰ ἀποδειχθήσονται ὁμοίως.

7

Τὸ ὀρθὸν τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον μὲν κατὰ τὰ τρία δεύτερα τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), μικρότερον δέ, ὥστε νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), ὃν ἔχουν τὰ δεκαπέντε πρὸς τέσσαρα, ἀφθεὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ὅλη ἡ βάσις νὰ εἶναι εἰς τὸ ὑγρὸν,

βά | σιν αὐτοῦ ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὑγροῦ | ἐπιφανείας, ἀλλ' ὥ-  
στε ὅταν εἴμεν | ἐν τῷ ὑγρῷ μηδὲ καθ' ἐν σημείον ἀπτομένην  
τὰς | ἐπιφανείας.



ἔστω τμήμα, | οἷον εἴρηται, καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑ | γρόν,  
5 καθάπερ ἐρρέθη, καθε | στακέτω οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν  
αὐ | τοῦ ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα | νείας. δεικτέον, ὅτι  
οὐ μενεῖ, ἀλλὰ | ἀνακλιθήσεται οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐ- |  
τοῦ μηδὲ καθ' ἐν ἄπτεσθαι τὰς τοῦ | ὑγροῦ ἐπιφανείας.

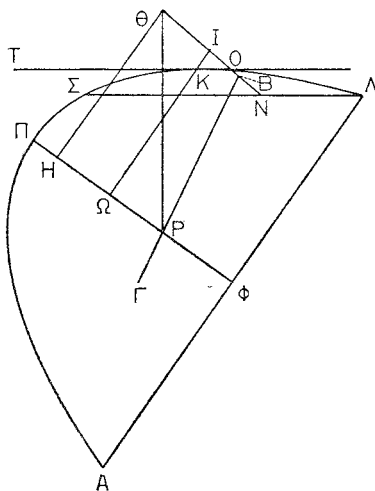
τμαθέντος | γὰρ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ | τὰν τοῦ  
10 ὑγροῦ ἐπιφάνειαν τομὰ | ἔστω ἡ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου  
| τομὰ, ἔστω δὲ καὶ τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπι | φανείας τομὰ ἡ ΣΑ,  
ἄξων δὲ | ἔστω τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος | ἡ ΠΦ, πάλιν  
δὲ τεμνέσθω ἡ ΠΦ κατὰ | μὲν τὸ Ρ, ὥστε διπλασίαν εἴμεν  
| τὰν ΡΠ τὰς ΡΦ, κατὰ δὲ τὸ Ω, ὥστε | τὰν ΠΦ ποτὶ



οὐδέποτε θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἀλλὰ θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ εἶναι βυθισμένη ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ νὰ μὴ ἐφάπτηται οὐδενὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ἔστω τμῆμα, ὡς περιεγράφη, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὡς ἐλέχθη, νὰ ἀποκατασταθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βᾶσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι δὲν θὰ παραμείνῃ εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν, ἀλλὰ θὰ ἀνακλιθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βᾶσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται οὐδενὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Διότι ἀφοῦ αὐτὸ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγροῦ, τομὴ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἔστω δὲ καὶ τῆς



ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τομὴ ἡ ΣΛ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διά-  
μετρος ἔστω ἡ ΠΦ, πάλιν δὲ ἄς τμηθῇ ἡ ΠΦ κατὰ μὲν τὸ Ρ, ὥστε  
να εἶναι ΡΠ = 2ΡΦ, κατὰ δὲ τὸ Ω, ὥστε να εἶναι ΠΦ : ΡΩ =

- τὰν  $P\Omega$  λόγον ἔχειν, | ὃν τὰ  $\overline{\iota\epsilon}$  ποτὶ τὰ  $\overline{\delta}$ , καὶ ἂ  $\Omega K$  ὀρθὰ |  
H 366 ἄχθω τῇ  $ΠΦ$ · ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων | ἂ  $P\Omega$  τᾶς μέχρι τοῦ ἄ-  
ξονος. | ἀπολελάφθω οὖν τῇ μέχρι τοῦ | ἄξονος ἴσα ἂ  $PH$ ,  
καὶ ἂ μὲν  $TO$  | ἄχθω ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς | κατὰ τὸ  $O$   
5 παρὰλληλος ἐοῦσα τῇ |  $\Sigma\Lambda$ , ἂ δὲ  $NO$  τῇ  $ΠΦ$ , τεμνέτω δὲ  
| ἂ  $NO$  τὰν  $K\Omega$  πρότερον κατὰ τὸ  $I$ . | ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ  
τούτου δειχθήσεται, | ὅτι ἂ  $NO$  ἦτοι ἡμιολία τᾶς  $OI$  ἢ μεί-  
| ζων ἢ ἡμιολία· γίνεται δὴ ἂ  $OI$  τᾶς |  $IN$  ἐλάσσων ἢ διπλα-  
σία. ἔστω δὴ | ἂ  $OB$  διπλασία τᾶς  $BN$ , καὶ | κατεσκευάσθω  
10 τὰ αὐτά· ὁμοίως δὴ | δειχθήσεται ἂ  $P\Theta$  ὀρθὰς γωνίας | ποι-  
οῦσα ποτὶ τὰν  $TO$  καὶ ποτὶ τὰν | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, καὶ  
ἀπὸ τῶν  $B$ ,  $\Gamma$  ἀχθεῖσαι παρὰ τὰν  $P\Theta$  καθετοὶ | ἐσσοῦνται  
ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν. | κατενεχθήσεται οὖν τὸ μὲν  
ἐκτὸς | τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ | τὰν διὰ τοῦ  $B$   
15 κάθετον, τὸ δ' ἐν τῷ | ὑγρῷ ἀνενεχθήσεται κατὰ τὰν διὰ τοῦ  
|  $\Gamma$ · φανερόν οὖν, ὅτι ἐπικλιθήσεται τὸ | στερεόν, ὥστε τὰν  
βάσιν αὐτοῦ μὴ | δὲ καθ' ἐν ἄπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ | ἐπι-  
φανείας, ἐπειδὴ νῦν καθ' ἐν σα | μείον <ἀπτόμενον ἐπὶ τὸ  
κάτω φέρε> | ται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ  $\Lambda$ .  
20 φανερόν δέ, | ὅτι, κἂν ἂ  $ON$  μὴ τέμνη τὰν  $\Omega K$ , | ταῦτά  
δειχθήσεται.

H 368

ἡ'

- Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὅταν τὸν  
ἄξονα | ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι | τοῦ ἄξονος,  
25 ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε | ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦτον |  
ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ  $\overline{\iota\epsilon}$  ποτὶ | τὰ  $\overline{\delta}$ , ὅταν τὸ βάρος  
ποτὶ τὸ ὑγρὸν | ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει | τὸ τετρά-  
γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπερὸ |  $\chi\alpha\varsigma$ , ἃ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμι-

15 : 4, καὶ ἡ  $\Omega K$  ὡς ἀχθῆ κάθετος ἐπὶ τὴν  $\Pi\Phi$ · θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ  $P\Omega$  μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου). Ὡς ληφθῇ λοιπὸν πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παραμέτρου) ἴση ἡ  $PH$ , καὶ ἡ μὲν  $TO$  ὡς ἀχθῆ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ  $O$  καὶ παράλληλος πρὸς τὴν  $\Sigma\Lambda$ , ἡ δὲ  $NO$  παράλληλος πρὸς τὴν  $\Pi\Phi$ , ὡς τέμνη δὲ ἡ  $NO$  τὴν  $K\Omega$  πρῶτον κατὰ τὸ  $I$ . Ἀποδεικνύεται ὁμοίως πρὸς τὸ προηγούμενον, ὅτι ἡ  $NO$  εἶναι τὰ τρία δευτέρα τῆς  $OI$  ἢ μεγαλύτερα τῶν τριῶν δευτέρων· γίνεται λοιπὸν ἡ  $OI < 2IN$ . Ἐστω ἡ  $OB = 2BN$  καὶ ὡς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτὰ καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ  $P\Theta$  σχηματίζει ὀρθὰς γωνίας πρὸς τὴν  $TO$  καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, καὶ ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν  $B, \Gamma$  ἀχθεῖσαι παράλληλοι πρὸς τὴν  $P\Theta$  θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Θὰ φερθῇ λοιπὸν τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήμα εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τὴν διὰ τοῦ  $B$  κάθετον, τὸ δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διὰ τοῦ  $\Gamma$  εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ στερεὸν θὰ κλίνη, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον, ἐπειδὴ τῶρα ἐφαπτόμενον εἰς ἓν σημεῖον φέρεται πρὸς τὰ κάτω πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τὸ  $\Lambda$ .

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ αὐτὰ ἀποδεικνύονται καὶ ἂν ἡ  $ON$  δὲν τέμνη τὴν  $\Omega K$ .

8

Τὸ ὀρθὸν τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἔχη τὸν ἄξονα μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), μικρότερον δὲ ἀπὸ τοῦ νὰ ἔχη πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παραμέτρου) τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 15 : 4, ὅταν τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρὸν ἔχη μικρότερον λόγον ἐκείνου, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος (πα-

| όλιος τᾱς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ | τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ  
τοῦ ἄξονος, | ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν | μὴ  
ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὐτ' εἰς | ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται  
οὔτε μενεῖ | κεκλιμένον, πλὴν ὁπόταν ὁ ἄξων | αὐτοῦ ποτὶ  
5 τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ποι | ῆ γωνίαν ἴσαν τῇ μελλούσῃ  
λέ | γεσθαι.

ἔστω τμᾶμα, οἷον εἴρηται, | καὶ ἡ ΒΔ ἴσα τῷ ἄξονι, καὶ  
ἡ μὲν | ΒΚ τᾱς ΚΔ διπλασία, ἡ δὲ ΚΡ ἴσα | τῇ μέχρι τοῦ  
ἄξονος, ἔστω δὲ καὶ ἡ | μὲν ΤΒ ἡμιολία τᾱς ΒΡ, ἡ δὲ ΤΔ  
10 τᾱς | ΚΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ | βάρει ποτὶ τὸ  
ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω | τὸ ἀπὸ τᾱς ΦΧ τετράγωνον ποτὶ | τὸ  
ἀπὸ τᾱς ΔΒ, ἔστω δὲ καὶ ἡ Φ | < διπλασία τᾱς Χ. δηλον  
οὔν, ὅτι > | ἡ ΦΧ ποτὶ τὰν ΔΒ ἐλάσσονα λόγον | ἔχει τοῦ,  
ὃν ἔχει ἡ ΤΒ ποτὶ τὰν ΒΔ· ἔστι | γὰρ ἡ ΤΒ ἡ ὑπεροχά, ἡ  
H 370 μείζων ἢ ἡμιόλιος | ὁ ἄξων τᾱς μέχρι τοῦ ἄξονος· | ἐλάσσων  
ἄρα ἡ ΦΧ τᾱς ΒΤ· ὥσ | τε καὶ ἡ Φ τᾱς ΒΡ. ἔστω δὴ τῇ Φ  
ἴσα ἡ | ΡΨ, καὶ τῇ ΒΔ ὀρθὰ ἄχθω ἡ ΨΕ | δυναμένα τὸ ἡ-  
μισυ τοῦ ὑπὸ τῶν | ΚΡ, ΒΨ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ. δει | κτέον,  
ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς | τὸ ὑγρόν, ὡς εἴρηται, καταστασεῖ-  
20 ται | κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ  
ὑγροῦ ποιεῖν | γωνίαν ἴσαν τῇ ΕΒΨ.

ἀφείσθω | γάρ τι ἐξ τοῦ ὑγρόν τμᾶμα, καὶ ἡ | βάσις αὐτοῦ  
μὴ ἄπτεσθω τᾱς τοῦ | ὑγροῦ ἐπιφανείας, καί, εἰ δυνατόν, |  
μὴ ποιείσθω ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ  
25 ἴσαν | τῇ Β, ἀλλὰ μείζω πρῶτον.

τμα | θέντος δὴ τοῦ τμᾶματος ἐπιπέ | δω διὰ τοῦ ἄξονος  
ὀρθῶ ποτὶ τὰν ἐπιφά | νειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἡ ΑΠΟΑ |  
ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐν δὲ τῇ | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείᾳ  
ἡ ΞΣ, ἄξων | δὲ καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] | ἡ ΝΟ.

ραμέτρου), πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, οὔτε ἀποκαθίσταται ὀρθόν, οὔτε θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς ἐκείνην, ἢ ὅποια θὰ λεχθῇ μελλοντικῶς.

Ἐστω τμῆμα, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἡ ΒΔ ἴση πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἡ μὲν ΒΚ = 2ΚΔ, ἡ δὲ ΚΡ ἴση πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παράμετρον), ἔστω δὲ καὶ ἡ μὲν ΤΒ = (3 : 2) ΒΡ, ἡ δὲ ΤΔ = (3 : 2) ΚΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἄς ἔχῃ ΦΧ<sup>2</sup> : ΔΒ<sup>2</sup>, ἔστω δὲ καὶ ἡ Φ = 2Χ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ΦΧ : ΔΒ < ΤΒ : ΒΔ· διότι ἡ ΤΒ εἶναι ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος τῶν (3 : 2) ὁ ἄξων, τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (παραμέτρου)· εἶναι ἄρα Φ + Χ < ΒΤ (Εὐκλ. V, 10)· ὥστε καὶ ἡ Φ < ΒΡ. Ἐστω λοιπὸν Φ = ΡΨ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΨΕ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, ὥστε  $\Psi E^2 = \frac{1}{2} ΚΡ \cdot ΒΨ$ , καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὡς ἐλέχθη, θὰ κλίνη, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΕΒΨ.

Διότι ἄς ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρόν τμῆμά τι, καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ ἄς μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καί, εἰ δυνατόν, ἄς μὴ σχηματίζῃ ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Β, ἀλλὰ πρῶτον μεγαλύτεραν.

Ἀφοῦ τμηθῇ λοιπὸν τὸ τμῆμα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, εἰς δὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὴ ἔστω ἡ ΞΣ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος τοῦ τμήματος ἡ ΝΟ. Ἀς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ μὲν

ἄχθω δὴ καὶ ἃ μὲν ΠΥ παρὰ τὰν ΕΣ ἐφαπτομένα τὰς ΑΠΟΛ |  
τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἃ δὲ ΠΜ παρὰ | τὰν ΝΟ, ἃ δὲ ΠΙ κά-  
θετος ἐπὶ τὰν | ΝΟ, καὶ τῇ ΒΡ ἔστω ἴσα ἡ ΟΩ, τῇ δὲ ΡΚ  
ἡ ΩΘ, καὶ ὀρθὰ ἡ ΩΗ τῷ | ἄξονι. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὁ ἄ-  
5 ξων | τοῦ τμήματος ποτὶ τὰν ἐπιφά | ρειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν  
ποιεῖν μεί | ζονα τὰς Β, δῆλον, ὅτι τοῦ ΠΙΥ | τριγώνου ἡ  
ποτὶ τῷ Υ γωνία | μείζων τὰς Β· μείζονα δὲ λόγον | ἔχει τὸ  
H 372 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς | ΠΙ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς |  
ΙΥ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς | ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ  
10 ἀπὸ | τὰς ΨΒ. ἀλλ' ὅν μὲν λόγον ἔχει τὸ | ἀπὸ τὰς ΠΙ τετρά-  
γωνον ποτὶ | τὸ ἀπὸ τὰς ΙΥ, τοῦτον ἔχει ἡ ΚΡ | ποτὶ ΥΙ, ὅν  
δὲ λόγον ἔχει τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΕΨ ποτὶ τὸ τε- |  
τράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΨΒ, τοῦτον | ἔχει ἡ ἡμίσεια τὰς  
ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΚΡ ποτὶ τὰν ΥΙ  
15 ἢ περ ἡ ἡμίσεια τὰς ΚΡ | ποτὶ τὰν ΨΒ· ἐλάσσων ἄρα ἢ δι-  
πλασία | ἡ ΥΙ τὰς ΨΒ. τὰς δὲ ΟΙ διπλασία ἡ ΙΥ· ἐλάσσων  
ἄρα | ἡ ΟΙ τὰς ΨΒ· ὥστε ἡ ΙΩ μείζων | ἐστὶ τὰς ΨΡ. ἡ δὲ  
ΨΡ ἴσα ἐστὶ τῇ | Φ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΙΩ τὰς Φ. | καὶ  
ἐπεὶ ὑπόκειται τὸ τμήμα | τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἔχειν  
20 λό | γον, ὅν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς | ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγω-  
νον τὸ ἀπὸ τὰς | ΒΔ, ὅν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμήμα | τῷ βάρει  
ποτὶ τὸ ὑγρὸν, τοῦτον | ἔχει τὸν λόγον τὸ δευκλὸς αὐτοῦ |  
ποτὶ τὸ ὅλον τμήμα, ὅν δὲ τὸ δεδυ | κὸς ποτὶ τὸ ὅλον, τοῦτον  
ἔχει τὸ τε | τράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΠΜ ποτὶ | τὸ τετράγωνον  
25 τὸ ἀπὸ τὰς ΟΝ, | ὅν ἄρα λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ  
τὰς ΦΧ ποτὶ τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΒΔ, τοῦτον |  
ἔχει τὸν λόγον τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τὰς ΜΠ ποτὶ τὸ  
τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΟΝ· ἴσα ἄρα | ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΜ.  
ἡ δὲ ΠΗ ἐδείχθη | μείζων ἐοῦσα τὰς Φ· δῆλον οὖν, | ὅτι ἡ



$ΠΜ$  ἐλάσσων ἢ ἡμιολία ἐστὶν | τᾶς  $ΠΗ$ , ἃ δὲ  $ΠΗ$  τᾶς  
 $ΗΜ$  μείζων | ἢ διπλασίων. ἔστω οὖν ἃ  $ΠΖ$  δι | πλασίων τᾶς  
 $ZM$ . ἐσσεῖται δὴ τὸ | μὲν  $Θ$  κέντρον τοῦ βάρους τοῦ στε | ρεοῦ,  
 τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ  $Z$ . τοῦ δὴ | λοιποῦ μεγέθους τὸ κέντρον |  
 5 τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς  $ZΘ$  εὐ | θείας ἐπιζευχθείσας καὶ  
 Η 374 ἐκβληθείσας. ἐκ | βεβλήσθω ἐπὶ τὸ  $Γ$ . δειχθῆσ | εται δὴ ὁμοί-  
 ως ἃ  $ΘΗ$  καθ' | ετος ἑοῦσα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, |  
 καὶ τὸ μὲν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα | ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐκτὸς  
 10 τοῦ ὑγροῦ | κατὰ τὰν διὰ τοῦ  $Z$  ἀγμέναν κάθε | τον ἐπὶ τὰν  
 τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνει | αν, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐνεχθήσεται |  
 εἰς τὸ ἐντὸς κατὰ τὰν διὰ τοῦ  $Γ$ . οὐ | μενεῖ δὴ τὸ τμᾶμα κατὰ  
 τὰν ὑπο | κειμένην κλίσιν.

οὐδὲ μὴν εἰς τὸ ὄρ | θὸν ἀποκαταστασεῖται. δῆλον δὲ |  
 διὰ τούτων· ἐπειδὴ τῶν ἀγμένων | διὰ τῶν  $Z$ ,  $Γ$  καθέτων ἃ  
 15 μὲν διὰ | τοῦ  $Z$  ἀγμένα τᾶς  $ΓΖ$  ἐπὶ τὰ αὐτὰ | μέρη πίπτει,  
 ἐφ' ᾗ ἐστὶ τὸ  $A$ , ἃ δὲ | διὰ τοῦ  $Γ$  ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ  $A$ , δῆλον, |  
 ὅτι διὰ τὰ προειρημένα τὸ μὲν  $Z$  κέν |τρον ἄνω οἰσθήσεται,  
 τὸ δὲ  $Γ$  κάτω· | ὥστε τοῦ ὅλου μεγέθους τὰ | μέρη τὰ ἀπὸ  
 τοῦ  $A$  κάτω οἰσθήσεται. |

20 τοῦτο δ' ἦν εὐχρηστον ποτὶ τὸ δείξαι. |

Ὑποκείσθω πάλιν τὰ μὲν ἄλλα τὰ | αὐτά, ὃ δὲ ἄξων  
 τοῦ τμᾶματος ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεῖ | < τω  
 γωνίαν ἐλάσσονα τᾶς ποτὶ | τῷ  $B$ . ἐλάσσονα δὴ λόγον > |  
 ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΠΙ$  | ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΙΥ$  ἢ  
 25 τὸ ἀπὸ τᾶς |  $ΕΨ$  ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΨΒ$ . καὶ ἃ  $KP$  | ἄρα  
 ποτὶ τὰν  $ΥΙ$  ἐλάσσονα λόγον | ἔχει ἥπερ ἃ ἡμίσεια τᾶς  $KP$





ποτὶ τὰν  $\Psi B$ . | μείζων ἄρα ἐσσεῖται ἢ διπλασίων ἂ |  $IY$  τὰς  
 $\Psi B$ · ἂ ἄρα  $\Omega I$  ἐλάσσων τὰς  $\Psi P$ . | ἐσσεῖται οὖν καὶ ἂ  $\Pi H$   
H 376 ἐλάσσων τὰς  $\Phi$ . | ἂ δὲ  $M\Pi$  τᾷ  $\Phi X$  ἴσα· δηλον οὖν, ὅτι μείζων  
ἢ | ἡμιολία ἂ  $\Pi M$  τὰς  $\Pi H$ , ἂ δὲ  $\Pi H$  ἐ | λάσσων ἢ διπλασίων  
5 τὰς  $H M$ . ἔστω | οὖν ἂ  $\Pi Z$  τὰς  $Z M$  διπλασία. πάλιν | οὖν  
τοῦ μὲν ὅλον κέντρον ἐσσεῖται τοῦ | βάρους τὸ  $\Theta$ , τοῦ δ' ἐν  
τῷ ὑγρῷ τὸ  $Z$ · | ἐπιζευχθείσας δὴ τὰς  $Z\Theta$  καὶ ἐκ | βληθείσας  
ἐσσεῖται τὸ <κέντρον τοῦ βά | ρους τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ  
τὰς | ἐκβληθείσας. ἔστω τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἄχθωσαν κα> | θέτοι ἐπὶ τὰν  
10 τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνει | αν διὰ τῶν  $Z, \Gamma$  παρὰ τὰν  $H\Theta$ · δη | λον  
οὖν, ὅτι οὐ μενεῖ τὸ ὅλον τμᾶ | μα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε  
τὸν ἄξο | να ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ | ποιεῖν γωνίαν  
μείζονα, ἢς νῦν ποιεῖ.

ἐπεὶ οὖν οὔτε γωνίαν μεί | ζονα τὰς  $B$  ποιοῦντος τοῦ ἄξο-  
15 νος | ποτὶ τὸ ὑγρὸν σταθήσεται τὸ τμᾶ | μα οὔτ' ἐλάσσονα,  
φανερὸν, ὅτι | ταλικάυταν ποιοῦντος γωνίαν | σταθήσεται·  
οὕτως γὰρ ἂ  $IO$  ἐσσεῖ | ται ἴσα τᾷ  $\Psi B$  καὶ ἂ  $\Omega I$  τᾷ  $\Psi P$  καὶ τᾷ  
 $\Phi$  | ἂ  $\Pi H$ · ἡμιολία ἄρα ἐσσεῖται ἂ  $M\Pi$  | τὰς  $\Pi H$ , ἂ δὲ  $\Pi H$   
H 378 τὰς  $H M$  διπλασία. | τὸ  $H$  ἄρα τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ | βάρους κέν-  
20 τρον ἐστίν· ὥστε κατὰ | τὰν αὐτὰν κάθετον ἀνενεχθήσε | ται,  
καὶ τὸ ἐκτὸς ἐς τὸ κάτω ἐνε | χθήσεται. μενεῖ ἄρα· ἀντωθοῦν-  
ται | γὰρ ὑπ' ἀλλήλων.

θ'

Τὸ ὀρθὸν | τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, | ὅταν τὸν  
25 ἄξονα ἔχη μείζονα μὲν | ἢ ἡμιόλιον τὰς μέχοι τοῦ ἄξονος, |  
ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε τοῦτον ἔχειν τὸν | λόγον, ὃν ἔχει τὰ  $\iota\epsilon$   
ποτὶ  $\delta$ , καὶ | τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μείζονα λό | γον ἔχη

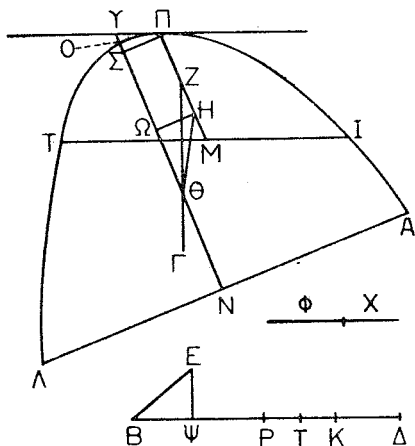
ἄρα καὶ  $KP : YI < \frac{1}{2} KP : \Psi B$ . Ἐὰν εἶναι ἄρα ἡ  $IY > 2\Psi B$ .  
 θὰ εἶναι ἄρα  $\Omega I < \Psi P$ . Ἐὰν εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ  $PH < \Phi$ . Εἶναι δὲ  
 $MP = \Phi + X$ . εἶναι λοιπὸν φανερόν ὅτι ἡ  $PM > \frac{3}{2} PH$  καὶ  
 $PH < 2HM$ . Ἐστω λοιπὸν ἡ  $PZ = 2ZM$ . Πάλιν λοιπὸν τοῦ μὲν  
 ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ , τοῦ δὲ ἐντὸς τοῦ  
 ὑγροῦ μέρους τὸ  $Z$ . ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ  $Z\Theta$  καὶ προεκβληθῇ τὸ κέντρον  
 τοῦ βάρους τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς προεκ-  
 βληθείσης. Ἐστω ὅτι εἶναι τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἄς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπι-  
 φάνειαν τοῦ ὑγροῦ διὰ τῶν  $Z, \Gamma$ , παράλληλοι πρὸς τὴν  $H\Theta$ . εἶναι  
 λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ὅλον τμήμα δὲν θὰ παραμείνῃ ἐν ἡρεμίᾳ, ἀλλὰ  
 θὰ κλίνη, ὥστε ὁ ἄξων του πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχη-  
 ματίζῃ γωνίαν μεγαλυτέραν, ἐκείνης τὴν ὁποίαν σχηματίζει τώρα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν οὔτε ὅταν σχηματίζῃ ὁ ἄξων πρὸς τὸ ὑγρὸν γω-  
 νίαν μεγαλυτέραν τῆς  $B$ , οὔτε ὅταν σχηματίζῃ γωνίαν μικροτέραν θὰ  
 σταθῇ (ὀρθὸν) τὸ τμήμα, εἶναι φανερόν, ὅτι ὅταν σχηματίζῃ ἴσην  
 γωνίαν θὰ σταθῇ. θὰ εἶναι λοιπὸν κατὰ ταῦτα ἡ  $IO = \Psi B$  καὶ ἡ  
 $\Omega I = \Psi P$  καὶ ἡ  $\Phi = PH$ . θὰ εἶναι ἄρα ἡ  $MP = \frac{3}{2} PH$  καὶ ἡ  
 $PH = 2 HM$ . Τὸ  $H$  ἄρα εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἐντὸς τοῦ  
 ὑγροῦ τμήματος. ὥστε τοῦτο θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν  
 αὐτὴν κατακόρυφον, καὶ τὸ ἐκτὸς θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω. Ἐὰν ἰσορ-  
 ροπήσῃ ἄρα διότι μεταξὺ τῶν ἀντιπιέζονται.

Τὸ ὀρθὸν τμήμα τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς, ὅταν ἔχη  
 τὸν ἄξονα μεγαλύτερον μὲν τῶν τριῶν δευτέρων τῆς μέχρι τοῦ ἄ-  
 ξονος ἀποστάσεως (τῆς παραμέτρου), μικρότερον δὲ τοῦ λόγου 15 :  
 4, καὶ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχη μεγαλύτερον λό-

- τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ὑπεροχά, ἧ μεῖζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος  
 τετράγωνον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχᾶς, ἧ  
 μεῖζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡ μισία τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος, |  
 ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν  
 5 οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν | ἐν τῷ ὑγρῷ, τεθὲν  
 κεκλιμένον οὕτε κατασταθήσεται, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ  
 κατὰ κάθετον εἶμεν, οὕτε | μενεῖ κεκλιμένον, πλὴν ὅταν ὁ  
 ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν | τοῦ ὑγροῦ ποιῇ γωνίαν  
 ἴσαν τῇ | λαφθείσῃ ὁμοίως, ἧ πρότερον.
- 10 ἔστω τμήμα, οἷον εἴρηται, καὶ κείσθω ἡ  $AB$  ἴσα τῷ ἄξονι  
 τοῦ τμήματος, καὶ ἡ μὲν  $BK$  τῆς  $KA$  διπλασία ἔστω,  
 ἡ δὲ  $KP$  ἴσα τῇ μέχρι τοῦ ἄξονος, ἡ δὲ  $TB$  ἡμισία τῆς  
 $BP$ , | ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμήμα τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ὑγρὸν,  
 τοῦτον ἔχέτω ἡ ὑπεροχά, ἧ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ  
 15 ἀπὸ τῆς  $BA$  | τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Phi X$ , ποτὶ τὸ  
 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$ , ἔστω δὲ ἡ  $\Phi$  | διπλασία τῆς  
 $X$ . ὁμολογῶν οὖν, ὅτι ἡ ὑπεροχά, ἧ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον  
 ἀπὸ τῆς  $BA$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $BT$ , ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ  
 380 τῆς  $BA$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ ὑπεροχά, ἧ ὑπερέχει τὸ  
 20 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς  
 $\Phi X$ , ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$ . ἔστι γὰρ ἡ  
 $BT$  ἡ ὑπεροχά, ἧ μεῖζων ἐστὶν ἢ ἡ μισία | ὁ ἄξων τοῦ τμή-  
 ματος τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος. μεῖζον ἄρα ὑπερέχει τὸ  
 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Phi X$  ἢ τὸ τετρά-  
 25 γωνον τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς  $BT$ .  
 ὥστε ἡ  $\Phi X$  ἐλάσσων ἐστὶ τῆς  $BT$ . καὶ ἡ  $\Phi$  ἄρα τῆς  $BP$ . |  
 ἔστω οὖν τῇ  $\Phi$  ἴσα ἡ  $P\Psi$ , καὶ ἡ  $\Psi E$  | ὁρθὰ ἀχθῶ τῇ  $BA$   
 δυναμένα | τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν  $KP$ ,  $\Psi B$ .  
 φημί, ὅτι τὸ τμήμα ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν, ὥστε τὰν | βάσιν

γον ἐκεῖνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερον τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βᾶσις αὐτοῦ νὰ εἶναι ὅλη ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν κεκλιμένον οὔτε θὰ ἀποκατασταθῇ, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ εἶναι κατακόρυφος, οὔτε θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ σχηματίξῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ὁμοίως, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον.



Ἐστω τμήμα, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἄς ληφθῇ ἡ ΔΒ ἴση πρὸς τὸν ἄξωνα τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἡ μὲν ΒΚ = 2ΚΔ, ἡ δὲ ΚΡ ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν μέχρι τοῦ ἄξονος (τὴν παράμετρον), ἡ δὲ ΤΒ =  $\frac{3}{2}$  ΒΡ,

νὰ εἶναι δὲ βάρος τοῦ τμήματος : βάρος ὑγροῦ =  $[ΒΔ^2 - (Φ + Χ)^2] : ΒΔ^2$ , ἔστω δὲ ἡ  $Φ = 2Χ$ . Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι  $ΒΔ^2 - ΒΤ^2 : ΒΔ^2 < [ΒΔ^2 - (Φ + Χ)^2] : ΒΔ^2$ . διότι ἡ ΒΤ εἶναι ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τοῦ τμήματος τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου) κατὰ τρία δεύτερα. Εἶναι ἄρα  $ΒΔ^2 - (Φ + Χ)^2 > ΒΔ^2 - ΒΤ^2$  (Εὐκλ. V, 10). ὥστε εἶναι  $Φ + Χ < ΒΤ$  καὶ συνεπῶς  $Φ < ΒΡ$ .

Ἐστω λοιπὸν  $Φ = ΡΨ$  καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΨΕ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, ὥστε  $ΨΕ^2 = \frac{1}{2} ΚΡ \cdot ΨΒ$ . Λέγω, ὅτι τὸ τμήμα ἀφεθὲν εἰς

αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ | ὑγρῷ, καταστασεῖται οὕτως, | ὥστε  
τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν | ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν |  
ποιεῖν ἴσαν τᾷ *B*.

ἀφείσθω [μὲν], | γὰρ τὸ τμᾶμα, ὡς εἴρηται, ἐς τὸ | ὑγρόν,  
5 καὶ μὴ ποιεῖτω ὁ ἄξων ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γω-  
νίαν ἴσαν τᾷ | *B*, ἀλλὰ μείζονα πρότερον.

τμα | θέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ | ποτὶ τὰν ἐπιφά-  
νειαν τοῦ ὑγροῦ | ἔστω τοῦ τμᾶματος τομὰ *ΑΠ* | *ΟΑ* ὀρθο-  
γωνίου κώνου τομὰ, | τᾷς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας *Α* | *ΤΙ*,  
10 ἄξων δὲ [τῆς τομῆς] | καὶ διάμετρος *ΑΝΟ*, καὶ τετμᾶσ' | θω  
κατὰ τὰ *Ω*, *Θ*, ὡς καὶ πρότερον, ἄχθω δὲ καὶ *Α* μὲν *ΥΠ* |  
παρὰ τὰν *ΤΙ* ἐφαπτομένα | τᾷς τομᾷς κατὰ τὸ *Π*, *Α* δὲ *ΙΜ*

Η 382 *aequedistanter ipsi NO, quae uero PS perpendicularis*  
*super axem. quoniam igitur axis portionis ad superficiem*  
15 *humidi facit angulum maiorem angulo B, erit utique et*  
*angulus qui sub SYP maior angulo B* [Eucl. I, 29]; *tetra-*  
*gonum ergo quod a PS ad tetragonum quod ab SY habet*  
*proportionem maiorem quam tetragonum quod a ΨΕ ad*  
*tetragonum quod a ΨΒ* [σ. 324, 6 κ.έ.]. *ergo et quae KR*  
20 *ad SY habet proportionem maiorem quam medietas ipsius*  
*KR ad ΨΒ; minor ergo quae SY quam dupla ipsius ΨΒ*  
*[Eucl. V, 10]. et quae SO quam ΨΒ minor;*

μείζων ἄρα *Α* *ΣΩ* τᾷς *ΡΨ* καὶ *Α* | *ΠΗ* τᾷς *Φ*. καὶ ἐπεὶ τὸ  
τμᾶμα τῷ βᾷ | ρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν *Α* | ὑπεροχά,  
25 ᾧ μείζόν ἐστιν τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τᾷς *ΒΔ* τοῦ τετρα- |  
γώνου τοῦ ἀπὸ τᾷς *ΦΧ*, ποτὶ | τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾷς *ΒΔ*,  
ὃν δὲ | λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ | τὸ ὑγρόν, τοῦτον  
ἔχει τὸν λόγον | τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὅλον, |  
δῆλον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον τὸ | δεδυκὸς αὐτοῦ μέρος  
30 ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, | ὃν *Α* ὑπεροχά, ᾧ ὑπερέχει τὸ τε | τρά-

τὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι ὅλη ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Β.

Διότι ἂς ἀφελθῇ μὲν, ὡς ἐλέχθη, τὸ τμήμα εἰς τὸ ὑγρόν, καὶ ἂς μὴ σχηματίζῃ ὁ ἄξων πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν Β, ἀλλὰ πρῶτον μεγαλυτέραν.

Ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τοῦ τμήματος τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, τῆς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΤΙ, ἄξων δὲ τῆς παραβολῆς καὶ διάμετρος ἡ ΝΟ, καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη κατὰ τὰ Ω, Θ, ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ μὲν ΥΠ παράλληλος πρὸς τὴν ΤΙ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΜ

παράλληλος πρὸς τὴν ΝΟ καὶ ἡ ΡΣ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων τοῦ τμήματος σχηματίζει μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς Β, ἡ γωνία ΣΥΠ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Β (Εὐκλ. Ι, 29)· θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τῆς ΠΣ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΥ μεγαλυτέρος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τῆς ΨΕ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΨΒ· καὶ ὁ λόγος ἄρα τῆς ΚΡ πρὸς ΣΥ θὰ εἶναι μεγαλυτέρος τοῦ λόγου τοῦ ἡμίσεος τῆς ΚΡ πρὸς τὴν ΨΒ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΣΥ μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΨΒ (Εὐκλ. V, 10) καὶ ἡ ΣΟ μικροτέρα τῆς ΨΒ.

Εἶναι ἄρα ἡ ΣΩ > ΡΨ καὶ ἡ ΠΗ > Φ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ τμήματος : τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ =  $ΒΔ^2 - (Φ + Χ)^2 : ΒΔ^2$ , ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ ἐν βυθίσει τμήμα αὐτοῦ πρὸς τὸ ὅλον, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἐν βυθίσει τμήμα αὐτοῦ θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ὅλον τμήμα, ὃν ἔχει  $ΒΔ^2 - (Φ + Χ)^2 : ΒΔ^2$ · θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ τὸ ὅλον

γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΒΔ$  τοῦ τε | τραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς  $ΦΧ$ ,  
 ποτὶ τὸ | τετράγωνον τὸ ἀπὸ  $ΒΔ$ · ἔξει οὖν καὶ | τὸ ὅλον  
 τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς | τοῦ ὑγροῦ λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον  
 τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΒΔ$  | ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς  $ΦΧ$ . ὃν δὲ λόγον | ἔχει τὸ  
 5 ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς | τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ  
 τᾶς |  $ΝΟ$  ποτὶ τὸ ἀπὸ  $ΠΜ$ · ἴσα ἄρα ἂ  $ΜΠ$  | τᾷ  $ΦΧ$ . ἂ δὲ  
 $ΠΗ$  δέδεικται μεί | ζων τᾶς  $Φ$ · ἂ ἄρα  $ΜΗ$  ἐλάσσων ἐστὶν  
 | τᾶς  $Χ$ · μείζων <ἄρα ἐστὶν ἢ διπλασία ἂ  $ΠΗ$ > | τᾶς  
 < $ΗΜ$ . ἔστω δὴ ἂ  $ΠΖ$  διπλασία τᾶς  $ΖΜ$ , καὶ ἐπιζευχθεῖσα  
 Η 384 ἂ  $ΖΘ$  ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ  $Γ$ · ἔσται οὖν τοῦ μὲν ὅλου τμᾶμα-  
 τος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ  $Θ$ , τοῦ δὲ ἐκτὸς) τοῦ ὑγροῦ τὸ |  
 < $Ζ$ , τοῦ δὲ ἐντὸς ἐν τᾷ  $ΘΓ$ · ἔστω δὲ τὸ>  $Γ$ . <δειχθήσεται δὴ  
 ὁμοίως τοῖς πρότερον ἂ  $ΘΗ$ > κάθετος ἐπὶ | <τὰν ἐπιφά-  
 νειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ διὰ τῶν  $Ζ$ ,  $Γ$  παρὰ τὰν  $ΘΗ$ > ἀγό-  
 15 μεναι κα | θέτοι καὶ αὐταὶ ἐπὶ τὰν | ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ.  
 κατενεχθήσεται | ἄρα τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα | ἐς  
 τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ  $Ζ$ , τὸ δὲ ἐντὸς | κατὰ τὰν διὰ τοῦ  
 $Γ$  ἀνενεχθή | σεται· οὐ μενεῖ οὖν τὸ ὅλον τμᾶ | μα ἀκλινές.  
 οὐδὲ μὴν καταστρα | φήσεται, ὥστε κατὰ κάθετον | εἴμεν τὸν  
 20 ἄξονα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑ | γροῦ ἐπιφάνειαν, ἐπειδὴ τὰ ἐπὶ | <τὰ  
 αὐτὰ τῷ  $Α$  κάτω, τὰ δὲ ἐπὶ τὰ αὐ | τὰ τῷ  $Α$  ἐς τὰ ἄνω οἰσθή-  
 σεται,> | διὰ τὰ ἀνάλογον τοῖς λεγομέ | νοις ἐπὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ.  
 ἐὰν δὲ | ὁ ἄξων ποτὶ τὸ ὑγρὸν ποιῇ γωνί | αν ἐλάσσονα  
 τᾶς  $Β$ , ὁμοίως τοῖς | πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐ με | νεῖ  
 25 τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, | ἕως ἂν ὁ ἄξων ποιῇ γωνίαν  
 | ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ | ἴσαν τᾷ  $Β$ .

ι'

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὅταν κων-  
 φότε | ρον ὃν τοῦ ὑγροῦ τὸν ἄξονα ἔ | χη μείζονα ἢ ὥστε λόγον



τμήμα πρὸς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ λόγον, ὃν ἔχει τὸ  $BD^2 : (\Phi + X)^2$  (Εὐκλ. V, 7 πόρ., 19 πόρ.). Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμήμα πρὸς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήμα, τοῦτον ἔχει τὸ  $NO^2 : PM^2$  (Περὶ Κωνοειδ. 24). εἶναι ἄρα ἡ  $MP = \Phi + X$  (Εὐκλ. V, 9). Ἀπεδείχθη δὲ ἡ  $PH > \Phi$ . εἶναι ἄρα ἡ  $MH < X$ . εἶναι ἄρα ἡ  $PH > 2 HM$ . Ἐστω λοιπὸν ἡ  $PZ = 2ZM$ , καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ  $Z\Theta$  ἃς προεκβληθῇ πρὸς τὸ  $\Gamma$ . θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μὲν ὅλου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ , τοῦ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ  $Z$ , τοῦ δὲ ἐντὸς τμήματος ἐπὶ τῆς  $\Theta\Gamma$ . ἔστω δὲ τὸ  $\Gamma$ . Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ  $\Theta H$  εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ ἀγόμεναι διὰ τῶν  $Z, \Gamma$  παράλληλοι πρὸς τὴν  $\Theta H$  εἶναι κάθετοι καὶ αὐταὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Θὰ φερθῇ λοιπὸν τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήμα πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν διὰ τοῦ  $Z$  κάθετον, τὸ δὲ ἐντὸς θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διὰ τοῦ  $\Gamma$ . δὲν θὰ μείνῃ λοιπὸν τὸ ὅλον τμήμα ἀκλινές. Ἀλλ' οὐδὲ θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὁ ἄξων νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἐπειδὴ τὰ πρὸς τὸ  $\Lambda$  θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ κάτω, τὰ δὲ πρὸς τὸ  $A$  πρὸς τὰ ἄνω, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν ἀναλόγως λεχθέντων εἰς τὸ προηγούμενον.

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μικροτέραν τῆς  $B$ , ἀποδεικνύεται καθ' ὅμοιον τρόπον ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι τὸ τμήμα δὲν θὰ ἰσορροπήσῃ, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ, μέχρις ὅτου ὁ ἄξων σχηματίσῃ γωνίαν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσην πρὸς τὴν  $B$ .

Τὸ ὀρθὸν τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἐλαφρότερον ὢν τοῦ ὑγροῦ ἔχῃ τὸν ἄξωνα μεγαλύτερον ἐκείνου, καθ'

ἔχειν | ποτὶ τὰν μέχρῃ τοῦ ἄξονος [τοῦ], | ὃν ἔχει τὰ  $\overline{\iota\epsilon}$   
 ποτὶ τὰ δ, ἀφελὲν | εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ μὴ  
 ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὅτ' | μὲν ὀρθὸν καταστασεῖται, ὅτ' δὲ  
 | κεκλιμένον, καὶ ποτὲ μὲν οὐ | τω κεκλιμένον, ὥστε τὰν βά-  
 5 σιν | αὐτοῦ καθ' ἐν σαμεῖον ἄπτεσθαι | τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπι-  
 Η 386 φανείας, καὶ | τοῦτο ἐν δισσοῖς κλιμάτεσσι ποιή | σει, ποτὲ  
 δὲ οὕτως κεκλιμένον | καταστασεῖται, ὥστε τὰν βάσιν | αὐ-  
 τοῦ κατὰ πλείονα τόπον | βρέχεσθαι, ποτὲ δὲ οὕτως, ὥστε |  
 τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴδὲ καθ' ἐν | ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὑγροῦ  
 10 ἐπιφα <νείας· ὃν δὲ λόγον ἔχοντος τῷ> | βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν  
 ἕκαστα αὐ | τῶν ἐσσεῖται, νῦν δηλωθήσεται. |

ἔστω τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ | τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέ-  
 δῳ | ὀρθῶ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν | τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἐν τᾷ  
 ἐπιφα | νείᾳ ἃ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου | τομὰ, ἄξων δὲ  
 15 ἔστω καὶ διάμετρος | τὰς τομᾶς ἃ ΒΔ, τετράσθω δὲ | ἃ ΒΔ  
 κατὰ τὸ Κ, ὥστε διπλασίαν | εἴμεν τὰν ΒΚ τὰς ΚΔ, κατὰ δὲ  
 | τὸ Τ, ὥστε τὰν ΔΒ ποτὶ τὰν ΚΤ | λόγον ἔχειν, ὡς τὰ  $\overline{\iota\epsilon}$   
 ποτὶ  $\overline{\delta}$ · δηλὸν | οὖν, ὅτι ἃ ΚΤ μελίων ἐστὶ τὰς μέ | χρῃ τοῦ  
 ἄξονος. ἔστω οὖν ἃ ΚΡ | ἴσα τᾷ μέχρῃ τοῦ ἄξονος, τὰς |  
 20 δὲ ΒΡ ἡμίσεια ἔστω ἃ ΡΣ· ἔστι δὴ καὶ | ἃ ΣΒ ἡμιολία τὰς  
 ΒΡ. ἐπιζευχθείσας | δὲ τὰς ΑΒ καὶ τὰς ΤΕ ὀρθᾶς ἀχθεί | σας  
 ἄχθω ἃ ΕΖ παρὰ τὰν ΒΔ, καὶ | πάλιν τὰς ΑΒ δίχα τμαθεί-  
 σας κα | τὰ τὸ Θ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΔ ἃ ΘΗ, | καὶ λελάφθω  
 ὀρθογωνίου κώνου | τομὰ ἃ ΑΕΙ περὶ διάμετρον τὰν | ΕΖ  
 25 καὶ ἃ ΑΘΔ περὶ διάμετρον τὰν | ΘΗ, ὥστε ὁμοία εἴμεν τὰ  
 Η 388 ΑΕΙ, | ΑΘΔ τμάρματα τῷ ΑΒΔ τμάρμα | τι γραφήσεται δὴ  
 ἃ ΑΕΙ κώνου | τομὰ διὰ τοῦ Κ, ἃ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ ὀρθὰ ἀχθεῖ-  
 σα τᾷ ΒΔ τεμεῖ τὰν ΑΕΙ. | τεμνέτω κατὰ τὰ Υ, Γ, καὶ διὰ  
 | τῶν Υ, Γ ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΒΔ | αἱ ΥΧ, ΓΝ, τεμνέτω-  
 30 σαν δὲ αὗται | τὰν ΑΘΔ τομὰν κατὰ τὰ Ξ, Φ, ἃ | χθωσαν δὲ

ὄν θὰ εἶχε λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν μέχρι τοῦ ἄξονος (τὴν παράμετρον), ὃν ἔχουν τὰ  $15 : 4$ , ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, ἄλλοτε μὲν θὰ καταστῇ ὀρθὸν (κατακόρυφον), ἄλλοτε δὲ κεκλιμένον, καὶ ἐνίοτε οὕτω κεκλιμένον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ τοῦτο θὰ τὸ κάμῃ εἰς δύο θέσεις, ἐνίοτε δὲ θὰ κλίνη οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ βρέχεται εἰς μεγαλυτέραν ἔκτασιν, ἐνίοτε δὲ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται οὔτε εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ· ποῖον δὲ λόγον θὰ ἔχῃ τὸ βάρος ἐκάστου πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω.

Ἐστω τμῆμα, ὡς ἐλέχθη (Σχῆμα 1, σελ. 339), καὶ ἀφοῦ αὐτὸ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τομῇ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ἔστω ἡ ΒΔ, ἃς τμηθῇ δὲ ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Κ, ὥστε νὰ εἶναι ἡ  $BK = 2KΔ$ , κατὰ δὲ τὸ Τ, ὥστε ἡ  $ΔΒ : ΚΤ = 15 : 4$ . εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΚΤ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου) (Εὐκλ. V, 10). Ἐστω λοιπὸν ἡ ΚΡ ἴση πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παράμετρον), καὶ ἡ  $PΣ = \frac{1}{2} BP$ . εἶναι δὲ καὶ ἡ  $ΣΒ = \frac{3}{2} BP$ .

Ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΤΕ ἀχθῇ κάθετος, ἃς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ πάλιν ἀφοῦ ἡ ΑΒ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ, ἃς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΘΗ, καὶ ἃς ληφθῇ ἡ παραβολὴ ΑΕΙ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ καὶ ἡ παραβολὴ ΑΘΔ περὶ διάμετρον τὴν ΘΗ, ὥστε τὰ τμήματα ΑΕΙ, ΑΘΔ νὰ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒΛ· θὰ διέρχεται λοιπὸν ἡ παραβολὴ ΑΕΙ διὰ τοῦ Κ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ ἀχθεῖσα κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΕΙ. Ἄς τὴν τέμνῃ κατὰ τὰ Υ, Γ, καὶ διὰ τῶν Υ, Γ ἃς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ αἱ ΥΧ, ΓΝ, ἃς τέμνωσι δὲ αὐταὶ τὴν παραβολὴν ΑΘΔ κατὰ τὰ Ξ, Φ, ἃς ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ ΠΨ, Ορ ἐφαπτόμε-

καὶ αἱ ΠΨ, Ος ἐφαπτόμεναι τῆς ΑΠΟΛ τομᾶς κα | τὰ τὰ  
 Ο, Π. δεδομένα δὴ τρία τινὰ | τμήματα τὰ ΑΠΟΛ, ΑΕΙ,  
 ΑΘΔ | περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εὐθειῶν | καὶ τῶν ὀρθογωνίων  
 κῶνων | τομᾶν ὀρθὰ καὶ ὁμοία, ἄνι | σα δέ, καὶ ἀπολέλαπται  
 5 ἀφ' ἐκάσ | τας βάσιος, ἀπὸ δὲ τοῦ Ν ἀναγμέναι αἱ ΝΞ, ΝΓ,  
 ΝΟ· ἡ ΟΓ ἄρα | ποτὶ τὴν ΓΞ τὸν συγκείμενον | λόγον ἔξει  
 ἕκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΙΑ ποτὶ ΛΑ, καὶ ὃν ἔ | χει ἡ ΑΔ ποτὶ  
 ΔΙ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΔΙ | ποτὶ ΛΑ, ὃν δύο ποτὶ ε· ἃ τε γὰρ ΤΒ  
 ποτὶ | ΒΔ ἐστίν, ὡς δύο ποτὶ ε, καὶ ἡ ΕΒ ποτὶ | ΒΑ καὶ ἡ  
 Η 390 ΔΖ ποτὶ ΔΑ, τούτων | δὲ διπλάσιαι αἱ ΛΙ, ΛΑ· ἡ δὲ ΑΔ  
 ποτὶ | ΔΙ ἔχει, ὅσον πέντε πρὸς α, | ὁ δὲ συγκείμενος λόγος,  
 ἕξ οὗ ὃν ἔχει | τὰ δύο ποτὶ τὰ ε, καὶ ἕξ οὗ ὃν ἔχει τὰ | πέντε  
 ποτὶ τὸ ξν, ὁ αὐτός ἐστι τῷ, ὃν | ἔχει τὰ δύο ποτὶ τὸ α· δι-  
 πλάσια ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΓ τῆς | ΓΞ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΥ  
 15 τῆς | ΥΦ. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ἡ ΔΣ ἡμιολία τῆς | ΚΡ, δηλόν, ὅτι  
 ἡ ΒΣ ἡ ὑπεροχὰ ἐστίν, | ἡ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος |  
 τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος.

εἰ μὲν οὖν | τὸ τμήμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν | τοῦτον  
 ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς | ΒΣ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ,  
 20 ἢ μείζονα | τούτου τοῦ λόγον, ἀφελὲν τὸ τμήμα | εἰς τὸ  
 ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ,  
 ὁρ | θὸν καταστασεῖται· δέδεικται γὰρ | πρότερον, ὅτι [ἐὰν]  
 τμήμα μείζο | να ἔχον τὸν ἄξονα ἢ ἡμιόλιον τῆς | μέχρι τοῦ  
 ἄξονος, ἐὰν τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ὑγρὸν μὴ ἐλάσσονα λόγον |  
 25 ἔχη τοῦ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ | ἀπὸ τῆς ὑπεροχᾶς, ἡ  
 μείζων ἐστὶν | ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τῆς μέχρι | τοῦ ἄξονος,  
 ποτὶ τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφελὲν | ἐς τὸ ὑγρὸν  
 οὕτως, ὡς εἴρηται, ὀρθὸν | καταστασεῖται.

ἐπὴν δὲ τὸ τμήμα | μα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα μὲν



λόγον ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ | τᾶς ΣΒ ποτὶ τὸ τετράγωνον  
τὸ ἀ | πὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ, ὃν ἔχει | τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΞ  
τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφελθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν | κεκλι-  
μένον οὕτως, ὥστε τὰν βά | σιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ,  
5 | καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ  
μὴδὲ καθ' ἓν | ἄπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανεί | ας, καὶ τὸν  
ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν | ποιεῖν ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ | ὑγροῦ  
μείζονα τᾶς γ.

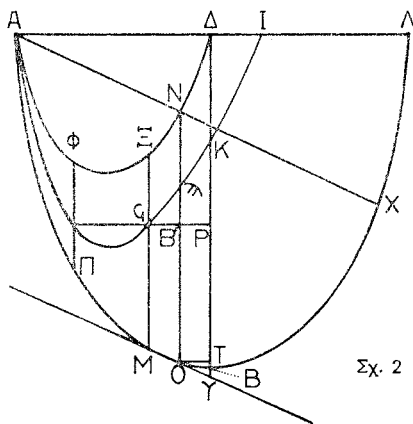
ἐὰν δὲ τὸ | τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν | τοῦτον ἔχῃ  
H 392 τὸν λόγον, ὃν τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΟ ποτὶ τὸ τε- |  
τράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφε | θέν ἐς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον  
οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι | τοῦ ὑγροῦ,  
καταστασεῖται κεκλι | μένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐ | τοῦ  
ἄπτεσθαι καθ' ἓν τᾶς τοῦ ὑγροῦ | ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα  
15 | αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ | ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν  
τᾷ γ.

ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ | τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα  
μὲν λόγον ἔ | χῃ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ | ἀπὸ τᾶς ΕΟ  
ποτὶ τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ, | ὃν  
20 ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφελθὲν ἐς τὸ  
ὑ | γρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον | οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐ-  
τοῦ μὴ | ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖ | ται κεκλιμένον  
οὕτως, ὥστε τὰν | βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τό | πον τέμνε-  
σθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

25 εἰ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχει τὸν  
λό | γον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀ | πὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ τε-  
τράγωνον | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφελθὲν ἐς τὸ ὑ | γρὸν καὶ τεθὲν  
κεκλιμένον οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ | μὴ ἄπτεσθαι τοῦ  
ὑγροῦ, κατα | στασεῖται κεκλιμένον οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν

μικρότερον μὲν λόγον ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ  $\Sigma B^2 : B\Delta^2$ , μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου  $O\Xi^2 : B\Delta^2$ , ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ μεγαλυτέραν τῆς  $\varsigma$ .

Ἐὰν δὲ τὸ τμήμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦτον ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν  $\Xi O^2 : B\Delta^2$ , ἀφεθῇ δὲ εἰς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ



Σχ. 2

ὑγροῦ καθ' ἓν σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν  $\varsigma$ .

Ἐὰν δὲ τὸ τμήμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ  $\Xi O^2 : B\Delta^2$ , μεγαλύτερον δὲ ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ  $\Pi\Phi^2 : B\Delta^2$ , ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ τέμνηται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ εἰς μεγαλυτέραν ἑκτασιν.

Ἐὰν δὲ τὸ τμήμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦτον ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ  $\Pi\Phi^2 : B\Delta^2$ , ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ

αὐτοῦ καθ' ἐν σα | μείον ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὕγρου ἐπιφα | νείας,  
καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποιεῖν γω | νίαν ἴσαν τῇ Ψ.

ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα | τῷ βάρει πρὸς τὸ ὕγρὸν ἐλάσσονα |  
λόγον ἔχη τοῦ, ὃν ἔχει τὸ τετράγω | ρον τὸ ἀπὸ τὰς ΠΦ ποτὶ  
5 τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΒΔ, ἀφελθὲν | ἐς τὸ ὕγρὸν καὶ τε-  
θὲν κεκλιμένον | οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ᾗ | πτεσθαι  
τοῦ ὕγρου, καταστασεῖται | κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὸν μὲν  
| ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνει | αν τοῦ ὕγρου γωνίαν ποιεῖν  
H 393 ἐλάσ | σονα τὰς Ψ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ | μηδὲ καθ' ἐν ἄπτε-  
10 σθαι τὰς τοῦ ὕ | γρου ἐπιφανείας.

δειχθήσεται | δὲ ταῦτα ἐξῆς .

H 394 ἐχέτω δὴ | πρῶτον τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ | τὸ ὕγρὸν μεί-  
ζονα μὲν λόγον τοῦ, | ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τὰς ΕΟ τετρά | γωνον ποτὶ  
τὸ ἀπὸ τὰς ΒΔ, ἐλάσ | σονα δὲ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τὰς Ὑ | περο-  
15 χᾶς τετράγωνον, ᾗ μείζων | ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τὰς μέ-  
χρι | τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΒΔ | τετράγωνον, καὶ ὑπο-  
κείσθω τὸ | πρότερον κατεσκευασμένον | σχῆμα, ὃν δὲ λόγον  
ἔχει τὸ τμᾶμα | τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὕγρὸν, τοῦτον | ἐχέτω τὸ  
ἀπὸ τὰς Ψ τετράγω | ρον ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΒΔ· ἐστι | δὴ ἂ  
20 Ψ τὰς μὲν ΕΟ μείζων, ἐλάσσων | δὲ τὰς ὑπεροχᾶς, ᾗ μείζων  
ἐστὶν | ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τὰς μέχρι | τοῦ ἄξονος. ἐναρμόσθω  
δέ τις | μεταξὺ τῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ κόνων <τομᾶν>

quae NO aequalis ipsi Ψ, et secet ipsa reliquam coni sectio-  
nem penes λ, ipsam autem Rς rectam penes Β' ; demon-  
25 strabitur autem quae Oλ dupla ipsius λN, sicut de-  
monstrata est quae Mς ipsius ζX dupla ab O au-  
tem ducatur quae Oς contingens sectionem APOL, quae  
autem OC perpendicularis super BD, et ab A ad N copu-  
letur; erunt autem quae AN, QN aequales inuicem. quo-



γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου εἰς ἓν σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν  $\Psi$ .

Ἐὰν δὲ τὸ τμήμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὕγρου ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ  $\Pi\Phi^2 : \text{ΒΔ}^2$ , ἀφεθὲν εἰς τὸ ὕγρον καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὕγρου, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ὁ μὲν ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγρου γωνίαν μικρότεραν τῆς  $\Psi$ , ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου, οὔτε εἰς ἓν σημεῖον.

Ἀποδεικνύονται δὲ ταῦτα ὡς ἐξῆς.

Ἄς ἔχῃ λοιπὸν πρῶτον τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὕγρου μεγαλύτερον μὲν λόγον ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ  $\Xi\Theta^2 : \text{ΒΔ}^2$ , μικρότερον δὲ ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), πρὸς τὸ  $\text{ΒΔ}^2$ , καὶ ἄς ληθῇ ὑπ' ὅψει τὸ προηγουμένως κατασκευασθὲν σχῆμα, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὕγρου, τοῦτον ἄς ἔχῃ τὸ  $\Psi^2 : \text{ΒΔ}^2$ . εἶναι δὲ ἡ  $\Psi > \Xi\Theta$ , μικροτέρα δὲ τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου). Ἄς ἐναρμολογήσῃ δὲ εὐθεῖά τις μεταξὺ τῶν παραβολῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ

ἡ ΝΟ ἴση πρὸς τὴν  $\Psi$ , τέμνουσα τὴν ἄλλην παραβολὴν εἰς τὸ  $\lambda$  καὶ τὴν εὐθεῖαν Ρς εἰς τὸ Β'. ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι ἡ Ολ εἶναι διπλασία τῆς λΝ, ὅπως ἐδείχθη ὅτι ἡ Μς εἶναι διπλασία τῆς ςΞ. Ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Ο ἡ εὐθεῖα ΟΥ (Σχῆμα 2, σελ. 341) ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΤ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΝ· θὰ εἶναι ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΝ, ΧΝ ἴσαι μεταξὺ των. διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΝ, ΑΧ ἔχουσιν ἀχθῇ ἐκ τῶν βάσεων τῶν ὁμοίων παρα-

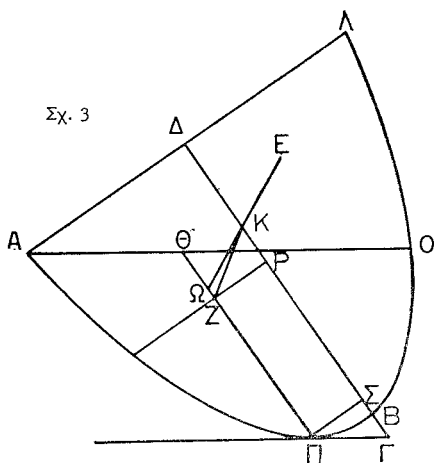
niam enim in similibus portionibus  $APOL$ ,  $AXD$  productae sunt a basibus ad portiones quae  $AN$ ,  $AQ$  aequales angulos facientes ad bases, eandem proportionem habebunt quae  $QA$ ,  $AN$  cum ipsis  $LA$ ,  $AD$  propter secundam figuram praescriptarum; aequalis ergo quae  $AN$  ipsi  $QN$ , et aequedistans ipsi  $O\zeta$ . demonstrandum, quod dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non secundum unum tangat  $\langle$ humidum, ita inclinatum consistet, ut basis eius in nullo  
H 396 puncto superficiem humidi tangat, et $\rangle$  axis ad superficiem  
10 humidi angulum acutum faciat maiorem angulo  $\zeta$ .

dimittatur enim et consistat ita, ut basis ipsius tangat secundum unum signum superficiem humidi, secta autem portione per axem plano recto ad superficiem humidi superficiei quidem portionis sectio sit quae  $APOL$  rectanguli coni  
15 sectio [De conoid. 11 a], superficiei autem humidi quae  $OA$ , axis autem [sectionis] et diameter quae  $BD$ , et secetur quae  $BD$  penes  $K$ ,  $R$ , ut dictum est, ducatur autem et quae quidem  $PG$  aequedistanter ipsi  $AO$  recta contingens sectionem  $APOL$  secundum  $P$ , quae autem  $PT$   
20 aequedistanter ipsi  $BD$ , quae autem  $PS$  perpendicularis super  $BD$ . quoniam igitur portio ad humidum in gravitate

βολῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ καὶ σχηματίζουσιν γωνίας ἴσας πρὸς τὰς βά-  
 σεις, αἱ εὐθεῖαι ΧΑ, ΑΝ θὰ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ  
 εὐθεῖαι ΛΑ, ΑΔ, δυνάμει τῆς κατασκευῆς τοῦ δευτέρου σχήματος·  
 θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΝ ἴση πρὸς τὴν ΧΝ· εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΟΥ  
 παράλληλος πρὸς τὴν ΧΝ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ τμήμα ἀφεθῇ  
 εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ  
 εἰς οὐδὲν σημεῖον, θὰ κλίνη κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις του  
 νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς οὐδὲν σημεῖον, καὶ ὁ  
 ἄξων του θὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ὀξεῖαν,  
 μεγαλυτέραν τῆς γωνίας Υ.

Ἄς ἀφεθῇ λοιπὸν τὸ τμήμα εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε νὰ ἐφάπτηται  
τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ  
καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἐστω δὲ ἡ τομὴ τοῦ  
 τμήματος δι' ἐπιπέδου δι-  
 ερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος  
 καὶ καθέτου πρὸς τὴν ἐπι-  
 φάνειαν τοῦ ὕγρου νὰ εἴ-  
 ναι ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ,  
 καὶ ἡ εὐθεΐα ΟΑ ἡ τομὴ  
 τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕ-  
 γρου, καὶ ΒΔ ὁ ἄξων καὶ  
 ἡ διάμετρος τῆς παρα-  
 βολῆς (Σχῆμα 3). Ἄς  
 τμηθῇ ἡ εὐθεΐα ΒΔ κατὰ

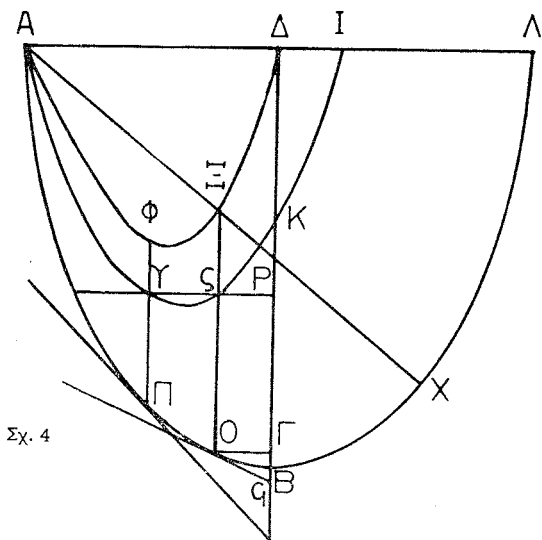


τὰ σημεία K, P, ὡς ἔχει λεχθῇ (δηλ. κατὰ τὴν σχέσιν 15 : 4), καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ εὐθεΐα ΠΓ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεΐαν ΑΟ καὶ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ σημεῖον Π (Σχ. 3), καὶ ἡ εὐθεΐα ΠΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ ἡ εὐθεΐα ΠΣ κάθετος

proportionem habet, quam tetragonum quod a  $\Psi$  ad id quod  
 a  $BD$ , quam autem proportionem habet portio ad humidum,  
 hanc habet demersa ipsius portio ad totam [prop. I], quam  
 autem demersa ad totam, tetragonum quod a  $TP$  ad id quod  
 5 a  $DB$  [De conoid. 24], erit quae  $\Psi$  ipsi  $TP$  aequalis. et quae  
 $NO$  ergo ipsi  $TP$  aequalis est; quare et portiones  $APQ$ ,  
 $APO$  inuicem sunt aequales [De conoid. 24]. quoniam au-  
 tem in portionibus aequalibus et similibus  $APOL$ ,  $AMQL$   
 ab extremitatibus basium productae sunt quae  $OA$ ,  $AQ$ , et  
 10 portiones ablatae faciunt ad diametros angulos aequales  
 propter tertiam figuram praescritarum, quare anguli  
 11 397 qui apud  $\varsigma$ ,  $G$  sunt aequales. et quae  $\varsigma B$ ,  $GB$  ergo aequales  
 sunt; quare et quae  $SR$ ,  $CR$  et quae  $PZ$ ,  $OB'$  et quae  $ZT$ ,  
 $B'N$ . quoniam minor est quam dupla quae  $OB'$  ipsius  
 15  $B'N$ , palam, quod quae  $PZ$  ipsius  $ZT$  est minor quam  
 dupla. sit igitur quae  $PQ$  ipsius  $\Omega T$  dupla, et copulata quae  
 $KQ$  educatur ad  $E$ ; totius quidem igitur centrum grauitatis  
 erit  $K$ , eius autem portionis quae intra humidum cendrum  
 $\Omega$ , eius autem quae extra in linea  $KE$ ; et sit  $E$  [De plan.  
 20 aequilib. I, 8]. quae autem  $KZ$  perpendicularis erit super  
 superficiem humidi; quare et quae per signa  $E$ ,  $\Omega$  aequi-  
 distanter ipsi  $KZ$ . non ergo manet portio, sed reclinabitur,  
 ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem  
 humidi, quoniam nunc secundum unum tacta ipsa recli-  
 25 natur; manifestum igitur, quod portio consistet ita, ut axis  
 ad superficiem humidi faciat angulum maiorem angulo  $\varsigma$ .

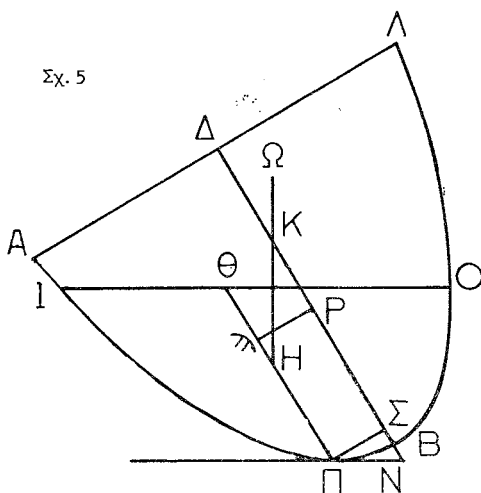
πρὸς τὴν εὐθεϊαν ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ εἶναι ὡς τὸ τετράγωνον τῆς Ψ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ, καὶ ὁ λόγος τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος πρὸς ὅλον τὸ τμήμα εἶναι ὁ αὐτὸς οἶος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρὸν, καὶ ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τῆς ΘΠ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος πρὸς ὅλον τὸ τμήμα, θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα Ψ ἴση πρὸς τὴν ΘΠ, καὶ ἡ ΝΟ ἴση πρὸς τὴν ΘΠ· θὰ εἶναι ἄρα τὰ τμήματα ΑΠΧ, ΑΠΟ ἴσα μεταξύ των (Σχ. 2 καὶ 3). Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τμήματα ΑΠΟΛ, ΑΜΧΛ ἔχουσιν ἀχθῆ ἐκ τῶν ἄκρων τῶν βάσεων αὐτῶν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΑΧ, ὥστε τὰ χωριζόμενα τμήματα νὰ εὐρίσκωνται ὑπὸ τὰς αὐτὰς γωνίας πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῶν, κατὰ τὸ τρίτον σχῆμα, θὰ εἶναι ἄρα αἱ γωνίαι Υ καὶ Γ ἴσαι (δευτέρου καὶ τρίτου σχήματος) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΥΒ, ΓΒ θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· θὰ εἶναι ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΣΡ, ΤΡ ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ ΠΖ, ΟΒ' καὶ αἱ ΖΘ, Β'Ν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΒ' εἶναι μικροτέρα τῆς 2Β'Ν, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΠΖ εἶναι μικροτέρα τῆς 2ΖΘ. Ἐστω ὅτι ἡ ΠΩ = 2ΩΘ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΚΩ καὶ ἄς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Ε. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Κ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ὅλου τοῦ τμήματος, τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι τὸ Ω, τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΕ, ἔστω εἰς τὸ Ε. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΚΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, θὰ εἶναι ἄρα κάθετοι ἐπ' αὐτὴν καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων Ε, Ω παραλλήλως πρὸς τὴν ΚΖ· δὲν θὰ μείνῃ ἄρα ἐν ἡρεμίᾳ τὸ τμήμα, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς οὐδὲν σημεῖον, διότι ἐκ τῆς θέσεως ἐπαφῆς εἰς ἐν σημεῖον πρὸς τὴν βάσιν ἀνυψώθη. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ τμήμα θὰ ἀποκατασταθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς γωνίας Υ.

*Habeat autem portio ad humidum in grauitate hanc proportionem, quam habet tetragonum quod ab XO ad id, quod a BD, et dimittatur in humidum ita inclinata. secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi*



5 *solidi quidem sectio sit quae APOL rectanguli coni sectio,*  
H 398 *superficiei autem humidi quae OI, axis autem portionis*  
*et diameter sectionis quae BD, et secetur quae BD ut prius*  
*et ducatur quae quidem PN aequedistanter ipsi IO con-*  
*tingens sectionem secundum P, quae autem PT aequ-*  
10 *distanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super*  
*BD. demonstrandum, quod portio non manet inclinata*  
*sic, sed inclinatur, donec utique basis secundum unum*  
*signum tangat superficiem humidi.*

Ἐστω πάλιν ὅτι τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς  $\Xi\Omega$  πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $\text{ΒΔ}$  (Σχ. 4) καὶ ἄς ἀφεθῇ τὸ τμήμα εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον. Ἐστω δὲ ἡ τομὴ τοῦ τμήματος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἡ παραβολὴ  $\text{ΑΠΟΛ}$ , ἡ εὐθεῖα  $\text{ΟΙ}$  ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ (Σχ. 5), καὶ ἡ εὐθεῖα  $\text{ΒΔ}$  ἄξων τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς καὶ ἄς γίνη ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς προηγουμένως (δηλ. νὰ εἶναι  $\text{ΒΔ} : \text{ΚΡ} = 15 : 4$ , Σχ. 3). Ἄς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα  $\text{ΠΝ}$  παράλληλος πρὸς τὴν  $\text{ΙΟ}$  (Σχ. 5) καὶ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον  $\text{Π}$ ,



ἡ εὐθεῖα  $\text{ΠΘ}$  παράλληλος πρὸς τὴν  $\text{ΒΔ}$ , καὶ ἡ εὐθεῖα  $\text{ΠΣ}$  κάθετος ἐπὶ τὴν  $\text{ΒΔ}$ . Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ στερεὸν δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν, ἀλλὰ θὰ κλίνη οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

praeiaceant autem et, quae in superiori figura prius disposita sunt et quae  $CO$  perpendicularis ducatur super  $BD$ , et quae  $AX$  copulata educatur ad  $Q$ ; erit autem quae  $AX$  ipsi  $XQ$  aequalis et ducatur ipsi  $AQ$  quae  $O\varsigma$  aequedistans. et quoniam supponitur portio ad humidum in gravitate hanc habere proportionem, quam habet tetragonum quod ab  $XO$  ad id quod a  $BD$ , habet autem hanc proportionem et demersa portio ad totam [prop. I], hoc est quod a  $TP$  ad id quod a  $BD$  [De conoid. 24], aequalis utique  
 10 erit quae  $PT$  ipsi  $XO$ . et quoniam portionum  $IBO$ ,  $ABQ$  diametri sunt aequales, et portiones [De conoid. 24]. rursum quoniam in portionibus aequalibus et similibus  $APOL$ ,  $AOQL$  productae sunt  $AQ$ ,  $IO$  aequales portiones auferentes, hoc quidem ab extremitate basis, hoc autem  
 15 non ab extremitate, palam, quod minorem facit acutum angulum ad diametrum totius portionis, quae ab extremitate basis producta est. et quoniam angulus qui apud  $\varsigma$   
 H 399 est minor quam qui apud  $N$ , maior est quae  $BC$  quam  $BS$ , quae autem  $CR$  minor quam  $RS$ ;) quare et quae  $O\varsigma$   
 20 minor quam  $P\gamma$ , (et  $\varsigma X$ ) maior est quam  $\gamma T$ . et quoniam quae  $O\varsigma$  dupla est ipsius  $\varsigma X$  palam, quod quae  $P\gamma$  maior est quam dupla ipsius  $\gamma T$ . sit igitur quae  $PH$  dupla ipsius  $HT$ ,

καὶ ἐπεξέχθω ἡ  $HK$  καὶ ἐκβεβλήσθω | ἐπὶ τὸ  $\Omega$ . ἐσσεῖται





δὴ τοῦ μὲν ὅλου τμά | ματος κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $K$ , |  
 τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ  $H$ , τοῦ δ' ἐκτὸς | ἐπὶ τᾷς  $K\Omega$ . ἔστω  
 τὸ  $\Omega$ . δειχθῇ | σεται δὴ ὁμοίως ἅ τε  $K\lambda$  κα | θετος ἐπὶ τὰν  
 τοῦ ὑγροῦ ἐπιρά | νειαν καὶ αἱ διὰ τῶν  $H, \Omega$  σαμείων | παρὰ  
 Η 400 τὰν  $K\lambda$ . δῆλον οὖν, ὅτι οὐ μενεῖ | τὸ τμάμα, ἀλλ' ἐπικλιθῇ-  
 σεται, ἕως | ἂν ἡ βάσις αὐτοῦ ἄπτηται κα | θ' ἐν σαμεῖον  
 τᾷς τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ | φανείας, καθάπερ

*demonstrabitur in tertia figura, quomodo se habet in tertio  
 theoremate, et manebit portio ita consistens.*

- 10 *in portionibus enim aequalibus APOL, AOQL pro-*  
*ductae erunt ab extremitatibus basium quae AQ, AO*  
*aequales <portiones> auferentes; demonstrabitur enim APQ*  
*aequalis ipsi APO similiter prioribus aequales igitur*  
*facient acutos angulos quae AO, AQ ad diametros por-*  
 15 *tionum, quoniam aequales sunt qui apud N,  $\varsigma$  anguli*  
*[Eucl. I, 29]. et <sit  $P\lambda$  dupla ipsius>  $\lambda T$ ; copulata au-*  
*tem ipsa  $\lambda K$  et educta ad  $\Omega$  erit totius quidem portionis*  
*centrum grauitatis  $K$ , eius autem quae intra humidum  $\lambda$*   
*eius autem quae extra in linea  $K\Omega$ ; et sit  $\Omega$  [De plan.*  
 20 *aequil. I, 8]. et quae  $K\lambda$*

Η 401 <κάθετός ἐστὶν ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγρ | οῦ> ἐπιφάνειαν. κατὰ τὰς  
 αὐτὰς | οὖν εὐθείας | τό τε ἐν τῷ ὑγρῷ ἀνε | νεχθήσεται καὶ  
 τὸ <ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ> | κατενεχθήσεται· μενεῖ <δὴ τὸ τμάμα,  
 | καὶ> ἅ τε <βάσις καθ' ἐν σαμεῖον ἄφ | εται τᾷς τοῦ> ὑγροῦ ἐ-  
 25 πιφανείας, καὶ ὁ ἄξων <τοῦ τμάματος> ποτὶ τὰν | ἐπιφάνειαν  
 τοῦ ὑγροῦ ποιήσει γωνί | αν ἴσαν | τᾷ προγεγραμμένῳ.

*Habeat etiam rursum portio ad humidum in grauitate*

λοιπὸν τοῦ μὲν ὅλου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $K$ , τοῦ δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ  $H$ , τοῦ δὲ ἐκτὸς ἐπὶ τῆς  $K\Omega$ · ἔστω τὸ  $\Omega$ . Καθ' ὁμοίον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ  $K\lambda$  εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ διὰ τῶν σημείων  $H$ ,  $\Omega$  διερχόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν  $K\lambda$ . Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι δὲν θὰ μείνῃ τὸ τμήμα ἐν ἡρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κλίνη, μέχρις ὅτου ἡ βάσις αὐτοῦ ἐφάπτεται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ὡς

ἀποδεικνύεται εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, ὅπου θεωρεῖται ἡ τρίτη περίπτωσις τῆς προτάσεως (τοῦ θεωρήματος), καὶ ὅπου τὸ τμήμα θὰ μείνῃ ἐν ἡρεμίᾳ εἰς αὐτὴν τὴν θέσιν.

Αἱ εὐθεῖαι  $AX$  (Σχ. 4),  $AO$  (Σχ. 6) ἔχουσιν ἀχθῆ ἓκ τῶν ἄκρων τῶν ἴσων τμημάτων  $AOX\Lambda$ ,  $ΑΠΟ\Lambda$ , χωρίζουσαι ἴσα τμήματα· διότι ἀποδεικνύεται, ὡς προηγουμένως, ὅτι τὸ τμήμα  $ΑΠΧ$  εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμήμα  $ΑΠΟ$ . Καὶ ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ  $N$  καὶ  $\varphi$  γωνίαι εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι  $AO$ ,  $AX$  σχηματίζουν μετὰ τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων γωνίας ἴσας· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα  $\Pi\lambda$  διπλασία τῆς εὐθείας  $\lambda\Theta$ . Ἄς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα  $\lambda K$  καὶ ἄς προεκβληθῇ πρὸς τὸ  $\Omega$ · θὰ εἶναι ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος τὸ σημεῖον  $K$ , τοῦ δὲ εὐρισκομένου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος τὸ σημεῖον  $\lambda$  καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας  $K\Omega$ · ἔστω τὸ σημεῖον  $\Omega$ . Καὶ ἡ  $K\lambda$

εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Κατὰ τὰς αὐτὰς λοιπὸν εὐθείας τὸ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήμα θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω· θὰ μείνῃ λοιπὸν ἐν ἡρεμίᾳ τὸ τμήμα καὶ ἡ βάσις του θὰ ἐφάπτεται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ ὁ ἄξων τοῦ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ θὰ σχηματίσῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν προγεγραμμένην.

Ἔστω πάλιν ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ

proportionem minorem ea, quam habet tetragonum quod ab  
 NT ad id quod a BD, quam autem proportionem habet  
 portio ad humidum in grauitate, hanc habeat tetragonum  
 quod a Ψ <ad tetragonum quod a BD>; minor autem est  
 5 quae Ψ quam TN. rursum igitur inaptetur quaedam in-  
 termedia portionum AMD, APOL quae PI aequedistanter  
 H 402 ipsi BD producta aequalis ipsi Ψ, secet autem ipsa in-  
 termediam coni sectionem penes Y, ipsam autem XR

ἐυθεῖαν κατὰ τὸ H. δειχθήσεται δὴ | ἃ ΠΥ διπλασία τᾶς  
 10 ΥΙ, καθάπερ ἐδεί | χθη καὶ ἃ ΓΟ τᾶς ΓΧ. ἄχθω δὲ καὶ | ἃ μὲν  
 ΠΩ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ | κατὰ τὸ Π, ἃ δὲ ΠΕ κάθετος  
 ἐπὶ τὰν | ΒΔ, καὶ ἃ ΙΑ ἐπιζευχθεῖσα <ἐκβεβλήσθω> | ἐπὶ  
 τὸ Χ· ἐσσεῖται δὲ ἃ ΑΙ τᾷ ΙΧ ἴσα καὶ | ἃ ΑΧ τᾷ ΠΩ παρά-  
 ληλος. δεικτέον | δὴ, ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς τὸ υἱ | γρὸν καὶ  
 15 κεκλιμένον οὕτ | ως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι |  
 τοῦ ὑγροῦ, οὕτως καταστασεῖται | κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄ-  
 ξονα ποτὶ τὰν | ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν | ποιεῖν <ἐλάσ-  
 σονα τᾶς Φ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἄπτεσθαι τᾶς  
 τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

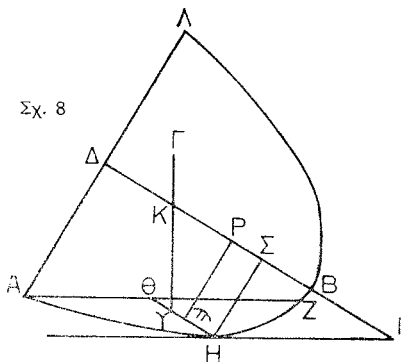
20 ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ καθεστακέτω οὕτως, ὥστε  
 τὰν βάσιν> αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἄπτεσθαι | τᾶς τοῦ ὑγροῦ  
 ἐπιφανείας, τμα | θέντος δὲ τοῦ τμᾶματος ἐπιπέ | δω ὀρθῶ ποτὶ  
 τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφά | νειαν διὰ τοῦ ἄξονος τομὰ ἔστω | τᾶς  
 μὲν τοῦ τμᾶματος ἐπιφα | νείας ἃ ΑΗΒΑ ὀρθογωνίων κώνων  
 H 404 | τομὰ, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ἃ ΑΖ, ἄξων δὲ καὶ διά-  
 μετρος | τᾶς τομᾶς ἃ ΒΔ, καὶ τετμάσθω ἃ | ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ  
 ὁμοίως



superioribus ducatur autem et quae  $HI$  aequedistanter  
 ipsi  $AZ$  contingens sectionem conī penes  $H$ , quae autem  
 $HT$  aequedistanter ipsi  $BD$ , quae autem  $HS$  perpendi-  
 cularis super  $BD$ . quoniam igitur portio ad humidum  
 5 in gravitate hanc habet proportionem, quam habet tetra-  
 gonum quod a  $\Psi$  ad id quod a  $BD$ , quam autem pro-  
 portionem habet portio ad humidum in gravitate, hanc  
 habet tetragonum quod ab  $HT$  ad id quod a  $BD$  propter  
 eadem prioribus palam, quod quae  $HT$  est aequalis ipsi  
 10  $\Psi$  [Eucl. V, 9]; quare et portiones  $AHZ$ ,  $APQ$  [fig.  
 p. 403] sunt aequales [De conoid. 24]. et quoniam in  
 portionibus aequalibus et similibus  $APOL$ ,  $AHZL$  ab  
 extremitatibus basium sunt productae quae  $AQ$ ,  $AZ$   
 aequales portiones auferentes, palam, quod aequales  
 15 faciunt angulos ad diametros portionum. adhuc autem  
 H 405 et trigonorum  $HIS$ ,  $PQE$  aequales sunt anguli qui  
 apud  $I$ ,  $\Omega$ ; erunt <igitur> et  $SB$ ,  $EB$  aequales; quare  
 et quae  $SR$ ,  $ER$  aequales et quae  $H\lambda$ ,  $PH$  et quae  $\lambda T$ ,  
 $HI$  et quoniam est dupla quae  $PY$  ipsius  $YI$ , mani-  
 20 festum, quod minor est quam dupla quae  $H\lambda$  ipsius  
 $\lambda T$ .<sup>1)</sup> sit igitur quae  $HY$  dupla ipsius  $YT$ , et copulata  
 protrahatur quae  $YKC$ ; sunt autem centra gravitatum  
 totius quidem  $K$ , eius autem quod intra humidim  $Y$  eius  
 autem quod extra in linea  $KC$ ; et sit  $C$  [De plan. ae-  
 25 quilib. I, 8]. erit autem propter praecedens theorema hoc  
 manifestum, quod non manet portio, sed inclinabitur ita,

1) Nam  $PH < 2 HI$  et  $PH = H\lambda$ ,  $HI = \lambda T$ .

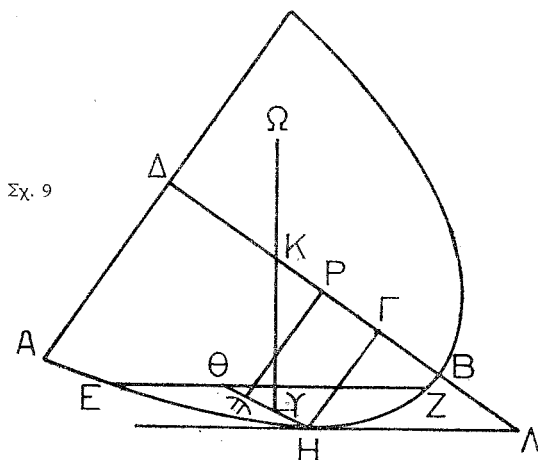
ὡς προηγουμένως (δλγ. ΒΔ : ΚΡ = 15 : 4). Ἐὰς ἀχθῇ ἡ ΗΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ καὶ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Η (Σχ. 8), ἡ ΗΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἡ ΗΣ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑδροῦ (ἴσου ὄγκου) εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον Ψ<sup>2</sup> : ΒΔ<sup>2</sup> καὶ ὁ λόγος τοῦ ΗΘ<sup>2</sup> : ΒΔ<sup>2</sup> εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑδροῦ, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὡς προηγουμένως (θ. 1), εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεΐα ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεΐαν Ψ' (Εὐκλ. V, 9)· καὶ τὰ τμήματα ΑΗΖ, ΑΠΧ εἶναι ἴσα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεΐαι ΑΧ (Σχ. 7), ΑΖ (Σχ. 8), αἱ ὁποῖαι χωρίζουσιν



ἴσα τμήματα ἔχουσιν ἀχθῇ ἐκ τῶν ἄκρων τῶν βάσεων τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων τμημάτων ΑΠΟΛ, ΑΗΖΛ, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ σχηματίζωσι πρὸς τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων γωνίας ἴσας. Εἶναι ἄρα ἴσαι αἱ περὶ τὸ Ι καὶ τὸ Ω γωνίαι τῶν τριγώνων ΗΙΣ (Σχ. 8), ΠΩΕ (Σχ. 7), καὶ αἱ εὐθεῖαι ΣΒ, ΕΒ θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΣΡ (Σχ. 8), ΕΡ (Σχ. 7) εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ Ηλ, ΠΗ καὶ αἱ λΘ, ΗΙ (Σχ. 8, 7). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΠΥ εἶναι διπλασία τῆς ΥΙ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα Ηλ εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς λΘ. Ἔστω πάλιν ἡ εὐθεῖα ΗΥ διπλασία τῆς ΥΘ καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΥΚ ἄς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Γ. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ κέντρον τοῦ βάρους ὅλου τοῦ τμήματος τὸ σημεῖον Κ, τοῦ ἐντὸς δὲ τοῦ ὑγροῦ τμήματος τὸ σημεῖον Υ καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΓ· ἔστω τὸ Γ. Εἶναι ἄρα φανε-

*ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem  
humidi.*

*quod autem consistet ita, ut axis ipsius ad superficiem*



*humidi faciat angulum minorem angulo  $\Phi$ , demonstrabitur.*

*consistat enim, si possibile est, ita, ut faciat angulum non  
minorem angulo  $\Phi$ , et alia*

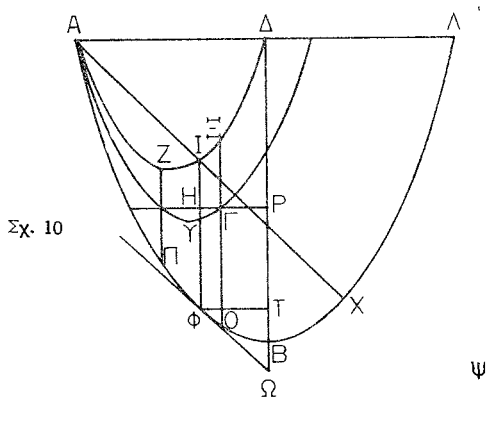
- Η 406 <κατε> σκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ τρί | τῷ σχήματι.  
ὁμοίως δὴ δειχθῇ | σεται ἡ  $\Theta H$  ἴσα τῇ  $\Psi$ . ὥστε καὶ τῇ |  
 $\Pi$  ἴσα. ἐπεὶ οὖν ἡ  $\Lambda$  γωνία οὐκ ἔ | λάσσων ἐστὶ τῆς  $\Phi$ , οὐκ  
10 ἄρα μείζων | ἐστὶν ἡ  $\Gamma B$  τῆς  $\Sigma B$ , οὐδὲ ἡ  $\Gamma P$  ἐλάσσων τῆς  
|  $\Sigma P$  οὐδὲ ἡ  $H \gamma$  τῆς  $\Theta \varsigma$ . καὶ ἐπειδὴ | ἡ  $\Pi$  ἡμιολία ἐστὶ  
τῆς  $\Pi Y$ , ἐλάσσων | δὲ ἡ  $\Pi Y$  τῆς  $\Theta \varsigma$ , καὶ ἡ μὲν  $H \Theta$  ἴ | σα  
τῇ  $\Pi$ , ἡ δὲ  $H \gamma$  οὐκ ἐλάσσων | τῆς  $\Theta \varsigma$ , μείζων ἔσται ἡ  
 $\gamma H$  | τῆς  $\Pi Y$ . ἡ ἄρα  $H \gamma$  μείζων ἐστὶν ἢ διπλα | σία τῆς  
15  $\gamma \Theta$ . ἔστω δὴ ἡ  $HY$  διπλασ | ία τῆς  $Y \Theta$ , καὶ ἐπιζευχθεῖσα



ρόν, ἐκ τῶν προειρημένων (προηγούμενου θεωρήματος), ὅτι τὸ τμήμα δὲν θὰ ἡρεμήσῃ ἀλλὰ θὰ κλίνη κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς οὐδὲν σημεῖον.

Τώρα θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τμήμα ἀποκαθίσταται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μικροτέραν τῆς γωνίας  $\Phi$ . Ἐστω ὅτι ἀποκαθίσταται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε, εἰ δυνατόν, ἡ σχηματιζομένη γωνία νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς  $\Phi$  καὶ

ἄς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτὰ ὅπως εἰς τὸ τρίτον σχῆμα (καὶ Σχ. 9). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ  $\Theta\text{H} = \Psi$ . ὥστε εἶναι καὶ  $\Theta\text{H} = \text{I}\Pi$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία  $\Lambda$  δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς  $\Phi$ ,



δὲν εἶναι ἄρα ἡ  $\Gamma\text{B}$  μεγαλυτέρα τῆς  $\Sigma\text{B}$ , οὔτε ἡ  $\Gamma\text{P}$  μικροτέρα τῆς  $\Sigma\text{P}$  οὔτε ἡ  $\text{H}\lambda$  τῆς  $\Theta\varsigma$ . Καὶ ἐπειδὴ ἡ  $\text{I}\Pi = \frac{3}{2} \text{ΠΥ}$ , εἶναι δὲ ἡ  $\text{ΠΥ} < \Theta\varsigma$ , καὶ ἡ μὲν  $\text{H}\Theta = \text{I}\Pi$ , ἡ δὲ  $\text{H}\lambda$  δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς  $\Theta\varsigma$ , θὰ εἶναι ἡ  $\lambda\text{H} > \text{ΠΥ}$ . εἶναι ἄρα ἡ  $\text{H}\lambda > 2 \lambda\Theta$ . Ἐστω λοιπὸν

ἀ | ΥΚ ἐκβεβλήσθω· δῆλον δὴ ὁμοί | ως τοῖς πρότερον, ὅτι  
οὐ μενεῖ τὸ τμᾶ | μα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε τὸν ἄ | ξονα  
αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν | <τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἐλάσ-  
σωνα τᾶς Φ>.

- 5 *Similiter autem demonstrabitur, <quod> et, si portio ad  
humidum in gravitate habeat proportionem eandem, quam  
tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, dimissa in hu-  
midum ita, ut basis ipsius non tangat superficiem humidi,  
consistet inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum si-*  
10 *gnum tangat superficiem humidi, et axis ipsius ad super-*  
*ficiem humidi faciat angulum aequalem angulo qui apud Φ.*

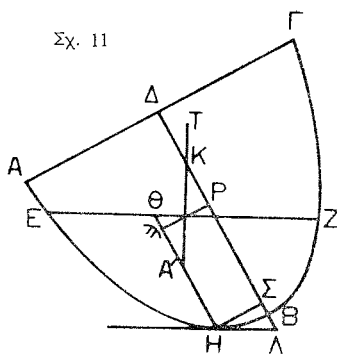
Ἔστω δὴ πάλιν τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸ υ | γρὸν τῷ βάρει μεί-  
ζονα μὲν λό | γον ἔχον τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΠ | τετράγω-  
νον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐ | λάσσονα δὲ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ  
15 τᾶς | ΕΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς | ΒΔ, ὃν δὲ λόγον  
ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ | βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν, τοῦτον ἐχέτω | τὸ  
H 408 ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· δῆλον οὖν, ὅτι  
ἀ Ψ τᾶς | μὲν ΖΠ μείζων ἐστίν, τᾶς δὲ ΕΟ ἐλάσ | σων· ἐναρ-  
μόςθω δὴ εἰς τὸ μεταξὺ | τᾶν ΑΞΔ, ΑΠΟΛ [τμημάτων]  
20 ἴσα τᾷ | Ψ, παράλληλος δὲ τᾷ ΒΔ ἀ ΦΙ τέ | μνουσα τὰν μετα-  
ξὺ [τοῦ] κώνου τομὰν | κατὰ τὸ Υ· πάλιν δὴ ἀ ΦΥ διπλασία  
τᾶς | ΥΙ δειχθήσεται, καθάπερ ἀ ΟΓ τᾶς | ΕΓ. ἄχθω δὲ ἀπὸ  
τοῦ Φ τοῦ ΑΠΟΛ ἐ | φαπτομένα κατὰ τὸ Φ ἀ ΦΩ· ὁμοίως |  
δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἀ μὲν | ΑΙ τᾷ ΧΙ ἴσα, ἀ δὲ ΑΧ  
25 τᾷ ΦΩ παρὰ λ | ληλος· δεικτέον δέ, ὅτι τὸ τμᾶμα | ἀφεθὲν ἐς τὸ  
ὑγρὸν, ὥστε τὰν βάσιν | μὴ ἄπτεσθαι τᾶς ἐπιφανείας τοῦ  
ὑγροῦ, καὶ | τεθὲν κεκλιμένον οὕτως κλιθῇ | σεται, ὥστε τὰν  
βάσιν αὐτοῦ κα | τὰ πλείονα τόπον τέμνεσθαι υ | πὸ τοῦ ὑγροῦ.

ἡ  $HY = 2 Y\Theta$  καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ  $YK$  ἄς προεκβληθῇ· εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι τὸ τμήμα δὲν θὰ ῥεμήσῃ, ἀλλὰ θὰ κλίνη, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν μικροτέραν τῆς  $\Phi$ .

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ (ἴσου ὄγκου) εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν  $N\Theta^2 : B\Delta^2$ , τὸ τμήμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἀποκατασταθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς ἓν μόνον σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων του θὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν  $\Phi$ .

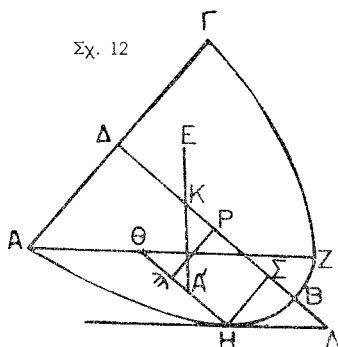
Ἐστω λοιπὸν πάλιν τὸ βάρος τοῦ τμήματος (Σχ. 10) πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχον μεγαλύτερον μὲν λόγον ἐκείνου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ  $Z\P^2 : B\Delta^2$ , μικρότερον δὲ τοῦ λόγου, τὸν ὅποιον ἔχει τὸ  $\Xi O^2 : B\Delta^2$ , δν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἄς ἔχῃ τὸ  $\Psi'^2 : B\Delta^2$ . εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι  $\Xi O > \Psi' > Z\P$ . Ἄς ἀχθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μεταξὺ τῶν τμημάτων  $A\Xi\Delta$ ,  $A\P O\Lambda$  ἴση πρὸς τὴν  $\Psi'$ , παράλληλος δὲ πρὸς τὴν  $B\Delta$  ἡ  $\Phi I$  τέμνουσα τὴν μεταξὺ τοῦ κώνου τομὴν κατὰ τὸ  $Y$ . πάλιν λοιπὸν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ  $\Phi Y = 2 YI$ , ὡς καὶ ἡ  $O\Gamma = 2 \Xi\Gamma$ . Ἄς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ  $\Phi$  ἐφαπτομένη τοῦ  $A\P O\Lambda$  κατὰ τὸ  $\Phi$  ἡ  $\Phi\Omega$ . καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς εἰς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μὲν  $AI = XI$ , ἡ δὲ  $A\chi$  παράλληλος πρὸς τὴν  $\Phi\Omega$ . Πρέπει δὲ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τμήμα τὸ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ τεθὲν κεκλιμένον, θὰ κλίνη κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ τέμνηται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ εἰς μεγαλυτέραν ἑκτασιν.

ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ | ὑγρόν, ὡς εἴρηται, καὶ κείσθω τὸ  
| πρῶτον [καὶ] οὕτως κεκλιμένον, | < ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ  
| μηδὲ καθ' ἓν > | ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, | τμα-  
| θέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδω δι' αὐτὸ τοῦ ἄξονος ὁρθῶ ποτὶ τὰν τοῦ



5 ὕγροϋ | ἐπιφάνειαν ἐν μὲν τῇ τοῦ τμᾶμα | τος ἐπιφανείᾳ γίνεται  
τομὰ ᾧ | *ΑΒΓ*, ἐν δὲ τῇ τοῦ ὕγροϋ ᾧ *ΕΖ*, ἄξων | δὲ ἕστω [τῆς  
τομῆς] καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] ᾧ *ΒΔ*, καὶ τετμάσθω |  
ᾧ *ΒΔ* κατὰ τὰ *Κ*, *Ρ* ὁμοίως τοῖς πρότε | ρον, ἄχθω δὲ καὶ ᾧ  
H 410 μὲν *ΗΛ* παρὰ | τὰν *ΕΖ* ἐφαπτομένα τᾶς [ἀπὸ | τῆς] *ΑΒΓ*  
10 τομᾶς κατὰ τὸ *Η*, ᾧ δὲ *ΗΘ* | παρὰ τὰν *ΒΔ*, ᾧ δὲ *ΗΣ* κάθε-  
τος ἐπὶ τὰν | *ΒΔ*. ἐπεὶ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει λόγον | ἔχει  
ποτὶ τὸ ὕγρόν, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς | *Ψ* τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς  
*ΒΔ*, | δῆλον, ὅτι ᾧ *Ψ* ἴσα ἐστὶν τῇ *ΗΘ*. δειχθῇ | σεται γὰρ  
ὁμοίως τοῖς πρότερον ὥστε | καὶ ᾧ *ΗΘ* ἴσα ἐστὶν τῇ *ΦΙ*.  
15 καὶ τὰ | τμᾶματα ἄρα τὰ *ΑΦΧ*, *ΕΒΖ* ἴσα | ἐστὶν ἀλλάλοις.  
ἐπεὶ δ' ἐν ἴσοις καὶ | ὁμοίοις τμαμάτεσσι τοῖς *ΑΠΟΔ*, *ΑΒΓ*  
| ἀγμέναι ἐντὶ αἱ *ΑΧ*, *ΕΖ* ἴσα τμᾶματα ἀφαιροῦσαι, καὶ ᾧ  
μὲν | ἀπ' ἄκρας τᾶς βάσιος, ᾧ δὲ οὐκ | ἀπ' ἄκρας, ἐλάσσονα

Διότι ἄς ἀφεθῇ τὸ τμήμα εἰς τὸ ὑγρόν, ὡς ἐλέχθη, καὶ κατ' ἀρχὰς ἄς εἶναι κατὰ τοιοῦτον τρόπον κεκλιμένον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε καθ' ἓν σημείον, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἰς μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος γίνεται τομὴ ἡ  $AB\Gamma$ , εἰς δὲ τὴν τοῦ ὑγροῦ ἡ  $EZ$ , ἔστω δὲ ἄξων τῆς τομῆς καὶ διάμετρος τοῦ τμήματος ἡ  $B\Delta$  (Σχ. 11) καὶ ἄς τμηθῇ ἡ  $B\Delta$  κατὰ τὰ σημεῖα  $K, P$ , ὅπως ἐγένετο καὶ εἰς τὰ προηγούμενα, ἄς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ μὲν  $HA$  παράλληλος πρὸς τὴν  $EZ$  ἐφαπτομένη τῆς ἀπὸ τῆς  $AB\Gamma$  τομῆς κατὰ τὸ  $H$ , ἡ δὲ  $H\Theta$  παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Delta$ , ἡ δὲ  $H\Sigma$  κάθετος ἐπὶ τὴν  $B\Delta$ . Ἐπειδὴ δὲ τὸ βάρος τοῦ τμήματος ἔχει λόγον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, ὃν ἔχει τὸ  $\Psi^2 : B\Delta^2$ , εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ  $\Psi = H\Theta$ · διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται καθ'



ὁμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα· ὥστε εἶναι καὶ ἡ  $H\Theta = \Phi I$ · καὶ τὰ τμήματα ἄρα  $A\Phi X$ ,  $EBZ$  εἶναι μεταξύ των ἴσα. Καὶ ἐπειδὴ εἰς ἴσα καὶ ὅμοια τμήματα, τὰ  $A\Pi O\Lambda$ ,  $AB\Gamma$ , ἔχουσιν ἀχθῇ αἱ  $AX$ ,  $EZ$  ἀφαιροῦσαι ἴσα τμήματα, καὶ ἡ μὲν μία ἔχει ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς βάσεως, ἡ δὲ ἄλλη ὄχι ἀπὸ τοῦ ἄκρου, θὰ σχηματίσῃ μι-

- ποιήσει | τὰν ὀξεΐαν ποτὶ τὰν διάμετρον | τοῦ τμήματος ἃ  
ἀπ' ἄκρας τᾶς | βᾶσιος ἀχθεῖσα. καὶ ἐπειδὴ | τοῦ  $ΗΛΣ$  τρι-  
γώνου ἃ  $Λ$  μείζων | τᾶς  $Ω$  γωνίας τοῦ  $ΦΤΩ$  τριγώ | νου,  
δῆλον, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἃ |  $Βς$  τᾶς  $ΒΤ$ , ἃ δὲ  $ςΡ$  τᾶς  $ΡΤ$   
5 μείζων, | καὶ ἃ  $Η$   $\lambda$  μείζων τᾶς  $ΦΗ$ . ἃ  $\lambda\Theta$  | ἄρα ἐλάσσων  
τᾶς  $ΗΙ$ . καὶ ἐπεὶ δι | πλασία ἐστὶν ἃ  $ΦΥ$  τᾶς  $ΥΙ$ , δῆλον, ὅτι  
| ἃ  $Η$   $\lambda$  μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς |  $\langle \lambda\Theta$ . ἔστω δὴ ἃ  
 $ΗΑ'$  διπλασία  $\rangle$  | τᾶς  $Α'Θ$ . δῆλον δὴ ἐκ τούτων, ὅτι | οὐ  
μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ ἐπικλι | θήσεται, ἕως ἂν ἃ βᾶσις  
10 αὐτοῦ | θίγη καθ' ἐν σαμεῖον τᾶς τοῦ | ὕγροῦ ἐπιφανείας.  
ἀπτέσθω δὴ | καθ' ἐν σαμεῖον, ὥς ἐν τῷ τρίτῳ | σχήματι  
ἐγράφθῃ, καὶ τὰ ἄλλα | τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· δειχθῇ | σεται  
H 412 δὴ πάλιν ἃ τε  $ΘΗ$  ἴσα ἐοῦσα | τῇ  $ΦΙ$  καὶ τὰ  $ΑΦΧ$ ,  $ΑΒΖ$   
τμή | ματα ἴσα ἀλλάλοις. καὶ ἐπεὶ | ἐν ἴσοις καὶ ὁμοίοις τμα-  
15 μάτεσσι | τοῖς  $ΑΠΟΛ$ ,  $ΑΒΓ$  ἀγμέναι ἐντὶ | αἱ  $ΑΧ$ ,  $ΑΖ$   
ἴσα τμήματα ἀφαι | ροῦσαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας ποτὶ | ταῖς  
διαμέτροις τῶν τμαμά | των· τῶν ἄρα  $ΛΗΣ$ ,  $ΦΤΩ$  αἱ ποτὶ  
| τοῖς  $Λ$ ,  $Ω$  γωνίαι ἴσαι ἐντί, καὶ ἃ  $ΒΣ$  | εὐθεΐα τῇ  $ΒΤ$  ἴσα  
καὶ ἃ  $ΣΡ$  τῇ |  $ΡΤ$  καὶ ἃ  $Η$   $\lambda$  τῇ  $ΦΗ$  καὶ ἃ  $\lambda\Theta$  τῇ |  $ΗΙ$ .  
20 ἐπεὶ δὲ διπλασία ἐστὶν ἃ  $ΦΥ$  τᾶς |  $ΥΙ$ , φανερόν, ὅτι ἃ  $Η$   $\lambda$   
μείζων ἐστὶν | ἢ διπλασία τᾶς  $\lambda\Theta$ . ἔστω οὖν ἃ  $ΗΑ'$  | τᾶς  
 $Α'Θ$  διπλασίον· πάλιν | δὴ ἐκ τούτων δῆλον, ὥς οὐ μενεῖ  
| τὸ τμᾶμα, ἀλλ' ἐπικλιθήσεται | ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ  $Α$ . ἐπεὶ  
δὴ καθ' ἐν | σημείον ὑπετέθη τὸ τμᾶμα ἃ | πτεσθαι τοῦ ὕγροῦ,  
25 δῆλον, ὅτι κα | τὰ πλείονα τόπον ἃ βᾶσις ὑπὸ | τοῦ ὕγροῦ  
καταλαφθῇσεται.

κροτέραν τὴν ὀξείαν γωνίαν μὲ τὴν διάμετρον τοῦ τμήματος ἢ ἀχθεῖσα ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς βάσεως. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία  $\Lambda$  τοῦ τριγώνου  $\Lambda\Lambda\Sigma$  εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας  $\Omega$  τοῦ τριγώνου  $\Phi\Gamma\Omega$  (Εὐκλ. I, 39), εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ  $B\Sigma < BT$ , ἡ δὲ  $\Sigma P > PT$ , καὶ ἡ  $H\lambda > \Phi H$ . εἶναι ἄρα ἡ  $\lambda\Theta < HI$ . Καὶ ἐπειδὴ ἡ  $\Phi\Upsilon = 2\Upsilon I$ , εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ  $H\lambda > 2\lambda\Theta$ . Ἐστω λοιπὸν ἡ  $HA' = 2A'\Theta$ . εἶναι λοιπὸν φανερόν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ τμήμα δὲν θὰ μείνῃ ἐν ἡρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κλίνη, μέχρις ὅτου ἡ βάσις αὐτοῦ ἐφάπτηται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕγροῦ.

Ἄς ἐφάπτηται λοιπὸν εἰς ἓν σημεῖον, ὡς εἰκονίζεται εἰς τὸ τρίτον σχῆμα (τῶν ἐξεταζομένων περιπτώσεων, ἐδῶ Σχ. 12), καὶ τὰ ἄλλα ἃς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτά· ἀποδεικνύεται λοιπὸν πάλιν ὅτι ἡ  $\Theta H = \Phi I$  καὶ ὅτι τὰ τμήματα  $A\Phi X$ ,  $ABZ$  εἶναι ἴσα μεταξὺ των. Καὶ ἐπειδὴ εἰς ἴσα καὶ ὅμοια τμήματα, τὰ  $\Lambda\P O\Lambda$ ,  $\Lambda B\Gamma$ , ἔχουσιν ἀχθῆ αἱ  $AX$ ,  $AZ$  ἀφαιροῦσαι ἴσα τμήματα, σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων· τῶν τριγώνων ἄρα  $\Lambda H\Sigma$ ,  $\Phi\Gamma\Omega$  αἱ πρὸς τὰ  $\Lambda$ ,  $\Omega$  γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ εὐθεῖα  $B\Sigma = BT$  καὶ ἡ  $\Sigma P = PT$  καὶ ἡ  $H\lambda = \Phi H$  καὶ ἡ  $\lambda\Theta = HI$ . Ἐπειδὴ δὲ ἡ  $\Phi\Upsilon = 2\Upsilon I$ , εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ  $H\lambda > 2\lambda\Theta$ . Ἐστω λοιπὸν ἡ  $HA' = 2A'\Theta$ . πάλιν λοιπὸν εἶναι φανερόν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ τμήμα δὲν θὰ μείνῃ ἐν ἡρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κλίνη πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ  $\Lambda$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι τὸ τμήμα ἐφάπτεται τοῦ ὕγροῦ εἰς ἓν σημεῖον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ βάσις αὐτοῦ θὰ καλυφθῇ ὑπὸ τοῦ ὕγροῦ εἰς μεγαλυτέραν ἑκτασιν.

Ἀπόσπασμα ἐκ τῆς ἐκδόσεως Ἀγγέλου Μάι  
(Fragmentum ab Angelo Mai editum).

Κατωτέρω παραθέτομεν ἄνευ μεταφράσεως ἀποσπάσματα τινα τῆς πραγματείας Ὀχουμένων. Πρόκειται περὶ προτάσεων τοῦ βιβλίου α' τῶν Ὀχουμένων, ἄλλης ὁμως ἐκδόσεως, πιθανώτατα μεταγενεστέρας. Ταῦτα προτάσσονται τοῦ κειμένου εἰς τὸν II τόμον τῆς ἐκδόσεως Heiberg.

Η VII Περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων [ἢ περὶ τῶν ὀχουμένων].

Α ἴ τ η μ α α'

Ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν τοιάνδε τινα φύσιν ἔχον, ὥστε τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐξ ἴσου κειμένων καὶ ὠθεῖσθαι συνεχῶν ὄντων  
5 ἐλαύνεσθαι τὸ ἥττον ὠθούμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον ὠθουμένου· καὶ πάντων αὐτοῦ μερῶν ὠθεῖσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ὑπεράνω αὐτοῦ ὄντος κατὰ κάθετον, εἰὰν τὸ ὑγρὸν ἢ καταβαῖνον ἐν τινι καὶ ὑπὸ τινος ἐτέρου πιεζόμενον.

Θ ε ω ρ η μ α π ρ ω τ ο ν

10 Ἐὰν ἐπιφάνειά τις ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τινος ἀεὶ σημείου, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ ἀεὶ περιφέρεια ἢ ἔχουσα κέντρον τὸ προειρημένον σημεῖον, σφαίρας ἐστὶν ἐπιφάνεια.

τετμήσθω γὰρ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ α' σημείου, καὶ ἀεὶ ἡ κοινὴ τομὴ ἔστω κύκλου περιφέρεια. λέγω, ὅτι σφαίρας  
15 ἐπιφάνειά ἐστίν, ἥς κέντρον τὸ α'.

Η VIII εἰ γὰρ μή, ἔσονται τινες εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α' ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν ἄνισοι. ἔστωσαν αἱ αβ', αγ'· τὰ ἄρα β', γ' σημεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ. τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ διὰ τῶν β', γ', α' σημείων· κύκλου δὲ ποιήσῃ περιφέρειαν ᾧ ὑποκείμενον, οὗ



κέντρον τὸ α'· ἴσαι ἄρα αἱ αβ', αγ'. ἀλλὰ καὶ ἄνισοι· ὅπερ ἀδύνατον. σφαίρας ἄρα ἐστὶν ἐπιφάνεια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'

Παντὸς ὕδατος ἡσυχάζοντος ὥστε ἀκίνητον μένειν ἡ ἐπι-  
5 φάνεια σφαιροειδῆς ἔσται ἔχουσα τὸ αὐτὸ τῇ γῇ κέντρον.

γ'

Τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ ἰσομεγέθη καὶ ὑποβαρῇ τῷ ὕ-  
γρῳ καθειμένα εἰς τὸ ὕγρὸν βαπτισθήσονται, ὥστε τὴν τοῦ  
ὕγροῦ ἐπιφάνειαν μὴ ὑπερβάλλειν, καὶ οὐκέτι οἰσθήσεται εἰς τὰ  
10 κατωτέρω.

δ'

Τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ τοῦ ὕγροῦ κουφότερα, ἐὰν εἰς  
ὕγρὸν καθιῶνται, οὐχ ὅλα βαπτισθήσεται, ἀλλ' ἔσται τι αὐτῶν  
καὶ ἔξω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕγροῦ.

15

ε'

Τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ τοῦ ὕγροῦ κουφότερα εἰς τὸ  
ὕγρὸν καθειμένα ἐπὶ τοσοῦτον βαπτισθήσεται, ἐφ' ὅσον το-  
σοῦτον τοῦ ὕγροῦ ὄγκον, ὅσος ἐστὶν ὁ τοῦ βαπτισθέντος μέ-  
ρους, ἰσοβαρεῖ εἶναι τῷ ὅλῳ μεγέθει.

Η ΙΧ

ς'

Τὰ στερεὰ ὕγροῦ κουφότερα βία εἰς τὸ ὕγρὸν πιεσθέντα  
ἐπανιστάμενα φέρονται ἐπὶ τὰ ἄνω τοσαύτη δυνάμει, ὅσῳ τὸ  
ὕγρὸν ἰσομέγεθες τῷ μεγέθει βαρύτερόν ἐστι τοῦ μεγέθους.

ζ'

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ στερεὰ καθειμένα εἰς τὸ ὑγρὸν  
οἰσθήσεται κάτω, ἕως οὗ καταβαίνωσι, καὶ ἔσται τοσοῦτον  
κουφότερα ἐν τῷ ὑγρῷ, ὅσον ἔχει τὸ βάρος τὸ ὑγρὸν ἰσομέγε-  
5 θες τῷ στερεῷ μεγέθει.

Λ ἡ μ μ α ἡ ὑ π ό θ ε σ ι ς

Ὑποκείσθω τῶν ἐν ὑγρῷ ἄνω φερομένων ἕκαστον ἄνω  
φέρεσθαι κατὰ κάθετον, ἥτις ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους αὐ-  
τῶν ἐκβάλλεται.

10

Θ ε ώ ρ η μ α η'

Ἐὰν στερεῶν τι μέγεθος ἔχον σχῆμα τμήματος σφαίρας  
εἰς τὸ ὑγρὸν καθιῇται, ὥστε τὴν βάσιν τοῦ τμήματος μὴ ἄ-  
πτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τὸ σχῆμα ἐπισταθήσεται ὀρθόν, ὥστε τὸν  
ἄξονα τοῦ τμήματος κατὰ κάθετον εἶναι. καὶ . . .

## ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ

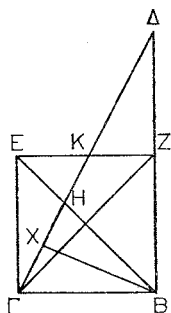
Τοῦ λεγομένου Στομαχίου ποικί|λαν ἔχοντος τὰς ἐξ ὧν  
 συνέστακε | σχημάτων μεταθέσεως θεωρίαν | ἀναγκαῖον  
 ἡγησάμην πρᾶττον του | <.....> | ῥῶν  
 5 ἐκθέσθαι, εἷς τε ἃ διαιρεῖται, | ἕκαστόν τε αὐτῶν τίνι ἐστὶν  
 ὁμοιού|μενον, ἔτι δὲ καί, ποῖαι γωνίαι σύ|νδυο λαμβανό-  
 μεναι <...> καὶ <...> | θάς, εἴρηται πρὸς τὸ τὰς ἐναρ-  
 μόσεις | τῶν ἐξ αὐτῶν γεννωμένων σχα | μάτων γινώσκει-  
 σθαι, εἴτε ἐπ' εὐ|θείας εἰσὶν αἱ γεννώμεναι ἐν τοῖς | σχήμασι  
 10 πλευραί, εἴτε καὶ μικρῶς | λείπονται τᾷ θεωρίᾳ λανθά | νου-  
 σιν· τὰ γὰρ τοιαῦτα φιλότεχνα· | καὶ ἐὰν ἐλάχιστον μὲν λεί-  
 πηται, τᾷ | δὲ θεωρίᾳ λανθάνη, οὐ παρὰ τοῦ|τ' ἐστὶν ἐκ-  
 βλήτα, ἃ συνίσταται. |

Ἔστι μὲν οὖν ἐξ αὐτῶν οὐκ ὀλίγων σχημάτων | .....  
 15 ...ο... διὰ τὸ .....ν... τον εἶναι | εἰς ἕτερον τόπον τοῦ  
 ἴσου καὶ ἴσο|γωνίου σχήματος μετατιθεμε... | καὶ ἐτέ  
 ..... λαμβάνοντας. <ἐνίο>|τε δὲ καὶ δύο σχημάτων συν-  
 ἄμφω | ἐνὶ σχήματι ἴσων ὄντων καὶ ὁμοί|ων τῷ ἐνὶ σχή-  
 H 418 ματι ἢ καὶ δύο σχη|μάτων συνάμφω ἴσων τε καὶ ὁμοί|ων  
 20 ὄντων δυσὶ σχήμασι συνάμφω | πλείονα σχήματα συνίστα-  
 ται ἐ|κ τῆς μεταθέσεως. προογράφομε|ν οὖν τι θεώρημα  
 εἰς αὐτὸ συντεῖ|νον.

## Ἀρχιμήδους Στομάχιον

Ἐπειδὴ τὸ λεγόμενον στομάχιον ἔχει ποικίλην θεωρίαν τῆς μεταθέσεως τῶν σχημάτων ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἐθεώρησα ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσω τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται, καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν πρὸς ποῖον εἶναι ὅμοιον, προσέτι δὲ καὶ ποῖαι γωνίαι λαμβανόμεναι ἀνὰ δύο (σχηματίζουνσι δύο ὀρθὰς) ἐλέχθη διὰ νὰ ἀναγνωρίζωνται αἱ ἐναρμόσεις (μεταθέσεις) τῶν ἐξ αὐτῶν γεννωμένων σχημάτων, εἴτε αἱ γεννῶμεναι εἰς τὰ σχήματα πλευραὶ εὐρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, εἴτε καὶ ἂν παρεκκλίνωσιν ὀλίγον ἢ ἀπόκλισις δὲν φαίνεται· διότι τὰ τοιαῦτα πρᾶγματα ἀπαιτοῦσι ἐνδελεχῆ ἔρευναν· καὶ ἐὰν ἐλλείπῃ ὀλίγον διὰ νὰ εἶναι αἱ πλευραὶ ἐπ' εὐθείας, τοῦτο δὲ δὲν φαίνεται, δὲν εἶναι τοῦτο λόγος διὰ νὰ παραμεληθῇ ἡ ἔρευνα αὐτῶν.

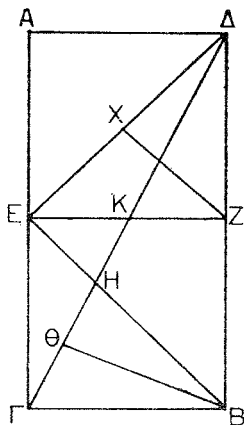
Ὑπάρχουσι μὲν λοιπὸν ἐξ αὐτῶν ὄχι ὀλίγα σχήματα . . . διότι ἐν μέρος αὐτῶν εἰς τὴν θέσιν ἄλλου σχήματος δύναται νὰ μετατεθῇ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον καὶ ἰσογώνιον. Ἐνίστε δὲ καὶ ἐκ δύο σχημάτων τὰ ὁποῖα ὁμοῦ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς ἓν σχῆμα ἢ καὶ ἐκ δύο σχημάτων τὰ ὁποῖα ὁμοῦ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς δύο σχήματα ὁμοῦ σχηματίζονται περισσότερα σχήματα ἐκ τῆς μεταθέσεως. Προτάσσομεν λοιπὸν θεωρημὰ τι χρήσιμον πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν.



Ἐστω γὰρ παραλληλόγραμ | μον ὀρθογώνιον τὸ  $ZΓ$ , καὶ  
 δε . ι . . . . . ω | ἡ  $EZ$  τῷ  $K$ , καὶ . . διήχθωσαν | ἀπὸ τῶν  
 $Γ$ ,  $B$  αἱ  $ΓK$ ,  $BE$  . ει . . . . . ων | . . . τῶν . . .  $Γ$  . . . . .  
 ἐκ<βεβλή> | σθωσαν αἱ  $ΓK$ ,  $BZ$  καὶ συμπιπτε | τωσαν κατὰ  
 5 τὸ  $Δ$  . . . . . > | ἡ  $ΓH$ . ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $EK$  τῇ  $KZ$ ,  
 <ἴση> | καὶ ἡ  $ΓE$ , τουτέστιν ἡ  $BZ$ , τῇ  $ZA$ . ὥ<στε> | μείζων  
 ἡ  $ΓZ$  τῆς  $ZA$ . καὶ γωνία <ἄρα> | ἡ ὑπὸ τῶν  $ZΔΓ$  τῆς ὑπὸ  
 τῶν  $ZΓΔ$  | μείζων. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ ὑπὸ  $HBA$ ,  $ZΓB$ . | ἡ-  
 μίσεια γὰρ ὀρθῆς ἑκατέρω· μεί | ζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν  $ΓHB$ ,  
 10 ἐπεὶ | ἡ ὑπὸ  $ΓHB$  ἴση δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ | ἀπεναντίον ταῖς  
 ὑπὸ  $HBA$ ,  $HΔB$ , | τῆς ὑπὸ τῶν  $HΓB$ . ὥστε μείζων |  
 ἐστὶν ἡ  $ΓB$  τῆς  $BH$ . ἐὰν ἄρα δίχα τμη | θῇ ἡ  $ΓH$  κατὰ  $X$ ,  
 ἔσται ἀμβλεῖα μὲν | ἡ ὑπὸ  $ΓXB$ . ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ  $ΓX$  τῇ  
 $XH$ , | καὶ κοινὴ ἡ  $XB$ , δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ | βάσις ἡ  $ΓB$   
 15 τῆς  $BH$  μείζων· καὶ | ἡ γωνία ἄρα τῆς γωνίας μεί | ζων.  
 ἀμβλεῖα μὲν ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΓXB$ , ὀξεῖα | δὲ ἡ ἐφεξῆς. ἡμίσεια  
 δὲ ὀρθῆς ἡ | ὑπὸ  $ΓBH$ . τοῦτο γάρ ἐστιν ὑποκείμε | ρον τοῦ  
 παραλληλογράμμου· ὀξεῖ | α δὲ ἡ ὑπὸ  $BXH$ . καὶ . τι δὴ ἴση ἡ  
 | λοιπαὶ  $ΓBH$  καὶ συνίσταται καὶ | διαιρεῖται τοῦτο επ . ον  
 20 τον . . . . . | . . . . . βάσιος . τι . . . . . | . . . . . αστ .  
 Η 420 α . ἄρα ο . . .  $AB$  . . . | . αν . . ο . . . τὴν  $ΓA$  . . . . . νῶν |  
 . . . . . ἔχον . . . . . τὸ ἐπίλοιπ . . . . . | . . . . .  
 . . . . . | . . δύνασθαι ἄρ . . . . . ξειν εκ . . . . . | τῶν τομῶν . . .  
 τῶν τάξιν ἐχοντ.

25 τετμήσθω ἡ  $ΓA$  δίχα κατὰ τὸ  $E$ , καὶ | διὰ τοῦ  $E$  τῇ  $BΓ$   
 παράλληλος ἤχθω | ἡ  $EZ$ . ἔστιν οὖν τετράγωνα τὰ  $ΓZ$ ,  $ZA$ .  
 | ἤχθωσαν διάμετροι αἱ  $ΓΔ$ ,  $BE$ ,  $EA$ , | καὶ τετμήσθωσαν  
 δίχα αἱ  $ΓH$ ,  $EA$  | κατὰ τὰ  $Θ$ ,  $X$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν | αἱ  
 $BΘ$ ,  $XZ$ , καὶ διὰ τῶν . ,  $K$  τῇ  $BA$  πα | ράλληλοι ἤχθωσαν αἱ  
 30  $K$ , .  $E$ . διὰ | τὸ προκείμενον ἄρα θεώρημα τοῦ |  $BΓΘ$  τρι-

Διότι ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΓ, καὶ ἄς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Γ, Β, αἱ ΓΚ, ΒΕ . . . καὶ ἄς προεκβληθῶσιν αἱ ΓΚ, ΒΖ, καὶ ἄς συναντῶνται κατὰ τὸ Δ . . . ἡ ΓΗ. Ἐπειδὴ εἶναι ἡ ΕΚ = ΚΖ καὶ ἡ ΓΕ τουτέστιν ἡ ΒΖ = ΖΔ· ὥστε εἶναι ἡ ΓΖ > ΖΔ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΖΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΓΔ (Εὐκλ. Ι, 18). Εἶναι δὲ γωνία ΗΒΔ = γωνία ΖΓΒ· διότι ἐκάστη εἶναι ἡμισυ ὀρθῆς· εἶναι ἄρα γωνία ΓΗΒ > γωνίας ΗΓΒ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΗΒ = πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὰς ΗΒΔ + ΗΔΒ (Εὐκλ. Ι, 32)· ὥστε εἶναι ΓΒ > ΒΗ (Εὐκλ. Ι, 19). Ἐὰν ἄρα ἡ ΓΗ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Χ, θὰ εἶναι ἀμβλεῖα ἡ ΓΧΒ· διότι ἐπειδὴ εἶναι ΓΧ = ΧΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΧΒ, ὑπάρχουσιν εἰς ἓν τρίγωνον δύο πλευραὶ ἴσαι πρὸς δύο πλευράς· καὶ ἡ βάσις ΓΒ > τῆς βάσεως ΒΗ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας βάσεως εἶναι μεγαλυτέρα (Εὐκλ. Ι, 25). Εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα μὲν ἡ ΓΧΒ, ὀξεῖα δὲ ἡ ἐφεξῆς. Εἶναι δὲ ἡμισυ ὀρθῆς ἡ ΓΒΗ· διότι τοῦτο ὑπάρχει ἐκ τοῦ τετραγώνου σχήματος· εἶναι δὲ ὀξεῖα ἡ ΒΧΗ. Καὶ . . . εἶναι ἴση . . . λοιπαὶ ΓΒΗ καὶ συνίσταται καὶ διαιρεῖται τοῦτο . . .



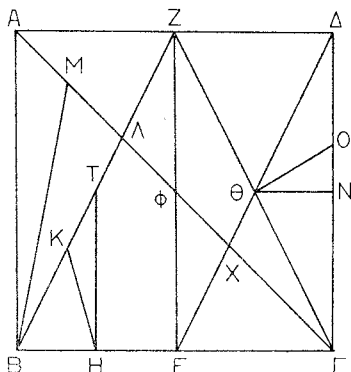
Ἄς τμηθῇ ἡ ΓΑ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ· εἶναι λοιπὸν τὰ σχήματα ΓΖ, ΖΑ τετράγωνα. Ἄς ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΓΔ, ΒΕ, ΕΔ, καὶ ἄς τμηθῶσι εἰς τὸ μέσον αἱ ΓΗ, ΕΔ κατὰ τὰ Θ, Χ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΒΘ, ΧΖ, καὶ διὰ τῶν . . . Κ πρὸς τὴν ΒΔ παράλληλοι ἄς ἀχθῶσιν αἱ Κ . . . Ε. Ἐκ τοῦ προηγουμένου ἄρα θεωρήματος συνάγεται ὅτι ἡ πρὸς τὸ Θ

γωνίου ἢ πρὸς τῷ Θ γωνία | ἀμβλεῖα, ἢ δὲ λοιπὴ ὀξεῖα  
 ..... | νερὸν φανερόν δὲ ... εἰ .....

Das Buch des Archimedes über die Teilung der Figur  
 Stomachion in vierzehn zu ihr in Verhältniss stehende Fi-  
 5 guren.

Wir zeichnen ein Parallelogramm, es sei dies ABGD,  
 halbieren BG in E, errichten EZ senkrecht auf BG, ziehen  
 die Diagonalen AG, BZ und ZG, halbieren ebenfalls BE  
 in H, und errichten HT senkrecht auf BE; dann legen wir  
 10 das Lineal an den Punkt H und visieren nach dem Punkt  
 A und ziehen HK, halbieren AL in M und ziehen BM, so  
 ist das Rechteck AE in sieben Teile geteilt. Hierauf halbie-  
 H 421 ren wir GD in N, ebenso ZG in C, ziehen EC, legen das  
 Lineal an die Punkte B und C an und ziehen CO, ziehen  
 15 noch CN, so ist auch das Rechteck ZG in sieben Teile, aber  
 auf andere Weise als das erste, geteilt, mithin das ganze  
 Quadrat in vierzehn Teile.

Wir beweisen nun, dass jeder der vierzehn Teile zum  
 ganzen Quadrat in rationalem Verhältniss stehe.





γωνία τοῦ τριγώνου  $B\Gamma\Theta$  εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ὀξεῖα . . . εἶναι δὲ φανερόν . . . εἰ . . .

Τὸ βιβλίον τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ σχήματος τοῦ καλουμένου Στομάχιον εἰς δέκα τέσσαρα σχήματα εὕρισκόμενα εἰς λόγον πρὸς αὐτό\*.

Σχεδιάζομεν ἐν παραλληλόγραμμον, ἔστω τὸ  $AB\Gamma\Delta$ , διχοτομοῦμεν τὴν  $B\Gamma$  εἰς τὸ  $E$ , ὑψώνομεν τὴν  $EZ$  κάθετον ἐπὶ τὴν  $B\Gamma$ , φέρομεν τὰς διαγωνίους  $AG$ ,  $BZ$ , καὶ  $Z\Gamma$ , διχοτομοῦμεν ἐπίσης τὴν  $BE$  εἰς τὸ  $H$ , καὶ ὑψώνομεν τὴν  $HT$  κάθετον ἐπὶ τὴν  $BE$ . Κατόπιν θέτομεν τὸν κανόνα εἰς τὸ σημεῖον  $H$  καὶ κατοπτεύομεν πρὸς τὸ σημεῖον  $A$  καὶ φέρομεν τὴν  $HK$ , διχοτομοῦμεν τὴν  $AA$  εἰς τὸ  $M$  καὶ φέρομεν τὴν  $BM$ , ὅποτε τὸ ὀρθογώνιον  $AE$  ἔχει διαιρεθῇ εἰς ἑπτὰ μέρη. Διχοτομοῦμεν τὴν  $\Gamma\Delta$  εἰς τὸ  $N$ , ἐπίσης τὴν  $Z\Gamma$  εἰς τὸ  $\Theta$ , φέρομεν τὴν  $E\Theta$ , θέτομεν τὸν κανόνα εἰς τὰ σημεῖα  $B$  καὶ  $\Theta$  καὶ φέρομεν τὴν  $\Theta O$ , φέρομεν ἀκόμη τὴν  $\Theta N$ , ὅποτε ἔχει ἐπίσης καὶ τὸ ὀρθογώνιον  $Z\Gamma$  διαιρεθῇ εἰς ἑπτὰ μέρη, ἀλλὰ κατ' ἄλλον τρόπον ἢ τὸ πρῶτον ὀρθογώνιον, καὶ κατὰ ταῦτα τὸ ὅλον τετραγώνον ἔχει διαιρεθῇ εἰς δέκα τέσσαρα μέρη.

Ἀποδεικνύομεν τώρα ὅτι ἕκαστον τῶν δεκατεσσάρων μερῶν πρὸς ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον εὕρσκεται εἰς ῥητὴν σχέσιν.

\* Ἀπόσπασμα ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ μεταφρασθὲν εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ H. Suter.

Weil ZG die Diagonale des Rechtecks ZG ist, so ist  $\Delta$   
H 422 DZG die Hälfte dieses Rechtecks, also  $\frac{1}{4}$  des Quadrates.  
Aber  $\Delta GNC$  ist  $\frac{1}{4}$  von  $\Delta DZG$ , weil, wenn wir EC verlän-  
gern, es in den Punkt D trifft, und dann also  $\Delta GDC$  die  
5 Hälfte des  $\Delta DZG$  und gleich den beiden  $\Delta GNC$  und  $\Delta DNC$   
zusammen ist; also ist  $\Delta GNC = \frac{1}{16}$  des Quadrats. Wenn  
wir nun ferner annehmen, die Linie OC sei nach dem  
Punkte B gerichtet, wie sie in der Tat auch gezeichnet wurde,  
so ist die Linie NC parallel zur Seite BG des Quadrates,  
10 resp. des  $\Delta OBG$ , also hat man die Proportion [Eucl. VI, 2]  
 $BG : NC = GO : NO$ .

Es ist aber BG das Vierfache von NC, also auch GO das  
Vierfache von NO; deshalb ist nun GN das Dreifache von  
NO und  $\Delta GNC = 3 \Delta ONC$  [Eucl. VI, 1]. Da aber, wie wir  
15 gezeigt haben,  $\Delta GNC = \frac{1}{16}$  des Quadrates ist, so ist  $\Delta$   
 $ONC = \frac{1}{48}$  des Quadrates. Weil ferner  $\Delta GDZ = \frac{1}{4}$  des  
Quadrates ist und deshalb  $GNC = \frac{1}{16}$  desselben und  $\Delta$   
 $NCO = \frac{1}{48}$  desselben, so bleibt für das Viereck  $DOCZ =$   
 $\frac{1}{6}$  der Quadratfläche übrig. Nach der Voraussetzung<sup>1)</sup> geht  
20 ferner die Linie NC durch den Punkt F, und es wäre CF  
parallel zu GE; also hat man die Proportion [Eucl. VI, 4]  
 $EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ$ . Weil nun  $EQ = 2CQ$   
und  $GQ = 2FQ$ ,<sup>2)</sup> so ist  $\Delta EQG$  das Doppelte jedes der  
beiden  $\Delta GCQ$  und  $\Delta EFQ$  [Eucl. VI, 1]. Es ist aber klar,  
25 dass  $\Delta EGZ = 2 \Delta EFG$  ist [Eucl. VI, 1], weil  $ZE =$   
 $2FE$  ist. Das  $\Delta EGZ$  ist aber  $= \frac{1}{4}$  des Quadrates, also  $\Delta$

1) Quia rectae DG, ZE inter se aequales utraque in punctis  
N, F et recta ZG in C in binas partes aequales sectae sunt.

2) Quia  $EG = 2CF$ .

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΖΓ εἶναι διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου ΖΓ, τὸ τρίγωνον ΔΖΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, ἥτοι τὸ ἐν τέταρτον τοῦ τετραγώνου. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΓΝΘ εἶναι τὸ ἐν τέταρτον τοῦ τριγώνου ΔΖΓ, ἐπειδὴ, ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΕΘ, συναντᾷ αὐτὸ εἰς τὸ Δ, καὶ τότε εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΔΘ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΔΖΓ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΓΝΘ, ΔΝΘ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΝΘ ἴσον πρὸς τὸ ἐν δέκατον ἕκτον τοῦ τετραγώνου. Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΟΘ νεύει πρὸς τὸ σημεῖον Β, ὅπως πράγματι ἔχει σχεδιασθῇ, ἡ εὐθεῖα ΝΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ τριγώνου ΟΒΓ, ὁπότε ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$ΒΓ : ΝΘ = ΓΟ : ΝΟ$$

(Εὐκλ. VI, 2). Εἶναι ὁμως ἡ ΒΓ = 4 ΝΘ, καὶ ἐπίσης ἡ ΓΟ = 4 ΝΟ. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΝ = 3 ΝΟ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΝΘ = 3 τρίγωνα ΟΝΘ (Εὐκλ. VI, 1). Ἐπειδὴ ὁμως, ὡς ἔχομεν ἀποδείξει, τὸ τρίγωνον ΓΝΘ =  $\frac{1}{16}$  τοῦ τετραγώνου, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΝΘ =  $\frac{1}{48}$  τοῦ τετραγώνου.

Ἐπειδὴ ἀκόμη τὸ τρίγωνον ΓΔΖ =  $\frac{1}{4}$  τοῦ τετραγώνου καὶ ἐπομένως ΓΝΘ =  $\frac{1}{16}$  τοῦ ἰδίου καὶ τρίγωνον ΝΘΟ =  $\frac{1}{48}$  τοῦ ἰδίου, οὕτω μένει νὰ εἶναι τὸ τετράπλευρον ΔΟΘΖ =  $\frac{1}{6}$  τοῦ τετραγώνου. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΝΘ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Φ, καὶ θὰ εἶναι ἡ ΘΦ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ. Εἶναι ἄρα ΕΓ : ΘΦ = ΕΧ : ΘΧ = ΓΧ : ΦΧ (Εὐκλ. VI, 4). Ἐπειδὴ τώρα εἶναι ΕΧ = 2ΘΧ καὶ ΓΧ = 2ΦΧ, θὰ εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΕΧΓ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον ἑκατέρου τῶν δύο τριγώνων ΓΟΧ καὶ ΕΦΧ (Εὐκλ. VI, 1). Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΓΖ = 2 τρίγωνα ΕΦΓ (Εὐκλ. VI, 1), ἐπειδὴ εἶναι ΖΕ = 2ΦΕ. Εἶναι ὁμως τὸ τρίγωνον ΕΓΖ =  $\frac{1}{4}$  τοῦ τετραγώνου, ἥτοι τὸ τρίγωνον ΕΦΓ =  $\frac{1}{8}$  τοῦ ἰδίου. Τοῦτο ὁμως εἶναι τὸ τριπλάσιον ἑκα-

$EFG = \frac{1}{8}$  desselben. Dieses ist aber das Dreifache jedes der beiden  $\triangle EFQ$  und  $GCQ$ ; also ist jedes dieser beiden Dreiecke  $= \frac{1}{24}$  des Quadrates  $AG$ . Und das  $\triangle EGQ$  ist das  
H 423 Doppelte jedes der beiden  $\triangle EFQ$  und  $GCQ$ ; also ist es =  
5  $\frac{1}{12}$  des Quadrates. Weil ferner  $ZF = EF$  ist, so ist  $\triangle ZFG = \triangle EFG$  [Eucl. VI, 1]; wenn wir nun  $\triangle GCQ = \triangle EFQ$  wegnehmen, so bleibt Viereck  $FQCZ = \triangle EGQ$ ; also ist auch Viereck  $FQCZ = \frac{1}{12}$  des Quadrates  $AG$ .

Wir haben nun das Rechteck  $ZG$  in 7 Teile geteilt und  
10 gehen nun zur Teilung des andern Rechtecks über.

Weil  $BZ$  und  $EC$  zwei parallele Diagonalen sind [Eucl. VI, 2], und  $ZF = EF$  ist, so ist  $\triangle ZLF = \triangle EFQ$  [Eucl. VI, 19], mithin  $\triangle ZLF = \frac{1}{24}$  des Quadrates  $AG$ . Weil  $BH = HE$  ist, so ist  $\triangle BEZ$  das Vierfache des  $\triangle BHT$ ; denn  
15 jedes derselben ist rechtwinklig.<sup>1)</sup> Da aber  $\triangle BEZ = \frac{1}{4}$  des Quadrates  $ABGD$  ist, so ist  $\triangle BHT = \frac{1}{16}$  desselben. Nach unserer Voraussetzung geht ferner die Linie  $HK$  durch den Punkt  $A$ ; also hat man die Proportion [Eucl. VI, 4]

$$AB : HT = BK : KT.$$

20 Es ist aber  $AB = 2HT$ ,<sup>2)</sup> also auch  $BK = 2KT$ , mithin  $BT = 3KT$ ; also ist  $\triangle BHT$  das Dreifache des  $\triangle KHT$  [Eucl. VI, 1]. Weil aber  $\triangle BHT = \frac{1}{16}$  des ganzen Quadrates ist, so ist  $\triangle KHT = \frac{1}{48}$  desselben. Ferner ist  $\triangle BKH$  das Doppelte des  $\triangle KHT$  [Eucl. VI, 1], also  $= \frac{1}{24}$  des  
25 Quadrates. Da weiter  $BL = 2ZL$ ,<sup>3)</sup> und  $AL = 2LF$

1) Ideo  $\triangle BEZ$ ,  $BHT$  aequianguli sunt et rationem habent, quam  $BE^2 : BH^2$  (Eucl. VI, 19).

2) Quia  $BZ$  in  $T$  in duas partes aequales secta est.

3) Quia  $\triangle ABL$ ,  $ZFL$  aequianguli et  $AB = 2ZF$ ; tum u. Eucl. VI, 4.

τέρου τῶν δύο τριγώνων  $ΕΦΧ$  καὶ  $ΓΘΧ$ · εἶναι ἄρα ἐκάτερον τῶν δύο τούτων τριγώνων  $= \frac{1}{24}$  τοῦ τετραγώνου  $ΑΓ$ . Καὶ τὸ τρίγωνον  $ΕΓΧ$  εἶναι τὸ διπλάσιον ἐκατέρου τῶν τριγώνων  $ΕΦΧ$  καὶ  $ΓΘΧ$ · εἶναι ἄρα τοῦτο  $= \frac{1}{12}$  τοῦ τετραγώνου. Ἐπειδὴ ἀκόμῃ εἶναι  $ΖΦ = ΕΦ$ , εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον  $ΖΦΓ =$  τρίγωνον  $ΕΦΓ$  (Εὐκλ. VI, 1). Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τώρα τὸ τρίγωνον  $ΓΘΧ =$  τρίγωνον  $ΕΦΧ$ , μένει ὑπόλοιπον τὸ τετράπλευρον  $ΦΧΘΖ =$  τρίγωνον  $ΕΓΧ$ . Εἶναι ἄρα τὸ τετράπλευρον  $ΦΧΘΖ = \frac{1}{12}$  τετραγώνου  $ΑΓ$ .

Ἐχομεν ἤδη διαιρέσει τὸ ὀρθογώνιον  $ΖΓ$  εἰς ἑπτὰ μέρη καὶ προβαίνομεν εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ ἄλλου ὀρθογωνίου.

Ἐπειδὴ αἱ  $BZ$ ,  $ΕΘ$  εἶναι δύο παράλληλοι διαγώνιοι (Εὐκλ. VI, 2), καὶ εἶναι  $ΖΦ = ΕΦ$ , εἶναι ἄρα τρίγωνον  $ΖΛΦ =$  τρίγ.  $ΕΦΧ$  (Εὐκλ. VI, 19), καὶ ἐπομένως τρίγωνον  $ΖΛΦ = \frac{1}{24}$  τοῦ τετραγώνου  $ΑΓ$ . Ἐπειδὴ εἶναι  $BH = HE$ , εἶναι ἄρα τρίγωνον  $BEZ = 4$  τρίγωνα  $BHT$ · διότι ἕκαστον αὐτῶν εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ τρίγωνον  $BEZ = \frac{1}{4}$  τοῦ τετραγώνου  $ΑΒΓΔ$ , ἔπεται τρίγωνον  $BHT = \frac{1}{16}$  τοῦ ἰδίου. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡμῶν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ  $HK$  διέρχεται διὰ τοῦ σημείου  $A$ · θὰ εἶναι ἄρα (Εὐκλ. VI, 4)

$$AB : HT = BK : KT.$$

Εἶναι ὁμως  $AB = 2HT$ , καὶ ἐπίσης  $BK = 2KT$ , καὶ συνεπῶς  $BT = 3KT$ · εἶναι ἄρα τρίγωνον  $BHT = 3$  τρίγωνα  $KHT$  (Εὐκλ. VI, 1). Ἐπειδὴ ὁμως εἶναι τρίγωνον  $BHT = \frac{1}{16}$  τοῦ ὅλου τετραγώνου εἶναι ἄρα τρίγωνον  $KHT = \frac{1}{48}$  τοῦ ἰδίου. Εἶναι δὲ τρίγωνον  $BKH = 2$  τρίγωνα  $KHT$  (Εὐκλ. VI, 1), ἥτοι  $= \frac{1}{24}$  τοῦ τετραγώνου. Ἐπειδὴ  $BA = 2ZA$  καὶ  $AA = 2ΛΦ$ , εἶναι ἄρα

ist,<sup>1)</sup> so ist  $\triangle ABL$  das Doppelte des  $\triangle ALZ$  und  $\triangle ALZ$  das Doppelte des  $\triangle ZLF$  [Eucl. VI, 1]. Weil aber  $\triangle ZLF = \frac{1}{24}$  des ganzen Quadrates ist, so ist  $\triangle ALZ = \frac{1}{12}$  desselben, also  $\triangle ABL = \frac{1}{6}$ . Es ist aber  $\triangle ABM = \triangle BML$  [Eucl. 5 VI, 1], also jedes dieser beiden Dreiecke  $= \frac{1}{12}$  des Quadrates. Es bleibt noch übrig das Fünfeck  $LFEHT =$  der Hälfte  
H 424 eines Sechstels mehr der Hälfte eines Achtels des ganzen Quadrates.<sup>2)</sup>

Wir haben also auch das Quadrat  $AE$  in 7 Teile geteilt;  
10 mithin ist die ganze Figur  $ABGD$  in 14 Teile geteilt, welche zu ihr in Verhältnis stehen; und das ist, was wir wollten.

1) U. not. 3.

2) Pentagonum illud =

$$= \frac{1}{2} AG \div \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} \right) AG =$$

$$AG \left( \frac{1}{2} \div \frac{17}{48} \right) = \frac{7}{48} AG = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8} \right) \right) AG.$$

τρίγωνον  $ΑΒΛ = 2$  τρίγωνα  $ΑΛΖ$ , καὶ τρίγωνον  $ΑΛΖ = 2$  τρίγωνα  $ΖΛΦ$  (Εὐκλ. VI, 1). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι τρίγωνον  $ΖΛΦ = \frac{1}{24}$  τοῦ ὅλου τετραγώνου, εἶναι ἄρα τρίγωνον  $ΑΛΖ = \frac{1}{12}$  τοῦ ἰδίου, ἥτοι τρίγωνον  $ΑΒΛ = \frac{1}{6}$ . Εἶναι ὅμως τρίγωνον  $ΑΒΜ =$  τρίγωνον  $ΒΜΛ$  (Εὐκλ. VI, 1), ἥτοι εἶναι ἐκάτερον τῶν δύο τούτων τριγώνων  $= \frac{1}{12}$  τοῦ τετραγώνου. Μένει ἀκόμη ὑπόλοιπον τὸ πεντάγωνον  $ΛΦΕΗΤ$  τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ ἐνάσπου ἔκτου σὺν τὸ ἥμισυ ἐνὸς ὀγδόου τοῦ ὅλου τετραγώνου.

Ἔχομεν ἄρα ἐπίσης διαιρέσει τὸ τετράγωνον  $ΑΕ$  εἰς ἑπτὰ μέρη· εἶναι ἄρα τὸ ὅλον σχῆμα  $ΑΒΓΔ$  εἰς 14 μέρη διηρημένον, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται πρὸς αὐτὸ εἰς λόγον· καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν.





ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ  
ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ ΕΦΟΔΟΣ

Η 426 Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων  
πρὸς Ἑρατοσθένη ἔφοδος

Ἀρχιμήδης Ἑρατοσθένει εὖ πράττειν.

Ἀπέστειλά σοι πρότερον | τῶν εὐρημένων θεωρημάτων |  
5 ἀναγράφας αὐτῶν τὰς προτάσεις φάμενος εὐρίσκειν ταύ-  
τας | τὰς ἀποδείξεις, ἃς οὐκ εἶπον | ἐπὶ τοῦ παρόντος· ἦσαν  
δὲ τῶν ἀπεσταλμένων θεωρημάτων | αἱ προτάσεις αἶδε·  
τοῦ μὲν | πρώτου· ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν παρὰλληλόγραμμον  
ἔχον βάσιν | κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν | βάσεις ἔχων ἐν τοῖς  
10 ἀπεναντίον | τῶν παραλληλογράμμοις, τὰς | δὲ πλευρὰς ἐπὶ τῶν  
λοιπῶν τοῦ | πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διὰ τε | <τοῦ κέντρου  
τοῦ κύκλου,> | ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾷ πλευ-  
ρᾷ τοῦ τετραγώνου τοῦ | ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ | ἀ-  
χθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπὶ | πεδον ἀποτεμεῖ τμήμα ἀπὸ | τοῦ  
15 κυλίνδρου, ὃ ἐστι περιεχόμενον ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπιφα-  
νείας κυλίνδρου, ἐνὸς μὲν | τοῦ ἀχθέντος, ἐτέρου δέ, ἐν ᾧ ἡ |  
βάσις ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου, τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς με | ταξὺ τῶν  
εἰρημένων ἐπιπέδων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου  
τμήμα ἔκτον μέρος | ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος. | τοῦ δὲ ἐτέ-  
20 ρου θεωρήματος ἡ πρότασις ἦδε· ἐὰν εἰς κύβον κύλινδρος |  
ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων | πρὸς τοῖς κατεναντίον πα-  
ραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν | τῶν λοιπῶν τεσσά-  
Η 428 ρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ | ἄλλος κύλι-  
νδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις | πα-

Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων  
πρὸς Ἑρατοσθένη μέθοδος

Ἀρχιμήδης Ἑρατοσθένει εὖ πράττειν.

Σοῦ ἀπέστειλα πρό τινος μερικὰ ἐκ τῶν παρ' ἐμοῦ εὐρεθέντων θεωρημάτων ἀναγράφας τὰς ἐκφωνήσεις αὐτῶν καὶ λέγων νὰ προσπαθήσης νὰ εὕρης τὰς ἀποδείξεις των, τὰς ὁποίας προσωρινῶς δὲν εἶχον ἐξαγγείλει· ἦσαν δὲ τῶν ἀπεσταλμένων θεωρημάτων αἱ ἐκφωνήσεις αἱ ἐξῆς· τοῦ μὲν πρώτου· ἐὰν εἰς ὀρθὸν πρίσμα ἔχον βάσιν παραλληλόγραμμον ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὰς μὲν βάσεις εἰς τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμα, τὰς δὲ πλευρὰς (δηλ. τὰς 4 γεννητρίας) ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπέναντι ἐπιπέδου ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον θὰ τμήσῃ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμήμα, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἐνὸς μὲν τοῦ ἀχθέντος, ἄλλου δέ, ὅπου εἶναι ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου, ἡ ἐπιφάνεια δὲ τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι μετὰξὺ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμήμα εἶναι τὸ  $\frac{1}{6}$  τοῦ ὅλου πρίσματος. Τοῦ δὲ ἄλλου θεωρήματος ἡ ἐκφώνησις εἶναι ἡ ἐξῆς· ἐὰν εἰς κύβον ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὰς μὲν βάσεις εἰς τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμα, τὴν δὲ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐφαπτομένην τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων, ἐγγραφῇ δὲ καὶ ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον ἔχων τὰς μὲν βάσεις εἰς ἄλλα παραλληλόγραμμα,

ραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπι|φάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσά-  
 ρων | ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ πε|ριληφθὲν σχῆμα ὑπὸ  
 τῶν ἐπι|φανεῶν τῶν κυλίνδρων, ὃ ἐστίν | ἐν ἀμφοτέροις  
 τοῖς κυλίνδροις, | δῖμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου. συμ|βαίνει  
 5 δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα | διαφέρειν τῶν πρότερον εὗρη|μέ-  
 νων· ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχή|ματα, τὰ τε κωνοειδῆ καὶ | σφαι-  
 ροειδῆ καὶ τὰ τμήματα | <αὐτῶν, τῷ μεγέθει σχήμασι> |  
 κώνων καὶ κυλίνδρων συνε|κρίναμεν, ἐπιπέδοις δὲ περι|εχο-  
 μένῳ στερεῷ σχήματι οὐ|δὲν αὐτῶν ἴσον ἐὼν εὗρηται, | τού-  
 10 των δὲ τῶν σχημάτων τῶν | δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ἐπιφα-  
 νεί|αις κυλίνδρων ἕκαστον ἐνὶ τῶν | ἐπιπέδοις περιεχομένων  
 στερεῶν σχημάτων ἴσον εὐρίσκεται.

Τούτων δὴ τῶν θεωρημάτων | τὰς ἀποδείξεις ἐν τῷδε  
 τῷ βι|βλίῳ γράψας ἀποστελῶ σοι.

15 Ὅρων δέ σε, καθάπερ λέγω, σπου|δαῖον καὶ φιλοσοφίας  
 προεστῶ|τα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς | μαθήμασιν κατὰ  
 τὸ ὑποπίπτον | θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμα|σα γράψαι σοι  
 καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλί|ον ἐξορίσαι τρόπον τινὸς ἰδιό|τητα,  
 καθ' ὃν σοι παρεχόμενον | ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς | τὸ  
 20 δύνασθαι τινα τῶν ἐν τοῖς | μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν | μη-  
 χανικῶν. τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρή|σιμον εἶναι οὐδὲν ἥσσον καὶ  
 εἰς τὴν | ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρη|μάτων. καὶ γάρ τινα  
 τῶν πρότερον μοι φα|νέντων μηχανικῶς ὕστερον γε|ωμε-  
 τρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ | χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ  
 25 τούτου τοῦ | τρόπου θεωρίαν· ἐτοιμότερον γάρ | ἐστι προ-  
 λαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶ|σιν τινα τῶν ζητημάτων πο|ρί-  
 Η 430 σασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον | ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζη-  
 τεῖν. | < . . . . . διόπερ καὶ τῶν θεωρη|μάτων τούτων, ὧν

τὴν δὲ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐφαπτομένην τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων, τὸ περιληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων, τὸ ὅποῖον ἀνήκει εἰς ἀμφοτέρους τοὺς κυλίνδρους εἶναι τὰ  $\frac{2}{3}$  τοῦ ὅλου κύβου. Συμβαίνει δὲ τὰ θεωρήματα αὐτὰ νὰ διαφέρωσι τῶν προηγουμένως εὐρεθέντων· διότι ἐκεῖνα μὲν τὰ σχήματα, καὶ τὰ κωνοειδῆ καὶ τὰ σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα αὐτῶν συνεκρίναμεν κατὰ τὸ μέγεθος πρὸς σχήματα κώνων καὶ κυλίνδρων, οὐδὲν δὲ ἐξ αὐτῶν εὐρέθη ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων, ἐν ᾧ εὐρίσκεται τούτων τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἑκαστον ἴσον πρὸς ἓν ἐκ τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἐπιπέδων.

Τούτων λοιπῶν τῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις σοῦ ἀποστέλλω ἀναγράφας εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο.

Βλέπων δέ σε, ὡς ἔχω ἤδη εἶπει, σπουδαῖον καὶ ἀξιολόγως προεξάρχοντα κατὰ τὴν φιλοσοφίαν καὶ ἔχοντα τιμήσει τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν κατὰ τὴν περίστασιν, ἔκρινα ὀρθὸν νὰ σοῦ ἐκθέσω εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον καὶ νὰ καθορίσω μέθοδόν τινα, ἣ ὁποία θὰ σοῦ ἐπιτρέπη νὰ λαμβάνης ἀφορμάς, ὥστε νὰ δύνασαι μερικὰς μαθηματικὰς προτάσεις νὰ τὰς ἐξετάζῃς διὰ τῆς μηχανικῆς. Εἶμαι δὲ πεπεισμένος ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι ὀλιγώτερον χρήσιμον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν ἰδίων θεωρημάτων. Διότι καὶ μερικὰ ἐξ αὐτῶν, τὰ ὁποῖα προηγουμένως ἀπέδειξα διὰ τῆς μηχανικῆς, ἀπεδείχθησαν γεωμετρικῶς, διότι ἡ διὰ τοῦ τρόπου τῆς μηχανικῆς ἐξέτασις δὲν περιέχει (γεωμετρικὴν) ἀπόδειξιν· διότι εἶναι εὐκολώτερον, ἀφοῦ κανεῖς εὖρη διὰ τοῦ τρόπου τούτου (τῆς μηχανικῆς) γινῶσιν τινα τῶν ζητημάτων, νὰ εὖρη τὴν (γεωμετρικὴν) ἀπόδειξιν, παρὰ νὰ ἐρευνᾷ χωρὶς νὰ γνωρίζῃ προηγουμένως τίποτε . . . . ἔνεκα τοῦ ὁποίου καὶ διὰ τὰ θεωρήματα ταῦτα, τῶν ὁποίων ὁ Εὐ-

Εὐδοξος ἐξηύρη|κεν πρῶτος τὴν ἀποδείξιν, | περὶ τοῦ κῶνου  
καὶ τῆς πυραμίδος, | ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος | τοῦ  
κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ | πρίσματος, τῶν βάσιν ἐ-  
χόν|των τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ | μικρὰν ἀπονείμει ἄν  
5 τις Δημο|κρίτῳ μερίδα πρῶτῳ τὴν ἀ|πόφανσιν τὴν περὶ τοῦ  
εἰρημέ|ρου σχήματος χωρὶς ἀποδείξε|ως ἀποφηναμένων.  
ἡμῖν δὲ | συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδο|μένου θεωρήματος  
τὴν εὗρεσιν | ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι· | ἡβουλήθην  
δὲ τὸν τρόπον ἀνα|γράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μὲν | καὶ διὰ τὸ  
10 προειρηκέναι ὑπὲρ | αὐτοῦ, μὴ τισιν δοκῶμεν κενὴν | φωνὴν  
καταβεβλήσθαι, ἅμα | δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθη|μα  
οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρει|αν· ὑπολαμβάνω γάρ τινας  
ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ | τοῦ ἀποδειχθέντος τρό-  
που καὶ | ἄλλα θεωρήματα οὕτω ἡμῖν συμ|παραπεπτωκότα  
15 εὐρήσειν.

γράφομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶ|τον φανέν διὰ τῶν μη-  
χανικῶν, | ὅτι πᾶν τμήμα ὀρθογωνίου κώ|ρου τομῆς ἐπί-  
τρίτον ἐστὶν τρι|γώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν | αὐτὴν καὶ  
ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦ|το ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρό-  
20 που | θεωρηθέντων· ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βι|βλίου γράφομεν τὰς  
γεωμετρι|κὰς ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν > | <θεωρημάτων,  
ὧν τὰς προ>|τάσεις ἀπεστείλαμέν <σοι πρότερον>.

# ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους μέγεθος ἀ|φαιρεθῇ, <τὸ δὲ αὐτὸ ση-  
H 432 μεῖον κέν>|τρον τοῦ βάρους <ἢ τοῦ τε ὅλου> | καὶ τοῦ ἀφαι-  
ρουμένου, <τοῦ> | λοιποῦ τὸ αὐτὸ σημεῖον <κέντρον> | ἐστὶ  
τοῦ βάρους.

δοξος ἤρρε πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου (δηλαδή) καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι εἶναι τὸ ἐν τρίτον ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν ἔχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον, οὐχὶ μικρὸν μέρος πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν Δημόκριτον, ὁ ὅποιος πρῶτος ἐξήγγειλε τὴν ἐκφώνησιν περὶ τοῦ εἰρημέ-  
νου σχήματος χωρὶς ἀπόδειξιν. Εἰς ἐμὲ δὲ συνέβη καὶ τοῦ ἐκδι-  
δομένου τώρα θεωρήματος ἡ εὕρεσις νὰ ἔχῃ γίνει ὁμοία πρὸς τὰ  
προηγούμενα· ἤθελα δὲ ἀναγράψας τὴν μέθοδον νὰ δημοσιεύσω  
αὐτὴν, τὸ μὲν διότι ἔχω ὁμιλήσει προηγουμένως δι' αὐτὴν (εἰσαγ.  
εἰς τετραγ. παραβολῆς), διὰ νὰ μὴ φανῶμεν εἰς μερικοὺς ὅτι ἐκθέ-  
τομεν κενοὺς λόγους, τὸ δὲ διότι εἶμαι πεπεισμένος ὅτι προσφέρω  
ὄχι μικρὰν ὑπηρεσίαν εἰς τὰ μαθηματικά· διότι νομίζω ὅτι μερικοὶ  
ἐκ τῶν συγχρόνων μου ἢ ἐκ τῶν μεταγενεστέρων θὰ εὕρωσι καὶ  
ἄλλα θεωρήματα διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου, τὰ ὅποια δὲν ἔχω  
σκεφθῇ ἀκόμη.

Ἀναγράφομεν λοιπὸν πρῶτον τὸ καὶ πρῶτον ἀναφανέν (ἀπο-  
δειχθέν) διὰ τῆς μηχανικῆς, ὅτι πᾶν παραβολικὸν τμήμα εἶναι τὰ  
 $\frac{4}{3}$  τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ  
δὲ τοῦτο ἕκαστον θεώρημα ἐκ τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἐξετα-  
σθέντων· εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ βιβλίου ἀναγράφομεν τὰς γεωμετρικὰς  
ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων ἐκείνων, τῶν ὁποίων τὰς ἐκφωνήσεις  
σοῦ ἀπεστείλαμεν προηγουμένως.

#### ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ (Λήμματα)

1. Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους ἀφαιρεθῇ μέγεθος, τὸ αὐτὸ δὲ σημεῖον  
εἶναι κέντρον τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρου-  
μένου, τοῦ λοιποῦ θὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τὸ αὐτὸ σημεῖον.

- <Ἐὰν ἀπὸ μεγέ|θους μέγεθο(ς ἀφαιρεθῇ, ἧ δὲ) | μὴ τὸ  
 αὐτὸ σημείον κέντρον | τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου μεγέθους |  
 καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους, | τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βά-  
 ρους τοῦ | λοιποῦ μεγέθους ἐπὶ τῆς <εὐθείας> | τῆς ἐπιξευ-  
 5 γνουύσης τὰ κέντρα | τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου <καὶ> | <τοῦ  
 ἀφαιρουμέ|νου ἐκβεβλη|μένης καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐ|τῆς  
 πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν εἰρημέ|ρων κέντρων τοῦ βάρους τοῦ-  
 τον | ἐχούσης τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος | τοῦ ἀφηρημέ-  
 νου μεγέθους πρὸς | τὸ [λοιπὸν] βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους.  
 10 Ἐὰν ὁποσωνοῦν μεγεθέων τὸ κέν|τρον τοῦ βάρους ἐπὶ  
 τῆς αὐτῆς | εὐθείας ᾗ, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγ|κειμένου με-  
 γέθους τὸ κέντρον ἔσται | ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Πάσης | εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους | ἡ διχοτομία  
 τῆς εὐθείας.

- 15 Παντός | τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βά|ρους τὸ ση-  
 μεῖον, καθ' ὃ αἱ ἐκ τῶν | γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ μέσας | τὰς  
 πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι | τέμνουσιν ἀλλήλας.

Παντός πα|ραλληλογράμμου τὸ κέντρον ἐστὶν | <τοῦ βά-  
 ρους τὸ σημείον, καθ' ὃ αἱ | διάμετροι συμπίπτουσιν.

- 20 Κύκλου> | τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστίν, ὃ καὶ | <τοῦ κύ-  
 κλου> ἐστὶ κέντρον.

Παντός | κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους | ἐστὶν ἡ δι-  
 χοτομία τοῦ ἄξονος.

- Παν|τός πρίσματος τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ | βάρους ἡ δι-  
 25 χοτομία τοῦ ἄξονος.

- Η 434 Παν|τός κώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βά|ρους ἐπὶ τοῦ ἄ-  
 ξονος διαιρεθέντος | οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμη|μα  
 τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.

- Χρη|σόμεθα δὲ καὶ [ἐν τῷ προγεγραμ|μένῳ Κωνοειδῶν]  
 30 τῷδε τῷ θεωρή|ματι. Ἐὰν ὁποσασῶν μεγέθη ἄλ|λοις μεγέ-



2. Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους ἀφαιρεθῇ μέγεθος δὲν εἶναι δὲ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου, καὶ ἀφοῦ ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἐκβληθείσης (πρὸς τὸ μέρος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ὅλου μεγέθους) τοιοῦτον τμήμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ τμήμα τὸ μεταξὺ τῶν εἰρημένων κέντρων τοῦ βάρους, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφαιρεθέντος μεγέθους πρὸς τὸ [λοιπὸν] βάρος τοῦ λοιποῦ μεγέθους (Μηχανικὰ 1, 8).

3. Ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐκάστου ἐξ ὁσωνδήποτε μεγεθῶν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὸ κέντρον τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

4. Τὸ κέντρον τοῦ βάρους πάσης εὐθείας εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας.

5. Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

6. Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον ὅπου τέμνονται αἱ διαγώνιοι.

7. Κύκλου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ κύκλου.

8. Παντὸς κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος.

9. Παντὸς πρίσματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος.

10. Παντὸς κώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τμήμα νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ λοιποῦ.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν δὲ καὶ [ὡς εἰς τὸ προγεγραμμένον περὶ κωνοειδῶν (θεώρ. 1)] τὸ ἐξῆς θεώρημα· Ἐὰν ὁσαδήποτε μεγέθη

θεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος | κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον τὰ  
 δ|μοίως τεταγμένα, ἥ δὲ τὰ πρῶτα | μεγέθη πρὸς ἄλλα με-  
 γέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἥ τὰ | πάντα ἢ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ  
 ὕστε|ρον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν | τοῖς αὐ-  
 5 τοῖς λόγοις ἥ, πάντα τὰ | πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ | λε-  
 γόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, | ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον  
 πρὸς | πάντα τὰ λεγόμενα.

α'

Ἔστω | τμῆμα τὸ  $ABΓ$  περιεχόμενον | ὑπὸ εὐθείας τῆς  
 10  $ΑΓ$  καὶ ὀρθο|γωνίου κώνου τομῆς τῆς  $ABΓ$ , | καὶ τετμή-  
 σθω δίχα ἡ  $ΑΓ$  τῷ  $Δ$ , | καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ |  
 $ΔΒΕ$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΑΒ$ , |  $ΒΓ$ .

λέγω, ὅτι ἐπίτριστόν ἐστιν τὸ  $ABΓ$  | τμῆμα τοῦ  $ABΓ$  τρι-  
 γώνου.

15 ἤχθω|σαν ἀπὸ τῶν  $Α$ ,  $Γ$  σημείων ἡ μὲν |  $ΑΖ$  παρὰ τὴν  
 $ΔΒΕ$ , ἡ δὲ  $ΓΖ$  ἐπιπαύ|ουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκβεβλήσ|θω  
 ἡ  $ΓΒ$  ἐπὶ τὸ  $Κ$ , καὶ κείσθω τῇ  $ΓΚ$  | ἴση ἡ  $ΚΘ$ . νοείσθω  
 ζυγὸς ὁ  $ΓΘ$  καὶ | μέσον αὐτοῦ τὸ  $Κ$  καὶ τῇ  $ΕΔ$  πα|ράλληλος  
 τυχοῦσα ἡ  $ΜΕ$ .

Η 436 ἐπεὶ οὖν | παραβολὴ ἐστὶν ἡ  $ΓΒΑ$ , καὶ ἐφά|πτεται ἡ  
 $ΓΖ$ , καὶ τεταγμένως ἡ |  $ΓΔ$ , ἴση ἐστὶν ἡ  $ΕΒ$  τῇ  $ΒΔ$ .  
 τοῦτο γὰρ ἐν | τοῖς στοιχείοις δείκνυται· διὰ δὲ | τοῦτο,  
 καὶ διότι παράλληλοί εἰσιν | αἱ  $ΖΑ$ ,  $ΜΕ$  τῇ  $ΕΔ$ , ἴση  
 ἐστὶν καὶ ἡ | μὲν  $ΜΝ$  τῇ  $ΝΕ$ , ἡ δὲ  $ΖΚ$  τῇ  $ΚΑ$ . | καὶ  
 25 ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς ἡ  $ΓΑ$  πρὸς  $ΑΕ$ , οὕ|τως ἡ  $ΜΕ$  πρὸς  $ΕΟ$   
 [τοῦτο γὰρ ἐν | λήμματι δείκνυται], ὥς δὲ ἡ  $ΓΑ$  πρὸς |  $ΑΕ$ ,

μιάς σειρᾶς εἶναι ἀνὰ δύο ἀνάλογα πρὸς ὅσαδῆποτε μεγέθη ἄλλης σειρᾶς ἀντιστοιχῶς, εἶναι δὲ τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη (τρίτης σειρᾶς) εἰς οἵουσδῆποτε λόγους ἢ ὅλα ἢ μερικὰ ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ ὕστερον μεγέθη (τῆς δευτέρας σειρᾶς) εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους πρὸς ἄλλα μεγέθη (τετάρτης σειρᾶς) ἀντιστοιχῶς, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν πρῶτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τρίτων μεγεθῶν, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων μεγεθῶν (Περὶ κων. καὶ σφαιρ. 1).

1

Ἐστω τὸ τμήμα  $AB\Gamma$  περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τῆς  $A\Gamma$  καὶ τῆς παραβολῆς  $AB\Gamma$ , καὶ ἅς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἢ  $A\Gamma$  κατὰ τὸ  $\Delta$ , καὶ ἅς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ  $\Delta BE$ , καὶ ἅς ἀχθῶσιν αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$ .

Λέγω, ὅτι τὸ τμήμα  $AB\Gamma$  εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Ἐὰς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων  $A$ ,  $\Gamma$ , ἢ μὲν  $AZ$  παράλληλος πρὸς τὴν  $\Delta BE$ , ἢ δὲ  $\Gamma Z$  ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς, καὶ ἅς προεκβληθῇ ἢ  $\Gamma B$  πρὸς τὸ  $K$ , καὶ ἅς ληφθῇ ἢ  $K\Theta = \Gamma K$ . Ἐὰς νοηθῇ ζυγὸς ὁ  $\Gamma\Theta$  καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ  $K$  καὶ ἅς ἀχθῇ ἢ  $M\Xi$  τυχοῦσα παράλληλος πρὸς τὴν  $E\Delta$ .

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἢ  $\Gamma BA$  εἶναι παραβολή, καὶ ἢ  $\Gamma Z$  ἐφαπτομένη, καὶ τεταγμένη ἢ  $\Gamma\Delta$ , εἶναι ἢ  $EB = B\Delta$ · διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὰ Στοιχεῖα (Κωνικὰ Εὐκλείδου — Ἀρισταίου, ἀπολεσθέντα, Τετρ. παραβ. 2) ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου καὶ διότι αἱ  $ZA$ ,  $M\Xi$  εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν  $E\Delta$ , εἶναι ἢ μὲν  $MN = N\Xi$ , ἢ δὲ  $ZK = KA$  (Εὐκλ. V, 9. VI, 4). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἢ  $\Gamma A : A\Xi = M\Xi : \Xi O$  [διότι τοῦτο ἔχει δειχθῇ εἰς τὸ λῆμμα], ὡς δὲ ἢ  $\Gamma A : A\Xi =$

οὕτως ἡ  $ΓΚ$  πρὸς  $ΚΝ$ , καὶ ἴση | ἐστὶν ἡ  $ΓΚ$  τῇ  $ΚΘ$ , ὥς ἄρα  
 ἡ  $ΘΚ$  | πρὸς  $ΚΝ$ , οὕτως ἡ  $ΜΕ$  πρὸς  $ΕΟ$ . | καὶ ἐπεὶ τὸ  $N$  ση-  
 μεῖον κέντρον | τοῦ βάρους τῆς  $ΜΕ$  εὐθείας ἐστίν, | ἐπέιπερ  
 5 ἴση ἐστὶν ἡ  $MN$  τῇ  $NE$ , | ἐὰν ἄρα τῇ  $ΕΟ$  ἴσην θῶμεν τὴν  
 $ΤΗ$  | καὶ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ |  $Θ$ , ὅπως ἴση ἢ ἡ  
 $ΤΘ$  τῇ  $ΘΗ$ , ἰσορροπήσει ἡ  $ΤΘΗ$  τῇ  $ΜΕ$  αὐτοῦ με|νοῦσα  
 διὰ τὸ ἀντιπεπονθότως | τετμηθῆναι τὴν  $ΘΝ$  τοῖς  $ΤΗ$ ,  $ΜΕ$  |  
 βάρεσιν, καὶ ὥς τὴν  $ΘΚ$  πρὸς  $ΚΝ$ , | οὕτως τὴν  $ΜΕ$  πρὸς τὴν  
 $ΗΤ$ . ὥσ|τε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρους κέν|τρον ἐστὶν τοῦ  
 10 βάρους τὸ  $K$ . ὁμοί|ως δὲ καί, ὅσαι ἂν ἀχθῶσιν | ἐν τῷ  $ΖΑΓ$   
 τριγώνῳ παράλλη|λοι τῇ  $ΕΔ$ , ἰσορροπήσουσιν αὐ|τοῦ μέ-  
 νουσαι ταῖς ἀπολαμβα|νομέναις ἀπ' αὐτῶν ὑπὸ τῆς | τομῆς  
 μετενεχθείσαις ἐπὶ τὸ |  $\langle Θ$ , ὥστε εἶναι τοῦ ἐξ ἀμφοτέ|ρων  
 κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $K$ . | καὶ ἐπεὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ  $ΓΖΑ$  |  
 15 τριγώνῳ τὸ  $ΓΖΑ$  τρίγωνον συνέστηκεν, ἐκ δὲ τῶν | ἐν τῇ  
 τομῇ ὁμοίως τῇ  $ΕΟ$  λαμβανομένων συνέστηκε τὸ  $ΑΒΓ$  |  
 τμήμα, ἰσορροπήσει ἄρα τὸ |  $ΖΑΓ$  τρίγωνον αὐτοῦ μένον  
 τῷ | τμήματι τῆς τομῆς τεθέν|τι περὶ κέντρον τοῦ βάρους  
 τὸ  $Θ$  | κατὰ τὸ  $K$  σημεῖον, ὥστε τοῦ ἐ|ξ ἀμφοτέρων κέντρον  
 20 εἶναι | τοῦ βάρους τὸ  $K$ . τετμηθῶ δὴ | ἡ  $ΓΚ$  τῷ  $X$ , ὥστε  
 Η 438 τριπλασίαν | εἶναι τὴν  $ΓΚ$  τῆς  $KX$ . ἔσται ἄρα | τὸ  $X$  σημεῖον  
 κέντρον βάρους | τοῦ  $ΑΖΓ$  τριγώνου· δέδεικται γὰρ | ἐν τοῖς  
 Ἱσορροπικοῖς. ἐπεὶ οὖν ἰ|σόρροπον τὸ  $ΖΑΓ$  τρίγωνον αὐ|τοῦ  
 μένον τῷ  $ΒΑΓ$  τμήματι κατὰ | τὸ  $K$  τεθέντι περὶ τὸ  $Θ$  κέν-  
 25 τρον | τοῦ βάρους, καὶ ἐστὶν τοῦ  $ΖΑΓ$  τρι|γώνου κέντρον  
 βάρους τὸ  $X$ , ἔστιν | ἄρα, ὥς τὸ  $ΑΖΓ$  τρίγωνον πρὸς |  
 τὸ  $ΑΒΓ$  τμήμα κείμενον περὶ τὸ |  $Θ$  κέντρον, οὕτως ἡ  $ΘΚ$   
 πρὸς  $ΧΚ$ . | τριπλασία δὲ ἐστὶν ἡ  $ΘΚ$  τῆς  $KX$ . τρι|πλάσιον ἄρα  
 καὶ τὸ  $ΑΖΓ$  τρίγωνον | τοῦ  $ΑΒΓ$  τμήματος. ἔστι δὲ καὶ |

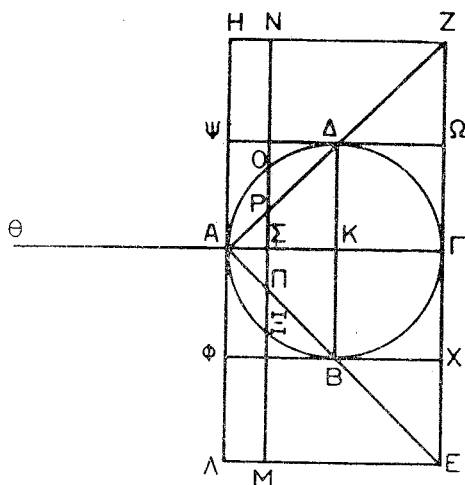
$\Gamma\text{Κ} : \text{ΚΝ}$  (Εὐκλ. V, 18. VI, 2), καὶ εἶναι ἡ  $\Gamma\text{Κ} = \text{ΚΘ}$ , εἶναι ἄρα ἡ  $\Theta\text{Κ} : \text{ΚΝ} = \text{ΜΕ} : \text{ΕΟ}$ . Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ν εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τῆς εὐθείας ΜΕ (Λήμμα 4), διότι εἶναι ἡ  $\text{ΜΝ} = \text{ΝΕ}$ , ἐὰν ἄρα λάβωμεν πρὸς τὴν ΕΟ ἴσην τὴν ΤΗ καὶ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ Θ, διὰ νὰ εἶναι ἡ  $\text{ΤΘ} = \Theta\text{Η}$ , θὰ ἰσορροπήσῃ ἡ  $\text{ΤΘΗ}$  πρὸς τὴν ΜΕ μένουσαν αὐτοῦ, διότι ἡ ΘΝ τέμνεται εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὑπὸ τῶν βαρῶν ΤΗ, ΜΕ, καὶ εἶναι ὡς ἡ  $\Theta\text{Κ} : \text{ΚΝ} = \text{ΜΕ} : \text{ΗΤ}$  (Μηχανικὰ 1, 6 - 7). ὥστε τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο εἶναι τὸ Κ (Λήμμα 3). Ὅμοιως δὲ καὶ ὅσαι παράλληλοι καὶ ἀν' ἀχθῶσιν εἰς τὸ τρίγωνον ΖΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, θὰ ἰσορροπήσωσιν αὐτοῦ μένουσαι πρὸς τὰς εὐθείας τὰς λαμβανομένας ἀπὸ τῆς παραβολῆς (μέχρι τῆς ΑΓ) καὶ μεταφερομένας εἰς τὸ Θ, ὥστε τὸ κέντρον βάρους τοῦ (ἐκάστοτε) ἀθροίσματος τῶν δύο εἶναι τὸ Κ. Καὶ ἐπειδὴ ἐκ μὲν τῶν παραλλήλων τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΖΑ ἀποτελεῖται τὸ τρίγωνον ΓΖΑ, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῇ παραβολῇ ὁμοίως πρὸς τὴν ΕΟ λαμβανομένων ἀποτελεῖται τὸ παραβολικὸν τμήμα ΑΒΓ, θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΑΓ, αὐτοῦ μένον, πρὸς τὸ παραβολικὸν τμήμα τεθὲν μετὰ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εἰς τὸ Θ, ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον Κ, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο νὰ εἶναι τὸ Κ. Ἄς τμηθῇ τῶρα ἡ ΓΚ κατὰ τὸ Χ, ὥστε νὰ εἶναι  $\Gamma\text{Κ} = 3\text{ΚΧ}$ . θὰ εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Χ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΖΓ· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὰ Ἱσορροπικὰ (Λήμμα 5 καὶ Μηχανικὰ 1, 15 καὶ 2, 5). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΖΑΓ, αὐτοῦ μένον, ἰσορροπεῖ τὸ παραβολικὸν τμήμα ΒΑΓ τεθὲν μετὰ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εἰς τὸ Θ, ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον Κ, καὶ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΖΑΓ τὸ Χ, εἶναι ἄρα, ὡς τὸ τρίγωνον ΑΖΓ : παραβολικὸν τμήμα ΑΒΓ, κείμενον εἰς τὸ κέντρον βάρους Θ = ἡ  $\Theta\text{Κ} : \text{ΧΚ}$ . Εἶναι δὲ ἡ  $\Theta\text{Κ} = 3\text{ΚΧ}$ . εἶναι ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΓ τριπλάσιον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ΑΒΓ. Εἶναι δὲ καὶ

τὸ  $Z\Lambda\Gamma$  τρίγωνον τετραπλάσιον | τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου διὰ τὸ  
 ἴσην εἶναι | τὴν μὲν  $ZK$  τῇ  $KA$ , τὴν δὲ  $AA$  τῇ |  $\Delta\Gamma$ . ἐπί-  
 τριτον ἄρα ἐστὶν τὸ  $AB\Gamma$  τμῆ|μα τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου. [τοῦτο  
 οὖν | φανερόν ἐστιν].

- 5    Τοῦτο δὲ διὰ μὲν τῶν νῦν εἰρημένων | οὐκ ἀποδέδεικται,  
 ἔμφασιν δέ | τινα πεποιήκε τὸ συμπέρασμα | ἀληθὲς εἶναι·  
 διόπερ ἡμεῖς ὁ|ρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμέ|νον, ὑπονοοῦν-  
 τες δὲ τὸ συμπέ|ρασμα ἀληθὲς εἶναι, τάξο|μεν τὴν γεωμε-  
 τρουμένην ἀ|πόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν | ἐκδοθεῖσαν  
 10    πρότερον.

$\beta'$

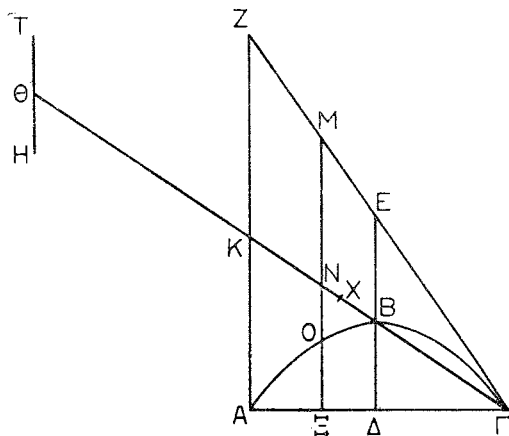
Ὅτι δὲ πᾶ|σα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ | κώνου  
 τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος | ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν | τῇ



- σφαῖρα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ | κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ  
 15    ὁ κύλιν|δρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ | μεγίστῳ κύκλῳ τῶν

τὸ τρίγωνον ΖΑΓ τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι εἶναι ἡ μὲν ΖΚ = ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ = ΔΓ· εἶναι ἄρα τὸ παραβολικὸν τμήμα τὰ  $\frac{4}{3}$  τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. [Τοῦτο λοιπὸν εἶναι φανερόν].

Ἀλλὰ τοῦτο διὰ μὲν τῶν λεχθέντων τώρα δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ (γεωμετρικῶς), παρέχει δὲ κάποιαν ἔνδειξιν, ὅτι τὸ συμπέρασμα



εἶναι ἀληθές· διὰ τὸν λόγον τοῦτον βλέποντες μὲν ὅτι δὲν εἶναι ἀποδεδειγμένον, γνωρίζοντες ὅμως ὅτι τὸ συμπέρασμα εἶναι ἀληθές, θὰ παραθέσωμεν τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν, τὴν ὁποίαν ἠύρομεν ἡμεῖς καὶ ἐδημοσιεύσαμεν προηγουμένως (Σημ. Ἐννοεῖ τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τοῦ τετραγ. παραβολῆς, ἥ ὁποία εἰς τὸν παλίμψηστον δὲν ὑπῆρχε).

## 2

“Οτι δὲ πᾶσα σφαῖρα εἶναι τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον

ἐν τῇ σφαίρᾳ, | ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαί|ρας, ἡμιό-  
λιος τῆς σφαίρας ἐστίν, | ὥδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε·

- Ἔστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ἣ ἡ μέγιστος | κύκλος ὁ  $ΑΒΓΔ$ ,  
 Η 440 διάμετροι δὲ αἱ |  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὗ|σαι, ἔστω  
 5 δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαί|ρᾳ περὶ διάμετρον τὴν  $ΒΔ$  ὀρθὸς | πρὸς  
 τὸν  $ΑΒΓΔ$  κύκλον, καὶ ἀπὸ | τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶ-  
 νος ἀναγε|γράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ  $Α$  ση|μεῖον, καὶ ἐκβλη-  
 θείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπι|πέδῳ  
 διὰ τοῦ  $Γ$  παρὰ τὴν βάσιν· | <ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς> |  
 10 τὴν  $ΑΓ$ , καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ  $ΕΖ$ . | ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου  
 τούτου κύλινδρος | ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ |  $ΑΓ$  ἴσον,  
 πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίν|δρου αἱ  $ΕΛ$ ,  $ΖΗ$ · καὶ ἐκβε-  
 βλήσθω | ἡ  $ΓΑ$ , καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ  $ΑΘ$ , καὶ | νοείσθω ζυ-  
 γὸς ὁ  $ΓΘ$ , μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ  $Α$ , καὶ ἦχθω τις παραλλήλος  
 15 ὑ|πάρχουσα τῇ  $ΒΔ$  ἡ  $ΜΝ$ , τεμνέτω | δὲ αὕτη τὸν μὲν  $ΑΒΓΔ$   
 κύκλον κατὰ | τὰ  $Ξ$ ,  $Ο$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  διάμετρον κατὰ τὸ  $Σ$ , |  
 τὴν δὲ  $ΑΕ$  εὐθείαν κατὰ τὸ  $Π$ , τὴν | δὲ  $ΑΖ$  κατὰ τὸ  $Ρ$ ,  
 καὶ ἀπὸ τῆς  $ΜΝ$  | εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς  
 τὴν  $ΑΓ$ · ποιήσει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | <κύ-  
 20 κλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ  $ΜΝ$ , | ἐν δὲ τῇ  $ΑΒΓΔ$  σφαίρᾳ> |  
 κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ  $ΞΟ$ , ἐν | δὲ τῷ  $ΑΕΖ$  κώνῳ κύ-  
 κλον, οὗ ἔσται δι|άμετρος ἡ  $ΠΡ$ .

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ | ὑπὸ  $ΓΑ$ ,  $ΑΣ$  τῷ ὑπὸ  $ΜΣ$ ,  $ΣΠ$ · ἴση  
 γάρ | ἡ μὲν  $ΑΓ$  τῇ  $ΣΜ$ , ἡ δὲ  $ΑΣ$  τῇ  $ΠΣ$ · τῷ δὲ | ὑπὸ  $ΓΑ$ ,  $ΑΣ$   
 25 ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ  $ΑΞ$ , τοντέστιν τὰ ἀπὸ  $ΞΣ$ ,  $ΣΠ$ , ἴσον ἄρα  
 τὸ ὑ|πὸ τῶν  $ΜΣ$ ,  $ΣΠ$  τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΞΣ$ ,  $ΣΠ$ . | καὶ ἐπεὶ ἐστὶν,  
 ὡς ἡ  $ΓΑ$  πρὸς  $ΑΣ$ , οὕτως ἡ |  $ΜΣ$  πρὸς  $ΣΠ$ , ἴση δὲ ἡ  $ΓΑ$   
 τῇ  $ΑΘ$ , ὡς ἄρα | ἡ  $ΘΑ$  πρὸς  $ΑΣ$ , ἡ  $ΜΣ$  πρὸς  $ΣΠ$ , τοντέστι  
 τὸ ἀπὸ |  $ΜΣ$  πρὸς τὸ ὑπὸ  $ΜΣ$ ,  $ΣΠ$ . τῷ δὲ ὑπὸ  $ΜΣ$ , |  $ΣΠ$   
 30 ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ  $ΞΣ$ ,  $ΣΠ$ · ὡς ἄρα | ἡ  $ΑΘ$  πρὸς  $ΑΣ$ , οὕτως



πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, εἶναι τὰ τρία δεύτερα τῆς σφαίρας, ἐξετάζονται ἐδῶ κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον·

Διότι ἔστω σφαῖρά τις, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ κάθετοι μεταξύ των αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἔστω δὲ κύκλος εἰς τὴν σφαῖραν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κάθετος πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ καθέτου τούτου κύκλου ἄς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἄς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Γ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν κύκλον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ διάμετρος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ΕΖ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου ἄς ἀναγραφῇ κύλινδρος ἔχων ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν ΑΓ, ἔστωσαν δὲ πλευραὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἄς ἐκβληθῇ ἡ ΓΑ, καὶ ἄς ληφθῇ ΓΑ = ΑΘ, καὶ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἄς ἀχθῇ παράλληλός τις πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΜΝ, ἄς τέμνῃ δὲ αὕτη τὸν μὲν κύκλον ΑΒΓΔ κατὰ τὰ Ε, Ο, τὴν δὲ διάμετρον ΑΓ κατὰ τὸ Σ, τὴν δὲ εὐθεῖαν ΑΕ κατὰ τὸ Π, τὴν δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΜΝ ἄς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ΜΝ, εἰς δὲ τὴν ΑΒΓΔ σφαῖραν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ΕΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον ΑΕΖ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΓΑ × ΑΣ = ὀρθογ. ΜΣ × ΣΠ· διότι εἶναι ἡ μὲν ΑΓ = ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ = ΠΣ (Εὐκλ. VI, 4)· τὸ δὲ ΓΑ × ΑΣ = ΑΕ<sup>2</sup> (Εὐκλ. VI, 8 πρόρ.), τουτέστιν = ΕΣ<sup>2</sup> + ΣΠ<sup>2</sup> (Εὐκλ. I, 47), εἶναι ἄρα τὸ ΜΣ × ΣΠ = ΕΣ<sup>2</sup> + ΣΠ<sup>2</sup>. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὥς ἡ ΓΑ : ΑΣ = ΜΣ : ΣΠ, εἶναι δὲ ἡ ΓΑ = ΑΘ, θὰ εἶναι ἄρα ὥς ἡ ΘΑ : ΑΣ = ΜΣ : ΣΠ, τουτέστιν = ΜΣ<sup>2</sup> = ΜΣ × ΣΠ. Πρὸς δὲ τὸ ΜΣ × ΣΠ ἐδείχθη ἴσον τὸ ἄθροισμα

- Η 442 τὸ ἀπὸ  $ΜΣ$  πρὸς τὰ | ἀπὸ  $ΞΣ$ ,  $ΣΠ$ . ὥς δὲ τὸ ἀπὸ  $ΜΣ$  πρὸς  
τὰ | ἀπὸ  $ΞΣ$ ,  $ΣΠ$ , οὕτως τὸ ἀπὸ  $ΜΝ$  πρὸς τὰ | ἀπὸ  $ΞΟ$ ,  $ΠΡ$ ,  
ὥς δὲ τὸ ἀπὸ  $ΜΝ$  πρὸς τὰ | ἀπὸ  $ΞΟ$ ,  $ΠΡ$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ  
ἐν τῷ | κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ  $ΜΝ$ , πρὸς | ἄμφοτέρους  
5 τοὺς κύκλους τὸν τε | ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ  $ΠΡ$ , > | καὶ  
τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστὶν διά|μετρος ἡ  $ΞΟ$ . ὥς ἄρα ἡ  $ΘΑ$   
πρὸς  $ΑΣ$ , οὕτως | ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς | κυ-  
κλους τὸν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ | τὸν ἐν τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν,  
ὥς ἡ  $ΘΑ$  | πρὸς  $ΑΣ$ , οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ὁ ἐν | τῷ κυλίν-  
10 δρῳ αὐτοῦ μένων ἀμφο|τέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διά-  
με|τροι αἱ  $ΞΟ$ ,  $ΠΡ$ , μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ  
 $Θ$ , ὥστε ἐκατέρου | αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ |  $Θ$ ,  
ἰσορροπήσουσι κατὰ τὸ  $A$  σημει|ον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται,  
καὶ ἐὰν ἄλ|λη ἀχθῇ ἐν τῷ  $ΛΖ$  παραλληλογράμ|μῳ παρὰ τὴν  
15  $ΕΖ$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀ|χθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν | πρὸς  
τὴν  $ΑΓ$ , ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν | τῷ κυλίνδρῳ ἰσορρο-  
πήσει πε|ρὶ τὸ  $A$  σημεῖον αὐτοῦ μένων ἀμ|φοτέροις τοῖς κύ-  
κλοις τῷ τε | ἐν τῇ σφαίρᾳ γινομένῳ καὶ τῷ | ἐν τῷ κώνῳ  
μετενεχθεῖσι καὶ τε|θεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $Θ$  οὕτως,  
20 | ὥστε ἐκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ  $Θ$ .  
συμπληρω|θέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν | ληφθέντων  
κύκλων καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει | ὁ κύ-  
λινδρος περὶ τὸ  $A$  σημεῖον αὐ|τοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ  
| τε σφαίρᾳ καὶ τῷ κώνῳ μετενε|χθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ  
25 ζυγοῦ κατὰ | τὸ  $Θ$ , ὥστε ἐκατέρου αὐτῶν κέντρον | εἶναι  
τοῦ βάρους τὸ  $Θ$ . ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ | τὰ εἰρημένα στερεὰ  
κατὰ τὸ  $A$  ση|μεῖον τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέν-  
Η 444 τρον | τοῦ βάρους τὸ  $K$ , τῆς δὲ σφαίρας καὶ | τοῦ κώνου με-  
τενηνεγμένων, ὥς | εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ  $Θ$ , | ἔ-

$\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$ · θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ  $A\Theta : A\Sigma = M\Sigma^2 : (\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2)$ .  
 Εἶναι δὲ ὡς  $M\Sigma^2 : (\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2) = MN^2 : (\Xi O^2 + \Pi P^2)$  (Εὐκλ.  
 V, 15), ὡς δὲ τὸ  $MN^2 : (\Xi O^2 + \Pi P^2)$  οὕτως ὁ κύκλος ὁ εἰς τὸν  
 κύλινδρον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $MN$  (πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν  
 δύο κύκλων, καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  
 $\Pi P$ ), καὶ πρὸς τὸν εἰς τὴν σφαῖραν, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  
 $\Xi O$  (Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ  $\Theta A : A\Sigma$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ  
 εἰς τὸν κύλινδρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κύκλων καὶ τὸν εἰς τὴν  
 σφαῖραν καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ  $\Theta A : A\Sigma$ ,  
 οὕτως ὁ αὐτὸς κύκλος ὁ εἰς τὸν κύλινδρον, αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς  
 δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ  $\Xi O$ ,  $\Pi P$ , ὅταν μετα-  
 φερθῶσι καὶ τεθῶσι κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς τὸ  $\Theta$ , ὥστε κέντρον  
 τοῦ βάρους ἐκάστου ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ , θὰ ἰσορροπήσωσι κατὰ  
 τὸ σημεῖον  $A$ . Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἀχθῇ εἰς  
 τὸ παραλληλόγραμμον  $AZ$  ἄλλη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν  $EZ$ ,  
 καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ὑψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $AG$ , ὅτι ὁ  
 γενόμενος κύκλος εἰς τὸν κύλινδρον θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον  
 $A$ , αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς δύο κύκλους καὶ τὸν εἰς τὴν σφαῖραν  
 γινόμενον καὶ πρὸς τὸν εἰς τὸν κῶνον, ἀφοῦ μεταφερθῶσι καὶ τε-  
 θῶσι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥστε ἐκάστου ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι  
 κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ . Συμπληρωθέντος λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου  
 ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κῶνου θὰ  
 ἰσορροπήσῃ ὁ κύλινδρος περὶ τὸ  $A$  σημεῖον, αὐτοῦ μένων, καὶ τοὺς  
 δύο κύκλους καὶ τὸν εἰς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον, ἀφοῦ  
 μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ, κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥστε ἐκάστου  
 ἐξ αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ  
 προηγουμένως λεχθέντα στερεὰ ἰσορροποῦσι κατὰ τὸ σημεῖον  $A$ ,  
 τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $K$ , τῆς δὲ  
 σφαίρας καὶ τοῦ κῶνου μεταφερθέντων, ὡς ἐλέχθη, περὶ κέντρον  
 βάρους τὸ  $\Theta$ , θὰ εἶναι ὡς ἡ  $\Theta A : AK$ , οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὴν

σται, ὥς ἡ  $\Theta A$  πρὸς  $AK$ , οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὴν  
σφαῖραν καὶ τὸν κῶνον. διπλασία δὲ ἡ  $\Theta A$  τῆς  $AK$ . δι-  
πλασίῳ ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος συναμφοτέρου τῆς τε σφαί-  
ρας καὶ τοῦ κώνου. αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλασίῳ ἐστὶ·  
5 τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυοῖν κώνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυοῖν  
σφαῖραις. κοινοὶ ἀφηρέσθωσαν δύο κῶνοι· εἷς ἄρα κῶνος  
ὁ ἔχων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ  $AEZ$  ἴσος ἐστὶ ταῖς  
εἰρημέναις δυοῖν σφαῖραις. ὁ δὲ κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος  
τρίγωνον τὸ  $AEZ$ , ἴσος ἐστὶν ὀκτῶ κώνοις, ὧν ἐστὶ τὸ διὰ  
10 τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ  $AB\Delta$ , διὰ τὸ διπλῆν εἶναι τὴν  
 $EZ$  τῆς  $B\Delta$ . οἱ ἄρα ὀκτῶ κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ δυοῖν  
σφαῖραις. τετραπλασίῳ ἄρα ἐστὶν ἡ σφαῖρα, ἥς μέγιστος  
κύκλος ὁ  $AB\Gamma\Delta$ , τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μὲν ἐστὶ τὸ  $A$  ση-  
μεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν  $B\Delta$  κύκλος ὀρθὸς ὧν  
15 πρὸς τὴν  $ΑΓ$ .

ἤχθωσαν δὴ διὰ τῶν  $B, \Delta$  σημείων ἐν τῷ  $AZ$  παραλλη-  
λογράμῳ τῇ  $ΑΓ$  παράλληλοι αἱ  $\Phi B X, \Psi \Delta \Omega$ , καὶ νοεί-  
σθω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς  $\Phi \Psi$ ,  
 $X \Omega$  κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ  $ΑΓ$ . ἐπεὶ οὖν διπλασίος ἐστὶν ὁ κύλιν-  
20 δρος, οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ  $\Phi \Omega$ ,  
τοῦ κυλίνδρου, ὅσον ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλό-  
γραμμον τὸ  $\Phi \Delta$ , αὐτὸς δὲ ὅστος τριπλασίῳ ἐστὶν τοῦ κώ-  
νου, ὅσον ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ  $AB\Delta$ , ὥς  
ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἕξαπλασίῳ ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστὶ τὸ  
25 διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ  $\Phi \Omega$ , τοῦ κώνου, οὗ  
τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ  $AB\Delta$ . | ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ  
H 446 κώνου τετραπλασία οὔσα ἡ σφαῖρα, ἥς μέγιστός ἐστιν  
κύκλος ὁ  $AB\Gamma\Delta$ . | ἡμιόλιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῆς σφαίρας·  
ὅπερ ἔδει δειχθῆναι. |

σφαῖραν καὶ τὸν κῶνον (Μηχανικά 1, 6 - 7). Εἶναι δὲ ἡ  $\Theta\Lambda = 2\Lambda\text{Κ}$ · εἶναι ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος διπλάσιος τοῦ ἀθροίσματος τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου. Τοῦ κώνου δὲ αὐτοῦ εἶναι ὁ κύλινδρος τριπλάσιος (Εὐκλ. XII, 10)· τρεῖς ἄρα κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο κώνους, τοὺς αὐτοὺς, καὶ πρὸς δύο σφαίρας. Ἄς ἀφαιρεθῶσι ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος δύο κῶνοι· εἶναι ἄρα εἰς κῶνος ὁ ἔχων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον  $\Lambda\text{ΕΖ}$  ἴσος πρὸς τὰς εἰρημένας δύο σφαίρας. Ὁ δὲ κῶνος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον  $\Lambda\text{ΕΖ}$ , εἶναι ἴσος πρὸς ὀκτῶ κώνους, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀνήκει τὸ τρίγωνον  $\Lambda\text{ΒΔ}$ , διότι εἶναι  $\text{ΕΖ} = 2\text{ΒΔ}$ . Οἱ εἰρημένοι ἄρα ὀκτῶ κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο σφαίρας. Εἶναι ἄρα ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ  $\text{ΑΒΓΔ}$ , τετραπλασία τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφή μὲν εἶναι τὸ σημεῖον  $\Lambda$ , βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον  $\text{ΒΔ}$  κύκλος ὁ κάθετος ἐπὶ τὴν  $\text{ΑΓ}$ .

Ἄς ἀχθῶσι τῶρα διὰ τῶν σημείων  $\text{Β}$ ,  $\Delta$  εἰς τὸ παραλληλόγραμμον  $\Lambda\text{Ζ}$ , αἱ  $\text{ΦΒΧ}$ ,  $\Psi\Delta\Omega$ , παράλληλοι πρὸς τὴν  $\text{ΑΓ}$ , καὶ ἄς νοηθῇ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσεις μὲν εἶναι αἱ περὶ τὰς διαμέτρους  $\text{ΦΨ}$ ,  $\text{ΧΩ}$  κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ  $\text{ΑΓ}$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύλινδρος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον  $\text{ΦΩ}$  εἶναι διπλάσιος τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον  $\text{ΦΔ}$ , ὁ ἴδιος δὲ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον  $\Lambda\text{ΒΔ}$ , ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ Στοιχεῖα (Εὐκλ. XII, 10), εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον  $\text{ΦΩ}$ , ἑξαπλάσιος τοῦ κώνου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον  $\Lambda\text{ΒΔ}$ . Ἐδείχθη δὲ ὅτι τοῦ αὐτοῦ κώνου εἶναι τετραπλασία ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ  $\text{ΑΒΓΔ}$ · εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος τὰ τρία δεῦτερα τῆς σφαίρας· πρᾶγμα, ὅπερ ἔπρεπε νὰ δευχθῇ.

Τούτου τεθεωρημένον, διότι πᾶ|σα σφαῖρα τετραπλασία  
 ἐστὶ τοῦ | κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν | μέγιστον κύ-  
 κλον, ὕψος δὲ ἴσον | τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, | ἡ  
 ἔννοια ἐγένετο, ὅτι πάσης σφαί|ρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία  
 5 ἐστὶ | τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαί|ρα· ὑπόληψις  
 γὰρ ἦν, καὶ διότι πᾶς κύκλος | ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν  
 μὲν ἔχον|τι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ  
 ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, | καὶ διότι πᾶ|σα σφαῖρα | ἴση  
 ἐστὶ κώ|ρω τῷ βά|σιν μὲν ἔχον|τι τὴν ἐπι|φάνειαν τῆς | σφαί-  
 10 ρας, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ ἐκ | τοῦ κέντρου | τῆς σφαίρας.

γ'

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου | <καί, ὅτι ὁ κύλιν-  
 δρος ὁ τὴν μὲν βάσιν > | ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν |  
 ἐν τῷ σφαιροειδεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῷ | ἄξονι τοῦ σφαιροει-  
 15 δοῦς, ἡμιόλιός ἐστι | τοῦ σφαιροειδοῦς· | τούτου δὲ θεωρη-  
 θέντος φανερόν, ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς ἐπιπέδῳ τμηθέντος  
 δι|ὰ τοῦ κέντρου ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄ|ξονα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαι-  
 ροειδοῦς δι|πλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν | μὲν ἔχοντος  
 τὴν αὐτὴν τῷ τμή|ματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.  
 20 ἔστω γάρ τι | σφαιροειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέ|δῳ διὰ  
 τοῦ ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐν | τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ὀξυγω-  
 νίον | κώνου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ | αὐτῆς ἔστωσαν  
 αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον | δὲ τὸ Κ, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῷ σφαι|ρο-  
 Η 448 ειδεῖ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθ|ὸς πρὸς τὴν ΑΓ, ροείσθω  
 25 δὲ κῶνος βά|σιν ἔχων τὸν εἰρημένον κύκλον, κο|ρυφὴν δὲ

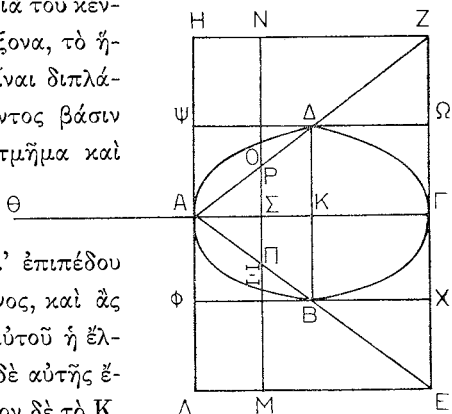
## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου, ὅτι πᾶσα σφαῖρα εἶναι τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἤχθην εἰς τὸ συμπέρασμα (τὴν σκέψιν), ὅτι ἡ ἐπιφάνεια πάσης σφαίρας εἶναι τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου, ἐκ τῶν τῆς σφαίρας· διότι ἀνεχώρησα ἐκ τῆς σκέψεως, ὅτι πᾶς κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, καὶ ὅτι πᾶσα σφαῖρα εἶναι ἴση πρὸς κῶνον ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

## 3

Διὰ τοῦ τρόπου δὲ τούτου ἐξετάζεται καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων τὴν μὲν βάσιν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον ἐκ τῶν εἰς τὸ σφαιροειδὲς (ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς), ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ σφαιροειδοῦς, εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ σφαιροειδοῦς· τούτου δὲ ἐξετασθέντος εἶναι φανερόν, ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς τμηθέντος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, καθεύτου πρὸς τὸν ἄξονα, τὸ ἡμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Διότι ἔστω σφαιρο-  
ειδές τι καὶ ὥς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου  
διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ὥς  
γίνῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἡ ἑλ-  
λειψις ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτῆς ἑ-  
στώσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ,  
ἔστω δὲ κύκλος εἰς τὸ σφαιροειδές περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κάθετος  
ἐπὶ τὴν ΑΓ, ὥς νοηθῇ δὲ κῶνος ἔχων βάσιν τὸν εἰρημένον κύκλον,



τὸ  $A$  σημείον, καὶ ἐκβλη|θείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τε-  
 τ|μήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ  $|Γ$  παρὰ τὴν βάσιν· ἔσται  
 δὴ ἡ τομὴ  $|$  αὐτοῦ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὴν  $ΑΓ$ , διὰ|μετρος  
 δὲ αὐτοῦ ἡ  $EZ$ . ἔστω δὲ καὶ κύ|λινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν  
 5 αὐτὸν  $|$  κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ  $EZ$ , ἄξονα  $|$  δὲ τὴν  $ΑΓ$  εὐ-  
 θεϊαν, καὶ ἐκβληθείσης  $|$  τῆς  $ΓΑ$  κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ  $ΑΘ$ ,  
 καὶ νο|είσθω ζυγὸς ὁ  $ΘΓ$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $|Α$ , ἡχθὼ δέ τις  
 ἐν τῷ  $ΛΖ$  παραλλη|λογράμμῳ παρὰ τὴν  $EZ$  ἡ  $MN$ , καὶ  $|$  ἀπὸ  
 τῆς  $MN$  ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὁρ| $\langle$ θὸν πρὸς τὴν  $ΑΓ$ · ποιήσει  
 10 δὴ τοῦτο ἐν  $\rangle$   $|$  μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον,  $|$  οὗ διά-  
 μετρος ἡ  $MN$ , ἐν δὲ τῷ σφαιρο|ειδεῖ τομὴν κύκλον, οὗ διά-  
 μετρος ἡ  $ΕΟ$ , ἐν δὲ τῷ  $|$  κώνῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος  $|$   
 ἡ  $ΠΡ$ .

καὶ ἐπεὶ ἔστιν, ὥς ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΣ$ ,  $|$  οὕτως ἡ  $ΕΑ$   
 15 πρὸς  $ΑΠ$ , τοντέστιν ἡ  $ΜΣ$  πρὸς  $|$  τὴν  $ΣΠ$ , ἴση δὲ ἡ  $ΓΑ$   
 τῇ  $ΑΘ$ , ὥς ἄρα ἡ  $|ΘΑ$  πρὸς  $ΑΣ$ , οὕτως ἡ  $ΜΣ$  πρὸς  $ΣΠ$ . ὥς  
 δὲ ἡ  $|ΜΣ$  πρὸς  $ΣΠ$ , οὕτως τὸ ἀπὸ  $ΜΣ$  πρὸς τὸ ὑπὸ  $ΜΣ$ ,  $|$   
 $ΣΠ$ · τῷ δὲ ὑπὸ  $ΜΣ$ ,  $ΣΠ$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $|ΠΣ$ ,  $ΣΕ$ . ἐπεὶ  
 γάρ ἐστιν, ὥς τὸ ὑπὸ  $ΑΣ$ ,  $ΣΓ$   $|$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $ΣΕ$ , οὕτως τὸ  
 20 ὑπὸ  $ΑΚ$ ,  $ΚΓ$ ,  $|$  τοντέστιν τὸ ἀπὸ  $ΑΚ$ , πρὸς τὸ ἀπὸ  $ΚΒ$   $|$   
 $[$ ἀμφοτέρω γὰρ οἱ λόγοι ἐν τῷ τῆς  $|$  πλαγίας πρὸς τὴν  
 ὀρθίαν εἰσίν $]$ , ὥς  $|$  δὲ τὸ ἀπὸ  $ΑΚ$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $ΚΒ$ , οὕτως  
 τὸ ἀπὸ  $ΑΣ$   $|$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $ΣΠ$ , ἐναλλάξ ἄρα ἔσται, ὥς τὸ  $|$   
 Η 450 ἀπὸ  $ΑΣ$  πρὸς τὸ ὑπὸ  $ΑΣΓ$ , τὸ ἀπὸ  $ΠΣ$   $|$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $ΣΕ$ . ὥς  
 25 δὲ τὸ ἀπὸ  $ΑΣ$  πρὸς τὸ ὑπὸ  $|ΑΣΓ$ , τὸ ἀπὸ  $ΣΠ$  πρὸς τὸ ὑπὸ  
 $ΣΠ$ ,  $ΠΜ$ · ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ  $ΜΠ$ ,  $ΠΣ$  τῷ ἀπὸ  $ΞΣ$ . κοι|νὸν  
 προσκείσθω τὸ ἀπὸ  $ΠΣ$ · τὸ ἄρα  $|$  ὑπὸ  $ΜΣ$ ,  $ΣΠ$  τοῖς ἀπὸ  $ΠΣ$ ,  
 $ΣΕ$  ἴσον.  $|$  ὥς ἄρα ἡ  $ΘΑ$  πρὸς  $ΑΣ$ , τὸ ἀπὸ  $ΜΣ$  πρὸς τὰ  $|$  ἀπὸ  
 $ΠΣ$ ,  $ΣΕ$ . ὥς δὲ τὸ ἀπὸ  $ΜΣ$  πρὸς τὰ  $|$  ἀπὸ  $ΣΕ$ ,  $ΣΠ$ , οὕτως



κορυφήν δὲ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἄς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Γ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ τομὴ αὐτοῦ κύκλος κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἐστω δὲ καὶ κύλινδρος ἔχων βάσιν μὲν τὸν αὐτὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΕΖ, ἄξονα δὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΓΑ ἄς ληφθῇ ἡ ΑΘ = ΑΓ, καὶ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἄς ἀχθῇ δὲ εὐθεῖά τις εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἄς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, εἰς δὲ τὸ σφαιροειδὲς τομὴν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΕΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον τομὴν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΓΑ : ΑΣ = ΕΑ : ΑΠ (Εὐκλ. VI, 4) = ΜΣ : ΣΠ (Εὐκλ. V, 18. VI, 4), εἶναι δὲ ἡ ΓΑ = ΑΘ, θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ = ΜΣ : ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΜΣ : ΣΠ = ΜΣ<sup>2</sup> : ΜΣ × ΣΠ· πρὸς δὲ τὸ ΜΣ × ΣΠ εἶναι ἴσον τὸ ἄθροισμα ΠΣ<sup>2</sup> + ΣΞ<sup>2</sup>. Διότι ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ ΑΣ × ΣΓ : ΣΞ<sup>2</sup> = ΑΚ × ΚΓ : ΚΒ<sup>2</sup> = ΑΚ<sup>2</sup> : ΚΒ<sup>2</sup> [διότι καὶ οἱ δύο λόγοι εἶναι (ἕκαστος) εἰς τὸν λόγον τῆς πλαγίας πρὸς τὴν κάθετον], ὡς δὲ τὸ ΑΚ<sup>2</sup> : ΚΒ<sup>2</sup> = ΑΣ<sup>2</sup> : ΣΠ<sup>2</sup> (Εὐκλ. VI, 4), καὶ ἐναλλάξ ἄρα θὰ εἶναι, ὡς τὸ ΑΣ<sup>2</sup> : ΑΣ × ΣΓ = ΠΣ<sup>2</sup> : ΣΞ<sup>2</sup> (Εὐκλ. V, 16). Ὡς δὲ τὸ ΑΣ<sup>2</sup> : ΑΣ × ΣΓ = ΣΠ<sup>2</sup> : ΣΠ × ΠΜ (Εὐκλ. V, 15. VI, 4)· εἶναι ἄρα τὸ ΜΠ × ΠΣ = ΞΣ<sup>2</sup> (Εὐκλ. V, 9). Ἄς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τὸ ΠΣ<sup>2</sup>· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΜΣ × ΣΠ = ΠΣ<sup>2</sup> + ΣΞ<sup>2</sup> (Εὐκλ. II, 3). Θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ = ΜΣ<sup>2</sup> : ΠΣ<sup>2</sup> + ΣΞ<sup>2</sup>. Ὡς δὲ τὸ ΜΣ<sup>2</sup> : ΣΞ<sup>2</sup> + ΣΠ<sup>2</sup> = ὁ εἰς τὸν κύλινδρον κύκλος, τοῦ ὁποίου διά-

ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ | κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ  $MN$ , πρὸς ἀμφο-  
 τέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ  $EO$ ,  $PP$ . ὥστε ἰσορ-  
 ροπή|σει περὶ τὸ  $A$  σημεῖον ὁ κύκλος, | οὗ διάμετρος ἡ  $MN$ ,  
 αὐτοῦ μένων | ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ  $EO$ ,  
 5  $PP$ , μετενεχθεῖσι καὶ | τεθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$ ,  
 ὥστε | ἐκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ | βάρους τὸ  $\Theta$ .  
 συναμφοτέρων δὲ τῶν | κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ  $EO$ ,  
 $PP$ , | μετενηγμένων κέντρον τοῦ βά|ρους τὸ  $\Theta$ . καὶ ὥς  
 ἄρα ἡ  $\Theta A$  πρὸς |  $AS$ , οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ  $MN$ ,  
 10 πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ  $EO$ ,  $PP$ .  
 ὁμοίως δὲ δειχθή|σεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν | τῷ  $AZ$   
 παραλληλογράμμῳ παρὰ | τὴν  $EZ$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης  
 ἐ|πίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν |  $AG$ , ὅτι ὁ γενόμενος  
 κύκλος ἐν τῷ κυλίν|δρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ  $A$  ση|μεῖον αὐ-  
 15 τοῦ μένων συναμφοτέ|ροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῷ | σφαι-  
 ροειδεῖ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ | κώνῳ μετενεχθεῖσιν τοῦ  
 ζυγοῦ | κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε ἐκατέρου | αὐτῶν κέντρον  
 εἶναι τοῦ βάρους | τὸ  $\Theta$ . συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίν-  
 δρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων | κύκλων καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ |  
 20 τοῦ κώνου ἰσόρροπος ὁ κύλινδρος | ἔσται περὶ τὸ  $A$  σημεῖον  
 Η 452 αὐτοῦ μέ|ρων τῷ τε σφαιροειδεῖ καὶ τῷ κώ|νῳ μετενεχθεῖσι  
 καὶ τεθεῖσιν | ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥσ|τε ἐκατέ-  
 ρου αὐτῶν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ . καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  
 κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $K$ , | τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς  
 25 καὶ τοῦ κώνου | συναμφοτέρων, ὡς ἐρρέθη, κέν|τρον τοῦ  
 βάρους τὸ  $\Theta$ . ἔστιν οὖν, | ὡς ἡ  $\Theta A$  πρὸς  $AK$ , ὁ κύλινδρος |  
 πρὸς ἀμφότερα τό τε σφαιρο|ειδὲς καὶ τὸν κώνον. δι(ι-  
 πλα)σία | δὲ ἡ  $A\Theta$  τῆς  $AK$ . διπλάσιος ἄρα | καὶ ὁ κύλινδρος  
 ἀμφοτέρων τοῦ | τε σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου. | εἰς ἄρα  
 30 κύλινδρος ἴσος δυσὶν | κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. | εἰς

μετρος εἶναι ἡ MN, πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΕΟ, ΠΡ (Εὐκλ. XII, 2). ὥστε θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ MN, αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΕΟ, ΠΡ, ἀφοῦ μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἐκάστου αὐτῶν νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ. Καὶ τῶν δύο δὲ κύκλων, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΕΟ, ΠΡ, εἰς τὴν θέσιν ὅπου ἔχουσι μεταφερθῇ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ· καὶ ὥς ἄρα εἶναι ἡ  $\Theta A : \Lambda \Sigma = \text{ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ MN} : \text{τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΕΟ, ΠΡ}$ . Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα εἰς τὸ παραλληλόγραμμον  $\Lambda Z$  παράλληλος πρὸς τὴν  $EZ$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $AG$ , ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος εἰς τὸν κύλινδρον θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α, αὐτοῦ μένων, καὶ τοὺς δύο κύκλους καὶ τὸν γινόμενον εἰς τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον, ὅταν μεταφερθῶσιν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἐκατέρου αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἀφοῦ λοιπὸν συμπληρωθῇ ὁ κύλινδρος ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων, καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου, ὁ κύλινδρος θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α, αὐτοῦ μένων, καὶ τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὸν κῶνον, ὅταν μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἐκατέρου αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Θ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ K, τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου ὁμοῦ, ὡς ἐλέχθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ· εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ  $\Theta A : AK$ , οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου. Εἶναι δὲ ἡ  $A\Theta = 2AK$ · εἶναι ἄρα διπλάσιος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ ἀθροίσματος τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου· εἰς ἄρα κύλινδρος εἶναι ἴσος πρὸς δύο κῶνους καὶ δύο σφαιροειδῇ. Εἰς δὲ κύλινδρος εἶναι ἴσος πρὸς τρεῖς,

δὲ κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τρισὶ κώ|νοις τοῖς αὐτοῖς· τρεῖς ἄρα  
κῶνοι ἴσοι | εἰσὶ δυσὶ κῶνοις καὶ δυσὶ σφαιρο|ειδέσι. κοινοὶ  
ἀφηρήσθωσαν | δύο κῶνοι· λοιπὸς ἄρα εἷς κῶνος, | οὗ ἐστι  
τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ  $A|EZ$ , ἴσος ἐστὶ δυσὶ σφαιρο-  
5 <sup>5</sup>ειδέσιν. εἷς δὲ | κῶνος ὁ αὐτὸς ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κῶνοις, |  
ὧν ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ |  $AB\Delta$ · ὀκτὼ ἄρα  
κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσ|οι εἰσὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν· καὶ τέσσα-  
ρες | ἄρα κῶνοι ἴσοι ἐνὶ σφαιροειδεῖ· | τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ  
τὸ σφαιροειδὲς | τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μὲν ἐστὶ τὸ  $A$  ση-  
10 <sup>10</sup>μεῖ|ον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν |  $BD$  κύκλος ὀρθὸς ὧν  
πρὸς τὴν  $AG$ , καὶ | τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσι|όν  
ἐστὶ τοῦ εἰρημένου κώνου.

ἤχθωσαν | δὲ διὰ τῶν  $B, \Delta$  σημείων ἐν τῷ  $AZ$  παρ|αλλη-  
λογράμμῳ τῇ  $AG$  παράλλη|λοι αἱ  $\Phi X, \Psi\Omega$ , καὶ νοεῖσθω  
15 <sup>15</sup>κύλινδρος, | οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους | τὰς  $\Phi\Psi, X\Omega$   
κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ  $AG$  | εὐθεΐα.

ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλιν|δρος, οὗ ἐστὶ, τὸ διὰ τοῦ  
ἄξονος παραλλη|λόγραμμον τὸ  $\Phi\Omega$ , τοῦ κυλίνδρου, οὗ | τὸ  
H 453 <sup>H 453</sup>διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ |  $\Phi\Delta$ , διὰ τὸ ἴσας αὐ-  
20 <sup>20</sup>τῶν εἶναι τὰς βά|σεις, τὸν δὲ ἄξωνα τοῦ ἄξονος διπλά|σιον,  
αὐτὸς δὲ ὁ κύλινδρος, οὗ τὸ | διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλό-  
H 454 <sup>H 454</sup>γραμμον | τὸ  $\Phi\Delta$ , τριπλασίον ἐστὶ τοῦ κώνου, | οὗ κορυφὴ μὲν  
τὸ  $A$  σημεῖον, βάσις | δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν  $BD$  κύκλος |  
ὀρθὸς ὧν πρὸς τὴν  $AG$ , ἑξαπλά|σιος ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ  
25 <sup>25</sup>ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ | ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ |  $\Phi\Omega$ , τοῦ  
εἰρημένου κώνου. ἐδείχθη | δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλά-  
σιον | τὸ σφαιροειδὲς· ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶν ὁ | κύλινδρος τοῦ  
σφαιροειδοῦς.

τοὺς αὐτοὺς, κώνους (Εὐκλ. XII, 10)· τρεῖς ἄρα κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο κώνους καὶ δύο σφαιροειδῆ. Ὡς ἀφαιρεθῶσιν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν δύο κῶνοι· ὁ ὑπόλοιπος ἄρα εἷς κῶνος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΕΖ, εἶναι ἴσος πρὸς δύο σφαιροειδῆ. Εἷς δὲ κῶνος ὁ αὐτὸς εἶναι ἴσος πρὸς ὀκτῶ κώνους, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΒΔ· ὀκτῶ ἄρα κῶνοι οἱ εἰρημένοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο σφαιροειδῆ· καὶ τέσσαρες ἄρα κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἓν σφαιροειδές· εἶναι ἄρα τὸ σφαιροειδὲς τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι διπλάσιον τοῦ εἰρημένου κώνου.

Ὡς ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν σημείων Β, Δ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ πρὸς τὴν ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΧ, ΨΩ, καὶ ὥς νοηθῇ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσεις μὲν εἶναι οἱ περὶ τὰς διαμέτρους ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύλινδρος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΩ εἶναι διπλάσιος τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΔ, ἐπειδὴ αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσαι, καὶ ὁ εἷς ἄξων εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου, αὐτὸς δὲ ὁ κύλινδρος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΔ, εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ (Εὐκλ. XII, 10), εἶναι ἄρα ἑξαπλάσιος ὁ κύλινδρος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον ΦΩ τοῦ εἰρημένου κώνου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι τοῦ αὐτοῦ κώνου τὸ σφαιροειδὲς εἶναι τετραπλάσιον· εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος τὰ τρία δεύτερα τοῦ σφαιροειδοῦς.

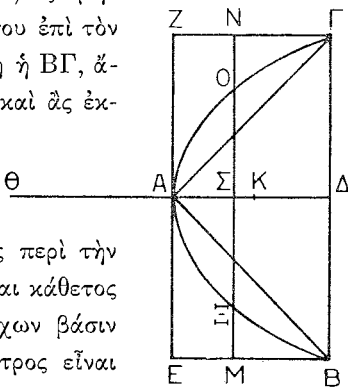
᾽Οτι δὲ πᾶν | τμήμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἐπιπέδῳ  
ἀποτεμνόμενον | ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ  
κῶνου τοῦ βάσιν ἔχοντος | τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ τὸν ἄ-  
5 ξονα τὸν αὐτόν, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου | τούτου θεωρεῖται·

ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ  
διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθο-  
γωνίου κῶνου τομὴν τὴν  $ABΓ$ , | τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ  
ἐπιπέδῳ | ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω | αὐτῶν κοινὴ  
10 τομὴ ἡ  $BΓ$ , ἄξων δὲ | ἔστω τοῦ τμήματος ἡ  $ΔΑ$ , καὶ ἐκβε-  
βλήσθω ἡ  $ΔΑ$  ἐπὶ τὸ  $Θ$ , καὶ κείσθω | αὐτῇ ἴση ἡ  $ΑΘ$ , καὶ  
ροείσθω ζυγὸς | ὁ  $ΔΘ$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $Α$ , ἔστω δὲ ἡ | τοῦ  
τμήματος βάσις ὁ περὶ διὰμετρον τὴν  $BΓ$  κύκλος ὀρθὸς  
ὢν πρὸς | <τὴν  $ΑΔ$ , ροείσθω δὲ κῶνος βάσιν> | μὲν ἔχων  
15 τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶ διάμετρος | ἡ  $BΓ$ , κορυφὴν δὲ τὸ  $Α$  ση-  
μεῖον, ἔστω | δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων | τὸν κύκλον,  
οὗ διάμετρος ἡ  $BΓ$ , ἄξονα δὲ τὸν  $ΑΔ$ , καὶ ἦχθω τις ἐν | τῷ  
H 456 παραλληλογράμμῳ ἡ  $MN$  | παράλληλος οὕσα τῇ  $BΓ$ , καὶ  
| ἀπὸ τῆς  $MN$  ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν  $ΑΔ$ · ποιή-  
20 σαι δὴ | τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | κύκλον, οὗ διάμε-  
τρος ἡ  $MN$ , ἐν δὲ | τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδοῦς  
τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ  $ΞΟ$ .

καὶ ἐπεὶ ὀρθογωνίου | κῶνου τομὴ ἐστὶν ἡ  $ΒΑΓ$ , διὰμε-  
τρος δὲ αὐτῆς ἡ  $ΑΔ$ , καὶ τεταγμένως κατηγμέναι εἰσὶν αἱ  
25  $ΞΣ$ , |  $ΒΔ$ , ἐστὶν, ὥς ἡ  $ΔΑ$  πρὸς  $ΑΣ$ , οὕτως τὸ ἀπὸ |  $ΒΔ$  πρὸς  
τὸ ἀπὸ  $ΞΣ$ . ἴση δὲ ἡ  $ΔΑ$  τῇ |  $ΑΘ$ · ὥς ἄρα ἡ  $ΘΑ$  πρὸς  $ΑΣ$ ,

“Οτι δὲ πᾶν τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτεμνόμενον δι’ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐξετάζεται κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον διὰ τῆς μεθόδου ταύτης.

Διότι ἔστω παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς καὶ ἄς τμηθῇ δι’ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄς σχηματίζη τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν παραβολὴν  $AB\Gamma$ , ἄς τμηθῇ δὲ καὶ δι’ ἄλλου ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ  $B\Gamma$ , ἄξων δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἡ  $\Delta A$ , καὶ ἄς ἐκβληθῇ ἡ  $\Delta A$  πρὸς τὸ  $\Theta$ , καὶ ἄς ληφθῇ  $\Delta A = A\Theta$ , καὶ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ὁ  $\Delta\Theta$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ



$A$ , ἔστω δὲ ἡ βάσις τοῦ τμήματος περὶ τὴν διάμετρον  $B\Gamma$  κύκλος, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν  $\Delta\Delta$ , ἄς νοηθῇ δὲ κῶνος ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποῖου διάμετρος εἶναι ἡ  $B\Gamma$ , κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον  $A$ , ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποῖου διάμετρος εἶναι ἡ  $B\Gamma$ , ἄξονα δὲ τὸν  $\Delta\Delta$ , καὶ ἄς ἀχθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ( $ZB$ ) ἡ  $MN$  παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Gamma$ , καὶ ἀπὸ τῆς  $MN$  ἄς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $\Delta\Delta$ . θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποῖου διάμετρος εἶναι ἡ  $MN$ , εἰς δὲ τὸ τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποῖου διάμετρος εἶναι ἡ  $EO$ .

Καὶ ἐπειδὴ ἡ  $BA\Gamma$  εἶναι παραβολή, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ  $\Delta\Delta$ , καὶ ἔχουσιν ἀχθῇ ὡς τεταγμέναι αἱ  $\Xi\Sigma$ ,  $B\Delta$ , εἶναι ὡς ἡ  $\Delta A : A\Sigma = B\Delta^2 : \Xi\Sigma^2$  (Τετρ. παραβ. 3). Εἶναι δὲ ἡ  $\Delta A = A\Theta$  ὡς εἶναι ἄρα

οὕτως τὸ ἀπὸ  $MΣ$  | πρὸς τὸ ἀπὸ  $ΣΞ$ . ὥς δὲ τὸ ἀπὸ  $MΣ$  πρὸς  
τὸ | ἀπὸ  $ΣΞ$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμε-  
τρος ἡ  $MN$ , πρὸς | τὸν κύκλον τὸν ἐν τῷ τμήματι | τοῦ ὀρθο-  
γωνίου κωνοειδοῦς, οὗ | διάμετρος ἡ  $ΞΟ$ . ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ  
5  $ΘΑ$  πρὸς |  $ΑΣ$ , οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος | ἡ  $MN$ , πρὸς  
τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος | ἡ  $ΞΟ$ . ἰσορροπος ἄρα ὁ κύκλος,  
οὗ διάμετρος | ἡ  $MN$ , ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ περὶ τὸ |  $A$  σημεῖον  
αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ  $ΞΟ$ , μετενεχθέντι  
καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ  $Θ$ , ὥστε κέντρον αὐτοῦ |  
10  $\langle$ εἶναι τοῦ βάρους τὸ  $\rangle$   $Θ$ .  $\langle$ καὶ ἐστι | τοῦ  $\rangle$  μὲν  $\langle$ κύκλον, οὗ  
διάμετρος ἐστὶν ἡ  $\rangle$  |  $MN$ , κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $Σ$ , τοῦ δὲ |  
κύκλου, οὗ ἐστὶ διάμετρος ἡ  $ΞΟ$ , μετενηνεγμένου κέντρον  
τοῦ βάρους | τὸ  $Θ$ , καὶ ἀντιπεπονητότως τὸν | αὐτὸν ἔχει λό-  
γον ἡ  $ΘΑ$  πρὸς  $ΑΣ$ , ὃν | ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ  $MN$ , πρὸς  
15 | τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ  $ΞΟ$ . ὁμοίως δὲ δειχθήσεται,  
καὶ ἐὰν ἄλλη | τις ἀχθῇ ἐν τῷ  $ΕΓ$  παραλληλογραμμῳ παρὰ  
τὴν  $ΒΓ$ , καὶ ἀπὸ | τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν  
H 457 πρὸς τὴν  $ΑΘ$ , ὅτι ἰσορροπήσει πρὸς τῷ  $A$  σημείῳ ὁ γενόμε-  
νος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων τῷ γενομένῳ ἐν  
20 τῷ | τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδούς μετενεχθέντι ἐπὶ  
H 458 τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ  $Θ$  οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι | αὐτοῦ  
τοῦ βάρους τὸ  $Θ$ . συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ  
| τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδούς ἰσορροπήσει περὶ  
τὸ  $A$  σημεῖον ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων τῷ | τμήματι τοῦ  
25 ὀρθογωνίου κωνοειδούς μετενεχθέντι καὶ τεθέντι | τοῦ ζυγοῦ  
κατὰ τὸ  $Θ$  οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ  
 $Θ$ . | ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ περὶ τὸ  $A$  σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέ-  
θη, καὶ ἐστὶ | τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρος τὸ  $K$  σημεῖον  
δίχα τεμνομένης τῆς  $ΑΔ$  κατὰ τὸ  $K$  σημεῖον, | τοῦ δὲ τμή-



ἡ  $\Theta A : \Lambda \Sigma = M \Sigma^2 : \Sigma \Xi^2$ . Ὡς δὲ τὸ  $M \Sigma^2 : \Sigma \Xi^2 = \delta$  εἰς τὸν κύλινδρον κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $MN$  πρὸς τὸν εἰς τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$  (Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ  $\Theta A : \Lambda \Sigma = \delta$  κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $MN$ , πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ . Θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $MN$ , ὁ εἰς τὸν κύλινδρον περὶ τὸ σημεῖον  $A$ , μένων αὐτοῦ, πρὸς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ , ἀφοῦ οὗτος μεταφερθῇ καὶ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ · καὶ εἶναι τοῦ μὲν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $MN$ , κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Sigma$  (Λήμμα 7), τοῦ δὲ κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ , ὁ ὁποῖος ἔχει μεταφερθῇ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ , καὶ ἀντιστρόφως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ  $\Theta A : \Lambda \Sigma$ , ὃν ἔχει ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $MN$ , πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ . Καθ' ὁμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἄλλη εὐθεῖα τις ἀχθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον  $E\Gamma$  παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Gamma$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $A\Theta$ , ὅτι θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον  $A$  ὁ γενόμενος κύκλος, αὐτοῦ μένων, πρὸς τὸν γενόμενον κύκλον εἰς τὸ τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἀφοῦ μεταφερθῇ οὗτος ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ  $\Theta$ . Ὅταν λοιπὸν συμπληρωθῇ ὁ κύλινδρος καὶ τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμήμα θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον  $A$  ὁ κύλινδρος, αὐτοῦ μένων, πρὸς τὸ τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ . Ἐπειδὴ δὲ ἰσορροποῦσιν ὥς πρὸς τὸ σημεῖον  $A$  τὰ εἰρημένα μεγέθη, καὶ εἶναι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον  $K$ , ὅπου ἡ  $A\Delta$  τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ

ματος μετενηνεγμένον | κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ, ἀντι-  
πεπονητότως τὸν αὐτὸν ἔξει λόγ|ον <ἢ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ὁ>  
κύλινδρος | πρὸς τὸ τμήμα. διπλάσια δὲ ἡ | ΘΑ τῆς ΑΚ·  
διπλάσιος ἄρα καὶ | ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος. ὁ δὲ | αὐτὸς  
5 κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι | τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος |  
τὸν κύκλον, | οὗ διάμε|τρος ἡ ΒΓ, | κορυφὴν δὲ | τὸ Α ση-  
μεῖ|ον· δηλον | οὔν, ὅτι τὸ τμήμα ἡμιόλιόν | ἐστιν τοῦ αὐ|τοῦ  
κώνου.

ε'

- 10 Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τοῦ  
ἀποτεμνομένου | ἐπιπέδῳ ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄξονα | τὸ κέντρον  
τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς | εὐθείας, ἣ ἐστὶν ἄξων τοῦ τμή-  
ματος, | τμηθείσης οὕτως τῆς εἰρημένης | εὐθείας, ὥστε δι-  
πλάσιον εἶναι | τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ | λοι-  
15 ποῦ τμήματος, ὧδε διὰ τοῦ τρό|που θεωρεῖται·  
ἔστω τμήμα | ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἀποτε|μνόμενον ἐπι-  
πέδῳ ὀρθῶ πρὸς | τὸν ἄξονα καὶ τετμήσθω ἐπιπέ|δῳ ἑτέρῳ  
διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποι|εῖτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν |  
H 459 ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν, τοῦ | δὲ ἀποτετμηκότος τὸ  
20 τμήμα ἐπι|πέδου καὶ τοῦ τέμνοντος κοινὴ | τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ,  
ἄξων δὲ ἔστω τοῦ | τμήματος καὶ διάμετρος τῆς | ΑΒΓ το-  
μῆς ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ τῆς <ΔΑ ἐκβληθείσης ἴση αὐτῇ κεί-  
H 460 σθω ἡ ΑΘ, καὶ> | νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α,  
ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγε|γραμμένος ἐν τῷ τμήματι, πλεν|ραι  
25 δὲ αὐτοῦ αἱ ΒΑ, ΑΓ, ἥχθω δέ τις | ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώ-  
νον το | μῇ ἡ ΕΟ παράλληλος οὔσα τῇ | ΒΓ, τεμνέτω δὲ αὕτη  
τὴν μὲν τοῦ ὀρ|θογωνίου κώνου τομὴν κατὰ τὰ | Ε, Ο, τὰς δὲ  
τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ | τὰ Π, Ρ σημεία.  
ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνί|ου κώνου τομῇ κάθετοι ἡγμέναι |

τὸ σημεῖον  $K$ , τοῦ δὲ μεταφερθέντος τμήματος κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $\Theta$ , ἀντιστρόφως θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἢ  $\Theta A : AK$ , ὃν ἔχει ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ τμήμα. Εἶναι δὲ ἡ  $\Theta A = 2AK$ · εἶναι ἄρα διπλάσιος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος. Ὁ αὐτὸς δὲ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποῦοι διάμετρος εἶναι ἡ  $B\Gamma$ , κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον  $A$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ τμήμα εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου.

5

Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τοῦ ἀποτεμνομένου δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων τοῦ τμήματος, τμηθείσης τῆς εἰρημένης εὐθείας οὕτως, ὥστε τὸ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ λοιποῦ τμήματος, ἐξετάζεται ὡς ἐξῆς διὰ τῆς μεθόδου ταύτης.

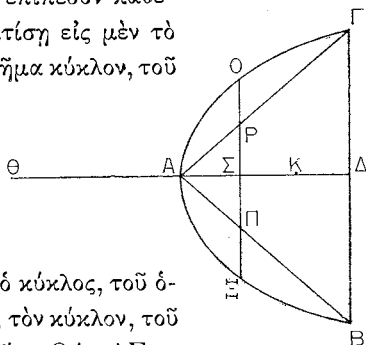
Ἐστω τμήμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτεμνόμενον δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἄς τμηθῇ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄς σχηματίζῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομὴν τὴν παραβολὴν  $AB\Gamma$ , τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποκόψαντος τὸ τμήμα καὶ τοῦ τέμνοντος ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ  $B\Gamma$ , ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς  $AB\Gamma$  ἔστω ἡ εὐθεῖα  $A\Delta$ , καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ  $\Delta A$  ἄς ληθῇ ἴση πρὸς αὐτὴν ἡ  $A\Theta$ , καὶ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ὁ  $\Delta\Theta$ , μέσον δὲ τῆς εὐθείας αὐτῆς τὸ  $A$ , ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τμήμα, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ  $BA$ ,  $AG$ , ἄς ἀχθῇ δὲ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὴν παραβολὴν ἡ  $\Xi O$ , παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Gamma$ , ἄς τέμνῃ δὲ αὕτη τὴν μὲν παραβολὴν κατὰ τὰ σημεῖα  $\Xi$ ,  $O$ , τὰς δὲ πλευρὰς τοῦ κώνου κατὰ τὰ  $\Pi$ ,  $P$ .

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς παραβολὴν ἔχουσιν ἀχθῇ κάθεται ἐπὶ τὴν

εἰσὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον αἱ  $\Xi\Sigma$ ,  $B\Delta$ , | ἔστιν, ὥς ἡ  $\Delta A$  πρὸς  
 $A\Sigma$ , οὕτως τὸ ἀπὸ  $B\Delta$  πρὸς | τὸ ἀπὸ  $\Xi\Sigma$ . ὥς δὲ ἡ  $\Delta A$  πρὸς  
 $A\Sigma$ , οὕτως ἡ  $B\Delta$  | πρὸς  $\Pi\Sigma$ , ὥς δὲ ἡ  $B\Delta$  πρὸς  $\Pi\Sigma$ , οὕτως  
τὸ ἀπὸ |  $B\Delta$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $B\Delta$ ,  $\Pi\Sigma$ · ἔσται ἄρα | καί, ὥς  
5 τὸ ἀπὸ  $B\Delta$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $\Xi\Sigma$ , οὕτως | τὸ ἀπὸ  $B\Delta$  πρὸς τὸ ὑπὸ  
 $B\Delta$ ,  $\Pi\Sigma$ . ἴσον ἄρα | τὸ ἀπὸ  $\Xi\Sigma$  τῷ ὑπὸ  $B\Delta$ ,  $\Pi\Sigma$ · ἀνάλο-  
γον | ἄρα εἰσὶν αἱ  $B\Delta$ ,  $\Sigma\Xi$ ,  $\Sigma\Pi$ , καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν, | ὥς ἡ  
 $B\Delta$  πρὸς  $\Pi\Sigma$ , οὕτως τὸ ἀπὸ  $\Xi\Sigma$  πρὸς τὸ | ἀπὸ  $\Sigma\Pi$ . ὥς δὲ  
ἡ  $B\Delta$  πρὸς  $\Pi\Sigma$ , οὕτως ἡ  $\Delta A$  | πρὸς  $A\Sigma$ , τουτέστιν ἡ  $\Theta A$   
10 πρὸς  $A\Sigma$ · καὶ ὥς ἄρα | ἡ  $\Theta A$  πρὸς  $A\Sigma$ , οὕτως τὸ ἀπὸ  $\Xi\Sigma$   
πρὸς τὸ ἀπὸ  $\Sigma\Pi$ . | ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τῆς  $\Xi O$  ἐπίπε|δον ὀρθὸν  
πρὸς τὴν  $A\Delta$ · ποιήσει δὴ | τοῦτο ἐν μὲν τῷ τμήματι τοῦ  
ὀρθογωνίου κωνοειδέος κύκλον, | οὗ διάμετρος ἡ  $\Xi O$ , ἐν  
δὲ τῷ κώ|ρω κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ  $\Pi P$ . | καὶ ἐπεὶ ἐστιν,  
15 ὥς ἡ  $\Theta A$  πρὸς  $A\Sigma$ , οὕτως | τὸ ἀπὸ  $\Xi\Sigma$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $\Sigma\Pi$ ,  
ὥς δὲ τὸ ἀπὸ |  $\Xi\Sigma$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $\Sigma\Pi$ , οὕτως ὁ κύ|κλος, οὗ  
διάμετρος ἡ  $\Xi O$ , πρὸς τὸν | κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ  $\Pi P$ , ὥς  
ἄρα | ἡ  $\Theta A$  πρὸς  $A\Sigma$ , οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμε|τρος ἡ  $\Xi O$ ,  
H 462 πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμε|τρος ἡ  $\Pi P$ . ἰσορροπήσει ἄρα πε-)|  
20 ρὶ τὸ  $A$  σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμε|τρος ἡ  $\Xi O$ , αὐτοῦ μένων  
τῷ κύ|κλῳ, οὗ διάμετρος ἡ  $\Pi P$ , μετενεχθέντι τοῦ ζυγοῦ  
κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥσ|τε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ |  $\Theta$ .  
ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν κύκλου, οὗ διά|μετρος ἡ  $\Xi O$ , αὐτοῦ μένον-  
τος κέν|τρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ  $\Sigma$ , τοῦ δὲ | κύκλου, οὗ διά-  
25 μετρος ἡ  $\Pi P$ , μετε|νεχθέντος, ὥς ἐρρέθη, κέντρον | τοῦ βάρους  
τὸ  $\Theta$ , καὶ ἀντιπεπον|θότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ |  $\Theta A$   
πρὸς  $A\Sigma$ , ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμε|τρος ἡ  $\Xi O$ , πρὸς τὸν κύκλον,  
οὗ διά|μετρος ἡ  $\Pi P$ , ἰσορροπήσουσιν | ἄρα πρὸς τῷ  $A$  ση-  
μείῳ. ὁμοίως | δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη | τις ἀχθῇ ἐν τῇ

διάμετρον αἱ  $\Xi\Sigma$ ,  $B\Delta$ , εἶναι ὡς ἡ  $\Delta A : A\Sigma = B\Delta^2 : \Xi\Sigma^2$  (Τετρ. παραβ. 3). Ὡς δὲ ἡ  $\Delta A : A\Sigma = B\Delta : \Pi\Sigma$  (Εὐκλ. VI, 4) =  $B\Delta^2 : B\Delta \times \Pi\Sigma$ · θὰ εἶναι ἄρα καί, ὡς τὸ  $B\Delta^2 : \Xi\Sigma^2 = B\Delta^2 : B\Delta \times \Pi\Sigma$ . Εἶναι ἄρα τὸ  $\Xi\Sigma^2 = B\Delta \times \Pi\Sigma$  (Εὐκλείδου V, 9)· εἶναι ἄρα ἐν ἀναλογίᾳ αἱ  $B\Delta$ ,  $\Sigma\Xi$ ,  $\Sigma\Pi$ , καὶ διὰ τοῦτο εἶναι, ὡς ἡ  $B\Delta : \Pi\Sigma = \Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$  (Εὐκλ. V, ὁρισμ. 9). Ὡς δὲ ἡ  $B\Delta : \Pi\Sigma = \Delta A : A\Sigma = \Theta A : A\Sigma$ · καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ  $\Theta A : A\Sigma = \Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$ .

Ἄς ἀνυψωθῇ λοιπὸν ἀπὸ τῆς  $\Xi O$  ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $A\Delta$ · τοῦτο θὰ σχηματίσῃ εἰς μὲν τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμῆμα κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ , εἰς δὲ τὸν κῶνον κύκλον (Περὶ κωνοειδ. 11α), τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Pi P$ . Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ  $\Theta A : A\Sigma = \Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$ , ὡς δὲ τὸ  $\Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$ , οὕτως ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ , πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Pi P$ , ὡς ἄρα  $\Theta A : A\Sigma =$  κύκλος διαμέτρου  $\Xi O$  : κύκλον διαμέτρου  $\Pi P$ . Θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα περὶ τὸ σημεῖον  $A$  ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ , αὐτοῦ μένων, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Pi P$ , ἀφοῦ μεταφερθῇ οὗτος ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ εἰς τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ , αὐτοῦ μένοντος, κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $\Sigma$ , τοῦ δὲ κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Pi P$ , ἀφοῦ μεταφερθῇ οὗτος, ὡς ἐλέχθη, κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $\Theta$ , καὶ κατ' ἀντιστροφὴν θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ  $\Theta A : A\Sigma$ , ὃν ἔχει ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Xi O$ , πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $\Pi P$ , ἐπομένως θὰ ἰσορροπήσωσιν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον  $A$ . Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἀχθῇ εἰς τὴν παρα-



τοῦ ὀρθογωνίου | κώνου τομῇ παράλληλος τῇ | ΒΓ, καὶ ἀπὸ  
 τῆς ἀχθείσης ἐπὶ|πεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν | ΑΔ, ὅτι  
 ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ | τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνο|ει-  
 δέος αὐτοῦ μένων ἰσορροπήσει| περὶ τὸ Α σημεῖον τῷ γενο-  
 5 μέ|νω κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ μετενε|χθέντι καὶ τεθέντι τοῦ  
 ζυγοῦ κατὰ | τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ | τοῦ βάρους τὸ  
 Θ. συμπληρωθέν|των οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ | τε τμήματος  
 καὶ τοῦ κώνου ἰσορ|ροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον | τεθέντες  
 πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ τμή|ματι αὐτοῦ μένοντες πᾶσι τοῖς  
 10 | κύκλοις τοῖς ἐν τῷ κώνῳ με|τενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ  
 ζυγοῦ | <κατὰ τὸ Θ σημεῖον οὕτως, ὥστε> | αὐτῶν κέντρον  
 εἶναι τοῦ βά|ρους τὸ Θ· ἰσόρροπον οὖν καὶ τὸ | τμήμα τοῦ ὀρ-  
 θογωνίου κω|νωιδέος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐ|τοῦ μένον τῷ  
 κώνῳ μετενε|χθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Θ οὐ-  
 15 τως, ὥστε κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν |  
 συναμφοτέρων τῶν μεγεθ|ῶν ὡς ἐνὸς λεγομένων κέντρον |  
 Η 463 ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Α, αὐτοῦ δὲ τοῦ κώ|ρου τοῦ μετενηγε-  
 γμένου κέντρον | τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα | μεγέ-  
 θους τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βά|ρους ἐπὶ τῆς ΑΘ εὐθείας ἐκ-  
 20 βε|βλημένης ἐπὶ τὸ Α καὶ ἀπολη|φθείσης ἀπ' αὐτῆς τῆς ΑΚ  
 τηλικαύτης, | <ὥστε τὴν ΑΘ> πρὸς αὐτὴν τοῦτον ἔ|χειν τὸν  
 Η 464 λόγον, ὃν ἔχει τὸ τμήμα | πρὸς τὸν κώνον. ἡμιόλιον δὲ ἐστὶν  
 τὸ | τμήμα τοῦ κώνου· ἡμιόλιος ἄρα | ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῆς  
 ΑΚ, καὶ ἐστὶν τὸ | Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθογω|νίου  
 25 κωνοειδέος τῆς ΑΔ τετμη|μένης οὕτως, ὥστε διπλάσιον  
 εἶναι | τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυ|φῇ τοῦ τμήματος τοῦ  
 λοιποῦ τμή|ματος.

ζ'

Παντὸς ἡμισφαιρίου τὸ κέντρον | <τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς

βολὴν ἄλλη τις εὐθεΐα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀ-  
 χθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, ὅτι ὁ γενόμενος  
 κύκλος εἰς τὸ τμήμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, αὐτοῦ  
 μένων, θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α τὸν γενόμενον κύκλον  
 εἰς τὸν κῶνον, μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ,  
 ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἐὰν λοιπὸν συμ-  
 πληρωθῶσιν ὑπὸ τῶν κύκλων καὶ τὸ παραβολικὸν τμήμα καὶ ὁ  
 κῶνος θὰ ἰσορροπήσωσι, περὶ τὸ σημεῖον Α, ὅλοι οἱ κύκλοι οἱ  
 ἀπαρτίζοντες τὸ τμήμα, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους  
 τοὺς ἀπαρτίζοντας τὸν κῶνον, μεταφερθέντας καὶ τεθέντας ἐπὶ τοῦ  
 ζυγοῦ κατὰ τὸ σημεῖον Θ οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν  
 νὰ εἶναι τὸ Θ· θὰ ἰσορροπήσῃ λοιπὸν καὶ τὸ τμήμα τοῦ ὀρθογωνίου  
 παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, αὐτοῦ μένον, περὶ τὸ σημεῖον Α,  
 πρὸς τὸν κῶνον μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ  
 οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. Ἐπειδὴ λοι-  
 πὸν τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγεθῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι  
 τὸ Α, τοῦ μεταφερθέντος δὲ κῶνου κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  
 Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς  
 εὐθείας ΑΘ ἐκβληθείσης πρὸς τὸ Α καὶ ληφθείσης ἐπ' αὐτῆς τῆς  
 ΑΚ τόσης, ὥστε ἡ ΑΘ πρὸς αὐτὴν νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, τὸν  
 ὅποιον ἔχει τὸ τμήμα πρὸς τὸν κῶνον (Λήμμα 2). Εἶναι δὲ τὸ τμήμα  
 τὰ τρία δεύτερα τοῦ κῶνου (θ. 4)· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΘΑ τὰ τρία  
 δεύτερα τῆς ΑΚ, καὶ θὰ εἶναι τὸ Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθο-  
 γωνίου παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἐν ᾧ ἡ ΑΔ θὰ ἔχῃ τμηθῇ  
 οὕτως, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος νὰ  
 εἶναι διπλάσιον τοῦ λοιποῦ τμήματος.

εὐθείας ἐστίν, ἥ) | ἐστὶν ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης | οὕτως,  
ὥστε τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ | πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἡμισφαί|ριον  
πρὸς τὸ λοιπὸν τμήμα τοῦ|τον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ |  
πέντε πρὸς τὰ τρία.

- 5 ἔστω σφαῖ|ρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ | διὰ τοῦ κέντρου, καὶ  
γενέσθω ἐν | τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ ὁ  $AB\Gamma\Delta$  | κύκλος, διάμε-  
τροι δὲ ἔστωσαν | τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις | αἱ  $ΑΓ$ ,  
 $ΒΔ$ , ἀπὸ δὲ τῆς  $ΒΔ$  ἐπίπε|δον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν  $ΑΓ$ ,  
καὶ | ἔστω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων | τὸν περὶ διάμετρον τὴν  
10  $ΒΔ$  | κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ  $A$  σημεί|ον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν  
τοῦ κώ|νου αἱ  $BA$ ,  $AD$ , καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ |  $ΓA$ , καὶ κεί-  
σθω τῇ  $ΓA$  ἴση ἡ  $A\Theta$ , καὶ | νοείσθω ζυγὸς ἡ  $\Theta\Gamma$  εὐθεῖα,  
μέσον | δὲ αὐτοῦ τὸ  $A$ , καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ |  $BA\Delta$  ἡμικυκλίῳ  
ἡ  $\Xi O$  παράλλη|λος οὖσα τῇ  $ΒΔ$ , τεμνέτω δὲ αὐ|τὴ τὴν μὲν  
15 τοῦ ἡμικυκλίου περι|φέρειαν κατὰ τὰ  $\Xi$ ,  $O$ , τὰς δὲ τοῦ κώ|νου  
H 466 πλευράς κατὰ τὰ  $\Pi$ ,  $P$  σημεία, | τὴν δὲ  $ΑΓ$  κατὰ τὸ  $E$ , καὶ  
ἀπὸ τῆς |  $\Xi O$  ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν | πρὸς τὴν  $ΑΕ$ . ποι-  
ήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν | τῷ ἡμισφαίριῳ τομὴν κύκλον, | οὗ  
διάμετρος ἡ  $\Xi O$ , ἐν δὲ τῷ κώνῳ | τομὴν κύκλον, οὗ διά-  
20 μετρος ἡ  $\Pi P$ .

καὶ | ἐπεὶ ἐστίν, ὥς ἡ  $ΑΓ$  πρὸς  $ΑΕ$ , τὸ ἀπὸ  $\Xi A$  πρὸς | τὸ  
ἀπὸ  $ΑΕ$ , τῷ δὲ ἀπὸ  $\Xi A$  ἴσα τὰ ἀπὸ |  $\langle ΑΕ, ΕΞ, τῇ δὲ ΑΕ$   
 $\text{ἴση ἡ } ΕΠ, \text{ ὥς ἄρα ἡ } ΑΓ \rangle$  | πρὸς  $ΑΕ$ , οὕτως τὰ ἀπὸ  $\Xi E$ ,  
 $E\Pi$  πρὸς τὸ ἀπὸ |  $E\Pi$ . ὥς δὲ τὰ ἀπὸ  $\Xi E$ ,  $E\Pi$  πρὸς τὸ ἀπὸ |  
25  $E\Pi$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον | τὴν  $\Xi O$  καὶ ὁ κύ-  
κλος ὁ περὶ διάμετρον | τὴν  $\Pi P$  πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ  
διάμετρον | τὴν  $\Pi P$ , καὶ ἐστὶν ἡ  $ΓA$  τῇ  $A\Theta$  ἴση· ὥς | ἄρα  
ἡ  $\Theta A$  πρὸς  $ΑΕ$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ | περὶ διάμετρον τὴν  $\Xi O$   
καὶ ὁ κύκλος ὁ | περὶ διάμετρον τὴν  $\Pi P$  πρὸς τὸν κύ|κλον  
30 τὸν περὶ διάμετρον τὴν  $\Pi P$ . | ἰσορροπήσουσιν ἄρα περὶ τὸ |  $A$

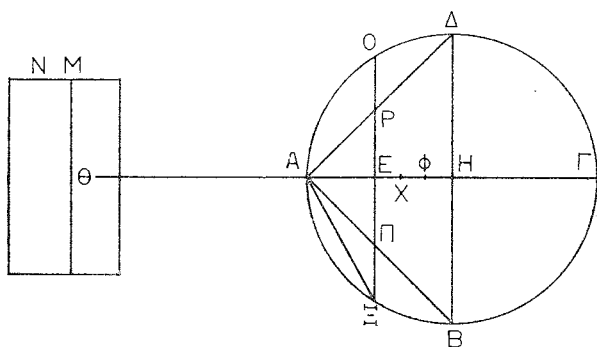


ας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης οὕτως, ὥστε τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαίριου πρὸς τὸ λοιπὸν τμήμα νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ πέντε πρὸς τὰ τρία.

Ἐστω σφαῖρα καὶ ἄς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἄς γίνη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομὴ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, ἔστωσαν δὲ διάμετροι τοῦ κύκλου κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔ ἄς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω κῶνος ἔχων βάσιν μὲν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ τοῦ κώνου ἔστωσαν αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἄς ἐκβληθῇ ἡ ΓΑ, καὶ ἄς ληφθῇ  $ΓΑ = ΑΘ$ , καὶ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ἡ εὐθεῖα ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἄς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὸ ἡμικύκλιον ἡ ΕΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, ἄς τέμνη δὲ αὕτη τὴν μὲν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κατὰ τὰ Ε, Ο, τὰς δὲ πλευρὰς τοῦ κώνου κατὰ τὰ σημεῖα Π, Ρ, τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς ΕΟ ἄς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸ ἡμισφαίριον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΕΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι  $ΑΓ : ΑΕ = ΕΑ^2 : ΑΕ^2$  (Εὐκλ. ΙΙΙ, 31. V, ὁρισ. 9. V, 8 πρόρισ.), εἶναι δὲ  $ΕΑ^2 = ΑΕ^2 + ΕΕ^2$  (Εὐκλ. Ι, 47), καὶ  $ΑΕ = ΕΠ$  (Εὐκλ. VI, 4), θὰ εἶναι ἄρα ἡ  $ΑΓ : ΑΕ = ΕΕ^2 + ΕΠ^2 : ΕΠ^2$ . Ὡς δὲ  $ΕΕ^2 + ΕΠ^2 : ΕΠ^2$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΕΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ (Εὐκλ. XII, 2), καὶ εἶναι ἡ  $ΓΑ = ΑΘ$ · εἶναι ἄρα ὡς ἡ  $ΘΑ : ΑΕ$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΕΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ. Θὰ ἰσορροπήσωσιν ἄρα περὶ

σημεῖον ἀμφοτέρωι οἱ κύκλοι, ὧν | εἰσι διάμετροι αἱ  $\Xi O$ ,  
 $\Pi P$ , αὐτοῦ μένον|τες τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ |  $\Pi P$ , μετε-  
 νεχθέντι καὶ τεθέντι | κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι |  
 αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ  $\Theta$ . ἐπεὶ οὖν | ἀμφοτέρων μὲν τῶν κύ-  
 κλων, ὧν εἰσι | διάμετροι αἱ  $\Xi O$ ,  $\Pi P$ , αὐτοῦ μενόν|των κέν-  
 τρον τοῦ βάρους ἐστὶν |  $\langle$ τὸ  $E$ , τοῦ δὲ κύκλον, οὗ ἐστὶ διά-  
 μετρος ἡ  $\Pi P$ , μετενεχθέντος | τὸ  $\Theta$ , ἐστίν, ὡς ἡ  $EA$  πρὸς



$AO$ , οὕτως ὁ κύκλος, | οὗ διάμετρος ἡ  $\Pi P$ , πρὸς τοὺς κύ-  
 κλους, | ὧν διάμετροι αἱ  $\Xi O$ ,  $\langle \Pi P$ . ὁμοίως | δὲ καί, ἐὰν  
 10 ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ | τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ | παράλ-  
 ληλος τῇ  $B\langle H\rangle\Delta$ , καὶ  $\langle$ ἀπὸ | τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον | ἀνα-  
 σταθῇ ὀρθὸν πρὸς  $\langle$ τὴν |  $AG\rangle$ , ἰσορροπ|ήσουσιν  $\rangle$  περὶ τὸ  $A$  |  
 Η 467  $\langle$ σημεῖον  $\rangle$  ἀμφοτέρωι οἱ κύκλοι | ὃ τε ἐν τῷ ἡμισφαίριῳ  
 γενόμενος | καὶ ὁ ἐν τῷ κώνῳ αὐ $\langle$ τοῦ μένοντες τῷ |  
 15  $\rangle$ γενομένῳ κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ  $\rangle$  μετενεχθέντι  $\langle$ καὶ  $\rangle$  τε $\langle$ θέν-  
 Η 468 τι τοῦ  $\rangle$  | ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$ .  $\langle$ συμπληρωθέν|των οὖν ὑπὸ τῶν  
 κύκλων τοῦ τε  $\rangle$  | ἡμισφαίριου καὶ τοῦ κώνου  $\rangle$  ἰσορ|ροπή-

τὸ σημεῖον  $A$  καὶ οἱ δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ  $EO$ ,  $ΠΡ$ , αὐτοῦ μένοντες, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $ΠΡ$ , μεταφερθέντα καὶ τεθέντα κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τῶν δύο κύκλων, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ  $EO$ ,  $ΠΡ$ , ἐν  $\Phi$  μένουν αὐτοῦ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $E$  (Λήμμα 7), τοῦ δὲ κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $ΠΡ$ , μεταφερθέντος εἶναι τὸ  $\Theta$ , εἶναι ὡς ἡ  $EA : A\Theta$ , οὕτως ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ  $ΠΡ$ , πρὸς τοὺς κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ  $EO$ ,  $ΠΡ$ . Ὅμοιως δὲ καί, ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη τυχούσα εὐθεῖα εἰς τὴν τομὴν τοῦ ὀρθογωνίου κώνου παράλληλος πρὸς τὴν  $B\Delta$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $ΑΓ$ , θὰ ἰσορροπήσωσιν περὶ τὸ σημεῖον  $A$  καὶ οἱ δύο κύκλοι, καὶ ὁ εἰς τὸ ἡμισφαίριον γεγόμενος καὶ ὁ εἰς τὸν κῶνον, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς γενόμενον εἰς τὸν κῶνον κύκλον, μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$ . Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύκλων, οἱ ὁποιοὶ ἀποτελοῦσι τὸ ἡμισφαίριον καὶ τὸν κῶνον θὰ ἰσορροπήσωσιν περὶ τὸ σημεῖον  $A$  ὅλοι οἱ κύκλοι ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται τὸ ἡμισφαίριον καὶ ὁ κῶνος, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους τοὺς ἀπαρτίζοντας τὸν κῶνον, μεταφερθέντας καὶ τεθέντας ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ . ὥστε νὰ ἰσορροπήσωσιν περὶ τὸ σημεῖον  $A$  καὶ τὸ ἡμισφαίριον καὶ ὁ κῶνος, αὐτοῦ μένοντα, πρὸς τὸν κῶνον μεταφερθέντα καὶ τεθέντα εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον  $\Theta$ . Ἐστω δὲ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὸν περὶ τὴν διάμετρον  $B\Delta$  κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον  $A$  ἵσος ὁ κύλινδρος  $MN$  καὶ ἅς τμηθῇ ἡ  $AH$  κατὰ τὸ  $\Phi$ , ὥστε ἡ  $AH$  νὰ εἶναι τετραπλασία τῆς  $\Phi H$ . τὸ σημεῖον ἄρα  $\Phi$  εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κώνου  $ΑΒΔ$ . διότι τοῦτο ἔχει

σουσι περὶ τὸ  $A$  σημεῖον πάν|τες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ἡμισφαί-|  
 ρίῳ καὶ οἱ <ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ> | μένοντες <πᾶσι τοῖς κύ-  
 κλοις τοῖς ἐν> | τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τε|θεῖσι τοῦ ζυγοῦ  
 κατὰ τὸ  $\Theta$  οὕτως, ὥσ|τε κέντρον <εἶναι αὐτῶν> τοῦ βάρους |  
 5 τὸ  $\Theta$ · <ὥστε ἰσορροπήσουσι | περὶ τὸ  $A$  σημεῖον τό τε ἡμι-|  
 σφαῖριον καὶ ὁ κώνος αὐτοῦ> | μένοντα τῷ κώνῳ μετενε-  
 χθέν|τι καὶ τεθέντι <τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$ > | οὕτως, ὥστε  
 κέν<τρον> αὐτοῦ <εἶναι τοῦ βάρους> | τὸ  $\Theta$  σημεῖον . . . . . |  
 . . . δ . . . . | . . . . ἔλασσον . . . . | . . . . .  
 10 . . . . . τῶν δὲ .  
 . . | . . <ἰσορροπ>ού<ντ>ων κατὰ τὸ < $A$ > | . . . . . τρ .  
 . . . . τὸ . . . | . . <καὶ ἐπεὶ> ἐστίν, ὥς ἡ  $\Theta$  < $A$  πρὸς>  $AX$ , |  
 . . . . . ἄξων ὁ  $AH$  . . τὰ | . . . . . μον . . . . . |  
 15 . . . . . | . . . . . <ση> | μεῖ<ον> . . . . . |  
 κῶνον τοῖ<ς> . . . . . | τοῦ κώνου . . . . . | καὶ ἐπεὶ τε-  
 τρα<πλασί> ἐστίν | ἡ σφαῖρα τοῦ <κώνου, οὗ βάσις | ὁ>  
 περὶ <διάμετρον τὴν  $BA$  κύ<κλος, ἄξων δὲ ἡ  $AH$ > . . . . |  
 . . . . . | . . . . . | . . . . .  
 20 . . . . .

ζ'

Θεωρεῖται <δὲ> διὰ τοῦ <τρόπου τού>|του καί, ὅτι π<ᾶν  
 Η 470 τμήμα> σφαί|ρας πρὸς τὸν κώνον <τὸν βάσιν> | ἔχοντα τὴν  
 αὐ<τὴν τῷ τμήματι> | καὶ ἄξονα <τὸν αὐτὸν τοῦτον ἐ|χει

γραφῇ εἰς τὰ προηγούμενα (Λήμμα 10). Καὶ ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος MN δι' ἐπιπέδου τέμνοντος καθέτως τὴν ΘΑ, ὥστε ὁ κύλινδρος M νὰ ἰσορροπῇ τὸν κῶνον ΑΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κῶνος ΑΒΔ καὶ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, αὐτοῦ μένοντα, ἰσορροποῦσι τὸν κῶνον ΑΒΔ μεταφερθέντα καὶ τεθέντα εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ, καὶ εἶναι πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΔ ἴσος ὁ κύλινδρος  $M + N$  καὶ κεῖται ἐκάτερος ἐκ τῶν κυλινδρῶν M, N κατὰ τὸ Θ καὶ ὁ κύλινδρος  $M + N$  ἰσορροπεῖ πρὸς τὸ ἄθροισμὰ των, εἶναι ἰσόρροπος καὶ ὁ κύλινδρος N πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, περὶ τὸ σημεῖον Α. Ἄς τμηθῇ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Χ, ὥστε  $AH : AX = 8 : 5$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύλινδρος M εἶναι ἰσόρροπος πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΔ θὰ εἶναι κύλινδρος M : κῶνον ΑΒΔ =  $\Phi A : A\Theta = 3 : 8$ . Εἶναι δὲ ὁ κῶνος ΑΒΔ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον  $M + N$ . Θὰ εἶναι ἄρα κύλινδρος  $M + N$  : κύλινδρον M =  $8 : 3$ . Καὶ ὥς ἄρα  $N : M + N = 5 : 8$ . Καὶ ἀνάπαλιν εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος  $M + N$ , τουτέστιν, ὁ κῶνος ΑΒΔ : κύλινδρον N =  $8 : 5 = AH : AX$ . Καὶ ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα εἶναι τετραπλασία τοῦ κώνου, τοῦ ὁποῦ βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, ἄξων δὲ (δηλ. ὕψος) ὁ ΑΗ (θὰ εἶναι ἡμισφαίριον ΑΒΔ : κῶνον ΑΒΔ =  $A\Theta : AH$ . Δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) θὰ εἶναι ὡς τὸ ἡμισφαίριον ΑΒΔ : κύλινδρον N =  $A\Theta : AX$ . Καὶ ἐδείχθη ἰσόρροπον τὸ ἡμισφαίριον ΑΒΔ πρὸς τὸν κύλινδρον N περὶ τὸ σημεῖον Α καὶ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κυλίνδρου N τὸ Θ· εἶναι καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου ΑΒΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΗ ἔχει τμηθῇ κατὰ τὸ Χ οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα νὰ ἔχῃ λόγον  $5 : 3$ ).

Ἐξετάζεται δὲ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης καί, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα

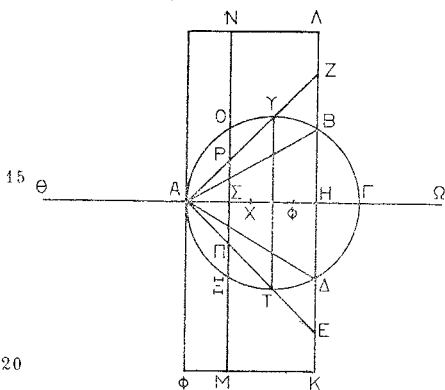
τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφο|τερος ἢ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς  
| σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοι|ποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος |  
τοῦ λοιποῦ τμήματος.} . . . | . . . . . | . . . . .

5 ..... | .....  $\partial^2 \theta \eta$  ..... | .....  $\tau \partial \alpha \nu \tau \partial$  .....  
 .. | .....

..... | ... παρα ..... |  
..... | ..... | ..... <καὶ ἀπὸ τῆς> | MN

ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς | τὴν ΑΓ· ποιήσῃ δὴ

τοῦτο ἐν μὲν | τῷ κυ-  
 λίνδρῳ τομὴν κύκλον,  
 οὗ ἐστι | διάμετρος ἡ  
*MN*, ἐν δὲ τῷ τμή-  
 μα | τι τῆς σφαίρας  
 τομὴν κύκλον, οὗ |  
 διάμετρος ἡ *EO*, ἐν  
 δὲ τῷ κώνῳ, | οὗ βά-  
 σις ὁ περὶ διάμετρον  
 τὴν *EZ* | κύκλος, κο-  
 ρυφὴ δὲ τὸ *A* ση-  
 μεῖον, κύκλον, οὗ διά-



μετρός ἐστιν ἡ  $ΠΡ$ . ὁ | μοίως δὴ τοῖς πρότερον δει-  
χθῆσε | ται ἰσορροπος περὶ τὸ  $A$  σημεῖον | ὁ κύκλος, οὗ  
διάμετρος ἡ  $MN$ , αὐ | τοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύ-  
| κλοις, ὧν διάμετροι αἱ  $ΞΟ$ ,  $ΠΡ$ , | μετεν)εχθεῖσι τοῦ ζυ-  
γοῦ <κατὰ τὸ  $\Theta$ ,> | ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον | <τοῦ  
βάρους εἶναι τὸ  $\Theta$ . ὁμοίως> δὲ | <ἐπὶ πάντων> συμπληρω-  
θέντων | οὖν καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ | <κῶνου καὶ τοῦ>  
τμήματος <τῆς σφαίρας | ὑπὸ τῶν κύκλων ἰσορροπῆσει καὶ> |

καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς ἀκτίνος τῆς σφαίρας σὺν τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

Ἐπεὶ ἔστω σφαῖρα τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτοῦ αἱ ΑΓ, ΤΥ τεμνόμεναι καθέτως πρὸς ἀλλήλας, ἃς τμηθῇ δὲ αὕτη δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΓ, βάσις δὲ τοῦ τμήματος ΑΒΔ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, ἃς τέμνη δὲ οὗτος τὴν ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον Η καὶ ἀπὸ τοῦ καθέτου τούτου κύκλου ἃς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α. Ἐστω δὲ καὶ ἄλλος κύκλος εἰς τὴν σφαῖραν περὶ διάμετρον τὴν ΤΥ κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ τοῦ καθέτου τούτου κύκλου ἃς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α· καὶ ἀφοῦ προεκβληθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἃς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Η παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν βάσιν κύκλον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΕΖ, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΑΕ, ΑΖ· καὶ ἃς ἀχθῇ εὐθεῖα τις παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἢ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἃς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, εἰς δὲ τὸ τμήμα τῆς σφαίρας τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΕΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ. Ὁμοίως δὲ πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΕΟ, ΠΡ, μεταφερθέντας ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ (καὶ τεθέντας) κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἐκάστου αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Θ· τὸ αὐτὸ δὲ ἐπὶ ὅλων. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύκλων, οἱ ὅποιοι ἀποτελοῦσι τὸν κύλινδρον καὶ τὸν κῶνον καὶ τὸ τμήμα τῆς σφαίρας,

ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων συ|ναμφοτέροις τῷ τε κῶνῳ | καὶ  
 τῷ τμήματι τῆς σφαίρας | μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις |  
 τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. τεμνέσθω | δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ Φ, Χ  
 σημεῖα οὕτως, | ὥστε τὴν μὲν ΑΧ εἶναι ἴσην τῇ ΧΗ, | τὴν  
 5 δὲ ΗΦ τρίτον μέρος τῆς | ΑΗ· ἔσται δὲ τοῦ μὲν κυλίνδρου |  
 κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ διὰ τὸ διχο|τομίαν εἶναι τοῦ  
 ΑΗ ἄξονος. | ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α ση|μεῖον τὰ εἰ-  
 ρημένα μεγέθη, ἔσται, | ὥς ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφοτέρων | τὸν  
 τε κῶνον, οὗ διάμετρος τῆς βάσεως ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμήμα |  
 10 τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΘΑ | πρὸς ΑΧ. καὶ ἐπεὶ  
 <τριπλ>ασία ἐστὶν | ἡ ΗΑ τῆς ΗΦ, τρίτον μέρος ἐστὶν |  
 <τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΦ τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ. ἴσον δὲ> | τῷ ὑπὸ ΑΗ,  
 ΗΓ τὸ ἀπὸ ΗΒ· ἔσται δὲ καὶ τοῦ | ἀπὸ τῆς ΒΗ τρίτον μέρος  
 τὸ | ὑπὸ ΓΗ, <ΗΦ>. . . . . | . . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . | τὸ  
 15 δὲ ἀπὸ ΑΗ . . . . . | . . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . . . | . . . . .  
 . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . .  
 τῆς . . . . . | . . . . . | . . ΚΑ . . . . . |  
 . . . . . | . . . . . οὕτως <ὁ κύλινδρος, | οὗ βάσις ὁ  
 περὶ> διάμετρον | <τὴν . . κύκλος> πρὸς τὸν . . . | . . . . .  
 20 <ὁ κύλινδρος, | οὗ> βάσις < . . . . ὁ περὶ> | διάμετρον τὴν ΚΑ  
 κύκλος πρὸς τὸν ΑΕΖ | κῶνον. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΑ πρὸς . . . . . |  
 . . . . . ἄρα ἡ . . . | . . . . . πρὸς τὸν κῶνον. | ἐ-  
 δείχθη δὲ καί, <ὥς ἡ ΘΑ> πρὸς ΑΧ, | οὕτως ὁ κύλινδρος,  
 οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρο|<ον> τὴν ΚΑ κύκλος <πρὸς τὸ> |  
 25 τμήμα <τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΔ | καὶ τὸν > κῶνον· καὶ ὥς  
 Η 473 ἄρα ἡ ΘΑ | πρὸς συναμφοτέρας τὰς . . Φ. | . . . . .  
 . . τὸ ΑΒΔ | <τμήμα τῆς σ>φαίρ<ας> . . . τα . . . | . . . . .  
 . . . καὶ . . . . . | . . . . . ὅ τε | . . . . .  
 . . . . . | ὥς τὸ ΑΒΔ τμήμα πρὸς τὸν κύλιν-



θὰ ἰσορροπήσῃ καὶ ὁ κύλινδρος, αὐτοῦ μένων, τὸ ἄθροισμα τοῦ κώ-  
νου καὶ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν  
ζυγὸν κατὰ τὸ Θ. Ἐὰς τέμνηται δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ σημεῖα Φ, Χ  
οὕτως, ὥστε ἡ μὲν  $AX = XH$ , ἡ δὲ  $H\Phi = \frac{1}{3} AH$ . θὰ εἶναι  
λοιπὸν τοῦ μὲν κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, διότι τοῦτο  
τέμνει εἰς τὸ μέσον τὸν ἄξονα ΑΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἰσορροποῦσιν  
περὶ τὸ σημεῖον Α τὰ εἰρημένα μεγέθη, θὰ εἶναι, ὡς ὁ κύλινδρος  
πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ κώνου, τοῦ ὁποῖου διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι  
ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμήμα τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ  $\Theta A : AX$ . Καὶ  
ἐπειδὴ ἡ  $HA = 3H\Phi$ , εἶναι  $GH \times H\Phi = \frac{1}{3} AH \times HG$ . Εἶναι δὲ  
τὸ  $AH \times HG = HB^2$  (Εὐκλ. VI, 8 πόρισ. VI, 17). θὰ εἶναι λοι-  
πὸν καὶ  $GH \times H\Phi = \frac{1}{3} BH^2$ .....

Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ  $\Theta A : AX$ , οὕτως ὁ κύλινδρος, τοῦ ὁποῖου  
βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ κύκλος πρὸς τὸ τμήμα τῆς  
σφαίρας τὸ ΑΒΔ καὶ τὸν κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ἡ  $\Theta A$  πρὸς τὸ ἄθροισμα  
τῶν ..... τὸ τμήμα ΑΒΔ πρὸς τὸν κύλινδρον, τοῦ ὁποῖου βάσις

δρον, | οὗ ἐστι βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν | .. κύκλος),  
 ἄξων <δὲ ὁ> αὐτός, | οὕτως>..... X πρὸς .... ὥς  
 H 474 δὲ ὁ> | κύλινδρος, οὗ βάσις <ὁ περὶ διάμετρον> τὴν K<A  
 κύκλος πρὸς τὸν> ABA | κῶνον, <οὕτως>..... | . τω  
 5 ..... πρὸς . | . B ..... η | . Φ..... |  
 ὥς ἡ ..... | ..... | ἡ A . τῇ .....  
 ..... | ..... καὶ ἡ HG καὶ  
 .....

η'

10 <Ὅμοίως δὲ θεωρεῖται διὰ τοῦ <αὐτοῦ τρόπου καί, ὅτι>  
 πᾶν τμήμα <σφαίροειδός> ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ | ὁρθῶ  
 πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι  
 καὶ | ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν | λόγον, ὃν ἔχει συναμ-  
 φότερος ἢ τε | ἡμίσεια τοῦ ἄξονος τοῦ <σφαίρο<ειδός>  
 15 καὶ | <τοῦ ἄξονος> τοῦ | <ἀντι>κειμέ|ρου <τμήμα|τος> πρὸς |  
 τὸν ἄξονα τοῦ | ἀντικειμέ|ρου τμήματος>.

θ'

<Παντὸς τμήματος σφαίρας | τὸ κέντρον τοῦ βάρους  
 ἐστὶν ἐπὶ τῆς | εὐθείας, ἣ ἐστὶν ἄξων τοῦ τμήματος, | διη-  
 20 ρημένης οὕτως, ὥστε τὸ | μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ  
 τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν | τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν  
 ἔχει συ|ναμφότερον ὃ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετρα-  
 πλασία τοῦ | ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ | τμήματι πρὸς  
 συναμφότερον τὸν | τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν | δι-  
 25 πλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ | ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπε-  
 ριε|χομένου.> ..... | ..... | .....  
 ..... | ..... | ..... <τοῦ δὲ | ἀπο-

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον..... κύκλος, ἄξων δὲ ὁ αὐτός, οὕτως.....  
 ὥς δὲ ὁ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον  
 ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΔ, οὕτως.....

### 8

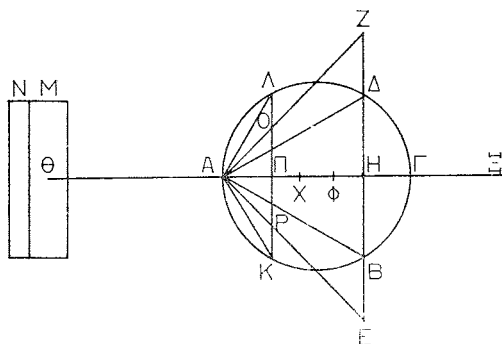
Ὅμοίως δὲ ἐξετάζεται διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου καί, ὅτι πᾶν  
 τμήμα ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου  
 καθέτου ἐπὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα  
 καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα,  
 τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἄξονος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς καὶ τοῦ  
 ἄξονος τοῦ ὑπολοίπου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ὑπολοίπου  
 τμήματος.

### 9

Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ  
 τῆς εὐθείας, ἣ ὁποία εἶναι ἄξων τοῦ τμήματος, διηρημένης οὕτως,  
 ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος πρὸς τὸ  
 ὑπόλοιπον νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα, τοῦ ἄξο-  
 νος τοῦ τμήματος καὶ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ εἰς τὸ ὑπό-  
 λοιπον τμήμα, πρὸς τὸ ἄθροισμα, καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος  
 καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὸ ὑπόλοιπον  
 τμήμα..... διάμετρος

- τε>τμηκότος <τὸ τμημα ἐπι|πέδον ἢ ΒΔ, ἢ δὲ> ΓΑ εὐθεΐα  
 Η 476 διά<|με>τρ<ος ἔστω ὀρθή πρὸς τήν> | ΒΔ καὶ τετμη<σθω  
 κ>ατ<ὰ τὸ Η ση|μειον ὥ>στε τοῦ τμημ<ατος, οὗ κορυ>|φή τὸ  
 Α σημειον, ἄξων <ἔσται ἢ ΑΗ,> | τ<οῦ δ>ὲ ἀντικειμέν<ον  
 5 ἄξων ἢ | Η>Γ. τετμήσθω δὲ ἢ ΑΗ κατὰ <τὸ Χ, | ὥ>στε>  
 εἶναι, ὡς τήν <Α>Χ πρὸς ΧΗ, <οὗ|τως τήν τε ΑΗ καὶ τήν>  
 τετρα<|πλασί>αν τῆς ΗΓ πρὸς τήν ΑΗ καὶ | τήν διπλασίαν  
 <τῆς | ΗΓ. λ>έγω, ὅτι | <τοῦ τ>μ<ήματος, | οὗ> κορυφή | τὸ  
 Α ση|μειον, | <κ>έντρον τοῦ | βάρους ἐστι | τὸ> Χ | . . . . . |  
 10 . . . . . | φοτέροις . . . τμημ . . . , οὗ κορυ<|φή>. . . ση-  
 μειον . . . . . ΗΑ . . | ἐχ . . . . . | . . . . . τήν  
 Η. λόγον | . . . . . κέντρον . . . | . . . . . | . . . Χ.  
 εἰ . . τμηθη . . ρ . . . . . | . . . . . χηματ . . μει . . | . . . ω .  
 . . ἐν δὴ . . τέρ . . . . . | . . . καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΑΓ, καὶ κείσ|θω  
 15 αὐτῇ ἴση ἢ ΑΘ καὶ τῇ ἐκ τοῦ | κέντρον τῆς σφαίρας ἴση ἢ  
 ΓΞ, | καὶ νοεῖσθω ζυγὸς ἢ ΓΘ, μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ Α, γε-  
 γράφθω δὲ καὶ κύκλος | ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀποτέμνον|τι τὸ  
 τμημα κέντρῳ μὲν τῷ Η, | διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΑΗ, καὶ  
 | ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου <γε>γράφ|θω κῶνος κορυφήν ἔχων  
 20 τὸ Α σημειον,> | πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου | αἱ ΑΕ,  
 ΑΖ, καὶ ἦχθω τις τῇ ΕΖ πα|ράλληλος ἢ ΚΑ καὶ συμβαλλέ-  
 τω τῇ | μὲν περιφερείᾳ τοῦ τμήματος | κατὰ τὰ Κ, Α, ταῖς  
 δὲ τοῦ ΑΕΖ κῶ|νον πλευραῖς κατὰ τὰ Ρ, Ο, τῇ δὲ | ΑΓ κατὰ  
 τὸ Π. ἐπεὶ δὴ ἐστίν, ὡς ἢ ΑΓ | πρὸς ΑΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΑ  
 25 πρὸς τὸ ἀπὸ | ΑΠ, καὶ ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΚΑ ἴσα τὰ ἀ|πὸ  
 τῶν ΑΠ, ΠΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΠ | τὸ ἀπὸ ΠΟ, ἐπεὶ καὶ  
 τῷ ἀπὸ ΑΗ τὸ ἀ|πὸ τῆς ΕΗ ἐστίν ἴσον, ὡς ἄρα ἢ ΓΑ πρὸς  
 ΑΠ, | οὕτως τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΠ. | ὡς δὲ τὰ  
 ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, | οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διά-

δὲ τοῦ ἀποτμήσαντος τὸ τμήμα ἐπιπέδου ἡ ΒΔ, ἔστω δὲ ἡ εὐ-  
θεῖα ΓΑ διάμετρος κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ ἄς τμηθῇ κατὰ τὸ  
σημεῖον Η· ὥστε τοῦ τμήματος τοῦ ὁποίου κορυφή εἶναι τὸ ση-  
μεῖον Α, θὰ εἶναι ἄξων ἡ ΑΗ, τοῦ δὲ ὑπολοίπου τμήματος θὰ εἶναι  
ἄξων ἡ ΗΓ. Ἄς τμηθῇ δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Χ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ἡ  
 $AX : XH = AH + 4HG : AH + 2HG$ . Λέγω, ὅτι τοῦ τμή-  
ματος τοῦ ὁποίου κορυφή εἶναι τὸ σημεῖον Α, κέντρον τοῦ βάρους  
εἶναι τὸ Χ.



καὶ ἄς ἐκβληθῇ ἡ ΑΓ, καὶ ἄς ληφθῇ ΑΘ = ΑΓ καὶ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ἄς ληφθῇ Ἰση ἡ ΓΞ, καὶ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ἡ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἄς γραφῇ δὲ κύκλος εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτεμένον τὸ τμήμα μὲ κέντρον μὲν τὸ Η, ἀκτῖνα δὲ Ἰσην πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου ἄς γραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ τοῦ κώνου (γεννήτριαι) ἔστωσαν αἱ ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἄς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ ΚΑ καὶ ἄς συναντᾷ αὕτη τὸ τόξον τοῦ τμήματος κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, τὰς δὲ πλευράς τοῦ ΑΕΖ κώνου κατὰ τὰ Ρ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Π. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὥς ἡ ΑΓ : ΑΠ = ΚΑ² : ΑΠ² (Εὐκλ. ΙΙΙ, 31. VI, 8 πόρισ. V, ὅρισ. 9), καὶ εἶναι ΚΑ² = ΑΠ² + ΠΚ² (Εὐκλ. Ι, 47), καὶ ΑΠ² = ΠΟ² (Εὐκλ. VI, 4), ἐπειδὴ εἶναι ΑΗ² = ΕΗ², εἶναι ὅρα ὥς ἡ ΓΑ : ΑΠ = ΚΠ² + ΠΟ² : ΟΠ². Ὡς δὲ ΚΠ² + ΠΟ² :

- Η 477 μετρον τὴν ΚΑ | καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ πρὸς τὸν  
κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, | καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ
- Η 478 τῇ ΑΘ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς | ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ διάμετρον  
τὴν | ΚΑ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος πρὸς τὸν  
5 περὶ τὴν ΟΡ. ἐπεὶ οὖν, ὡς οἱ | περὶ διαμέτρους τὰς ΚΑ,  
ΟΡ κύκλοι | πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, | οὕτως ἡ ΑΘ  
πρὸς ΠΑ, μετακείσθω ὁ περὶ | διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος  
καὶ κείσθω | τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι |  
αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς | ΑΠ, οὕτως ὁ  
10 κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν | ΚΑ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν  
ΟΡ αὐτοῦ μένοντες πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ | διάμετρον  
τὴν ΟΡ μετενεχθέντα καὶ | τεθέντα τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ,  
ὥστε | κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ | Θ· ἰσόρροποι  
ἄρα οἱ κύκλοι ὃ τε ἐν τῷ | τμήματι τῷ ΒΑΔ καὶ ὁ ἐν τῷ
- 15 ΑΕΖ | <κῶνῳ τῷ ἐν τῷ ΑΕΖ κῶνῳ περὶ> | τὸ Α· ὁμοίως  
δὲ καὶ πάντες οἱ κύκλοι | οἱ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι καὶ ἐν τῷ |  
ΑΕΖ κῶνῳ αὐτοῦ μένοντες κατὰ | τὸ Α σημεῖον ἰσόρροποι  
πᾶσι τοῖς | κύκλοις τοῖς ἐν τῷ ΑΕΖ κῶνῳ με|τενεχθεῖσι  
καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐ-|
- 20 τῶν τοῦ βάρους τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΔ | τμήμα τῆς σφαί-  
ρας καὶ ὁ ΑΕΖ | κῶνος ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημει|ον αὐτοῦ  
μένοντα τῷ ΕΑΖ κῶνῳ | μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ|  
κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ.  
ἔστω δὲ τῷ κῶνῳ | τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ | διάμετρον
- 25 τὴν ΕΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ | τὸ Α σημεῖον, ἴσος κύλινδρος ὁ |  
ΜΝ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΗ κατὰ τὸ | Φ, ὥστε τετραπλασίαν  
εἶναι τὴν | ΑΗ τῆς ΦΗ· τὸ Φ ἄρα σημεῖον κέντρον | ἐστὶ  
Η 480 τοῦ βάρους τοῦ ΕΑΖ κῶνον· τοῦτο γὰρ προγράφεται. καὶ  
τετμήσθω | ἔτι ὁ ΜΝ κύλινδρος ἐπιπέδῳ | τέμνοντι πρὸς

ΠΟ<sup>2</sup>, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ σὺν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ (Εὐκλ. XII, 2), καὶ εἶναι ἡ ΓΑ = ΑΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ κύκλος σὺν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ κύκλον, πρὸς τὸν κύκλον περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὰς διαμέτρους ΚΛ, ΟΡ κύκλων πρὸς τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ κύκλον, οὕτως ἡ ΑΘ : ΠΑ, ἃς μεταφερθῇ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ κύκλος καὶ ἃς τεθῇ ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ κύκλος, σὺν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ· θὰ εἶναι ἄρα ἐν ἰσορροπίᾳ οἱ κύκλοι, καὶ ὁ εἰς τὸ τμήμα ΒΑΔ σὺν τὸν εἰς τὸν κῶνον ΑΕΖ, πρὸς τὸν εἰς τὸν κῶνον ΑΕΖ, περὶ τὸ σημεῖον Α. Ὁμοίως δὲ θὰ εἶναι ἐν ἰσορροπίᾳ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν κύκλων, οἱ ὅποιοι ἀπαρτίζουσι τὸ τμήμα ΒΑΔ καὶ τὸν κῶνον ΑΕΖ, ἐν ᾧ θὰ μένωσιν αὐτοῦ, περὶ τὸ σημεῖον Α, πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν κύκλων, οἱ ὅποιοι ἀπαρτίζουσι τὸν κῶνον ΑΕΖ, ὅταν μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ τμήμα ΑΒΔ τῆς σφαίρας σὺν τὸν κῶνον ΑΕΖ ἰσορροποῦσι, περὶ τὸ σημεῖον Α, αὐτοῦ μένοντα, τὸν κῶνον ΕΑΖ μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἐστω δὲ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΕΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Α, ἴσος κύλινδρος ὁ Μ + Ν, καὶ ἃς τμηθῇ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Φ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΗ = 4ΦΗ· τὸ σημεῖον ἄρα Φ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κώνου ΕΑΖ· διότι τοῦτο ἔχει προ- αποδειχθῇ (Σημ. Ἀναφέρεται εἰς τὸ λήμμα 10. Ἡ ἀπόδειξις δὲν ἐσώ- θη). Καὶ ἃς τμηθῇ ἀκόμη ὁ κύλινδρος Μ + Ν δι' ἐπιπέδου καθέτου

ὀρθάς, <ὥστε τὸν  $M$  κύλιν>|δρον ἰσορροπεῖν τῷ  $EAZ$  κώνω. |  
 ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπος ὁ  $EAZ$  κῶνος | καὶ τὸ  $ABA$  τμήμα αὐτοῦ  
 μένον|τα τῷ  $EAZ$  κώνω μετενεχθέντι | καὶ τεθέντι τοῦ  
 ζυγοῦ κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥσ|τε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους | τὸ  
 5  $\Theta$ , καὶ ἐστὶν τῷ  $EAZ$  κώνω ἴσος | ὁ  $MN$  κύλινδρος, καὶ  
 κεῖται ἐκά|τερος τῶν  $M$ ,  $N$  κυλίνδρων κατὰ | τὸ  $\Theta$ , καὶ  
 ἰσόρροπος ὁ  $MN$  κύλιν|δρος, ἑκατέρω, ἰσόρροπος καὶ ὁ  $N$   
 τῷ | τμήματι τῆς σφαίρας κατὰ | τὸ  $A$  σημεῖον. καὶ [ἐπεὶ]  
 ἐστὶν, ὥς τὸ |  $BAD$  τμήμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν | κῶνον,  
 10 οὗ βάσις ὁ περὶ διάμε|τρον τὴν  $BA$  κύκλος, κορυφή δὲ | τὸ  
 $A$  σημεῖον, οὕτως ἡ  $EH$  πρὸς  $HG$ . τοῦ|το γὰρ προγράφεται.  
 ὥς δὲ ὁ  $BAD$  | κῶνος πρὸς τὸν  $EAZ$  κῶνον, οὕτως ὁ | κύ-  
 κλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν  $BA$  | πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ  
 διάμε|τρον τὴν  $EZ$ , ὥς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν | κύκλον,  
 15 οὕτως τὸ ἀπὸ  $BH$  πρὸς τὸ ἀπὸ |  $HE$ , καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ  
 $BH$  ἴσον τὸ | ὑπὸ  $GH$ ,  $HA$ , τῷ δὲ ἀπὸ  $HE$  ἴσον τὸ | ἀπὸ  
 $HA$ , ὥς δὲ τὸ ὑπὸ  $GH$ ,  $HA$  πρὸς τὸ | ἀπὸ  $HA$ , οὕτως ἡ  $GH$   
 πρὸς  $HA$ . ὥς ἄρα | ὁ  $BAD$  κῶνος πρὸς τὸν  $EAZ$  κῶνον, |  
 οὕτως ἡ  $GH$  πρὸς  $HA$ . ἐδείχθη δὲ καί, ὥς | ὁ  $BAD$  κῶνος  
 20 πρὸς τὸ  $BAD$  τμήμα, | οὕτως ἡ  $GH$  πρὸς  $HE$ . δι' ἴσον ἄρα,  
 ὥς τὸ  $BAD$  τμήμα | πρὸς τὸν  $EAZ$  κῶνον, οὕτως ἡ  $EH$   
 πρὸς |  $HA$ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς ἡ  $AX$  πρὸς  $XH$ , | οὕτως ἡ  
 $HA$  καὶ ἡ τετραπλασία | τῆς  $HG$  πρὸς τὴν  $AH$  καὶ τὴν  
 διπλα|σίαν τῆς  $HG$ , ἀνάπαλιν ἔσται, | ὥς ἡ  $HX$  πρὸς  $XA$ ,  
 25 οὕτως ἡ διπλασία | τῆς  $GH$  καὶ ἡ  $HA$  | πρὸς τὴν τετραπλῆν  
 τῆς  $GH$  καὶ τὴν |  $HA$ . συνθέντι, ὥς ἡ  $HA$  πρὸς  $AX$ , οὕτως |  
 H 482 ἡ ἑξαπλασία τῆς  $GH$  καὶ διπλα|σία τῆς  $HA$  πρὸς τὴν  $HA$   
 καὶ τετρα|πλῆν τῆς  $HG$ . καὶ τῆς μὲν ἑξαπλα|σίας τῆς  $HG$



ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ὁ κύλινδρος  $M$  νὰ ἰσορροπεῖ πρὸς τὸν κῶνον  $EAZ$ . Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κῶνος  $EAZ$  σὺν τῷ τμήμα  $AB\Delta$ , αὐτοῦ μένοντα, ἰσορροποῦσι πρὸς τὸν κῶνον  $EAZ$  μεταφερθέντα καὶ τεθέντα εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ  $\Theta$ , καὶ εἶναι πρὸς τὸν κῶνον  $EAZ$  ἴσος ὁ κύλινδρος  $M + N$  καὶ κεῖται ἑκάτερος τῶν κυλίνδρων  $M$ ,  $N$  κατὰ τὸ  $\Theta$ , καὶ ἰσορροπεῖ ὁ κύλινδρος  $M + N$  ἑκαστον ἀντιστοίχως, θὰ ἰσορροπεῖ καὶ ὁ κύλινδρος  $N$  πρὸς τὸ τμήμα τῆς σφαίρας περὶ τὸ σημεῖον  $A$ . Καὶ [ἐπειδὴ] εἶναι ὡς τὸ τμήμα τῆς σφαίρας  $BA\Delta$  πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποῖου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον  $BA$  κύκλος, κορυφή δὲ τὸ σημεῖον  $A$ , οὕτως ἢ  $\Xi H : H\Gamma$ · διότι τοῦτο ἔχει προαποδειχθῆ (θ. 7). Ὡς δὲ ὁ κῶνος  $BA\Delta$  πρὸς τὸν κῶνον  $EAZ$ , οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον  $BA$  πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον  $EZ$  (Εὐκλ. XII, 11), ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ  $BH^2 : HE^2$  (Εὐκλ. XII, 2), καὶ εἶναι πρὸς μὲν τὸ  $BH^2$  ἴσον τὸ ὀρθογώνιον  $\Gamma H \times HA$  (Εὐκλ. III, 31. VI, 8 πόρ.) καὶ  $HE^2 = HA^2$ , ὡς δὲ  $\Gamma H \times HA : HA^2 = \Gamma H : HA$ · εἶναι ἄρα ὡς ὁ κῶνος  $BA\Delta$  πρὸς τὸν κῶνον  $EAZ$ , οὕτως ἢ  $\Gamma H : HA$ . Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ὁ κῶνος  $BA\Delta$  πρὸς τὸ τμήμα  $BA\Delta$ , οὕτως ἢ  $\Gamma H : H\Xi$ · δι' ἴσου ἄρα εἶναι (δηλ. διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) ὡς τὸ τμήμα  $BA\Delta$  πρὸς τὸν κῶνον  $EAZ$ , οὕτως ἢ  $\Xi H : HA$  (Εὐκλ. V, 22). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι  $AX : XH = HA + 4H\Gamma : AH + 2H\Gamma$ , ἀνάπαλιν θὰ εἶναι, ὡς ἢ  $HX : XA = 2\Gamma H + HA : 4\Gamma H + HA$  (Εὐκλ. V, 7, πόρ.). Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ὡς  $HA : AX = 6\Gamma H + 2HA : HA + 4H\Gamma$  (Εὐκλ. V, 18). Καὶ

καὶ διπλασίας τῆς |  $HA$  ἢ  $HE$ , τῆς δὲ τετραπλασίας τῆς |  
 $HΓ$  καὶ τῆς  $HA$  τέταρτον μέρος | ἢ  $ΓΦ$ . τοῦτο γὰρ φανερόν·  
ὡς ἄρα | ἢ  $HA$  πρὸς  $AX$ , οὕτως ἢ  $EH$  πρὸς  $ΓΦ$ . ὥστε | καί,  
ὡς ἢ  $EH$  πρὸς  $HA$ , οὕτως ἢ  $ΓΦ$  πρὸς  $XA$ . | ἐδείχθη δὲ καί,  
<sup>5</sup> ὡς ἢ  $EH$  πρὸς  $HA$ , οὕτως | τὸ τμήμα, οὗ ἐστι κορυφή τὸ  
 $A$  σημεῖον, | βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν  $BD$  | κύκλος,  
πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἐστι κορυφή | τὸ  $A$  σημεῖον, βάσις δὲ ὁ  
περὶ διάμετρον τὴν  $EZ$  κύκλος· ὡς ἄρα τὸ  $BAD$  | τμήμα  
πρὸς τὸν  $EAZ$  κῶνον, οὕτως ἢ |  $ΓΦ$  πρὸς  $XA$ . καὶ ἐπεὶ ἰσόρ-  
<sup>10</sup> ροπος ὁ  $M$  | κύλινδρος τῷ  $EAZ$  κώνῳ κατὰ | τὸ  $A$ , καὶ ἐστι  
τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ  $\Theta$ , τοῦ δὲ  $EAZ$  κώνου  
| τὸ  $\Phi$ , ἔσται ἄρα, ὡς ὁ  $EAZ$  κῶνος πρὸς τὸν |  $M$  κύλινδρον,  
οὕτως ἢ  $\Theta A$  πρὸς  $A\Phi$ , τουτέστιν | ἢ  $ΓA$  πρὸς  $A\Phi$ . καὶ ἐστι  
τῷ  $EAZ$  κώνῳ | ἴσος ὁ  $MN$  κύλινδρος· διελόντι ἄρα, | ὡς  
<sup>15</sup> ὁ  $MN$  κύλινδρος πρὸς τὸν  $N$  κύλινδρον, οὕτως ἢ  $AG$  πρὸς  
 $ΓΦ$ . καὶ ἐστιν | ἴσος ὁ  $MN$  κύλινδρος τῷ  $EAZ$  κώνῳ· ὡς  
ἄρα ὁ  $EAZ$  κῶνος πρὸς τὸν  $N$  | κύλινδρον, οὕτως ἢ  $ΓA$  πρὸς  
 $ΓΦ$ , τουτέστιν | ἢ  $\Theta A$  πρὸς  $ΓΦ$ . ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τὸ  $BAD$   
τμήμα πρὸς τὸν  $EAZ$  κῶνον, οὕτως | ἢ  $ΓΦ$  πρὸς  $XA$ . δι-  
<sup>20</sup> ἴσον ἄρα ἔσται, ὡς τὸ  $ABD$  | τμήμα πρὸς τὸν  $N$  κύλινδρον,  
οὕτως ἢ |  $\Theta A$  πρὸς  $AX$ . καὶ ἐδείχθη ἰσόρροπον | τὸ  $BAD$   
τμήμα τῷ  $N$  κυλίνδρῳ | κατὰ τὸ  $A$ , καὶ ἐστι τοῦ  $N$  κυλίν-  
δρου | κέντρον βάρους τὸ  $\Theta$ . καὶ τοῦ  $BAD$  | ἄρα τμήματος  
κέντρον τὸ  $X$  σημεῖον. | [τὸ σχῆμα].

H 483

ι'

Ὅμοίως δὲ τούτοις θεωρεῖται καί, | ὅτι παντὸς τμήμα-  
τος σφαιροειδέος | τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς |  
H 484 εὐθείας, ἣ ἐστὶν ἄξων τοῦ τμήματος, | διηρημένης τῆς

εἶναι  $HΞ = \frac{1}{4} (6HΓ + 2HA)$ ,  $ΓΦ = \frac{1}{4} (4HΓ + HA)$ . διότι τοῦτο εἶναι φανερόν· εἶναι ἄρα ὡς ἡ  $HA : AX = ΞH : ΓΦ$  (Εὐκλ. V, 15). ὥστε καί, ὡς ἡ  $ΞH : HA = ΓΦ : XA$  (Εὐκλ. V, 16). Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ  $ΞH : HA$ , οὕτως τὸ τμήμα, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον A, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον BΔ κύκλος, πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον A, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον EZ κύκλος· ὡς ἄρα εἶναι τὸ BΔΔ τμήμα πρὸς τὸν EAZ κῶνον, οὕτως εἶναι ἡ  $ΓΦ : XA$ . Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος M ἰσορροπεῖ τὸν κῶνον EAZ, περὶ τὸ σημεῖον A, καὶ εἶναι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ κῶνου EAZ τὸ Φ, θὰ εἶναι ἄρα, ὡς ὁ κῶνος EAZ : τὸν κύλινδρον M = ΘA : AΦ = ΓA : AΦ. Καὶ εἶναι πρὸς τὸν κῶνον EAZ ἴσος ὁ κύλινδρος MN· διὰ διαιρέσεως ἄρα εἶναι κύλινδρος MN : κύλινδρον N = AΓ : ΓΦ (Εὐκλ. V, 17). Καὶ ὁ κύλινδρος MN εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κῶνον EAZ· ὡς ἄρα εἶναι ὁ κῶνος EAZ : τὸν κύλινδρον N = ΓA : ΓΦ = ΘA : ΓΦ. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τὸ τμήμα BΔΔ πρὸς τὸν κῶνον EAZ = ΓΦ : XA· δι' ἴσου ἄρα θὰ εἶναι, ὡς τὸ τμήμα AΒΔ : τὸν κύλινδρον N = ΘA : AX (Εὐκλ. V, 22). Καὶ ἐδείχθη ὅτι τὸ τμήμα BΔΔ ἰσορροπεῖ τὸν κύλινδρον N περὶ τὸ σημεῖον A, καὶ εἶναι τοῦ κυλίνδρου N κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ· καὶ τοῦ τμήματος ἄρα BΔΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον X. [τὸ σχῆμα]

Ὅμοίως δὲ πρὸς ταῦτα ἀποδεικνύεται καί, ὅτι παντὸς τμήματος ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ὁποία εἶναι ἄξων τοῦ τμήματος, διηρημένης τῆς εὐθείας,

εὐθείας, ὥστε | τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ  
 τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν | τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει  
 συ|γραμφότερον ὃ τε ἄξων τοῦ τμή|ματος καὶ ἡ τετραπλασία  
 τοῦ | ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ | τμήματι πρὸς συναμ-  
 5 φότερον τόν | τε ἄξωνα τοῦ τμήματος καὶ τὴν | διπλασίαν  
 τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ | ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριε|χομένον.

ια'

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου | <καί, ὅτι πᾶν τμήμα ἀμ-  
 βλυνωγίου κωνο|ειδέος> πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχον|τα  
 10 τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ | ἄξωνα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει  
 τὸν λόγον, | ὃν ἔχει συναμφότερος ὃ τε ἄξων | τοῦ τμήματος  
 καὶ ἡ τριπλασία | τῆς προσοῦσης τῷ ἄξωνι πρὸς συ|γραμφό-  
 τερον τόν τε ἄξωνα τοῦ τμή|ματος τοῦ κωνοειδοῦς καὶ τὴν  
 δι|πλασίαν τῆς προσοῦσης τῷ ἄξω|νι, κέντρον δὲ τοῦ βάρος  
 15 τοῦ ἀμβλυ|γωνίου κωνοειδέος τμηθέντος | τοῦ ἄξονος, <ὥ-  
 στε> τὸ πρὸς τῇ | κορυφῇ τμήμα πρὸς τὸ λοιπὸν | λόγον ἔχειν,  
 ὃν ἔχει ὃ τε τριπλάσιος | τοῦ ἄξονος <καὶ ἡ ὀκταπλασία> |  
 τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξωνα | αὐτοῦ τοῦ κωνοειδέος  
 καὶ τὴν τετρα|πλασίαν αὐτῆς τῆς προσκειμένης | πρὸς αὐ-  
 20 τόν· καὶ ἄλλων πλειόνων ἂ | . . . . . θεωρουμένων τὰ  
 | . . . . . περιλήφομεν ῥη . . . 'τως, | ἐπεὶ ὁ τρόπος ὑποδέδει-  
 κται διὰ τῶν | προειρημένων.

ιβ'

Ἐὰν εἰς πρίσμα | ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις | κύ-  
 25 λινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βά|σεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον  
 | τετραγώνοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν | λοιπῶν [παραλληλο-  
 Η 486 γράμμων] | τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομέ|νην, διὰ δὲ τοῦ

ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον νὰ ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος σὺν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ ὑπολοίπου μέρους τοῦ τμήματος, πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὸ ὑπόλοιπον τμήμα.

11

Ἐξετάζεται δὲ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης καί, ὅτι πᾶν τμήμα ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμήμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος σὺν τὸ τριπλάσιον τῆς εὐρισκομένης πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἄξονος, πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς σὺν τὸ διπλάσιον τῆς εὐρισκομένης πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἄξονος, κέντρον δὲ τοῦ βάθους τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ὁ ἄξων τμηθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τμήμα πρὸς τὸ λοιπὸν νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τὸ τριπλάσιον τοῦ ἄξονος σὺν τὸ ὀκταπλάσιον τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς σὺν τὸ τετραπλάσιον αὐτῆς τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτόν· καὶ ἄλλα περισσότερα . . . ἐξεταζόμενα διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου θὰ περιλάβωμεν . . ., ἐπειδὴ ἡ μέθοδος ἔχει ὑποδειχθῇ διὰ τῶν προλεχθέντων.

12

Ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν ἔχον βάσεις τετραγώνους ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὰς βάσεις πρὸς τὰ ἀπέναντι τετράγωνα, τὴν δὲ ἐπιφανείαν ἐφαπτομένην τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων [παράλληλογράμμων], διὰ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ

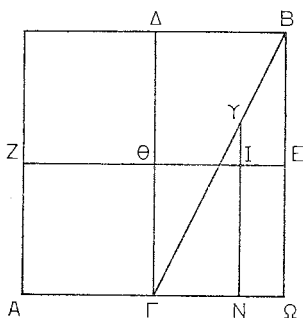
κέντρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι | βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς  
 πλεν| $\langle \rho\alpha\varsigma$  τοῦ ἀπεναντίον τετραγώνου ἐπίτε| $\rangle$ δον ἀχθῆ, ὅτι  
 τὸ ἀποτεμθὲν σχῆ|μα ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου |  $\langle \xi\kappa\tau\omicron\nu \rangle$   
 ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, | διὰ τοῦ τρόπου τούτου  
 5 θεωρεῖται. | δείξαντες δὴ ἀναχωρήσομεν | ἐπὶ τὴν διὰ τῶν  
 γεωμετρονμένων ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

νοείσθω | πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον | βάσεις καὶ ἐν τῷ  
 πρίσματι κύλιν|δρος ἐγγεγραμμένος, ὡς εἴρη|ται, τμηθέντος  
 δὲ τοῦ πρίσμα|τος διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ὀρ|θῷ πρὸς  
 10 τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμη|κὸς τὸ τμήμα τοῦ κυλίνδρου τοῦ |  
 μὲν πρίσματος τοῦ τὸν κύλινδρον | ἔχοντος τομῇ ἔστω τὸ  $AB$   
 παραλληλό|γραμμον, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀ|ποτετμηκός  
 τὸ τμήμα ἀπὸ | τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξο|νος ἡγμέ-  
 νου ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς | τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκός τὸ |  
 15 ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμήμα κοι|νὴ τομῇ ἔστω ἡ  $B\Gamma$  εὐθεῖα,  
 ἄξων | δὲ ἔστω τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ | κυλίνδρου ἡ  $\Gamma\Delta$   
 εὐθεῖα, καὶ τεμνέ|τω αὐτὴν ἡ  $EZ$  δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς, | καὶ  
 διὰ τῆς  $EZ$  ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$ · ποιή-  
 σει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ πρίσματι τομὴν | τετράγωνον, ἐν δὲ  
 20 τῷ κυλίνδρῳ | τομὴν κύκλον. ἔστω οὖν τοῦ μὲν | πρίσματος  
 τομῇ τὸ  $MN$  τετρά|γωνον, τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ  $\Xi O\Pi P$  |  $\langle \kappa\acute{\upsilon}$ -  
 κλος, καὶ ἐφαπτέσθω ὁ κύκλος  $\rangle$  | τῶν τοῦ τετραγώνου  
 πλευρῶν | κατὰ τὰ  $\Xi, O, \Pi, P$  σημεία, τοῦ δὲ | ἐπιπέδου τοῦ  
 ἀποτετμηκός | τὸ τμήμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου | καὶ τοῦ διὰ  
 25 τῆς  $EZ$  ἀχθέντος | ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸν ἄξονα | τοῦ  
 κυλίνδρου κοινὴ τομῇ ἔστω | ἡ  $K\Lambda$  εὐθεῖα· τέμνει δὲ αὐτὴν  
 δίχα | ἡ  $\Pi\Theta\Xi$ . ἤχθω δὲ τις εὐθεῖα ἐν τῷ |  $O\Pi P$  ἡμικυκλίῳ ἡ  
 H 488  $\Sigma T$  πρὸς ὀρθάς οὗ|σα τῇ  $\Pi X$ , καὶ ἀπὸ τῆς  $\Sigma T$  ἐπί|πεδον  
 ἀνασταθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν |  $\Xi\Pi$  ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα | τοῦ  
 30 ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστὶν ὁ  $\Xi O\Pi P$  κύ|κλος· ποιήσει δὴ τοῦτο

κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἀπέναντι τετραγώνου ἀχθῆ ἐπίπεδον, ὅτι τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου σχῆμα εἶναι τὸ ἐν ἔκτον τοῦ ὅλου πρίσματος, ἐξετάζεται διὰ τῆς μεθόδου ταύτης. Ἀφοῦ δὲ τὸ ἀποδείξωμεν δι' αὐτῆς θὰ προβῶμεν εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

Ἄς νοηθῇ πρίσμα ὀρθὸν ἔχον τετραγώνους βάσεις, καὶ εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος ἐγγεγραμμένος, ὡς ἐλέχθη, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ τὸ πρίσμα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ἔχει τμήσει τὸ τμήμα τοῦ κυλίνδρου, τοῦ μὲν πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν κύλινδρον ἔστω τομὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος τμήσει τὸ τμήμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τμήσαν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τὸ τμήμα κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἄξων δὲ τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΔ, καὶ ἄς τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως, ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τῆς ΕΖ ἄς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸ πρίσμα τομὴν τετράγωνον, εἰς δὲ τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον. Ἐστω λοιπὸν τοῦ μὲν πρίσματος τομὴ τὸ τετράγωνον ΜΝ, τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ κύκλος ΕΟΠΡ, καὶ ἄς ἐφαπτηται ὁ κύκλος τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Ο, Π, Ρ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος τμήσει τὸ τμήμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΖ καθέτως ἐπὶ τὸν ἄξωνα τοῦ κυλίνδρου, κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΚΛ· τέμνει δὲ αὐτὴν εἰς τὸ μέσον ἡ ΠΘΞ. Ἄς ἀχθῇ δὲ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ, ἡ ΣΤ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΧ, καὶ ἀπὸ τῆς ΣΤ ἀφοῦ ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΞΠ ἄς ἐκβληθῇ τοῦτο ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ κύκλος ΕΟΠΡ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς τὸν ἡμικύλινδρον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ, ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ πρίσματος, τομὴν

ἐν τῷ ἡμικυλίνδρῳ, οὗ ἐστὶ βάσις τὸ  $ΟΠΡ$  ἡμικύκλιον,  
ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ πρίσματος, τομὴν παραλληλόγραμμον,  
οὗ ἔσται μία μὲν πλευρὰ ἡ ἴση τῇ  $ΣΤ$ , ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ

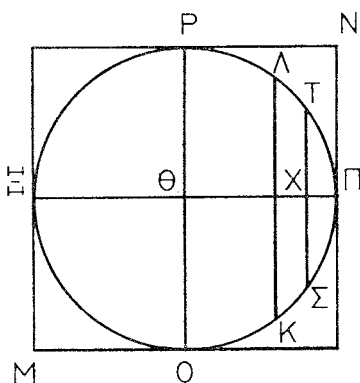


κυλίνδρου πλευρᾷ, ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀπο-  
5 τετμημένῳ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν παραλληλόγραμμον,  
οὗ ἐστὶν ἡ μὲν ἑτέρα πλευρὰ ἴση τῇ  $ΣΤ$ , ἡ δὲ ἑτέρα τῇ  $ΝΥ$ .  
ἔστω δὲ οὕτως ἡ  $ΝΥ$  ἡγμένη ἐν τῷ  $ΔΕ$  παραλληλογράμ-  
μῳ παράλληλος οὕσα τῇ  $ΒΩ$  ἴσην ἀπολαμβάνουσα τὴν  $ΕΙ$   
τῇ  $ΠΧ$ . καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ  $ΕΓ$ , καὶ πα-  
10 ράλληλος ἡ  $ΝΙ$  τῇ  $ΘΓ$ , καὶ διηγμένοι εἰσὶν αἱ  $ΕΘ$ ,  $ΓΒ$ ,  
ἔστιν, ὥς ἡ  $ΕΘ$  πρὸς  $ΘΙ$ , οὕτως ἡ  $ΩΓ$  πρὸς  $ΓΝ$ , τουτέστιν  
ἡ  $ΒΩ$  πρὸς  $ΥΝ$ . ὥς δὲ ἡ  $ΒΩ$  πρὸς  $ΥΝ$ , οὕτως τὸ παραλλη-  
λόγραμμον τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γε-  
νόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυ-  
15 λίνδρου ἀμφοτέρων γὰρ τῶν παραλληλογράμμων ἡ αὐτὴ  
πλευρὰ ἐστὶν ἡ  $ΣΤ$ . καὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΕΘ$  τῇ  $ΘΠ$ , ἡ δὲ  $ΙΘ$   
τῇ  $ΧΘ$ . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΠΘ$  τῇ  $ΘΞ$ , ὥς ἄρα ἡ  $ΘΞ$   
πρὸς  $ΘΧ$ , οὕτως τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ  
ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ  
20 ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου.



ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

παραλληλόγραμμοι, τοῦ ὁποῖου ἡ μία μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΣΤ, ἡ δὲ ἄλλη θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου (γεννήτρια), θὰ σχηματίσῃ δὲ καὶ εἰς τὸ τμήμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν παραλληλόγραμμοι, τοῦ ὁποῖου ἡ μὲν ἄλλη πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΣΤ, ἡ δὲ ἄλλη πρὸς τὴν ΝΥ· ἔστω δὲ ὅτι ἔχει ἀχθῆ ἡ ΝΥ κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς τὸ παραλληλόγραμμοι ΔΕ, ὥστε νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΩ καὶ νὰ δίδῃ τὴν ΕΙ (τοῦ πρώτου σχήματος) ἴσην πρὸς τὴν ΠΧ (τοῦ δευτέρου σχήματος). Καὶ ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμοι, καὶ ἡ ΝΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΘΓ, καὶ ἔχουσιν ἀχθῆ αἱ ΕΘ, ΓΒ, εἶναι ὥς ἡ  $EΘ : ΘΙ = ΩΓ : ΓΝ = ΒΩ : ΥΝ$  (Εὐκλ. VI, 4). Ὡς δὲ ἡ  $ΒΩ : ΥΝ$ , οὕτως τὸ παραλληλόγραμμοι τὸ γενόμενον εἰς τὸν ἡμικύλινδρον πρὸς τὸ γενόμενον εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου (Εὐκλ. VI, 1)· διότι καὶ τῶν δύο παραλληλο-



γράφμων εἶναι ἡ πλευρὰ ΣΤ ἡ αὐτὴ καὶ εἶναι  $E\Theta = \Theta\Pi$ ,  $I\Theta = X\Theta$ · καὶ ἐπειδὴ εἶναι  $\Pi\Theta = \Theta\Xi$ , εἶναι ἄρα ὥς ἡ  $\Theta\Xi : \Theta X$ , οὕτως τὸ γινόμενον παραλλήλογραμμον εἰς τὸν ἡμικύλινδρον πρὸς τὸ γινόμενον εἰς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπόστημα.

νοεῖσ|θω μετακείμενον τὸ ἐν τῷ | τμήματι παραλληλό-  
 γραμμον | καὶ κείμενον κατὰ τὸ  $\Xi$ , ὥστε | κέντρον εἶναι  
 αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ  $\Xi$ , | καὶ ἔτι νοεῖσθω ζυγὸς ὁ  $\Pi\Xi$ , μέ-  
 σον | δὲ αὐτοῦ τὸ  $\Theta$ . ἰσορροπεῖ δὴ περὶ | τὸ  $\Theta$  σημεῖον τὸ  
 5 παραλληλόγραμ|μον τὸ ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτ|οῦ μένον  
 H 490 τῷ παραλληλογράμμῳ | τῷ γενομένῳ ἐν τῷ ἀποτμήμα|τι  
 τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρον μετενεχθέν|τι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ  
 κατὰ τὸ |  $\Xi$  οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ | βάρους  
 τὸ  $\Xi$  σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἐστι | τοῦ μὲν παραλληλογράμμου  
 10 τοῦ | γενομένου ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ | κέντρον τοῦ βάρους τὸ  
 $X$ , τοῦ δὲ πα|ραλληλογράμμου τοῦ γενομένου | ἐν τῷ τμήματι  
 τῷ ἀποτμηθέν|τι μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ | βάρους τὸ  
 $\Xi$ , καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον | ἢ  $\Xi\Theta$  πρὸς  $\Theta X$ , ὃν τὸ παραλ-  
 ληλόγραμ|μον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ  $X$ ,  
 15 πρὸς τὸ παραλληλό|γραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον | εἶναι τοῦ  
 βάρους τὸ  $\Xi$ , ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ  $\Theta$  τὸ παραλληλόγραμ-  
 μον, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $X$ , τῷ παραλληλογράμμῳ,  
 οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Xi$ . ὁμοίως δὲ | δειχθήσεται, ὅτι καί,  
 ὅταν ἄλλη τις | ἀχθῇ ἐν τῷ  $O\Pi P$  ἡμικυκλίῳ πρὸς | ὀρθὰς  
 20 τῇ  $\Pi\Theta$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀ|χθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ | ὀρθὸν  
 πρὸς τὴν  $\Pi\Theta$  καὶ ἐκβληθῇ ἐ|φ' ἐκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ,  
 ἐ|ν ᾧ ἐστὶν ὁ  $\Xi O\Pi P$  κύκλος, [ὅτι] τὸ γινόμε|νον παραλληλό-  
 γραμμον ἐν τῷ | ἡμικυλινδρίῳ ἰσορροπον περὶ | τὸ  $\Theta$  σημεῖον  
 αὐτοῦ μένον τῷ πα|ραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ | ἐν τῷ  
 25 τμήματι τῷ ἀποτμηθέν|τι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρον μετενεχθέν|τι  
 καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ |  $\Xi$  οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι  
 αὐτοῦ | τοῦ βάρους τὸ  $\Xi$  σημεῖον. καὶ πάντα | ἄρα τὰ παραλ-  
 ληλόγραμμα τὰ γενό|μενα ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ | μέ-  
 νοντα ἰσορροπήσει περὶ τὸ |  $\Theta$  σημεῖον πᾶσι τοῖς παραλλη-

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Ἄς νοηθῇ μετατιθέμενον τὸ εἰς τὸ τμήμα παραλληλόγραμμον καὶ τιθέμενον κατὰ τὸ  $\Xi$ , ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ  $\Xi$ , καὶ ἀκόμῃ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ἡ  $\Pi\Xi$ , μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ  $\Theta$ . θὰ ἰσορροπήσῃ λοιπὸν περὶ τὸ σημεῖον  $\Theta$  τὸ εἰς τὸν ἡμικύλινδρον παραλληλόγραμμον, αὐτοῦ μένον, πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον εἰς τὸ ἀποτμήμα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, τὸ μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ  $\Xi$  οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ σημεῖον  $\Xi$ . Καὶ ἐπειδὴ εἶναι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου εἰς τὸν ἡμικύλινδρον κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $X$ , τοῦ δὲ παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου εἰς τὸ τμήμα, τὸ ὅποιον ἀπετμήθη καὶ μετεφέρθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ  $\Xi$ , καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ  $\Xi\Theta : \Theta X$ , ὃν ἔχει τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου εἴπομεν, ὅτι κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $X$ , πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου εἴπομεν, ὅτι κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $\Xi$ , θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα περὶ τὸ σημεῖον  $\Theta$  τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $X$ , πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ  $\Xi$ . Ὅμοίως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὅταν καὶ ἄλλῃ τις εὐθεῖα ἀχθῇ εἰς τὸ ἡμικύκλιον  $ΟΠΡ$  κάθετος ἐπὶ τὴν  $\Pi\Theta$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $\Pi\Theta$  καὶ ἐκβληθῇ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ ὅποιον ὑπάρχει ὁ κύκλος  $\Xi ΟΠΡ$ , [ ὅτι ] τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον εἰς τὸν ἡμικύλινδρον, αὐτοῦ μένον, θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον  $\Theta$ , τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον εἰς τὸ τμήμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ  $\Xi$  οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον  $\Xi$ . Καὶ ὅλα (τὸ ἄθροισμα) ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα εἰς τὸν ἡμικύλινδρον, ἐὰν μείνωσιν αὐτοῦ, θὰ ἰσορροπήσωσι περὶ τὸ σημεῖον  $\Theta$ , πρὸς ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα εἰς τὸ τμήμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου,

λο|γράμμοις τοῖς γενομένοις ἐν | τῷ τμήματι τῷ ἀποτμη-  
θέντι | ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενηνεγμέ|νοις καὶ κειμένοις τοῦ  
ζυγοῦ κατὰ | τὸ  $\Xi$  σημεῖον· ὥστε ἰσορροπεῖν καὶ τὸ ἡ|μικυ-  
λίνδριον αὐτοῦ μένον περὶ | τὸ  $\Theta$  σημεῖον τῷ τμήματι τῷ  
H 492 ἀ|ποτμηθέντι μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ  $\Xi$   
οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι | αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ  $\Xi$  σημεῖον.

ιγ'

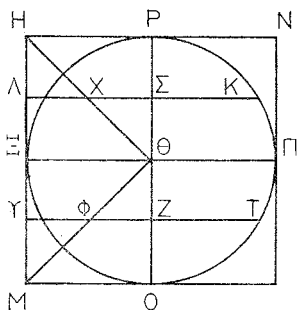
Ἔστω δὴ πάλιν τὸ <ὀρθὸν πρὸς> τὸν ἄ|ξονα παραλλη-  
λόγραμμον τὸ  $MN$  | καὶ ὁ κύκλος <ὁ>  $\Xi O$  < $ΠΡ$ >, καὶ ἐπε-  
10 ζ<εύχθω>|σαν αἱ  $\Theta M$ ,  $\Theta H$ , καὶ ἀνεστάτω ἀπ' | αὐτῶν ἐπί-  
πεδα ὀρθὰ πρὸς τὸ ἐπί|πεδον, ἐν ᾧ ἐστὶ τὸ  $OΠΡ$  ἡμικύκλιον,  
καὶ | ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα τὰ | εἰρημένα ἐπίπεδα· ἔσται  
δὴ τι | πρίσμα βάσιν μὲν ἔχον τηλικαύ|την, ἡλίκη ἐστὶ τὸ  
 $\Theta MH$  τρίγωνον, | ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ κυλίν|δρου, καὶ  
15 ἐστὶ τὸ πρίσμα τοῦτο τέταρτον | μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος  
τοῦ | περιέχοντος τὸν κύλινδρον. ἤχθωσαν | δέ τινες εὐθεῖαι |  
ἐν τῷ  $OΠΡ$  ἡμικυ|κλίῳ καὶ ἐν τῷ  $MN$  τετραγώνῳ | αἱ  $ΚΛ$ ,  
 $ΤΥ$  ἴσον ἀπέχουσαι τῆς |  $ΠΞ$ · τέμνουσιν δὴ αὐταὶ τὴν μὲν |  
τοῦ  $OΠΡ$  ἡμικυκλίου περιφέρειαν | κατὰ τὰ  $Κ$ ,  $Τ$  σημεία,  
20 τὴν δὲ  $ΟΡ$  | διάμετρον κατὰ τὰ  $Σ$ ,  $Ζ$ , τὰς δὲ  $\Theta H$ , |  $\Theta M$  κατὰ  
τὰ  $\Phi$ ,  $Χ$ , καὶ ἀνεστάτω ἀ|πὸ τῶν  $ΚΛ$ ,  $ΤΥ$  ἐπίπεδα ὀρθὰ | πρὸς  
τὴν  $ΟΡ$  καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐ|κάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ  
ἐστὶν ὁ | < $\Xi OΠΡ$  κύκλος· ποιήσει δὴ τὸ ἕτερον ἐν> | μὲν τῷ  
ἡμικυλινδρίῳ, οὗ βάσις | μὲν ἐστὶν τὸ  $OΠΡ$  ἡμικύκλιον,  
25 ὕψος | δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τομὴν πα|ραλληλόγραμμον,  
οὗ ἐστὶν μία μὲν | πλευρὰ ἴση τῇ  $ΚΣ$ , ἡ δὲ ἑτέρα | ἴση τῷ  
ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἐν | δὲ τῷ πρίσματι τῷ  $\Theta ΗΜ$  ὁμοί|ως  
παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται | μία μὲν ἴση τῇ  $ΛΧ$ , ἡ δὲ ἑτέρα

μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ σημεῖον  $\Xi$ . ὥστε θὰ ἰσορροπήσῃ καὶ ὁ ἡμικύλινδρος, αὐτοῦ μένων, περὶ τὸ σημεῖον  $\Theta$  πρὸς τὸ τμήμα τὸ ἀποτμηθέν, ἀφοῦ μεταφερθῇ καὶ τεθῇ εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ  $\Xi$  οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ σημεῖον  $\Xi$ .

13

Ἔστω λοιπὸν πάλιν τὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα παραλληλόγραμμον τὸ  $MN$  καὶ ὁ κύκλος  $\Xi O \Pi P$ , καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ  $\Theta M$ ,  $\Theta H$ , καὶ ἀνυψωθῶσιν ἀπ' αὐτῶν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει τὸ ἡμικύκλιον  $O \Pi P$ , καὶ ἄς ἐκβληθῶσι καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τὰ εἰρημένα ἐπίπεδα· θὰ ὑπάρχη λοιπὸν πρίσμα τι ἔχον βάσιν μὲν τόσῃν, ὅση εἶναι τὸ τρίγωνον  $\Theta M H$ , ὕψος δὲ ἶσον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἶναι τὸ πρίσμα τοῦτο τὸ ἐν τέταρτον τοῦ ὅλου πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν κύλινδρον (Εὐκλ. XI, 32). Ἄς ἀχθῶσι δὲ εἰς τὸ ἡμικύκλιον  $O \Pi P$  καὶ τὸ τετράγωνον  $MN$  τυχοῦσαι εὐθεῖαι αἱ  $K \Lambda$ ,  $T \Upsilon$  ἀπέχουσαι ἶσον τῆς  $\Pi \Xi$ . ἄς τέμνωσιν δὲ αὗται τὸ μὲν τόξον τοῦ ἡμικυκλίου  $O \Pi P$  κατὰ τὰ σημεῖα  $K$ ,  $T$ , τὴν δὲ διάμετρον  $OP$  κατὰ τὰ  $\Sigma$ ,  $Z$ , τὰς δὲ  $\Theta H$ ,  $\Theta M$  κατὰ τὰ  $\Phi$ ,  $X$ , καὶ ἄς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν  $K \Lambda$ ,  $T \Upsilon$  ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν  $OP$  καὶ ἄς ἐκβληθῶσι πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου, ὅπου εἶναι ὁ κύκλος  $\Xi O \Pi P$ . θὰ σχηματίσῃ δὲ τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν εἰς μὲν τὸν ἡμικύλινδρον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ἡμικύκλιον  $O \Pi P$ , ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, τομὴν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $K \Sigma$ , ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἰς δὲ τὸ πρίσμα  $\Theta H M$  θὰ σχηματίσῃ ὁμοίως παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν  $\Lambda X$ , ἡ δὲ ἄλλη ἴση πρὸς τὸν ἄξονα· διὰ τοὺς αὐ-

ἴση | τῷ ἄξονι· διὰ δὲ τὰ αὐτὰ ἐν τῷ | αὐτῷ ἡμικυλινδρῷ  
ἔσται τι | παραλλήλογραμμον, ὃ ἔστι μία | μὲν πλευρὰ ἴση



H 494 τῇ TZ, ἡ δὲ ἐτέ|ρα ἴση τῷ ἄξονι <τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ  
 πρίσματι παραλληλῷ|γραμμον, οὗ ἔστιν ἡ μὲν μία> | πλευρὰ  
 5 ἴση τῇ YΦ, ἡ δὲ ἐτέρα | ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου . . .

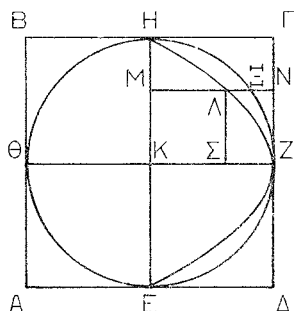
 $i\delta'$ 

\*Ἐστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνου | ἔχον βάσεις, καὶ ἔστω  
αὐτοῦ μία τῶν | βάσεων τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, | καὶ ἐγγε-  
γράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύ|λινδρος, καὶ ἔστω τοῦ κυλίνδρου |  
10 βάσις ὁ ΕΖΗΘ κύκλος ἐφαπτό|μενος τῶν τοῦ ΑΒΓΔ πλευρῶν  
κατὰ | τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐ|τοῦ καὶ τῆς τοῦ  
τετραγώνου πλευρᾶς τῆς ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέ|δῳ τοῦ  
ΑΒΓΔ τῆς κατὰ τὴν ΓΔ | ἐπίπεδον ἦχθω· ἀ|ποτεμεῖ δὴ  
τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου | πρίσματος ἄλλο πρίσμα, ὃ ἔσται τέταρ-  
15 τον μέρος | τοῦ ὅλου πρίσματος, αὐτὸ δὲ τοῦτο | ἔσται πε-  
ριεχόμενον ὑπὸ τριῶν | παραλληλογράμμων καὶ δύο τρι-  
γώνων κατεναντίον ἀλλήλοις. | γεγράφθω δὴ ἐν τῷ ΕΖΗ  
ἡμικυ|κλίῳ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ, | ἔστω <δὲ>. . . . . |

τοὺς λόγους εἰς τὸν αὐτὸν ἡμικύλινδρον θὰ εἶναι παραλληλόγραμμόν τι, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν TZ, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἰς δὲ τὸ πρίσμα θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΥΦ, ἡ δὲ ἄλλη ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου . . . . .

14

Ἐστω ὀρθὸν πρίσμα ἔχον βάσεις τετραγώνους, καὶ ἔστω μία τῶν βάσεων αὐτοῦ τὸ τετράγωνον ABΓΔ, καὶ ἃς ἐγγραφῇ εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, καὶ ἔστω βάσις τοῦ κυλίνδρου ὁ κύκλος EZHΘ ἐφαπτόμενος τῶν πλευρῶν τοῦ ABΓΔ τετραγ. κατὰ τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ αὐτοῦ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου



τῆς εἰς τὸ ἀπέναντι ἐπίπεδον τῆς βάσεως ABΓΔ, τῆς κατὰ τὴν ΓΔ, ἃς ἀχθῇ ἐπίπεδον· θὰ τμήσῃ λοιπὸν τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος ἄλλο πρίσμα, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἓν τέταρτον τοῦ ὅλου πρίσματος, τὸ πρίσμα δὲ τοῦτο θὰ περιέχεται ὑπὸ τριῶν παραλληλογράμμων καὶ δύο τριγώνων κειμένων ἀπέναντι ἀλλήλων. Ἄς γραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ ἡμικύκλιον EZH παραβολή, ἔστω δὲ . . . . .

- ..... ἐν τῇ τομῇ. | τῆς ἢ  $ZK$ , καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ |  
H 496  $\Delta H$  παραλληλογράμμου ἢ  $MN$  | παράλληλος οὖσα τῇ  $KZ$ .  
τεμεῖ | δὴ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου | περιφέρειαν κατὰ  
τὸ  $\Xi$ , τὴν δὲ τοῦ | κώνου τομὴν κατὰ τὸ  $\Lambda$ . καὶ ἐστὶν | ἴσον  
5 τὸ ὑπὸ  $MNA$  τῷ ἀπὸ τῆς |  $NZ$ . τοῦτο γάρ ἐστι σαφές· διὰ  
τοῦ|το δὴ ἔσται, ὥς ἡ  $MN$  πρὸς  $NA$ , οὕτως | τὸ ἀπὸ  $KH$   
πρὸς τὸ ἀπὸ  $\Lambda\Sigma$ . καὶ ἀ|πὸ τῆς  $MN$  ἐπίπεδον ἀνεστά|τω ὀρθὸν  
πρὸς τὴν  $EH$ . ποιήσει δὴ | τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ πρίσματι | τῷ  
ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ ὅλου | πρίσματος τομὴν τρίγωνον | ὀρ-  
10 θογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ | τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἢ  $MN$ ,  
ἢ δὲ ἐ|τέρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀπὸ τῆς |  $\Gamma\Delta$  ὀρθὴ πρὸς τὴν  
 $\Gamma\Delta$  ἀναγομένη | ἀπὸ τοῦ  $N$  ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἢ  
δὲ ὑποτείνουσα ἐν αὐτῷ | τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ· ποιήσει  
δὲ | καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμη|θέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου  
15 ὑπὸ τοῦ | ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς |  $EH$  καὶ τῆς τοῦ  
τετραγώνου πλευρᾶς | τῆς κατεναντίον τῇ  $\Gamma\Delta$  τομῇ | τρί-  
γωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μί|α τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν  
ἢ |  $ME$ , ἢ δὲ ἑτέρα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ | τοῦ κυλίνδρου <ἀν>η-  
γμένη <ἀπὸ | τοῦ  $\Xi$ > ὀρθὴ πρὸς τὸ  $KN$  ἐπίπεδον, | <ἢ δὲ>  
20 ὑποτείνουσα ἐν <τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ>. | ὁμοίως οὖν, ἐπεὶ  
ἴσον ἐστὶν τὸ ὑ|πὸ  $MN$ ,  $MA$  τῷ ἀπὸ  $ME$ . <τοῦτο γὰρ | φα-  
νε>ρόν <ἐστίν>. ἔσται, ὥς ἡ | < $MN$ > πρὸς τὴν < $MA$ , οὕτως  
τὸ ἀπὸ  $MN$ > πρὸς τὸ | <ἀπὸ  $ME$ . ὥς δὲ τὸ ἀπὸ>  $MN$  πρὸς  
τὸ ἀπὸ | < $ME$ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς>  $MN$  τρίγῳ | <νον τὸ ἐν τῷ  
25 πρίσμα>τι γε|νόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ  $ME$  τρίγῳ>νον | τὸ ἐν  
τῷ <τμήματι ἀφῆρημένον> | ὑπὸ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφα-  
νείας· | ὥς ἄρα ἡ  $MN$  πρὸς  $MA$ , <οὕτως τὸ τρίγωνον> | πρὸς  
τὸ τρίγωνον. ὁμοίως δὲ <δ>εί|ξομεν, καὶ | ἐὰν <ἄλλ>η τ<ις  
ἀχθῇ ἐν τῷ πε|ρὶ τὴν τομὴν πε>ριγραφ<έντι> παραλληλο-



.....διάμετρος καὶ (ἄξων)  
 τῆς παραβολῆς ἡ ΖΚ, καὶ ἄς ἀχθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ  
 τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΖ· θὰ τέμνῃ λοιπὸν  
 αὕτη τὸ μὲν τόξον τοῦ ἡμικυκλίου κατὰ τὸ Ξ, τὴν δὲ παραβολὴν  
 κατὰ τὸ Λ. Καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον  $MN \times NL = NZ^2$ · διότι  
 τοῦτο εἶναι σαφές· διὰ τοῦτο λοιπὸν θὰ εἶναι, ὡς ἡ  $MN : NL =$   
 $KH^2 : \Lambda\Sigma^2$  (Εὐκλ. VI, 17. V, ὁρισμ. 9). Καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἄς ἀνυ-  
 ψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΗ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τὸ ἐπίπεδον,  
 εἰς τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος τομὴν τρίγω-  
 νον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποῦ μία κάθετος θὰ εἶναι ἡ ΜΝ, ἡ δὲ ἄλλη  
 εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΓΔ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ν  
 κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ  
 ὑποτείνουσα θὰ εἶναι εἰς αὐτὸ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· θὰ σχηματίσῃ  
 δὲ καὶ εἰς τὸ τμήμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ὑπὸ τοῦ ἐπι-  
 πέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΗ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου  
 τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν ΓΔ, τομὴν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ  
 ἡ μία κάθετος θὰ εἶναι ἡ ΜΞ, ἡ δὲ ἄλλη θὰ ἔχῃ ἀχθῇ εἰς τὴν ἐπιφά-  
 νειαν τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τοῦ Ξ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΚΝ, ἡ δὲ  
 ὑποτείνουσα θὰ εἶναι εἰς τὸ τέμνον ἐπίπεδον. Ὅμοίως λοιπὸν, ἐπει-  
 δὴ τὸ ὀρθογώνιον  $MN \times ML = ME^2$ · διότι τοῦτο εἶναι φανερόν·  
 θὰ εἶναι, ὡς ἡ  $MN : ML = MN^2 : ME^2$  (Εὐκλ. VI, 17. V, ὁρισμ.  
 9). Ὡς δὲ τὸ  $MN^2 : ME^2$ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τρίγωνον τὸ γε-  
 νόμενον εἰς τὸ πρίσμα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΞ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ τμή-  
 μα ἀφηρημένον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου (Εὐκλ. VI, 19)·  
 θὰ εἶναι ἄρα, ὡς ἡ  $MN : ML$ , οὕτως τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον.  
 Ὅμοίως δὲ ἀποδεικνύομεν, καὶ ἐὰν ἄλλη τυχοῦσα εὐθεῖα ἀχθῇ εἰς  
 τὸ περὶ τὴν παραβολὴν περιγραφὲν παραλληλόγραμμον, παράλληλος

- Η 498 γράμμω <παρὰ> | τὴν KZ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης | ἐπι<πεδον  
ἀνασταθῇ ὀρθόν> πρὸς τὴν | EH, ὅτι ἔσται, ὥς τὸ τρίγωνον  
τὸ γε|νόμενον ἐν τῷ πρίσματι πρὸς τὸ | .....  
τμήματι | ..... ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως | ἡ ἀχθεῖσα  
5 <ἐν> τῷ ΔΗ παραλληλογράμμω παράλληλος τῇ KZ | <πρὸς  
τὴν> ἀποληφθεῖσαν ὑπὸ | τῆς EHZ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου |  
τομῆς καὶ τῆς EH διαμέτρου. | συμπληρωθέντος οὖν τοῦ ΔΗ  
πα|ραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν ἡγμένων παρὰ τὴν KZ καὶ  
τοῦ τμή|ματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ | τε τῆς τοῦ ὀρθογω-  
10 νίου κώνου το|μῆς καὶ τῆς διαμέτρου ὑπὸ τῶν | ἀπολαμβα-  
νομένων ἐν τῷ τμή|ματι συμπληρω ..... | . τοῦ τμή-  
ματος τοῦ ..... | ἐν τῷ ἀπὸ τοῦ ..... | γινομ. .... |  
πων ..... τὰ γ. .... | ..... α καὶ ..... | τῷ ΔΗ .....  
..... | ..... δὲ ἐτι ..... | .....  
15 ..... μα ..... | ..... η ετι | ..... | .....  
..... ἀπ ..... | ..... | .....  
..... | ἀγομένων παρὰ τὴν KZ ..... | ..... | τομῆς  
καὶ ..... | ..... εἰ ταῖς ἐν τῷ ΔΗ παραλ|ληλογράμμω  
ἡγμέναις παρὰ | τὴν KZ, καὶ ἔσται, ὥς πάντα τὰ | τρίγωνα τὰ  
20 ἐν τῷ πρίσματι | πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ | ἐν τῷ ἀποτμη-  
θέντι τμήματι | τοῦ κυλίνδρου ἀφηρημένα, | οὕτως πᾶσαι αἱ  
εὐθεῖαι αἱ ἐν | τῷ ΔΗ παραλληλογράμμω πρὸς | πάσας τὰς  
εὐθείας τὰς μετα|ξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου | τομῆς καὶ  
τῆς EH εὐθείας. καὶ | ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ πρίσματι τρι|γώνων  
25 σύγκειται τὸ πρίσμα, ἐκ | δὲ τῶν ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ |  
<ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίν|δρου τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ> τῶν  
ἐν | τῷ ΔΗ παραλληλογράμμω παρ|αλλήλων τῇ KZ τὸ  
ΔΗ παραλλη|λόγραμμον, ἐκ δὲ τῶν ..... | μεταξὺ τῆς τοῦ  
Η 499 ὀρθογωνίου κώ|νου τομῆς καὶ τῆς EH <τὸ τμήμα> | τῆς ὀρ-

πρὸς τὴν  $KZ$ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν  $EH$ , ὅτι θὰ εἶναι, ὥς τὸ τρίγωνον τὸ γενόμενον εἰς τὸ πρίσμα πρὸς τὸ . . . τμήμα . . . ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως ἡ ἀχθεῖσα εἰς τὸ παραλληλόγραμμον  $\Delta H$  παράλληλος πρὸς τὴν  $KZ$  πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ὑπὸ τῆς παραβολῆς  $EHZ$  καὶ τῆς διαμέτρου  $EH$ . Ὅταν λοιπὸν συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον  $\Delta H$  ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων πρὸς τὴν  $KZ$  καὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς διαμέτρου (αὐτῆς) ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εἰς τὸ τμήμα . . . . .

. . . . . πρὸς τὰς ἀχθείσας εἰς τὸ παραλληλόγραμμον  $\Delta H$  παραλλήλους πρὸς τὴν  $KZ$ , καὶ θὰ εἶναι, ὥς ὅλα τὰ τρίγωνα τὰ εἰς τὸ πρίσμα πρὸς ὅλα τὰ τρίγωνα τὰ ἀφηρημένα εἰς τὸ ἀποτμηθὲν τμήμα τοῦ κυλίνδρου, οὕτως ὅλοι αἱ εὐθεῖαι αἱ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον  $\Delta H$  πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τὰς μεταξὺ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας  $EH$ . Καὶ ἐκ μὲν τῶν εἰς τὸ πρίσμα τριγώνων ἀποτελεῖται τὸ πρίσμα, ἐκ δὲ τῶν εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τριγώνων ἀποτελεῖται τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ τῶν εἰς τὸ παραλληλόγραμμον  $\Delta H$  παραλλήλων πρὸς τὴν  $KZ$  ἀποτελεῖται τὸ παραλληλόγραμμον  $\Delta H$ , ἐκ δὲ τῶν . . . . . μεταξὺ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς  $EH$  τὸ τμήμα τῆς παραβολῆς.

θογωνίου κώνου τομῆς· ὥς ἄρα τὸ πρίσμα πρὸς τὸ ἀπότμημα  
 τὸ ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου, οὕτω τὸ ΔΗ παραλλ|ληλόγραμμον  
 πρὸς τὸ EZH τμήμα | τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ  
 | ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ | τῆς EH εὐθείας. ἡμιόλιον  
 5 δὲ | τὸ ΔΗ παραλλήλογράμμον τοῦ | τμήματος τοῦ περιεχομέ-  
 νου | ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου | τομῆς καὶ τῆς EH εὐ-  
 Η 500 θείας· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς πρότερον | ἐκδεδομένοις·  
 ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ | καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος | τοῦ  
 ἀφηρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου· οἷον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπότμημα  
 10 | τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ | πρίσμα τριῶν. οἷον  
 δὲ τὸ πρίσμα τριῶν, τοιούτων ἐστὶν τὸ | ὅλον πρίσμα τὸ πε-  
 ριέχον τὸν | κύλινδρον ἰβ' διὰ τὸ δ' εἶναι τὸ ἕτερον | τοῦ ἐ-  
 τέρου· οἷον ἄρα τὸ ἀπότμημα | τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιού-  
 των ἐστὶν | τὸ ὅλον πρίσμα ἰβ'· ὥστε τὸ τμήμα τὸ ἀποτμη-  
 15 θέν ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ | πρίσματος.

ιε'

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους | ἔχον βάσεις, ὧν μία  
 ἔστω τὸ ABΓΔ | τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς | τὸ πρί-  
 σμα κύλινδρος, οὗ βάσις | ἔστω ὁ EZH κύκλος· <ἐφάπτεται>  
 20 | δὴ οὗτος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ E, Z, H, Θ  
 σημεία· κέντρον δὲ <ἔστω τὸ K, καὶ διὰ τῆς> | EH διαμέ-  
 τρου <καὶ μιᾶς πλευρᾶς> | . . . . . <ἐπίπεδον ἤχθω>· | τοῦτο  
 δὴ τὸ ἐπίπεδον ἀποτεμνεί | πρίσμα ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος  
 καὶ | ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα κυλίνδρου. <λέγω δὴ, ὅτι  
 25 τοῦ>το <τὸ> | τμήμα τὸ ἀποτετμημένον ἀπὸ | τοῦ κυλίνδρου  
 ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος | ἐπιπέδου ἕκτον μέρος ὃν δε|ιχθήσεται τοῦ  
 ὅλου πρίσματος.

θὰ εἶναι ἄρα ὡς τὸ πρίσμα πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα, οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ πρὸς τὸ τμήμα ΕΖΗ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ τὰ τρία δεύτερα τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς προηγουμένως ἐκδοθείσας πραγματείας (Τετραγ. παραβ., θ. 24)· εἶναι ἄρα τρία δεύτερα καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ ἀφηρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου· ἐὰν ἄρα τὸ ἀπότμημα εἶναι ἴσον πρὸς δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου, τὸ πρίσμα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τρία. Ἐὰν δὲ τὸ πρίσμα εἶναι ἴσον πρὸς τρία, τὸ ὅλον πρίσμα τὸ περιέχον τὸν κύλινδρον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς δώδεκα, διότι τὸ ἐν εἶναι τὸ ἐν τέταρτον τοῦ ἄλλου· ἐὰν ἄρα τὸ ἀπότμημα εἶναι δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου, τὸ ὅλον πρίσμα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς δώδεκα· ὥστε τὸ τμήμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ἐν ἕκτον τοῦ πρίσματος.

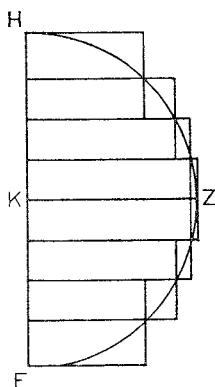
15

Ἐστω πρίσμα ὀρθὸν ἔχον βάσεις τετραγώνους, τῶν ὁποίων μία ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, καὶ ἃς ἐγγραφῇ εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις ἔστω ὁ κύκλος ΕΖΗ· ἐφάπτεται δὲ οὗτος τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ· ἔστω δὲ κέντρον τὸ Κ, καὶ διὰ τῆς διαμέτρου ΕΗ καὶ μιᾶς πλευρᾶς . . . ἃς ἀχθῇ ἐπίπεδον· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἀποτεμένει ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος πρίσμα καὶ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα κυλίνδρου. Λέγω λοιπόν, ὅτι τὸ τμήμα τοῦτο τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου θὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι τὸ ἐν ἕκτον τοῦ πρίσματος.

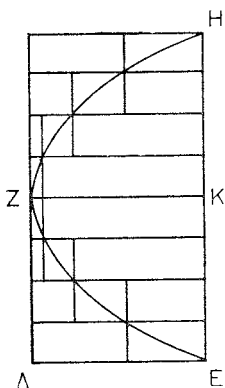
πρῶτον δὲ δείξομεν, ὅτι δυνατόν | ἔσται εἰς τὸ τμήμα τὸ  
 ἀποτμη|θὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα | στερεὸν ἐγγράφαι καὶ  
 ἄλλο περι|γράψαι ἐκ πρισμάτων συγκεί|μενον ἴσον ὕψος ἐ-  
 χόντων καὶ | βάσεις τριγώνους ἐχόντων ὁ|μοίας, ὥστε τὸ πε-  
 5 ριγραφὲν σχῆ|μα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέ|χειν ἐλάσσονι παν-  
 τὸς τοῦ προ|τεθέντος μεγέθους. . . . | γὰρ τοῦ πρίσματος τοῦ  
 Η 502 κατὰ | τὸ ΒΔ παραλληλογράμμου . . . | . . . . . καὶ  
 . . . ω . . | . . . . . γραμμένον . ω . . το . . Ξ. | ἐπιπέδῳ . .  
 <σ>ημεῖα τοῦ . . . | . ατος . . η . . ρετό. πω . . . . | . . . .  
 10 νομεν. . . . . εστ . . σων | . . . . . ἔστω . . . . το . . | λειπό-  
 μενον . . νι . μια ἔλασ . | . . . ν . . τοῦ λείμματος . στ . . . . |  
 . . . . . ε . . ει . . καὶ . . . ει . . . α | τω . ει . . . . .  
 το . . | ατα | . . . . .  
 . . . τω ἐκ . . . . . | . . . . .  
 15 τμήμα τὸν το . . . . . | ἀπο<τ>μ<η>θ . . . ἀπὸ . . . . | δι  
 . . . . . | ε . . μάτων . . . . . μεν . . | . . ων . . . . . ται καὶ  
 τῶν . . | . . ἐγγεγραμμένω . . . δι . . . | . . . των κει . . . .  
 τα . . | ΚΩ παραλληλόγραμμου . . . | . . . . . αμμου |  
 . . . . . | σχήματι πρίσμα . . . . . ησ . | . . . . .  
 20 . . . | . . . . . | τὸ ἀπο . . . . . δρου . | ἐγ-  
 γεγράφθω . . . . . μι|α . . . . . | . . . . .  
 . . . . . | . . σχῆμα, τὸ εἰρ<η>μένον | σχῆμα τοῦ ἐγ-  
 γεγραμμένου . . . | . . . . . ἔχει . . . τοῦ δοθέντος | . . . . .  
 ἐχέτω . . . . . οσ | . . . . . τῶν πρισμάτων | . . . . .  
 25 . . . . . | . . . . . | . . . . . ἴσον αὐ . . .  
 <ση>μεῖα . . . . . ἐγγεγρά<φ>θω . . . . . | . . . . . ν  
 ἔσ. . . . . δευτέρῳ | . . . . . γεγρ . . . . . γει | . . . . . η . . . . .  
 Η 504 <τέ>τμηται | κατὰ τὸ αὐτὸ . . . . . | <ἐγγεγρ>αμμένον ἐν  
 . . . . . | κύκλ . . . το<υ> τμήματος τη | συνθε. τ . . . . ἀπο

# ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Πρῶτον δὲ θὰ δείξωμεν ὅτι θὰ εἶναι δυνατὸν εἰς τὸ τμήμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου νὰ ἐγγράψωμεν στερεὸν σχῆμα καὶ



ἄλλο νὰ περιγράψωμεν ἀποτελούμενον ἐκ πρισμάτων ἐχόντων ὕψος ἴσον καὶ βάσεις τρίγωνα ὅμοια, ὥστε τὸ περιγραφέν τμήμα νὰ ὑπε-



ρέχη τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον παντὸς δοθέντος μεγέθους (ὅσον-  
δήποτε μικροῦ).....

.... | μείζων ἐστὶν τοῦ ἐγγεγραμμένου | ..... <τμ>ήμα-  
τος ἐν τῷ πρίσ|ματι τῷ κατὰ τὸ ..... | .....ω

- < ..... ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιό|λιον τὸ πρίσμα τὸ ἀποτε-  
τμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ | ἐπιπέδου τοῦ ἐγγεγραμμένου |  
5 εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυ|λίνδρου στερεοῦ. ἐδείχθη  
δέ, ὥς τὸ | ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἀφη|ρημένον πρίσμα  
πρὸς τὸ | ἐγγεγραμμένον στερεὸν εἰς τὸ | ἀπότμημα τὸ ἀπὸ  
τοῦ κυλίν|δρου, οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλό|γραμμον πρὸς τὰ  
ἐγγεγραμμέ|να παραλληλόγραμμα εἰς τὸ | τμήμα τὸ περιε-  
10 χόμενον ὑπὸ τῆς | τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς | καὶ τῆς  
ΕΗ εὐθείας· ἔλασσον ἄρα | ἢ ἡμιόλιον τὸ ΔΗ παραλληλό-|  
γραμμον τῶν παραλληλογράμ|μων τῶν ἐν τῷ τμήματι τῷ |  
περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρ|θογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς |  
ΕΗ εὐθείας· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ | τοῦ τμήματος τοῦ περιε-  
15 χόμενον | ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου | τομῆς καὶ τῆς  
ΕΗ εὐθείας ἡμιόλι|ον δέδεικται τὸ ΔΗ παραλληλό|γραμμον  
ἐν ἐτέροις. οὐκ ἄρα μεῖ|<ζον> ..... | ..... |  
..... | ..... <στε>|ρεὸν ἐτ. .... <ἀ>|πο-  
τεμν. .... | σχῆμ<α> ..... | τα ὀρθο. .... |  
20 περιγραφ ..... <τοῦ ἐγγρα>|φέντος ἐν ..... | ἐπεὶ  
..... | τμήματ ..... | ἐγγεγράφθω .....  
ἐν τῷ τμή|ματι τῷ <περιεχομένῳ ὑπὸ τε> | τῆς τοῦ ὀρθ<ο-  
γωνίου κώνου τομῆς> | καὶ τῆς <ΕΗ εὐθείας> ..... |  
γεγράφθω> ..... | τοῦ ὀρθ<ογωνίου κώνου> .... |  
25 φὲν περι. .... <ἐγγεγραμ>|μένον ἐν τ<ῷ> ..... | τοῦ  
κυλίνδρ<ου>. .... | τοῦ στερε<οῦ> ..... | τοῦ κυ-  
H 506 λίν<δρου> ..... | τμήματ ..... | ἐστὶν καὶ .....  
.. | γραμμέν. .... | ..... | .....  
..... | ..... | ..... | .....



.....εἶναι ἄρα τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου μικρότερον τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ στερεοῦ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἀφηρημένον πρίσμα πρὸς τὸ εἰς τὸ ἀπότμημα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἐγγεγραμμένον στερεόν, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ πρὸς τὰ ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμα εἰς τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ· εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ μικρότερον τῶν τριῶν δευτέρων τῶν παραλληλογράμμων τῶν εἰς τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπειδὴ εἰς ἄλλην θέσιν ἀπεδείχθη ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερον. ....

- ..... | ..... εχομεν | .....  
 ..... | ..... νη..... | ..... Η  
 ... | ..... τιν... | ..... πρὸς τὸ | ..... τὸ  
 ἐν τ(ῷ) | ..... <πε>ριεχομε | .....  
 5 γο... | τῆς ΕΗ καὶ | ..... τοῖς λόγ<οις> .....  
 αμμέν... | ..... τμήματος | ..... δρ ..... | ..  
 ..... νον ἀπὸ τῆς | ..... <τ>ῆς πλευρ<ᾶς> | .....  
 ..... | ..... ἐν τῷ | ..... τετμή<σθω> | .....  
 ..... | ..... εχθήσ | ..... τὸ μεῖ<ζον> .....  
 10 ... | ..... | ..... <εὐ>-  
 <θ>είας, καὶ πάντα τὰ πρίσματα | τὰ ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀπο-  
 τε<τμημένῳ> ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέ<δου> πρὸς πάντα τὰ πρίσματα  
 τὰ | ἐν τῷ σχήματι τῷ περιγε<γραμμένῳ> περὶ τὸ ἀπότμημα  
 τοῦ | κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν | πάντα τὰ παραλ-  
 15 ληλόγραμμα τὰ ἐν | τῷ ΔΗ παραλληλογράμῳ πρὸς πάν<τα>  
 τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ | σχήματι τῷ περιγεγραμ-  
 μένῳ | περὶ τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑ<πὸ> τῆς τοῦ ὀρθο-  
 γωνίου κώνου τομῆς | καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας, τουτέστιν τὸ  
 πρί<σμα> τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λο<ξοῦ> ἐπιπέδου πρὸς  
 20 τὸ σχῆμα τὸ περιγε<γραμμένον> περὶ τὸ τμήμα τοῦ κυ<λίν-  
 δρου> τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν | τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον  
 πρὸς τὸ | σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμήμα τὸ πε-  
 ρι<εχόμενον> ὑπὸ | τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς | καὶ τῆς  
 ΕΗ εὐθείας. μεῖζον δέ ἐστι | τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑ<-  
 25 πὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἢ ἡμιόλιον | τοῦ στερεοῦ σχήματος τοῦ  
 περιγε<γραμμένον> περὶ τὸ τμήμα τοῦ <κυλίνδρου>.....

καὶ ὅλα τὰ πρίσματα τὰ εἰς τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς ὅλα τὰ πρίσματα τὰ εἰς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ, πρὸς ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ εἰς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ, τουτέστιν τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμήμα τοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ, πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Εἶναι δὲ μεγαλύτερον τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ στερεοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τμήμα τοῦ κυλίνδρου . . .



ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΟΕΙΚΟΝ

- P Κώδιξ Παρισινός Ἑλληνικός 2448, XIV αἰῶνος\*
- G. Guelferbytanus Gudianus Ἑλληνικός 77.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΕΠΙ ΤΟΥΤΟΥ

- B. Krumbiegel, Das Problema bovinum des Archimedes, Zeitschr. für Mathem. und Physik, XXV, 1880, Hist. litter. Abteilung, p. 121-136.
- G. Hermann, De Archimedis, problemate bovino, dissert. Leipzig, 1828.
- I. F. Wurm, Jahns Jahrbücher, XIV, p. 194.
- G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin, 1842,

#### Πρόβλημα,

*ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὐρὼν τοῖς ἐν  
Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν  
ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἑρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον  
ἐπιστολῇ.*

*Πληθὺν Ἡελίου βοῶν, ὃ ξεῖνε, μέτρησον  
φροντὶδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,  
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου  
Θρινακίης τετραχῇ στίφεια δασσαμένη*

---

\* Τὸν κώδικα τοῦτον ἐξήτασε διὰ πρῶτην φοράν τῇ προτροπῇ τοῦ Heiberg  
ὁ Henri Lebègue.

p. 481 sq.

I. L. Heiberg, Quaestiones Archimedeae, Kopenhagen, 1879, p. 66-69.

A. Amthor, Zeitschrift für Math. und Physik, XXV, 1880, p. 153-171.

M. Cantor, Ibid. XXIV, p. 169.

P. Tannery, Mémoires de la Soc. des Sciences de Bordeaux, 1880, III, p. 369 sq.

Th. Heath, Diophantus of Alexandria, 2e éd. 1910, p. 142 sq.

G. E. Lessing, Beiträge zur Gesch. und Litteratur, Braunschweig, 1773, p. 421 sq.

### Πρόβλημα

τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης εὐρῶν ἀπέστειλεν εἰς στί-  
χους πρὸς τοὺς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἀσχολουμένους μὲ  
τὰ θέματα αὐτά, περιεχόμενον εἰς τὴν ἐπιστολὴν  
τοῦ πρὸς τὸν Ἑρατοσθένη τὸν Κυρηναῖον.

Τὸ πλῆθος τῶν βοῶν τοῦ ἡλίου, ὧ ξένε, μέτρησον  
ἀφοῦ ἐπιστήσης τὴν προσοχὴν σου, ἐὰν μετέχης σοφίας,  
πόσον δηλαδὴ ἔβασκε εἰς τὰς πεδιάδας τῆς νήσου Σικελίας  
τῆς τριγωνικῆς\* διηρημένον εἰς τέσσαρας ἀγέλας

---

\* Θρινακία = τρία ἄκρα ἔχουσα, ἢ Τρινάκρια, ἡ Σικελία.

χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος, 5  
 κυανέω δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,  
 ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. ἐν δὲ ἐκάστω  
 στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι  
 συμμετρίας τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν  
 κυανέων ταύρων ἡμίσει ἡδὲ τρίτῳ 10  
 καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὧς ξεῖνε, νόησον,  
 αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει  
 μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.  
 τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει  
 ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε 15  
 καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.  
 θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν  
 ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης  
 τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκέες ἴσαι·  
 αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν 20  
 μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο  
 σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.  
 ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἡδὲ καὶ ἕκτῳ  
 ποικίλαι ἰσάριθμον πληθὺς ἔχον τετραχῇ.  
 ξανθαὶ δ' ἡριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἴσαι 25  
 ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.  
 ξεῖνε, σὺ δ', Ἡελίοιο βόες πόσαι, ἀτρεκέες εἰπὼν,  
 χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,  
 χωρὶς δ' αὖ, θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιάν ἕκασται,



- 5 διαφόρου χρώματος· ἡ μὲν μία μὲ λευκὸν ὡς γάλα,  
 ἡ δὲ ἄλλη μὲ κυανοῦν ἔλαμπε χρῶμα,  
 ἡ ἄλλη μὲν μὲ ξανθόν, ἡ ἄλλη δὲ μὲ ἀνάμικτον. Εἰς ἐκάστην δὲ  
 ἀγέλην ἦσαν ταῦροι εἰς μέγα πλῆθος  
 διαμεμοιρασμένοι κατὰ τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν· οἱ λευκοὶ μὲν  
 10 ἦσαν τὸ ἥμισυ καὶ τὸ ἐν τρίτον τῶν κυανῶν ταύρων  
 καὶ φαντάσου, ὧ ξένε, ἠϋξημένον τὸ πλῆθος τοῦτο μὲ ὅλους  
 τοὺς ξανθοὺς,  
 οἱ δὲ κυανοῖ ἦσαν ἴσοι μὲ τὸ τέταρτον μέρος  
 καὶ τὸ πέμπτον τοῦ ἀναμίκτου χρώματος, σὺν ὅλους τοὺς ξανθοὺς.  
 Τοὺς δὲ ὑπολειπομένους ἀναμίκτους φαντάσου  
 15 ὅτι ἐξισοῦνται κατὰ τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ ἕκτον καὶ ἑβδομον μέρος  
 τῶν λευκῶν  
 ταύρων καὶ μὲ ὅλους τοὺς ξανθοὺς.  
 Ὡς πρὸς δὲ τὰς ἀγελάδας ὑπῆρχον αἱ ἐξῆς σχέσεις· αἱ μὲν λευκαὶ  
 ἦσαν ὅλης τῆς κυανῆς ἀγέλης  
 ἀκριβῶς ἴσαι πρὸς τὸ τρίτον μέρος καὶ τὸ τέταρτον·  
 20 αἱ δὲ κυαναὶ πάλιν ἦσαν ἴσαι μὲ τὸ τέταρτον  
 καὶ τὸ πέμπτον μέρος τῆς ἀγέλης τῶν ἀναμίκτου χρώματος,  
 ὅταν ἤρχοντο ὅλαι μὲ τοὺς ταύρους εἰς τὴν βοσκήν.  
 Αἱ ἀναμίκτου δὲ χρώματος ἀγελάδες εἶχον ἀριθμὸν κατὰ τὸ  
 πλῆθος  
 ἶσον καὶ ἀπὸ τὰ τέσσαρα μέρη μὲ τὸ πέμπτον καὶ ἕκτον μέρος  
 τῆς ἀγέλης τῶν ξανθοτρίχων.  
 25 Αἱ δὲ ξανθαὶ ἠρίθμουν τὸ ἥμισυ τοῦ τρίτου μέρους  
 σὺν τὸ ἑβδομον μέρος τῆς ἀγέλης τῶν λευκῶν.  
 Σὺ δέ, ὧ ξένε, ἂν μοῦ εἴπης μὲ ἀκρίβειαν πόσοι ἦσαν οἱ βόες  
 τοῦ ἡλίου,  
 χωριστὰ μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν καλοθρεμμένων ταύρων,  
 χωριστὰ δὲ πάλιν, πόσαι ἦσαν αἱ ἀγελάδες ἐκάστου χρώματος,

οὐκ αἰδρίεις κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής, 30  
οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. ἀλλ' ἴθι φράζεαι  
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἑλείοιο πάθη.  
ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθύν  
κυανέοις, ἴσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι  
εἰς βάθος, εἰς εὐρὸς τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη 35  
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.  
ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες  
ἴσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι  
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων  
ἄλλοχρῶν ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων. 40  
ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας  
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα  
ἔρχοο κυδιῶν νικηφόρος ἴσθι τε πάντως  
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Σχόλιον

Τὸ μὲν οὖν πρόβλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ Ἀρχιμήδης  
ἐδήλωσε σαφῶς· ἰστέον δὲ τὸ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας ἀγέ-  
λας εἶναι δεῖ βοῶν, λευκοτριχῶν μὲν μίαν ταύρων καὶ θηλει-  
ῶν, ὣν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς ἰδ' καὶ ἀπλᾶς  
φπβ' καὶ μονάδας ,ζτξ', κυανοχρῶν δ' ἄλλην ὁμοῦ ταύρων

- 30 δὲν θὰ χαρακτηρίζεσαι ὡς ἀμαθὴς καὶ ἀδαὴς τῶν ἀριθμῶν,  
ὅμως δὲν θὰ συγκαταλέγεσαι ἀκόμη μεταξὺ τῶν σοφῶν. Ἔλα  
λοιπὸν λέγε  
καὶ ὅλας τὰς ἀκολουθοῦσας σχέσεις τῶν βοῶν τοῦ ἡλίου.  
Οἱ μὲν λευκοὶ ταῦροι, ὅταν ἀναμιχθῶσι μὲ τὸ πλῆθος  
τῶν κυανῶν, ἴστανται εἰς συμπαγῇ σχηματισμὸν ἰσομέτρως  
35 καὶ κατὰ τὸ βάθος, καὶ κατὰ τὸ πλάτος, ὅλαι δὲ αἱ πεδιάδες  
τῆς Θρινακίας (Σικελίας) ἦσαν γεμᾶται ἀπὸ τὸν τετράγωνον  
αὐτὸν σχηματισμόν.  
Ἐξ ἄλλου δὲ οἱ ξανθοὶ καὶ οἱ ἀναμίκτου χρώματος ἀθροιζόμενοι  
ὁμοῦ  
εὗρίσκοντο τοιουτοτρόπως, ὥστε ἀρχίζοντες ἀπὸ ἓνα  
νὰ ἀποτελοῦν σχῆμα τριγώνου ἀριθμοῦ χωρὶς νὰ εἶναι περισσό-  
τεροι  
40 καὶ χωρὶς νὰ εἶναι ὀλιγώτεροι οἱ ταῦροι τῶν ἄλλων χρωμάτων.  
Ἄφοῦ εὗρης καὶ αὐτὰ καὶ τὰ συμπεριλάβης εἰς τὸν νοῦν σου  
καὶ ἐκφράσης, ὃ ξένε, ὅλα τὰ μέτρα τῶν πληθῶν  
ἄπελθε ὑπερηφανευόμενος ὅτι ἀνεδείχθης νικητῆς καὶ γινώριζε  
ὅτι ἐκρίθης τέλειος εἰς αὐτὴν τὴν σοφίαν.

Σχόλιον (ἀρχαῖον)

Τὸ μὲν πρόβλημα λοιπὸν ὁ Ἀρχιμήδης τὸ ἐδήλωσε διὰ τοῦ ποιήματος σαφῶς· πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν τὸ λεγόμενον, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι τέσσαρες ἀγέλαι βοῶν, μία μὲν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἀγελάδων, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος ὁμοῦ δίδει διπλᾶς μυριάδας  
14 = 1.400.000.000 (διπλῇ μυριάς ἢ δευτέρα μυριάς = 10.000<sup>2</sup>)  
καὶ ἀπλᾶς μυριάδας 582 (= 5.820.000) καὶ μονάδας 7360 (ἦτοι ἐν ὧν 1.405.827.360), κυανοχρόων δὲ ἄλλην ἀγέλην ταύρων καὶ

καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ἐστὶ μυριάδων διπλῶν ἐννέα καὶ  
ἀπλῶν ,ηωλ' καὶ μονάδων ω', μιξοτρίχων δ' ἄλλην ταύρων  
καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ἐστὶ μυριάδων διπλῶν ἡ' καὶ ἀ-  
πλῶν ,ς'λζα' καὶ μονάδων υ'. τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης τῶν  
ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος διπλᾶς μυριάδας ζ' καὶ ἀπλᾶς  
,ςψη', μονάδας δὲ ,η· ὥστε συνάγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν  
δ' ἀγελῶν μυριάδας διπλᾶς μ' καὶ ἀπλᾶς ,γριβ' καὶ μονάδας  
,ςφξ'. καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριά-  
διάδας διπλᾶς ἡ' καὶ ἀπλᾶς ,β'λγα' καὶ μονάδας ,ηφξ', θηλει-  
ῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς ε' καὶ ἀπλᾶς ,ζχν' καὶ μονάδας ,ηω', ἡ  
δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς  
ε' καὶ ἀπλᾶς ,θχπδ' καὶ μονάδας ,αρκ', θηλειῶν δὲ μυριάδας  
διπλᾶς γ' καὶ ἀπλᾶς ,θρμε' καὶ μονάδας ,θχπ', ἡ δ' ἀγέλη τῶν  
ποικιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε' καὶ ἀπλᾶς  
,ηωξδ' καὶ μονάδας ,δω', θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς β' καὶ  
ἀπλᾶς ,ηρκς' καὶ μονάδας ,εχ', ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμά-  
των ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γ' καὶ ἀπλᾶς ,γρςε'  
καὶ μονάδας ,λξ', θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δ' καὶ ἀπλᾶς  
,γφιγ' καὶ μονάδας ,ζμ'. καὶ ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων

ἀγελάδων ὁμοῦ, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι 9 διπλῶν μυριάδων ( $= 9 \times 10.000^2 = 900.000.000$ ) καὶ ἀπλῶν μυριάδων 8830 ( $= 88.300.000$ ) καὶ μονάδων 800 (ἦτοι ἐν ὧν 988.300.800), ἄλλην δὲ ἀγέλην ἀναμίκτου χρώματος, ἐκ ταύρων καὶ ἀγελάδων, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι μυριάδων διπλῶν 8 ( $= 800.000.000$ ), καὶ ἀπλῶν 6991 ( $= 69.910.000$ ) καὶ μονάδων 400 (ἦτοι ἐν ὧν 869.910.400). τῆς ἀπομενούσης δὲ ἀγέλης τῶν ξανθοχρόων τὸ πλῆθος συνάγει διπλᾶς μυριάδας 7 ( $= 700.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 6708 ( $= 67.080.000$ ), μονάδας δὲ 8000 (ἦτοι ἐν ὧν 767.088.000). ὥστε τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀγελῶν νὰ συνάγῃται μυριάδας διπλᾶς 40 ( $= 4.000.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 3112 ( $= 31.120.000$ ) καὶ μονάδας 6560 (ἦτοι σύνολον 4.031.126.560). Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς 8 ( $= 800.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 2931 ( $= 29.310.000$ ) καὶ μονάδας 8560 (ἦτοι ἐν ὧν 829.318.560), τῶν ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 5 ( $= 500.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 7650 ( $= 76.500.000$ ) καὶ μονάδας 8800 (ἦτοι ἐν ὧν 576.508.800), ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς 5 ( $= 500.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 9684 (96.840.000) καὶ μονάδας 1120 (ἦτοι ἐν ὧν 596.841.120), ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 3 ( $= 300.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 9145 ( $= 91.450.000$ ) καὶ μονάδας 9680 (ἦτοι ἐν ὧν 391.459.680), ἡ δὲ ἀγέλη τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς 5 ( $= 500.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 8864 ( $= 88.640.000$ ) καὶ μονάδας 4800 (ἦτοι ἐν ὧν 588.644.800), ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 2 ( $= 200.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 8126 ( $= 81.260.000$ ) καὶ μονάδας 5600, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν ξανθοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς 3 ( $= 300.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 3195 (31.950.000) καὶ μονάδας 960 (ἦτοι ἐν ὧν 331.950.960), ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 4 ( $= 400.000.000$ ) καὶ ἀπλᾶς 3513 ( $= 35.130.000$ ) καὶ μονάδας 7040 (ἦτοι ἐν ὧν

ταύρων ἴσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων καὶ ἔτι ὅλη τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν ἴσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων, τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἴσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν. πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν θηλειῶν πλῆθος ἦν ἴσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον, ὥς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ' ἕκαστον χρῶμα.

435.137.040). Καὶ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ καὶ τὸ ἐν τρίτον τοῦ πλῆθους τῶν κυανοχρόων ταύρων σὺν ὅλῃ τῇ ἀγέλῃ τῶν ξανθοχρόων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρόων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐν τέταρτον καὶ τὸ ἐν πέμπτον τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων σὺν ὅλῳ τὸ πλῆθος τῶν ξανθοχρόων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐν ἕκτον καὶ τὸ ἐν ἑβδομον τῶν λευκοτρίχων ταύρων σὺν ὅλῳ τὸ πλῆθος τῶν ξανθοχρόων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν ἀγελάδων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐν τρίτον καὶ τὸ ἐν τέταρτον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρόων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐν τέταρτον καὶ τὸ ἐν πέμπτον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν μικτοῦ χρώματος, τὸ δὲ πλῆθος τῶν μικτοῦ χρώματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐν πέμπτον καὶ τὸ ἐν ἕκτον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν ξανθῶν βοῶν. Πάλιν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ξανθῶν ἀγελάδων ἦτο ἴσον πρὸς τὸ ἐν ἕκτον καὶ τὸ ἐν ἑβδομον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων προστεθεῖσαι σχηματίζουσι τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων προστεθεῖσα εἰς τὴν ἀγέλην τῶν μικτοῦ χρώματος σχηματίζει ἀριθμὸν τρίγωνον, συμφώνως πρὸς τὴν ὑποκειμένην κατανομὴν δι' ἕκαστον χρῶμα.





## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

### ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

4

Ἐστω τὸ τόξον  $A >$  τῆς εὐθείας  $B$ .

Κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρεθῃ τόσον μέγας ἀριθμὸς  $v$  ὥστε  $(A-B)v > B$ . Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν  $A - B > \frac{B}{v}$  καὶ  $A > B + \frac{B}{v} > B$ . Εὐρέθη λοιπὸν ἡ εὐθεῖα  $B + \frac{B}{v}$  ἡ ὁποία εἶναι μικρότερα κατὰ τὸ μῆκος τῆς μεγαλυτέρας γραμμῆς  $A$  (τοῦ τόξου) καὶ μεγαλυτέρα τῆς μικρότερας γραμμῆς  $B$ .

5

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων  $ΒΘΖ$ ,  $ΚΘΗ$  λαμβάνεται

$$\frac{\Theta Z}{\Theta K} = \frac{B\Theta}{\Theta H}. \text{ Ἐπειδὴ δὲ εὐθεῖα } B\Theta < \text{τόξ. } B\Theta \text{ καὶ } \Theta H = E >$$

δοθέντος τόξου, ἔπεται  $\frac{\Theta Z}{\Theta K} < \frac{\text{τόξον } B\Theta}{\text{τόξον } \deltaοθέν}$ . Ὑποθέτει γνωστὸν

τὸν τρόπον καθ' ὃν θὰ ληφθῇ  $E = H\Theta$  καταλήγουσα εἰς τὸ σημεῖον  $B$ . Τοῦτον ἀναπτύσσει ὁ Zeuthen εἰς τὸ βιβλίον του *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, 1886, σελ. 262 (ἀνατύπωσις G. Olms 1966) καὶ ὁ P. ver Eecke, *Les oeuvres complètes d'Archimède I*, (Vaillant - Carmanne, Liège 1960). Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ διὰ τὰ ἐπόμενα θεωρήματα 6, 7, 8, 9.

Ἐστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, ὅπου Θ ὁ μικρότερος ὅρος ἴσος πρὸς τὴν διαφορὰν δύο συνεχῶν ὁρων καὶ ὡς προστεθῇ εἰς τὴν B ἢ I = Θ, εἰς τὴν Γ ἢ K = H, εἰς τὴν Δ ἢ Λ = Z, εἰς τὴν E ἢ M = E, εἰς τὴν Z ἢ N = Δ, εἰς τὴν H ἢ Ξ = Γ, εἰς τὴν Θ ἢ O = B, ὁπότε θὰ εἶναι A = B + I = Γ + K = Δ + Λ = E + M = Z + N = H + Ξ = Θ + O, (1).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$A^2 + (B + I)^2 + (\Gamma + K)^2 + (\Delta + \Lambda)^2 + (E + M)^2 + (Z + N)^2 + (H + \Xi)^2 + (\Theta + O)^2 + A^2 + \Theta(A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) = 3(A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2) \quad (2).$$

(Σημείωσις: Πρόκειται περὶ τύπου δίδοντος τὸ ἄθροισμα τῶν  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ )

Ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) λαμβάνομεν :

$$(B + I)^2 = B^2 + I^2 + 2B \cdot I$$

$$(\Gamma + K)^2 = \Gamma^2 + K^2 + 2\Gamma \cdot K$$

$$(\Delta + \Lambda)^2 = \Delta^2 + \Lambda^2 + 2\Delta \cdot \Lambda$$

$$(E + M)^2 = E^2 + M^2 + 2E \cdot M$$

$$(Z + N)^2 = Z^2 + N^2 + 2Z \cdot N$$

$$(H + \Xi)^2 = H^2 + \Xi^2 + 2H \cdot \Xi$$

$$(\Theta + O)^2 = \Theta^2 + O^2 + 2\Theta \cdot O$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς εἰς τὴν (2) λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (1) ἔχομεν :

$$2(A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2) + 2B \cdot I + 2\Gamma \cdot K + 2\Delta \cdot \Lambda + 2E \cdot M + 2Z \cdot N + 2H \cdot \Xi + 2\Theta \cdot O +$$

$$\Theta (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) = 3 (A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2) \quad (3).$$

Ἐπειδὴ $I = \Theta$	θα εἶναι $2B \cdot I = \Theta \cdot 2B$
» $K = 2\Theta (= H)$	» $2\Gamma \cdot K = \Theta \cdot 4\Gamma$
» $\Lambda = 3\Theta (= Z)$	» $2\Delta \cdot \Lambda = \Theta \cdot 6\Delta$
» $M = 4\Theta (= E)$	» $2E \cdot M = \Theta \cdot 8E$
» $N = 5\Theta (= \Delta)$	» $2Z \cdot N = \Theta \cdot 10Z$
» $\Xi = 6\Theta (= \Gamma)$	» $2H \cdot \Xi = \Theta \cdot 12H$
» $O = 7\Theta (= B)$	» $2\Theta \cdot O = \Theta \cdot 14\Theta$ .

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$2(A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2) + \Theta (A + 3B + 5\Gamma + 7\Delta + 9E + 11Z + 13H + 15\Theta) = 3 (A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2).$$

Ὑπολείπεται νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος εἶναι ἴσος πρὸς  $A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2$ . Καὶ πράγματι εἶναι, διότι :

$$A = 8\Theta, A^2 = \Theta \cdot 8A = \Theta [A + (B + I) + (\Gamma + K) + (\Delta + \Lambda) + (E + M) + (Z + N) + (H + \Xi) + (\Theta + O)].$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$= \Theta [A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + O + \Xi + N + M + \Lambda + K + I].$$

Καὶ κατὰ τὴν (1) ἐπίσης εἶναι :

$$= \Theta [A + 2 (B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta)] \quad (4)$$

$$B = 7\Theta, B^2 = \Theta \cdot 7B = \Theta [B + (\Gamma + I) + (\Delta + K) +$$

$$\begin{aligned}
 & (E + \Lambda) + (Z + M) + (H + N) + (\Theta + \Xi) ] = \\
 & = \Theta [B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + \Xi + N + M + \\
 & \Lambda + K + I] \\
 & = \Theta [B + 2(\Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta)] \quad (5)
 \end{aligned}$$

ὁμοίως :

$$\begin{aligned}
 \Gamma & = 6\Theta, \Gamma^2 = \Theta \cdot 6\Gamma = \\
 & \Theta [\Gamma + (\Delta + I) + (E + K) + \\
 & (Z + \Lambda) + (H + M) + (\Theta + N)] = \\
 & = \Theta [\Gamma + 2(\Delta + E + Z + H + \Theta)] \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta & = 5\Theta, \Delta^2 = \Theta \cdot 5\Delta = \\
 & = \Theta [\Delta + 2(E + Z + H + \Theta)] \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E & = 4\Theta, E^2 = \Theta \cdot 4E = \\
 & = \Theta [E + 2(Z + H + \Theta)] \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z & = 3\Theta, Z^2 = \Theta \cdot 3Z = \\
 & = \Theta [Z + 2(H + \Theta)] \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H & = 2\Theta, H^2 = \Theta \cdot 2H = \\
 & = \Theta [H + 2\Theta] \quad \text{καὶ} \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\Theta^2 = \Theta \cdot \Theta$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων (4 - 10) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned}
 & A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2 = \\
 & = \Theta [A + 3B + 5\Gamma + 7\Delta + 9E + 11Z + 13H + 15\Theta], \quad (11)
 \end{aligned}$$

καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

Τὸ νόημα τοῦ θεωρήματος εἰς σύγχρονον διατύπωσιν :

Ἐστω ἡ ἀκολουθία  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, n\alpha$ .

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

# ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

$$\begin{aligned} & \nu(\nu\alpha)^2 + (\nu\alpha)^2 + \alpha(\alpha + 2\alpha + 3\alpha + \dots + \nu\alpha) = \\ & = 3 [\alpha^2 + (2\alpha)^2 + (3\alpha)^2 + \dots + (\nu\alpha)^2] \end{aligned} \quad (1)$$

Διαιροῦντες ἀμφοτέρα τὰ μέλη διὰ  $\alpha^2$  λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} & \nu^3 + \nu^2 + (1 + 2 + 3 + \dots + \nu) = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \\ & \dots + \nu^2) \end{aligned} \quad (2)$$

ἤτοι τὸν τύπον τὸν παρέχοντα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων  $1^2 + 2^2 +$   
 $+ \dots + \nu^2$ , διότι ἐκ τῆς (2) ἔχομεν  $\frac{\nu(2\nu+1)(\nu+1)}{6} = 1^2 +$   
 $+ 2^2 + \dots + \nu^2$ . (3)

## ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι  $\nu(\nu\alpha)^2 < 3 [\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (\nu\alpha)^2]$   
καὶ  $\nu(\nu\alpha)^2 > 3 [\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + ((\nu-1)\alpha)^2]$

## 11

Ἐκ τῆς ἀξιόουσης ἀριθμητικῆς προόδου (ἀκολουθίας)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$   
 $\dots, \alpha_\nu$ , ὅπου  $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \dots, \alpha_\nu = \nu\alpha_1$   
να δειχθῇ ὅτι ἀληθεύουσιν αἱ σχέσεις :

$$\frac{(\nu-1)\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2 + \dots + \alpha_2^2} < \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(\alpha_\nu - \alpha_1)^2}, \quad (1)$$

καὶ

$$\frac{(\nu-1)\alpha_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_{\nu-2}^2 + \dots + \alpha_1^2} > \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(\alpha_\nu - \alpha_1)^2}, \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῶν ἀνισοτήτων λαμβάνεται :

$$\frac{(\nu-1)\alpha_\nu^2}{(\nu-1)\left(\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_{\nu-1}^2\right)} = \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(\alpha_\nu - \alpha_1)^2}, \quad (3)$$

(ἐκ τῆς προόδου εἶναι  $\alpha_{v-1} = \alpha_v - \alpha_1$ ).

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως (1) ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ παρονομαστής τοῦ  $\alpha'$  μέλους τῆς (3) εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ  $\alpha'$  μέλους τῆς (1), ἥτοι, ὅτι :

$$(v-1)\alpha_v \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(v-1)\alpha_{v-1}^2 < \alpha_v^2 + \alpha_{v-1}^2 + \dots + \alpha_2^2, \quad (4)$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος, ἐπειδὴ  $\alpha_v = \alpha_{v-1} + \alpha_1$ ,

$$\begin{aligned} \gammaράφεται \quad (v-1)\alpha_v \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(v-1)\alpha_{v-1}^2 &= (v-1)\alpha_1^2 + \\ &+ (v-1)\alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} + \frac{1}{3}(v-1)\alpha_{v-1}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος (4), ἥτοι ὁ παρονομαστής τοῦ  $\alpha'$  μέλους τῆς (1) γράφεται :

$$\begin{aligned} \alpha_v^2 + \alpha_{v-1}^2 + \dots + \alpha_2^2 &= (\alpha_{v-1} + \alpha_1)^2 + (\alpha_{v-2} + \alpha_1)^2 + \dots + \\ &+ (\alpha_1 + \alpha_1) = \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_1^2 + 2\alpha_1(\alpha_{v-1} + \alpha_{v-2} + \\ &+ \dots + \alpha_1) + (v-1)\alpha_1^2 = \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_1^2 + \\ &+ \alpha_1(\alpha_{v-1} + \alpha_{v-2} + \dots + \alpha_1 + \alpha_{v-1} + \alpha_{v-2} + \dots + \alpha_1) + \\ &+ (v-1)\alpha_1^2 = \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_1^2 + v\alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} + \\ &+ (v-1)\alpha_1^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Θεωροῦμεν τὰς ἰσότητας (5) καὶ (6), ἥτοι :

$$\begin{aligned} (5) \quad (v-1)\alpha_v \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(v-1)\alpha_{v-1}^2 &= (v-1)\alpha_1^2 + \\ &+ (v-1)\alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} + \frac{1}{3}(v-1)\alpha_{v-1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad \alpha_v^2 + \alpha_{v-1}^2 + \dots + \alpha_2^2 &= \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_1^2 + \\ &+ v\alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} + (v-1)\alpha_1^2. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ δεύτερα μέλη τούτων ὁ ὅρος  $(v-1)\alpha_1^2$  εἶναι κοινός, ἐν ᾧ εἰς τὰ αὐτὰ μέλη ὁ ὅρος τῆς πρώτης ὁ

$(v-1) \alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} < \text{τοῦ ὅρου τῆς δευτέρας τοῦ } \alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} \text{ καὶ}$   
 ἐκ τοῦ πορίσματος τοῦ προηγουμένου 10 θεωρήματος εἶναι  
 $\frac{1}{3} (v-1) \alpha_{v-1}^2 < \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_1^2$ . Ὅθεν, τὸ α' μέλος  
 τῆς (5) τὸ  $(v-1) \alpha_v \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} (v-1) \alpha_{v-1}^2 < \alpha_v^2 + \alpha_{v-1}^2 +$   
 $+ \dots + \alpha_2^2$ , ἥτοι ἐδείχθη ἡ ἀλήθεια τῆς (4).

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως (2) ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ παρονομαστής τοῦ α' μέλους τῆς (3) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ α' μέλους τῆς (2), ἥτοι ὅτι :

$$(v-1) \alpha_v \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} (v-1) \alpha_{v-1}^2 > \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_1^2. \quad (7)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος (7), ἥτοι ὁ παρονομαστής τοῦ α' μέλους τῆς (2) γράφεται :

$$\begin{aligned} \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_2^2 + \alpha_1^2 &= (\alpha_{v-2} + \alpha_1)^2 + (\alpha_{v-3} + \alpha_1)^2 + \\ &+ \dots + (\alpha_1 + \alpha_1)^2 + \alpha_1^2 = \alpha_{v-2}^2 + \alpha_{v-3}^2 + \dots + \alpha_1^2 + \\ &+ 2(\alpha_{v-2} \cdot \alpha_1 + \alpha_{v-3} \cdot \alpha_1 + \dots + \alpha_1^2) + (v-1) \alpha_1^2 = \alpha_{v-2}^2 + \\ &+ \alpha_{v-3}^2 + \dots + \alpha_1^2 + \alpha_1 (\alpha_{v-2} + \alpha_{v-3} + \dots + \alpha_1 + \alpha_{v-2} + \\ &+ \alpha_{v-3} + \dots + \alpha_1) + (v-1) \alpha_1^2 = \alpha_{v-2}^2 + \alpha_{v-3}^2 + \dots + \\ &+ \alpha_1^2 + (v-2) \alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} + (v-1) \alpha_1^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Θεωροῦμεν τὰς ἰσότητας (5) καὶ (8), ἥτοι

$$(5) \quad (v-1) \alpha_v \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} (v-1) \alpha_{v-1}^2 = (v-1) \alpha_1^2 +$$

$$(v-1) \alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} + \frac{1}{3} (v-1) \alpha_{v-1}^2$$

$$(8) \quad \alpha_{v-1}^2 + \alpha_{v-2}^2 + \dots + \alpha_2^2 + \alpha_1^2 = \alpha_{v-2}^2 + \alpha_{v-3}^2 + \dots + \alpha_1^2 + \\ + (v-2) \alpha_1 \cdot \alpha_{v-1} + (v-1) \alpha_1^2.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὰ δευτέρα μέλη τούτων ὁ ὅρος  $(n-1) \alpha_1^2$  εἶναι κοινός, ἐν ᾧ εἰς τὰ αὐτὰ μέλη ὁ ὅρος τῆς πρώτης ὁ  $(n-1) \alpha_1 \cdot \alpha_{n-1} >$  τοῦ ὅρου τῆς δευτέρας τοῦ  $(n-2) \alpha_1 \cdot \alpha_{n-1}$  καὶ ἐκ τοῦ πορίσματος τοῦ προηγουμένου 10 θεωρήματος εἶναι :

$\frac{1}{3} (n-1) \alpha_{n-1}^2 > \alpha_{n-2}^2 + \alpha_{n-3}^2 + \dots + \alpha_1^2$ . Ὅθεν, τὸ  $\alpha'$  μέλος τῆς (5) τὸ  $(n-1) \alpha_n \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} (n-1) \alpha_{n-1}^2 > \alpha_{n-1}^2 + \alpha_{n-2}^2 + \dots + \alpha_1^2$ , ἥτοι ἐδείχθη ἡ ἀλήθεια τῆς (7).

13

Ἐστω ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΑΗ τέμνει τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου ΓΑΗ εἰς τι σημεῖον Λ. Θεωρεῖ ὡς γνωστὸν ὅτι  $ΑΓ + ΑΗ > 2ΑΛ$  καὶ ἐπειδὴ  $(ΑΓ + ΑΗ) : 2 = ΑΘ$ , θὰ εἶναι  $ΑΘ > ΑΛ$ .

25

...ἔξει λόγον... Διότι  $ΑΘ \times ΘΕ + \frac{1}{3} ΑΕ^2 = ΑΘ^2 = 2ΘΕ^2 + \frac{1}{3} ΘΕ^2 : 4ΘΕ^2 = 6ΘΕ^2 + ΘΕ^2 : 12ΘΕ^2 = 7 : 12$ , ἐπειδὴ  $ΘΕ = ΕΑ$ . Διότι ἔστω ὁ πρῶτος κύκλος Ρ· θὰ εἶναι  $ΘΕ : ΘΑ = Ρ : 2Ρ$  (θεώρ. 15).

ΜΗΧΑΝΙΚΑ  $\alpha'$  ('Επιπέδων ἰσορροπιῶν  $\alpha'$ )

5

Αἱ παράλληλοι ΔΖ, ΑΗ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΗ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΟΖ, ΚΘΗ λαμβάνεται  $\frac{ΟΖ}{ΟΚ} = \frac{ΒΘ}{ΟΗ}$ , (1).



Ἐχει ληφθῆ εὐθεΐα  $E = \Theta H >$  δοθέντος τυχόντος τόξου, καὶ εἶναι τόξον  $B\Theta >$  χορδῆς  $B\Theta$ . Ὅθεν ἐκ τῆς (1) λαμβάνεται

$$\frac{\Theta Z}{\Theta K} < \frac{\text{τόξον } B\Theta}{\text{δοθὲν τόξον}}.$$

6

Καὶ ἐπεὶ  $\frac{A}{B} = \frac{\Delta \Gamma}{\Gamma \Xi}$ ,  $\frac{\Delta \Gamma}{\Gamma \Xi} = \frac{\Lambda \text{H}}{\text{H K}}$ , εἶναι ἄρα  $\frac{A}{B} = \frac{\Lambda \text{H}}{\text{H K}}$ .

$\frac{\Lambda \text{H}}{N} = \frac{A}{Z}$ , (1),  $\frac{K \text{H}}{\Lambda \text{H}} = \frac{B}{A}$ , (2). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν

(1) καὶ (2) κατὰ μέλη (τοῦτο σημαίνει τὸ «δι' ἴσου») ἔχομεν

$$\frac{K \text{H}}{N} = \frac{B}{Z}.$$

7

Ἐστω ὅτι δὲν ὑπάρχει ἰσορροπία καὶ ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ  $Z$ , συνεπεία ὑπεροχῆς τινος τοῦ  $AB$  ἔναντι τοῦ  $\Gamma$ . Ἄν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ μέγεθος  $AB$  τὸ μέγεθος  $B$ , ὥστε τὰ  $A$ ,  $\Gamma$ , νὰ γίνωνται σύμμετρα, τὸ δὲ  $B$  νὰ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ  $AB$  ἔναντι τοῦ  $\Gamma$ , καὶ ἥτις ὑπεροχὴ ἂν δὲν ὑπῆρχε θὰ ἦτο ἰσορροπία, τότε ὁ ζυγὸς θὰ ἐξακολουθῇ νὰ κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ  $Z$ , ἀφοῦ ἀφηρέθη ἀπὸ τὸ  $B$  μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς ἔναντι τοῦ  $\Gamma$ . Ἡ σχέσις ὅμως  $AB : \Gamma = EA : EZ$  θὰ ἐγίνετο μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ  $B$ ,  $A : \Gamma < EA : EZ$ , ἥτοι ἡ στατικὴ ῥοπή  $A \cdot EZ < \Gamma \cdot EA$ . Δηλαδή ὁ ζυγὸς ἔπρεπε νὰ κλίνει ὅχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ  $Z$  ἀλλὰ πρὸς τὸ μέρος τοῦ  $\Delta$ · ὅπερ ἀδύνατον· ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ὅταν τὸ  $\Gamma$  ὑπερέχη τοῦ  $AB$ . Ἀφοῦ λοιπὸν ἀποκλείωνται αἱ δύο αὐταὶ περιπτώσεις, ἀπομένει ἡ τρίτη, νὰ ὑπάρχῃ δηλ. ἰσορροπία μὲ τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, ὅταν ὑπάρχῃ ἡ σχέσις  $AB : \Gamma = EA : EZ$ .

$$\dots \text{Τὸ δὴ } \triangle A\Delta\Gamma \text{ [τρίγωνον]} \dots \frac{\text{τρίγωνον } \triangle A\Delta\Gamma}{\text{τρίγωνον } \triangle A\Sigma\text{M}} = \frac{A\Gamma^2}{A\text{M}^2}, \quad (1).$$

Ἐὰν καλέσωμεν  $n$  τὸ πλῆθος τῶν μικρῶν ἴσων τριγώνων  $\triangle A\Sigma\text{M}$ . . .  
 θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τούτων  $\Sigma = n$  τρίγωνα  $\triangle A\Sigma\text{M}$  καὶ ἐκ τῆς (1)

$$\text{ἔχομεν } \frac{\text{τρίγωνον } \triangle A\Delta\Gamma}{n \cdot \text{τρίγωνον } \triangle A\Sigma\text{M}} = \frac{A\Gamma^2}{n \cdot A\text{M}^2}. \text{ Καὶ ἐπειδὴ } A\Gamma = n \cdot A\text{M}$$

$$\text{θὰ ἔχωμεν } \frac{\text{τρίγωνον } \triangle A\Delta\Gamma}{\Sigma} = \frac{A\Gamma}{A\text{M}}. \text{ Ἐὰν καλέσωμεν } n \text{ τὸ πλῆθος} \\ \text{τῶν μικρῶν ἴσων τριγώνων } \triangle A\Lambda\Sigma \text{ καὶ } \Sigma' \text{ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν} = \\ = n \text{ τρίγωνα } \triangle A\Lambda\Sigma, \text{ θὰ ἔχωμεν ὁμοίως } \frac{\text{τρίγωνον } \triangle A\Delta\text{B}}{\Sigma'} = \frac{B\Lambda}{A\Lambda}.$$

$$\text{Ἐπειδὴ (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων)} \frac{A\Gamma}{A\text{M}} = \frac{B\Lambda}{A\Lambda}, \text{ θὰ ἔ-}$$

$$\text{χωμεν } \frac{\text{τρίγωνον } \triangle A\Delta\Gamma}{\Sigma} = \frac{\text{τρίγωνον } \triangle A\Delta\text{B}}{\Sigma'}, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$\frac{\text{τρίγ. } \triangle A\Delta\Gamma + \text{τρίγ. } \triangle A\Delta\text{B}}{\Sigma + \Sigma'} = \frac{\text{τρίγ. } \triangle A\Delta\text{B}}{\Sigma'} = \frac{B\Lambda}{A\Lambda} = \frac{A\Gamma}{A\text{M}},$$

$$\text{ἐξ ἧς } \frac{\text{τρίγ. } \triangle A\text{B}\Gamma}{\Sigma + \Sigma'} = \frac{A\Gamma}{A\text{M}}. \quad (2)$$

$$\text{Ἐκ τῶν σχέσεων } \frac{A\Gamma}{A\text{M}} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Omega} = \frac{\Phi\text{P}}{\text{P}\Pi}, \text{ ἐπειδὴ } \text{P}\Theta > \text{P}\Pi$$

$$\text{ἔχομεν } \frac{A\Gamma}{A\text{M}} > \frac{\Phi\text{P}}{\text{P}\Theta}, \quad (3). \text{ Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :}$$

$$\frac{\text{τρίγωνον } \triangle A\text{B}\Gamma}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}} > \frac{\Phi\text{P}}{\text{P}\Theta}, \text{ ἐξ ἧς, (διελόντι, ἂν}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ διελόντι σημαίνει } \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}, \text{ Εὐκλ. V ὁρισμὸς 15)}$$

## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

$$\frac{\text{τρίγωνον } \text{ΑΒΓ} - \text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}} > \frac{\Phi P - P\Theta}{P\Theta}, \text{ ἔξ}$$

$$\eta\varsigma \frac{\text{ἄθροισμα παραλληλογράμμων}}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}} > \frac{\Phi\Theta}{P\Theta}, \quad (4). \text{ Λαμβάνοντες :}$$

$$\frac{X\Theta}{P\Theta} = \frac{\text{ἄθροισμα παραλληλογράμμων}}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}} \text{ ἔχομεν ἐκ τῆς (4)}$$

$$\frac{X\Theta}{P\Theta} > \frac{\Phi\Theta}{P\Theta}, \text{ ἔξ ἧς } X\Theta > \Phi\Theta \text{ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον } X \text{ εὐρί-} \\ \text{σκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας } P\Phi.$$

## ΨΑΜΜΙΤΗΣ

Τὸ σύστημα ἀριθμήσεως τοῦ Ψαμμίτου

### Πρώτη περίοδος

σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ 1 — 10.000 μυριάδας, ἢ ἀπὸ 1 — 10<sup>8</sup>

σειρὰ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἀπὸ 10<sup>8</sup> — 10.000 μυριάδας τοῦ 10<sup>8</sup>, ἢ ἀπὸ 10<sup>8</sup> — 10<sup>16</sup>

σειρὰ τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ 10<sup>16</sup> — 10.000 μυριάδας τοῦ 10<sup>16</sup>, ἢ ἀπὸ 10<sup>16</sup> — 10<sup>24</sup>

⋮

σειρὰ τῶν 10<sup>8</sup> ἀριθμῶν. Ἀπὸ 10<sup>8 · (10<sup>8-1</sup>)</sup> — 10<sup>8 · 10<sup>8</sup></sup>.

Ἐστω 10<sup>8 · 10<sup>8</sup></sup> = Α

### Δευτέρα περίοδος

σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ Α · 1 — Α · 10<sup>8</sup>

σειρὰ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἀπὸ Α · 10<sup>8</sup> — Α · 10<sup>16</sup>

σειρά τῶν  $10^8$  ἀριθμῶν. Ἀπὸ  $A \cdot 10^{8 \cdot (10^{8-1})} = A \cdot 10^{8 \cdot 10^8}$ ,  
 $(A \cdot 10^{8 \cdot 10^8} = A^2)$

.....  
 $10^8$  περίοδος

σειρά τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ  $A^{10^{8-1}} \cdot 1 = A^{10^{8-1}} \cdot 10^8$

σειρά τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἀπὸ  $A^{10^{8-1}} \cdot 10^8 = A^{10^{8-1}} \cdot 10^{16}$

⋮

σειρά τῶν  $10^8$  ἀριθμῶν. Ἀπὸ  $A^{10^{8-1}} \cdot 10^{8 \cdot (10^{8-1})} = A^{10^{8-1}} \cdot 10^{8 \cdot 10^8}$   
 (δηλ.  $A^{10^8}$ )

Διὰ τὴν σχηματίζωμεν ἰδέαν τινὰ τοῦ μεγέθους τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἀριθμήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τῆς περιόδου, ὁ  $A$ , παρίσταται διὰ τῆς μονάδος, τῆς ὁποίας ἀκολουθοῦν πρὸς τὰ δεξιά 800.000.000 μηδενικά.

Σελὶς 198, 27... τούτων δὲ...

Ἐστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

1  $10^1$   $10^2$   $10^3$   $10^4$   $10^5$   $10^6$   $10^7$   $10^8$   $10^9$  .....

Πρώτη ὀκτὰς 1  $10^1$   $10^2$   $10^3$   $10^4$   $10^5$   $10^6$   $10^7$

Δευτέρα ὀκτὰς  $10^8$   $10^9$   $10^{10}$   $10^{11}$   $10^{12}$   $10^{13}$   $10^{14}$   $10^{15}$

Τρίτη ὀκτὰς  $10^{16}$   $10^{17}$   $10^{18}$   $10^{19}$   $10^{20}$   $10^{21}$   $10^{22}$   $10^{23}$

Τετάρτη ὀκτὰς  $10^{24}$   $10^{25}$   $10^{26}$   $10^{27}$   $10^{28}$   $10^{29}$   $10^{30}$   $10^{31}$

Πέμπτη ὀκτὰς  $10^{32}$   $10^{33}$   $10^{34}$   $10^{35}$   $10^{36}$   $10^{37}$   $10^{38}$   $10^{39}$

Ἑκτη	ὀκτὰς	$10^{40}$	$10^{41}$	$10^{42}$	$10^{43}$	$10^{44}$	$10^{45}$	$10^{46}$	$10^{47}$
Ἑβδόμη	ὀκτὰς	$10^{18}$	$10^{49}$	$10^{50}$	$10^{51}$	$10^{52}$	$10^{53}$	$10^{54}$	$10^{55}$
Ὀγδὸη	ὀκτὰς	$10^{56}$	$10^{57}$	$10^{58}$	$10^{59}$	$10^{60}$	$10^{61}$	$10^{62}$	$10^{63}$

σελὶς 200, 11 . . . Χρήσιμον δὲ

Ἐστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \dots \alpha_m \dots \alpha_n \dots \alpha_{m+n-1}$$

Ἐστω ὁ ὅρος τῆς προόδου ὁ  $\alpha_{m+n-1}$  ἀπέχων τόσους ὅρους ἀπὸ τοῦ  $\alpha_n$ , ὅσους ὅρους ἀπέχει ὁ  $\alpha_m$  ἀπὸ τοῦ  $\alpha_1$ , ὅπου  $\alpha_1 = 1$ . Ἀποδεικνύεται ὅτι  $\alpha_m \times \alpha_n = \alpha_{m+n-1}$ . Διότι  $\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \frac{\alpha_{m+n-1}}{\alpha_n}$ .

#### ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ

(Τετραγωνισμὸς παραβολῆς)

#### 4

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΔΓ, ΒΚΙ ἔπεται ΒΔ : ΒΚ = ΒΓ : ΒΙ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΔ : ΒΚ = ΔΓ<sup>2</sup> : ΚΗ<sup>2</sup> λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ = ΔΓ<sup>2</sup> : ΚΗ<sup>2</sup>, (1). Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΓ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΒΔ εἰς τι σημεῖον Λ (ἡ ΘΛ ἐλλείπει ἀπὸ τὸ σχῆμα). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΓΒ, ΛΒΘ λαμβάνομεν ΔΓ : ΛΘ = ΒΓ : ΒΘ ἢ ΔΓ : ΚΗ = ΒΓ : ΒΘ. Ἐκ ταύτης, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ = ΒΓ<sup>2</sup> : ΒΘ<sup>2</sup>, ἐξ ἧς εἶναι ΒΓ × ΒΘ<sup>2</sup> = ΒΙ × ΒΓ<sup>2</sup> ἢ ΒΘ<sup>2</sup> = ΒΙ × ΒΓ ἢ ΒΓ : ΒΘ = ΒΘ : ΒΙ, (2), ἥτοι ἡ ΒΘ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΒΓ, ΒΙ. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΘ = (ΒΓ - ΒΘ) : (ΒΘ - ΒΙ), ἥτοι ΒΓ : ΒΘ = ΓΘ : ΘΙ.

ΟΧΟΥΜΕΝΩΝ α'

Ἐφαρμογὴ τῶν θεωρημάτων 6 καὶ 7 διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς νοθείας τοῦ χρυσοῦ στεφάνου, κατὰ τὰς πληροφορίας τοῦ Ῥωμαίου συγγραφέως Βιτρουβίου (μαρτυρία εἰς α' μέρος, α' τόμου τῶν Ἀπάντων, ὑπ' ἀριθ. 249). Ἐστω:

1) Τὸ βάρος τοῦ στεφάνου = α γραμμάρια

2) Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος = β γραμμάρια, ὅταν ὁ στέφανος βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕγρου (ἢ ἄνωσις).

3) Ἡ ἄνωσις τεμαχίου καθαροῦ χρυσοῦ, ὅταν τοῦτο βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος = γ γραμμ.

4) Ἡ ἄνωσις τεμαχίου καθαροῦ ἀργύρου, ὅταν τοῦτο βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος = δ γραμμ.

5) Τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν στέφανον = x γραμμ.

6) Τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν στέφανον = ψ γραμμ.

Ἐκ τῶν δεδομένων τούτων λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$x + \psi = \alpha$$

καὶ

$$\gamma x + \delta \psi = \beta,$$

ἐξ οὗ

$$x = \frac{\alpha\delta - \beta}{\delta - \gamma}$$

καὶ

$$\psi = \frac{\beta - \alpha\gamma}{\delta - \gamma}.$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΟΕΙΚΟΝ

Ἔστωσαν :

$\Omega$ ,  $\omega$  οἱ ἀριθμοὶ τῶν λευκῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως,  
 $X$ ,  $\chi$  οἱ ἀριθμοὶ τῶν κυανῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως,  
 $\Psi$ ,  $\psi$  οἱ ἀριθμοὶ τῶν ξανθῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως,  
 $\Phi$ ,  $\phi$  οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι :

Τ α ὕ ρ ο ι

$$\text{Λευκοὶ} \quad \Omega = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) X + \Psi \quad (1)$$

$$\text{Κυανοῖ} \quad X = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \Phi + \Psi \quad (2)$$

$$\text{Ἀναμίκτου χρώματος} \quad \Phi = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) \Omega + \Psi \quad (3)$$

Ἀ γ ε λ ά δ ε ς

$$\text{Λευκαὶ} \quad \omega = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) (X + \chi) \quad (4)$$

$$\text{Κυαναῖ} \quad \chi = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) (\Phi + \phi) \quad (5)$$

$$\text{Ἀναμίκτου χρώματος} \quad \phi = \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) (\Psi + \psi) \quad (6)$$

$$\text{Ξανθαὶ} \quad \psi = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) (\Omega + \omega) \quad (7)$$

$$(8) \quad \Omega + X = \text{τετράγωνος ἀριθμὸς}$$

$$(9) \quad \Psi + \Phi = \text{τρίγωνος ἀριθμὸς (τῆς μορφῆς } \frac{\nu(\nu+1)}{2},$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Πρόκειται δηλ. διὰ πρόβλημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως με 7 ἐξισώσεις καὶ 8 ἀγνώστους, με ἐπὶ πλέον δύο εἰδικὰς συνθήκας.

Κατὰ τὸ σχόλιον εἶναι:

$$\text{Λευκοὶ ταῦροι, } \Omega = 829.318.560.$$

$$\text{Λευκαὶ ἀγελάδες, } \omega = 576.508.800$$

$$\Omega + \omega = 1.405.827.360$$

$$\text{Κυανοὶ ταῦροι, } X = 596.841.120.$$

$$\text{Κυαναὶ ἀγελάδες, } \chi = 391.459.680.$$

$$X + \chi = 988.300.800.$$

$$\text{Ξανθοὶ ταῦροι, } \Psi = 331.950.960.$$

$$\text{Ξανθαὶ ἀγελάδες, } \psi = 435.137.040.$$

$$\Psi + \psi = 767.088.000.$$

$$\text{Ἀναμίκτου χρώματος ταῦροι, } \Phi = 588.644.800.$$

$$\text{Ἀναμίκτου χρώματος ἀγελάδες, } \varphi = 281.265.600$$

$$\Phi + \varphi = 869.910.400.$$

$$\text{Σύνολον } \Omega + X + \Psi + \Phi + \omega + \chi + \psi + \varphi = 4.031.126.560$$

Οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ ἐπαληθεύουν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) — (7), ὅχι ὁμως καὶ τὰς ἐξισώσεις (8) καὶ (9), καίτοι ὁ σχολιαστὴς γράφει ὅτι ἐπαληθεύονται καὶ αἱ ἐξισώσεις αὐταί.

Τὸ προηγούμενον σχόλιον ἐπὶ τοῦ προβλήματος, φαίνεται ὅτι εἶναι βυζαντινῆς ἐποχῆς. Δὲν ἔχουν διασωθῇ πληροφορίαι περὶ



## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

προσπαθειῶν ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος μέχρι τοῦ 18ου αἰῶνος. Κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς G. Nesselmann περιλαμβάνει εἰς τὸ βιβλίον του Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, σελ. 484 κ.έ. (Ἡ ἄλγεβρα τῶν Ἑλλήνων) τὴν κατωτέρω ἐκτιθεμένην προσπάθειαν πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Struwe ἢ τοῦ ἰδίου τοῦ Nesselmann, χωρὶς νὰ παραθέτῃ πληροφορίας περὶ τοῦ χρόνου δημοσιεύσεως αὐτῆς. «Ὁ Struwe καλεῖ διὰ μεγάλων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου τοὺς ταύρους καὶ διὰ μικρῶν τὰς ἀγελάδας ὥς ἐξῆς :

Λευκοὶ ταῦροι	W,	λευκαὶ ἀγελάδες	w
Κυανοὶ ταῦροι	B,	κυαναὶ ἀγελάδες	b
Ξανθοὶ ταῦροι	G,	ξανθαὶ ἀγελάδες	g
Ἀναμίκτου χρώματος ταῦροι	S,	ἀναμίκτου χρώματος ἀγελάδες	s

### Ἡ ΠΑΡΑΤΙΘΕΜΕΝΗ ΛΥΣΙΣ :

Αἱ ἐπτὰ πρῶται ἐξισώσεις εἶναι :

$$W = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) B + G = \frac{5}{6} B + G \quad (1)$$

$$B = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) S + G = \frac{9}{20} S + G \quad (2)$$

$$S = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) W + G = \frac{13}{42} W + G \quad (3)$$

$$w = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) (B + b) = \frac{7}{12} B + \frac{7}{12} b \quad (4)$$

$$b = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) (S + s) = \frac{9}{20} S + \frac{9}{20} s \quad (5)$$

$$s = \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) (G + g) = \frac{11}{30} G + \frac{11}{30} g \quad (6)$$

$$g = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) (W + w) = \frac{13}{42} W + \frac{13}{42} w \quad (7)$$

Ἐὰν ἐκφράσωμεν εἰς τὰς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις τοὺς ἀγνώστους W, B, S συναρτήσῃ τοῦ G θὰ ἔχωμεν :

$$W = \frac{2226}{891} G$$

$$B = \frac{1602}{891} G$$

$$S = \frac{1580}{891} G$$

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀκεραίων τιμῶν τῶν ἀγνώστων θέτομεν τὸν G ὡς πολλαπλάσιόν τι τοῦ 891, ὅποτε ἔχομεν :

$$W = 2226 \text{ m}$$

$$B = 1602 \text{ m}$$

$$S = 1580 \text{ m}$$

$$G = 891 \text{ m}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὰς ἐξισώσεις (4, 5, 6, 7) λαμβάνομεν :

$$w = \frac{7\,206\,360}{4657} \text{ m}$$

$$b = \frac{4\,893\,246}{4657} \text{ m}$$

$$s = \frac{3\,515\,820}{4657} \text{ m}$$

$$g = \frac{5\,439\,213}{4657} \text{ m}$$

## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Διὰ νὰ λάβωμεν καὶ ἐνταῦθα ἀκεραίας τιμὰς θέτομεν :

$m = 4657\ n$ , ὁπότε ἔχομεν :

$$W = 10\ 366\ 482\ n$$

$$w = 7\ 206\ 360\ n$$

$$B = 7\ 460\ 514\ n$$

$$b = 4\ 893\ 246\ n$$

$$S = 7\ 358\ 060\ n$$

$$s = 3\ 515\ 820\ n$$

$$G = 4\ 149\ 387\ n$$

$$g = 5\ 739\ 213\ n$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν μικροτέραν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ  $n = 1$  θὰ ἔχωμεν ἄθροισμα βοῶν καὶ ἀγελάδων 50 389 082.

Πρέπει νὰ πληρωθοῦν ἀκόμη αἱ δύο συνθήκαι :

$$W + B = \text{τετράγωνος ἀριθμὸς} \quad (8)$$

$$S + G = \text{τρίγωνος ἀριθμὸς} \quad (9)$$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω εὐρεθεισῶν τιμῶν αἱ συνθήκαι αὗται δὲν πληροῦνται. Ἐπιλαμβανόμενοι τῆς ἐξισώσεως (8) μόνον, θὰ ἔχωμεν :

$$W + B = 17\ 826\ 996\ n$$

Ἀλλὰ ὁ 17 826 996 εἶναι γινόμενον παραγόντων 3.4.11.29.4657 ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ὁ 4 εἶναι τετράγωνος. Διὰ νὰ πληρῶται λοιπὸν ἡ συνθήκη (8) πρέπει τοῦλάχιστον νὰ εἶναι  $n = 3.11.29.4657 = 4\ 456\ 749$  καὶ διὰ τούτου νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀνωτέρω εὐρεθέντας ὁκτὼ ἀριθμούς. Ἐπειδὴ ὅμως πάντοτε εἶναι δυνατὸν αἱ οὕτω εὐρισκόμεναι τιμαὶ νὰ μὴ πληρῶσι τὴν συνθήκην (9), ὀφείλομεν χάριν ἀσφαλείας νὰ δώσωμεν εἰς τὰς τιμὰς αὐτὰς ἓνα ἀπροσδιόριστον τετραγωνικὸν παράγοντα  $p^2$ . Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν :

$$W = 46\ 200\ 808\ 287\ 018\ p^2$$

$$w = 32\ 116\ 937\ 723\ 640\ p^2$$

$$B = 33\ 249\ 638\ 308\ 986\ p^2$$

$$b = 21\ 807\ 969\ 217\ 254\ p^2$$

$$\begin{aligned} S &= 32\,793\,026\,546\,940\,p^2 & s &= 15\,669\,127\,269\,180\,p^2 \\ G &= 18\,492\,776\,362\,863\,p^2 & g &= 24\,241\,207\,098\,537\,p^2 \end{aligned}$$

Ἦδη εἶναι ὅπωςδῆποτε  $W + B$  ἀριθμὸς τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι  $8\,913\,498\,p$ .

Κατὰ τὴν ἐνάτην συνθήκην πρέπει  $S + G$  νὰ εἶναι τρίγωνος ἀριθμὸς, δηλαδὴ τὸ ὀκταπλάσιον τούτου  $+ 1$  νὰ εἶναι τετράγωνος. (Σημείωσις. Τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καλοῦνται τρίγωνοι ἀριθμοί. Τὸ ὀκταπλάσιον δὲ παντὸς τριγώνου ἀριθμοῦ σὺν ἓν εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος. (Πλούταρχος, Πλατωνικὰ ζητήματα V. 2, 1003 F καὶ Διοφάντου Ἀριθμητικὰ 4, 38)). Ἄς κάμωμεν τὴν δοκιμὴν μὲ τὴν τιμὴν  $p = 1$ , ὁπότε θὰ ἔχωμεν, ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς

$$S + G = 51\,285\,802\,909\,803$$

καὶ ἐπομένως :

$$8(S + G) + 1 = 410\,286\,423\,278\,425 = \text{τετράγωνος.}$$

Διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ 25 λαμβάνομεν ὡς πηλίκον  $16\,411\,456\,931\,137$ , ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τετράγωνος, διότι οὐδεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἔχῃ ὡς ψηφίον τῶν μονάδων τὸν ἀριθμὸν 7. Ἐπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν  $p = 1$ , ἀλλὰ νὰ δώσωμεν εἰς τὸν  $p$  μεγαλυτέραν τιμὴν. Ἐὰν καλέσωμεν  $S + G = A$  πρέπει νὰ ἔχωμεν  $8Ap^2 + 1 = \text{τετράγωνος} = q^2$ . Θεωρητικῶς ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ λυθῇ. Πιθανὸν ὅμως νὰ βραδύνη ἡ λύσις αὐτῆς, διότι ἡ τιμὴ τοῦ  $p$  θὰ εἶναι πολὺ μεγάλη· ἄλλως τε ἡ λύσις αὕτη δὲν παρουσιάζει ἐπιστημονικὸν ἐνδιαφέρονν).

# ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

## Η ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ WURM

(The works of ARCHIMEDES, by T. L. Heath, Dover publications, inc. New York, p. 319).

«Ὁ Wurm ἐξετάζει τὸ πρόβλημα θεωρῶν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς ὀγδόης συνθήκης εἶναι ὀρθογώνιος ἀριθμὸς (γινόμενον δύο ἀνίσων παραγόντων, ἑτερομήκης) καὶ ὅχι τετράγωνος. Τὴν λύσιν Wurm δημοσιεύει ὁμοῦ μετὰ τῆς ἰδικῆς του γενικῆς λύσεως ὁ Amthor εἰς τὸ γερμανικὸν περιοδικὸν διὰ Μαθηματικὰ καὶ Φυσικὴν (τμῆμα ἱστοριοφιλογικὸν) (Zeitschrift für Mathematik und Physik (Hist. litt. Abtheilung), XXV. (1880), p. 156 sqq.).

Ἔστωσαν :

W, w οἱ λευκοὶ ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως

X, x οἱ κυανοὶ ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως

Y, y οἱ ξανθοὶ ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως

Z, z οἱ ἀναμίκτου χρώματος ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως.

Πρῶτον μέρος :

$$\text{I} \quad W = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) X + Y \quad (\alpha)$$

$$X = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) Z + Y \quad (\beta)$$

$$Z = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) W + Y \quad (\gamma)$$

$$\text{II} \quad w = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) (X + x) \quad (\delta)$$

$$x = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) (Z + z) \quad (\epsilon)$$

$$z = \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) (Y + y) \quad (\zeta)$$

$$y = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) (W + w) \quad (\eta)$$

Δεύτερον μέρος :

$$W + X = \text{τετράγωνος ἀριθμὸς} \quad (\theta)$$

$$Y + Z = \text{τρίγωνος ἀριθμὸς} \quad (\iota)$$

Ἐστω  $W + X = \text{ὀρθογώνιος ἀριθμὸς (ἑτερομήκης)}$ .

Πολλαπλασιάζοντες τὴν  $(\alpha)$  ἐπὶ 336, τὴν  $(\beta)$  ἐπὶ 280, τὴν  $(\gamma)$  ἐπὶ 126 καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν :

$$297 W = 742 Y, \quad \eta \quad 3^3 \cdot 11 W = 2 \cdot 7 \cdot 53 Y \quad (\alpha')$$

Ἐκ τῶν  $\gamma$  καὶ  $\beta$  λαμβάνομεν :

$$891 Z = 1580 Y, \quad \eta \quad 3^4 \cdot 11 Z = 2^2 \cdot 5 \cdot 79 Y \quad (\beta')$$

$$\text{καὶ } 99 X = 178 Y, \quad \eta \quad 3^2 \cdot 11 X = 2 \cdot 89 Y \quad (\gamma')$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν  $(\delta)$  ἐπὶ 4800, τὴν  $(\epsilon)$  ἐπὶ 2800, τὴν  $(\zeta)$  ἐπὶ 1260, τὴν  $(\eta)$  ἐπὶ 462 καὶ προσθέσωμεν λαμβάνομεν :

$$4657 \omega = 2800 X + 1260 Z + 462 Y + 143 W$$

καὶ διὰ τῶν τιμῶν τῶν  $(\alpha')$ ,  $(\beta')$ ,  $(\gamma')$  λαμβάνομεν

$$297 \cdot 4657 w = 2402120 Y,$$

$$\eta \quad 3^3 \cdot 11 \cdot 4657 w = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373 Y \quad (\delta')$$

Ὅθεν μέσῳ τῶν  $(\eta)$ ,  $(\zeta)$ ,  $(\epsilon)$  λαμβάνομεν :

$$3^2 \cdot 11 \cdot 4657 y = 13 \cdot 46489 Y \quad (\epsilon')$$

$$3^3 \cdot 4657 z = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 761 Y \quad (\zeta')$$

$$\text{καὶ } 3^2 \cdot 11 \cdot 4657 x = 2 \cdot 17 \cdot 15991 Y \quad (\eta')$$

## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Καὶ ἐπειδὴ ὅλοι οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι βλέπομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (α'), (β'), . . . (η') ὅτι ὁ Υἶ πρέπει νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ  $3^4 \cdot 11 \cdot 4657$ , δηλαδὴ πρέπει νὰ θέσωμεν :

$$\Upsilon = 3^4 \cdot 11 \cdot 4657 n = 4\,149\,387 n.$$

Ἐκ τούτων αἱ ἐξισώσεις (α'), (β'), . . . (η') δίδουν τὰς ἐπο-  
μένας τιμὰς δι' ὅλους τοὺς ἀγνώστους συναρτήσῃ τοῦ n, ἦτοι :

W	=	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4657 n$	=	10366482 n	. . . . A
X	=	$2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4657 n$	=	7460514 n	
Υ	=	$3^4 \cdot 11 \cdot 4657 n$	=	4149387 n	
Z	=	$2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4657 n$	=	7358060 n	
w	=	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373 n$	=	7206360 n	
x	=	$2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15991 n$	=	4893246 n	
y	=	$3^2 \cdot 13 \cdot 46489 n$	=	5439213 n	
z	=	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761 n$	=	3515820 n	

Διὰ τὴν τιμὴν  $n = 1$  οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μικρό-  
τεροι οἱ ἐπαληθεύοντες τὰς ἑπτὰ ἐξισώσεις (α), (β), . . . . (η) καὶ  
ὑπολείπεται νὰ εὕρωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ n διὰ τὴν ἐξίσωσιν (ι).  
Ἐπειδὴ πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς  $q(q+1):2$ ,  
ὅπου q ἀκέραιος, 1, 2, 3 . . . . ., ἡ ἐξίσωσις (ι) εἶναι :

$$\Upsilon + Z = \frac{q(q+1)}{2}$$

Θέτοντες τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας τιμὰς διὰ Υ, Z λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} \frac{q(q+1)}{2} &= (3^4 \cdot 11 + 2^2 \cdot 5 \cdot 79) \cdot 4657 n \\ &= 2471 \cdot 4657 n \\ &= 7 \cdot 353 \cdot 4657 n \end{aligned}$$

Ὁ q θὰ εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός, δηλ. τῆς μορφῆς  $q = 2s$ , ἢ

$q = 2s \pm 1$  καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται :

$$s(2s \pm 1) = 7 \cdot 353 \cdot 4567 n.$$

Ἐπειδὴ ὁ  $n$  δὲν πρέπει νὰ εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὑποθέτομεν  $n = u \cdot v$ , ὅπου ὁ  $u$  εἶναι παράγων τοῦ  $n$ , ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν  $s$  καὶ ὁ  $v$  παράγων, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν  $2s \pm 1$ . τότε λαμβάνομεν τὰ 16 ἀντίστοιχα ζεύγη τιμῶν :

1.	$s =$	$u$	$2s \pm 1 = 7 \cdot 353 \cdot 4657$	$v$	
2.	$s =$	$7 u$	$2s \pm 1 =$	$353 \cdot 4657$	$v$
3.	$s =$	$353 u$	$2s \pm 1 =$	$7 \cdot 4657$	$v$
4.	$s =$	$4657 u$	$2s \pm 1 =$	$7 \cdot 353$	$v$
5.	$s =$	$7 \cdot 353 u$	$2s \pm 1 =$	$4657$	$v$
6.	$s =$	$7 \cdot 4657 u$	$2s \pm 1 =$	$353$	$v$
7.	$s =$	$353 \cdot 4657 u$	$2s \pm 1 =$	$7$	$v$
8.	$s = 7 \cdot 353 \cdot 4657$	$u$	$2s \pm 1 =$		$v$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς μικροτέρας τιμὰς τοῦ  $n$ , αἱ ὁποῖαι πληροῦν ὅλας τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ ἐκλέξωμεν ἐκ τῶν διαφόρων ἀκεραίων ζευγῶν, ἐκείνας αἱ ὁποῖαι δίδουν τὰς μικροτέρας τιμὰς διὰ τὸ γινόμενον  $un$  ἢ  $n$ .

Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰ διάφορα ζεύγη καὶ συγκρίνωμεν τὰ ἀποτελέσματα εὐρίσκομεν τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων

$$S = 7 u, \quad 2s - 1 = 353 \cdot 4567 v,$$

τὸ ὁποῖον παρέχει τὴν λύσιν

$$u = 117\,423, \quad v = 1,$$

$$\text{ὥστε} \quad n = uv = 117\,423 = 3^3 \cdot 4349,$$

$$\text{ὁπότε ἔπεται} \quad s = 7 u = 821\,961$$

$$\text{καὶ} \quad q = 2s - 1 = 1\,643\,921.$$



# ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

$$\begin{aligned}\text{Κατὰ ταῦτα} \quad \Upsilon + Z &= 2471 \cdot 4657 \, n \\ &= 2471 \cdot 4657 \cdot 117423 \\ &= 1 \, 351 \, 238 \, 949 \, 081 \\ &= \frac{1643921 \cdot 1643922}{2}\end{aligned}$$

ὅστις εἶναι τρίγωνος ἀριθμός, ὡς ζητεῖται.

Ὁ ἀριθμὸς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (θ), ὁ ὅποῖος πρέπει νὰ εἶναι γινόμενον δύο ἀκεραίων θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned}W + X &= 2 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 53 + 3 \cdot 89) \cdot 4657 \, n \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \, n \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot 117423 \\ &= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot 4349 \\ &= (2^2 \cdot 3^4 \cdot 4349) \cdot (11 \cdot 29 \cdot 4657) \\ &= 1409076 \cdot 1485583,\end{aligned}$$

ὅστις εἶναι ὀρθογώνιος ἀριθμός, τοῦ ὁποῖου οἱ παράγοντες εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσοι.

Ἡ λύσις εἶναι τότε, δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ  $n = 117423$ .

$$\begin{aligned}W &= 1 \, 217 \, 263 \, 415 \, 886 \\ X &= 876 \, 035 \, 935 \, 422 \\ \Upsilon &= 487 \, 233 \, 469 \, 701 \\ Z &= 864 \, 005 \, 479 \, 380 \\ w &= 846 \, 192 \, 410 \, 280 \\ x &= 574 \, 579 \, 625 \, 058 \\ y &= 638 \, 688 \, 708 \, 099 \\ z &= 412 \, 838 \, 131 \, 860\end{aligned}$$

$$\text{καὶ τὸ ἄθροισμα} = 5 \, 916 \, 837 \, 175 \, 686$$

# ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

## ΤΟ ΠΛΗΡΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(δηλ. ὁ  $W + X$  νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ ὄχι ὀρθογώνιος).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ πληρῶνται αἱ ἑπτὰ ἐξισώσεις  $(\alpha), (\beta), \dots (\eta)$  καὶ αἱ ἐπόμεναι δύο ἀκόμῃ

$$W + X = \text{τετράγωνος, ἔστω} = p^2$$

$$\text{καὶ} \quad Y + Z = \text{τρίγωνος ἀριθμός, ἔστω} = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς  $(A)$  ἔχομεν ἐν πρώτοις :

$$\begin{aligned} p^2 &= 2 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 53 + 3 \cdot 89) \cdot 4657 n \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 n, \end{aligned}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις αὕτη πληροῦται, ὅταν

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \xi^2 = 4\,456\,749 \xi^2,$$

ὅπου ὁ  $\xi$  τυχὼν ἀκέραιος.

Κατὰ ταῦτα αἱ 8 πρῶται ἐξισώσεις  $(\alpha), (\beta), \dots (\eta), (\theta)$  πληροῦνται διὰ τῶν ἐπομένων τιμῶν.

$$\begin{aligned} W &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 53 \cdot 4657^2 \cdot \xi^2 &= 46\,200\,808\,287\,018 \cdot \xi^2 \\ X &= 2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \cdot 4657 \cdot \xi^2 &= 33\,249\,638\,308\,986 \cdot \xi^2 \\ Y &= 3^5 \cdot 11^2 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot \xi^2 &= 18\,492\,776\,362\,863 \cdot \xi^2 \\ Z &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 79 \cdot 4657 \cdot \xi^2 &= 32\,793\,026\,546\,940 \cdot \xi^2 \\ w &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 373 \cdot 4657 \cdot \xi^2 &= 32\,116\,937\,723\,640 \cdot \xi^2 \\ x &= 2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 15991 \cdot 4657 \cdot \xi^2 &= 21\,807\,969\,217\,254 \cdot \xi^2 \\ y &= 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 46489 \cdot 4657 \cdot \xi^2 &= 24\,241\,207\,098\,537 \cdot \xi^2 \\ z &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 29 \cdot 761 \cdot 4657 \cdot \xi^2 &= 15\,669\,127\,269\,180 \cdot \xi^2 \end{aligned}$$

Ὑπολείπεται νὰ προσδιορισθῇ ὁ  $\xi$  ὥστε νὰ πληρῶται ἡ ἐξίσωσις  $(\iota)$ , δηλ. νὰ εἶναι :

$$Y + Z = \frac{q(q+1)}{2}$$

# ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὐρεθείσας τιμὰς διὰ Υ, Ζ ἔχομεν :

$$\begin{aligned} q(q+1) &= 51\,285\,802\,909\,803 \cdot \xi^2 \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot \xi^2. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 8 καὶ θέτοντες :

$$2q+1=t, \quad 2 \cdot 4657 \cdot \xi = u,$$

λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Pell

$$t^2 - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot u^2,$$

$$\text{ἤτοι :} \quad t^2 - 4729494 u^2 = 1.$$

Ἐκ τῶν λύσεων τῆς ἐξίσώσεως αὐτῆς ἡ μικροτέρα δέον νὰ ἐκλεγῇ, ὥστε ὁ u νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2·4657,

$$\text{ἤτοι } \xi = \frac{u}{2 \cdot 4657} \text{ νὰ εἶναι ἀκέραιος, ὁπότε}$$

δι' ἀντικαταστάσεως τῆς οὕτω εὐρεθείσης τιμῆς τοῦ ξ εἰς τὸ τελευταῖον σύστημα τῶν ἐξισώσεων φθάνομεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ πλήρους προβλήματος.

Θὰ ἐχρειάζετο πολὺς χῶρος διὰ νὰ δώσωμεν τὰς λύσεις τῆς ἐξίσώσεως τοῦ Pell

$$t^2 - 4729494 u^2 = 1$$

καὶ ὁ περίεργος ἀναγνώστης παραπέμπεται εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Amthor. Ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι οὗτος ἀναπτύσσει τὴν  $\sqrt{4729494}$  ὑπὸ τὴν μορφήν συνεχοῦς κλάσματος καὶ φθάνει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι :

$$W = 1598 \quad \boxed{206541} \quad \text{ὅπου ὁ ἀριθμὸς} \quad \boxed{206541}$$

σημαίνει, ὅτι ὁ 1598 ἀκολουθεῖται ὑπὸ 206541 ψηφίων καὶ ὅτι ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν βοῶν (ταύρων καὶ ἀγελάδων) εἶναι :

$$= 7766 \quad \boxed{206541}$$

Ὁ Amthor παρατηρεῖ, ὅτι αὐτὸς μεγαλύτερος λογαριθμικὸς πίναξ

μέ 7 δεκαδικά ψηφία περιέχει εἰς μίαν σελίδα 50 γραμμὰς μέ 50 ψηφία ἐκάστην ἢ 2500 ψηφία. Κατὰ ταῦτα ὁ εἰς ἐκ τῶν ὀκτῶ ἀγνώστων, ὅταν εὔρεθῇ, θὰ κατέχη  $88 \frac{1}{2}$  τοιαύτας σελίδας (ψηφίων) καὶ διὰ νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία τῶν 8 ἀγνώστων θὰ ἐχρειαζόμεθα ἓνα τόμον ἐξ 660 σελίδων !».

ΕΠΙΜΕΤΡΟΝ

FRIEDRICH VON SCHILLER\*

ARCHIMEDES UND DER SCHÜLER (1795)

*Zu Archimedes kam ein wissbegieriger Jüngling,  
«Weihe mich »sprach er zu ihm» ein in die göttliche Kunst  
Die so herrliche Frucht dem Vaterlande getragen  
Und die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützt !»  
«Göttlich nennst du die Kunst? Sie ist, es versetzte der Weise,  
Aber das war sie, mein Sohn eh sie dem Staat noch  
gedient.  
Willst du nur Früchte von ihr, die kann auch die sterbliche  
zeugen ;  
Wer um die Göttin freit, sucht in ihr nicht Weib».*

---

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ  
ΠΑΡ' ΑΡΧΙΜΗΔΕΙ

1. 'Ο 'Αρχιμήδης εἰς τὸ δον πρόβλημα τοῦ β' βιβλίου τῆς πραγματείας του Περί σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀποδεικνύει τὴν ἐξῆς πρότασιν :

Ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεγαλύτερον τμήμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον μικρότερον μὲν τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγαλύτερου τμήματος πρὸς

---

\* Friedrich von Schiller (1759 - 1805), Sämtliche Werke, 1. Band, Ed. Gerhard Fricke und Herbert Göpfert, München 1958, S. 245.

Πρὸς τὸν Ἀρχιμήδη προσῆλθεν εἰς φιλομαθῆς νέος,  
 «Μύησέ με, τοῦ εἶπε, εἰς τὴν θεῖαν τέχνην  
 ἥ ὅποια τόσον ἐξαισίους καρπούς ἔφερεν εἰς τὴν πατρίδα  
 Καὶ ἐπροστάτευσε τὰ τείχη τῆς πόλεως ἀπὸ τὴν Σαμβύκη<sup>1</sup>).  
 «Θεῖαν ὀνομάζεις τὴν τέχνην; Πράγματι εἶναι, ἀπήντησεν ὁ σοφός,  
 Ἄλλ' αὐτὸ ἦτο, παιδί μου, πρὶν ἀκόμη αὕτη ὑπηρετήσῃ τὴν  
 Πολιτείαν.  
 Θέλεις μόνον καρπούς ἀπὸ αὐτὴν, αὐτοὺς δύναται ἐπίσης ἡ  
 θνητὴ νὰ παραγάγῃ.  
 Ὅποιος ἐρωτεύεται τὴν θεάν, δὲν ζητεῖ εἰς αὐτὴν γυναιῖκα».

τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου τῶν αὐτῶν ἐπιφανειῶν, εἰς τὴν  $\frac{3}{2}$  δύναμιν.

Ἐὰν καλέσωμεν τὰ σφαιρικὰ τμήματα  $AB\Gamma > A\Delta\Gamma$  θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα.

$$\frac{\text{σφ. τμ. } AB\Gamma}{\text{σφ. τμ. } A\Delta\Gamma} < \left( \frac{\text{ἐπιφ. } AB\Gamma}{\text{ἐπιφ. } A\Delta\Gamma} \right)^2 \text{ καὶ}$$

$$\frac{\text{σφ. τμ. } AB\Gamma}{\text{σφ. τμ. } A\Delta\Gamma} > \left( \frac{\text{ἐπιφ. } AB\Gamma}{\text{ἐπιφ. } A\Delta\Gamma} \right)^{\frac{3}{2}}$$

1) Σαμβύκη. Πολεμικὸν μέσον ἀποτελούμενον ἐκ τῆς ζεύξεως τεσσάρων ζευγῶν πλοίων φερόντων κλίμακα πρὸς προσπέλασιν τῶν τειχῶν πολιορκουμένης πόλεως. Ἰδὲ α' μέρος, α' τόμου, λέξις σαμβύκη.

2. Δυνάμεις μὲ κλασματικούς ἐκθέτας ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φοράν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἔπεται, ὅτι αὗται εἶναι ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν Ἀρχιμηδείων ἔργων συνάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι αἱ βοηθητικαὶ προτάσεις, τὰς ὁποίας οὗτος χρησιμοποιεῖ ἀναποδείκτως εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων του, ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῇ ὑπὸ προγενεστέρων αὐτοῦ μαθηματικῶν. Ἐνδεικτικῶς πρὸς τοῦτο ἀναφέρομεν τὴν ἀναποδείκτως χρησιμοποιουμένην πρότασιν ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3, καθ' ἣν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Τὴν πρότασιν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 3 θεώρημα τῆς πραγματείας του Κύκλου μέτρησις.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προηγουμένης προτάσεως, καίτοι αὕτη ἀπαντᾷ διὰ πρώτην φοράν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, δὲν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Διότι ὑπάρχουν τεκμήρια τοῦ συγγενοῦς πρὸς τοῦτον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2, τοῦ ἐπιτυγχανομένου διὰ τῶν καλουμένων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ὅστις ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους (Θέων Σμυρναῖος, ἔκδ. Hiller, Leipzig 1878, σελ. 42-45 καὶ Πρόκλος, Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος II, ἔκδ. Kroll. Leipzig σελ. 24 καὶ 393. Ταῦτα ἀναπτύσσονται εἰς Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλία V—IX, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8 κ.έ.).

3. Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἴτε ὑπὸ ἀριθμητικὴν εἴτε ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν, ἀνεπτύχθη συγχρόνως πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν. Ἡ γνώμη αὕτη ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τῶν ἐξῆς ἐνδείξεων :



α'. Ἐκ τοῦ Θυμαριδείου Ἐπανθήματος. Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦτο καλεῖται μέθοδος ἐπιλύσεως προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται τὸ ἄθροισμα  $n$  ἀγνώστων καὶ τὰ μερικὰ ἄθροίσματα  $n-1$  ἐξισώσεων, ἥτοι

$$\begin{aligned}x + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &= S \\x + x_1 &= S_1 \\x + x_2 &= S_2 \\x + x_{n-1} &= S_{n-1}\end{aligned}$$

Κατὰ τὸν ἐκ Πάρου μαθηματικὸν καὶ μαθητὴν τοῦ Πυθαγόρου Θυμαρίδαν, ἀκμάσαντα περὶ τὸ 500 π.Χ., ὅτε ὁ Πυθαγόρας ἦτο ἤδη γέρον, ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εἶναι

$$x = \frac{(S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}) - S}{n-2}$$

(Ε. Σταμάτη, Τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα, «Πλάτων» ἔτος Δ' —τεῦχος Α 1952 σελ. 123 - 142).

Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀναφέρει τὸ πρόβλημα τοῦτο, μνημονεύει καὶ τὰ ἐξῆς δύο προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως :

$$\begin{aligned}1. \quad x + y &= 2(z + u) \\x + z &= 2(y + u) \\x + u &= 2(y + z)\end{aligned}$$

[Ἐνταῦθα ἀναφέρει ἀκόμη  $x + y + z + u = 5(y + z)$ ]

$$\begin{aligned}\text{καὶ } 2. \quad x + y &= \frac{3}{2}(z + u) \\x + z &= \frac{4}{3}(y + u)\end{aligned}$$

$$x + u = \frac{5}{4} (y + z).$$

Αἱ λύσεις καὶ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μνημονευομένων προβλημάτων ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου λεκτικῶς μόνον καὶ ἄνευ συμβολισμοῦ τινος (Ἰάμβλιχος, εἰς Νικομάχου Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγὴν, H. Pistelli, Leipzig 1894, σελ. 62 κ.έ.).

β'. Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων VIII καὶ IX τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται θεωρήματα περὶ γεωμετρικῶν προόδων.

γ'. Ἐκ τῶν δέκα πρώτων θεωρημάτων τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου γίνεται ἀπόδειξις ἀλγεβρικῶν ταυτοτήτων.

δ'. Ἐκ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις (α καὶ β) ἡ Ἀλγεβρα σπουδάζεται ἀριθμητικῶς, ἐν ᾧ εἰς τὰς περιπτώσεις γ καὶ δ γεωμετρικῶς.

4. Δυνάμεις μὲ κλασματικούς ἐκθέτας, ἐκφραζομένους ὅμως ἐμμέσως, ἀπαντῶμεν καὶ εἰς τινὰ θεωρήματα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Δὲν ἀναφέρεται εἰς αὐτὰ ὅμως σαφῶς ὅτι πρόκειται περὶ δυνάμεων μὲ κλασματικούς ἐκθέτας, ὅπως τοῦτο γίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ X 27 θεώρημα τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκονται δύο εὐθεῖαι «μέσαι», αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι ῥητόν. Αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{καὶ} \quad \rho \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{3}{4}}$$

κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, ὅπου  $\rho$  εἶναι εὐθεῖα ῥητή, καὶ  $\alpha, \beta$  ἀκέραιοι ἀριθμοί. (Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων βιβλίον Χ, Ἑθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι 1957, σελ. 251).

5. Ὁ Ἀρχιμήδης κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ἀνωτέρω μνημονευομένου προβλήματος καταλήγει εἰς τὰς σχέσεις

$$\frac{\Theta B}{BK} = \frac{KZ}{ZH}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{\Theta B}{BE = BK}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{KZ}{ZH}$$

καὶ συμπεραίνει ἀμέσως, παραλείπων τοὺς ἐνδιαμέσους ὑπολογισμοὺς ὡς εὐκόλους καὶ γνωστοὺς, ὅτι

$$\frac{\Theta Z}{ZH} > \left( \frac{KZ}{ZH} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Εἶναι δὲ εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος  $\Theta Z =$  σφαιρικὸν τμήμα  $AB\Gamma$ ,  $ZH =$  σφαιρικὸν τμήμα  $A\Delta\Gamma$ , καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος  $KZ =$  ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος  $AB\Gamma$ , καὶ  $ZH =$  ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος  $A\Delta\Gamma$ .

6. Ὁ σχολιαστὴς τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος παρέχει τὴν ἐξῆς ἐρμηνείαν τῆς εὐρέσεως τῆς δυνάμεως μὲ τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην :

Ἐστῶσαν αἱ εὐθεῖαι  $AB > \Gamma > \Delta$  καὶ ἄς εἶναι

$$\frac{AB^2}{\Gamma^2} > \frac{\Gamma}{\Delta} \quad (1)$$

Λέγω, ὅτι  $\frac{AB}{\Delta} > \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^{\frac{3}{2}}.$

Διότι, ἄς ληφθῇ τῶν  $\Gamma, \Delta$  μέση ἀνάλογος ἡ  $E$ . [Ὅποτε εἶναι

$$\frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}, \quad \frac{\Gamma^2}{E^2} = \frac{E^2}{\Delta^2} = \frac{\Gamma \times E}{E \times \Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta}, \quad (2).$$

Ταῦτα θεωρεῖ εὐκόλως ἐννοούμενα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 9 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου]. Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι  $\frac{AB}{\Gamma} > \frac{\Gamma}{E}$ .

Λαμβάνει εὐθεϊάν τινα  $BZ < AB$ , ὥστε νὰ εἶναι  $\frac{BZ}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{E}$  [ὅ-  
πότε αἱ εὐθεῖαι  $BZ, \Gamma, E, \Delta$  ἀποτελοῦν τέσσαρας συνεχεῖς ὄρους γε-  
ωμετρικῆς προόδου, ἥτοι εἶναι

$$\begin{aligned} \frac{BZ}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}, \quad \frac{BZ^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{E^3} = \frac{E^3}{\Delta^3} = \\ = \frac{BZ \times \Gamma \times E}{\Gamma \times E \times \Delta} = \frac{BZ}{\Delta}, \end{aligned} \quad (3).$$

[Ταῦτα ἔπονται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου].

$$\text{Ἐκ τῆς (3) εἶναι } \frac{BZ}{\Delta} = \frac{\Gamma^3}{E^3}, \quad (4).$$

$$\text{Εἶναι δὲ ἐκ τῆς (2) καὶ (4) } \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Gamma^2}{E^2}, \quad (5).$$

$$\text{Εἶναι ἄρα } \frac{BZ}{\Delta} = \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (6).$$

[Διότι ἐκ τῆς (5) λαμβάνει  $\frac{\Gamma}{E} = \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^{\frac{1}{2}}$  καὶ κατόπιν

$$\left( \frac{\Gamma}{E} \right)^3 = \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ καὶ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3) ἔπεται ἡ (6)].$$

$$\text{Ἐπειδὴ δὲ } AB > BZ, \text{ ἔπεται } \frac{AB}{\Delta} > \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

## ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ \*

1. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 23ον θεώρημα τῆς πραγματείας του Τετραγωνισμὸς παρὰ βολῆς ἀποδεικνύει ὅτι :

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον  $\frac{1}{4}$ , τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ  $\frac{1}{3}$  τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς  $\frac{4}{3}$  τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνει τὴν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4},$$

ὅπου  $A$  εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὅρος καὶ  $\frac{A}{4^4}$  ὁ μικρότερος, καὶ ἀποδεικνύει ὅτι

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{4^4} = \frac{4}{3} A.$$

χωρὶς νὰ χρησιμοποιῇ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

Τὸ Ἀρχιμήδειον θεώρημα εἶναι ταυτόσημον πρὸς τὸ θεώρημα, καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \cdots + \frac{A}{4^{n-1}}$$

$$\text{εἶναι } \frac{4}{3} A, \text{ ὅταν } n \rightarrow \infty.$$

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται διὰ τῆς αὐτῆς Ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως ὅτι :

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς

\* Περιοδικὸν « Πλάτων », τόμ. ΙΕ' (1963), τεύχη 29/30.

προόδου έχουσης λόγον  $\frac{1}{n}$ , ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), τὸ ἄθροισμα τῶν  
δοθέντων ὄρων σὺν τῷ  $\frac{1}{n-1}$  τοῦ μικροτέρου ὄρου ἰσοῦται πρὸς  
 $\frac{n}{n-1}$  τοῦ μεγαλυτέρου ὄρου.

Ἐστω ὅτι ἐδόθησαν οἱ ἐν συνεχείᾳ ὄροι τῆς φθινούσης γεωμετρι-  
κῆς προόδου

$$A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3}, \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Κατὰ τὴν γενίκευσιν τῆς Ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως θὰ εἶναι

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{A}{n^3} = \frac{nA}{n-1},$$

$$\left( = \frac{A}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τοῦτο, εἰς τὴν εὔρεσιν τοῦ ὁποίου δὲν χρησι-  
μοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου, εἶναι ταυτόσημον πρὸς τὸ ἄθροι-  
σμα τῶν ὄρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \dots + \frac{A}{n^{v-1}}, \quad \text{ὅταν } v \rightarrow \infty.$$

## 2. Ἡ γενίκευσις τοῦ Ἀρχιμηδείου θεωρήματος

Ἐστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \dots$  ἀποτελοῦντα  
ἐν συνεχείᾳ ὄρους φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου έχουσης λόγον  
 $\frac{1}{n}$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), ὅπου  $A$  ὁ μέγιστος ὄρος, καὶ

$$B = \frac{A}{n} \tag{1}$$

$$\Gamma = \frac{B}{n} \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{\Gamma}{n} \quad (3)$$

καὶ  $E = \frac{\Delta}{n}$  ὁ μικρότερος ὅρος (4).

Ἐστω δὲ

$$Z = \frac{B}{n-1} \quad (5)$$

$$H = \frac{\Gamma}{n-1} \quad (6)$$

$$\Theta = \frac{\Delta}{n-1} \quad (7)$$

$$I = \frac{E}{n-1} \quad (8).$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (5) λαμβάνομεν  $B + Z = \frac{A}{n-1}$ , (9)

Ἐκ τῶν (2) καὶ (6) λαμβάνομεν  $\Gamma + H = \frac{B}{n-1}$ , (10)

Ἐκ τῶν (3) καὶ (7) λαμβάνομεν  $\Delta + \Theta = \frac{\Gamma}{n-1}$ , (11)

Ἐκ τῶν (4) καὶ (8) λαμβάνομεν  $E + I = \frac{\Delta}{n-1}$ , (12).

Ἄλλ' ἐκ τῶν (5), (6), (7) εἶναι  $Z + H + \Theta =$   

$$= \frac{1}{n-1} (B + \Gamma + \Delta), \quad (13).$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (9, 10, 11, 12) λαμβάνομεν

$$B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \frac{1}{n-1} (A + B + \Gamma + \Delta), \quad (14).$$

Εἰς ταύτην δι' ἀπαλοιφῆς τῶν ἴσων ἐκ τῆς (13) εἶναι

$$B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{A}{n-1}, \quad (15).$$

Καὶ διὰ προσθέσεως τοῦ  $A$  εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (15) λαμβάνομεν

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{nA}{n-1} = \frac{A}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{A}{1-\omega},$$

ἐὰν τεθῇ  $\frac{1}{n} = \omega$ . Εἶναι δὲ  $I = \frac{E}{n-1}$ , (ἐκ τῆς 8), ὅπου  $E$

εἶναι ὁ μικρότερος ὅρος τῆς φθινοῦσης προόδου. Κατὰ συνέπειαν διὰ τῆς Ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως εὐρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινοῦσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \dots + \frac{A}{n^{v-1}},$$

ὅταν  $v \rightarrow \infty$ , χωρὶς ὅμως νὰ γίνεται κατ' αὐτὴν χρησιμοποίησις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.



## Γ Ν Ω Μ Α Ι

Περὶ χρησιμοποίησεως ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους τῶν ἀρχῶν τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὀλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, τῶν :

1) H. G. Zeuthen, 2) I. G. Bachmakova, 3) Charles Mugler.

Ἀνάλυσιν ἐπίσης τῶν μεθόδων διαφορίσεως καὶ ὀλοκληρώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους δύναται νὰ εὑρῃ τις εἰς τὸ σύγγραμμα τοῦ T. L. Heath, The works of Archimedes with the method of Archimedes, New York, Dover publications, Inc. p. CXLII — CLXXXVI.

1. H. G. Zeuthen. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum (Αἰ κωνικαὶ τομαὶ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα). Ed. R. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886, reprogr. G. Olms, Hildesheim 1966, S. 440-451.

... «Ἐν ᾧ ἡ προηγουμένως ἐκτεθεῖσα ἔρευνα δὲν παριστᾷ οὐδεμίαν ἀπόλυτον σύμπτωσιν μὲ τὴν σύγχρονον χρησιμοποίησιν ἀπείρων σειρῶν, οἱ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκτελούμενοι προσδιορισμοὶ ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων διὰ διαιρέσεως αὐτῶν εἰς μέρη, τὰ ὅποια ὅλα εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὅσονδῆποτε μικρά, συμφωνοῦν ἀκριβῶς μὲ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτῶν δι' ὀλοκληρώσεως. "Ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μερῶν δύναται νὰ γίνῃ τόσον μέγα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεών των ἀπὸ μεγέθη, τῶν ὁποίων δύναται τις νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἄθροισμα, νὰ γίνεται μικρότερον ὅσονδῆποτε μικροῦ ὀρίου δοθέντος, τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν αὐτὴν θεώρησιν, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει εἰς ἡμᾶς εἰς τὸν ὀλοκληρωτικὸν λογισμὸν νὰ ὑπολογίσωμεν ἓν μέγεθος ὡς ἄθροισμα ἀτελειώτως, ἀπείρως μικρῶν μεγεθῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης, ἐννοεῖται, ἐφαρμόζει μόνον ἓνα πολὺ περιορισμένον ἀριθμὸν, ἐνταῦθα ἀνηκόντων, γενικῶν θεωρημάτων ἢ — ὡς θὰ ἡδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν χρη-

σιμοποιοῦντες τὴν σύγχρονον ὁρολογίαν — ἐφαρμόζει τύπους ὁλοκληρώσεως (ιδίως (4) καὶ (5) εἰς τὰ ἐπόμενα)· ἀλλὰ ἐπειδὴ ἐφαρμόζει αὐτὰ εἰς διάφορα προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἐν μέρει πρέπει νὰ μετασχηματισθῶσι διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ τοῦτο, ἀφίνει σαφῶς νὰ ἐννοηθῇ, ὅτι χρησιμοποιεῖ αὐτὰ ὡς γενικὰ βοηθητικὰ μέσα. Ὁ Ἀρχιμήδης, ὅστις τὰ θεωρήματα αὐτά, ἐν ἑκάστων, πλήρως θεμελιώνει, ἔχει θέσει ἐν στερεὸν θεμέλιον διὰ τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν καὶ ἐπὶ τοῦ θεμελίου τούτου οὗτος ἐπικοδομήθη κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους.

Μεταφράζοντες τοὺς μετασχηματισμοὺς τετραγωνισμῶν καὶ κυβισμῶν εἰς ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα ἀπαντοῦν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, εἰς τὴν σύγχρονον συμβολικὴν γλῶσσαν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι οὗτος, ἀσχέτως πρὸς τὴν τυπικὴν ὑπ' αὐτοῦ διατύπωσιν, ἐγνώριζε καὶ ἐφήρμοζε τὰ ἐξῆς ὁλοκληρώματα : πρῶτον

$$a \int_a^b k \, dx \quad (1)$$

ὡς ἔκφρασιν μιᾶς ἐπιφανείας, παρὰ τῇ ὁποίᾳ εἰς τὴν τεταγμένην, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τετμημένην  $x$ , ἀποκόπτεται ἡ χορδὴ  $k$ , ἐν ᾧ  $a$  καὶ  $b$  εἶναι αἱ ὀριακαὶ τιμαὶ διὰ τὸ  $x$  καὶ  $a$  εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν γωνίαν μεταξὺ τετμημένης καὶ τεταγμένης : Δεύτερον

$$a \int_a^b A \, dx \quad (2)$$

ὡς ἔκφρασιν διὰ τὸν ὄγκον, εἰς τὸν ὁποῖον ἐπὶ τοῦ δι' ὠρισμένην τιμὴν τοῦ  $x$  καθοριζομένου ἐπιπέδου, ἀποκόπτεται ἡ ἐπιφάνεια  $A$ . Ἐνεκα τῆς συνεξαρτήσεως ἐπιθυμοῦμεν νὰ προσθέσωμεν ἀκόμη, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ ἐλίκων, χρησιμοποιεῖ τὸν τύπον μὲ πολικὰς συντεταγμένας

$$\frac{1}{2} \int_s^r r^2 \frac{d\theta}{dr} dr \quad (3)$$

εἰς τὸν ὁποῖον ἐν τούτοις  $\frac{\theta}{r} = \frac{d\theta}{dr}$  εἶναι σταθερόν. (Σημειώσεις.

Διὰ τὴν ἀκρίβειαν σημειοῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ὁ Ἀρχιμήδης προσδιορίζει τὴν σχέσιν τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἓνα κύκλον, ὁ παράγων  $\frac{1}{2}$ ,

ὥς καὶ ὁ παράγων  $a$  δὲν ἐμφανίζονται). Περαιτέρω ὁ Ἀρχιμήδης, ἐπειδὴ γνωρίζει τὸ θεώρημα Περὶ στατικῆς ῥοπῆς, κέκτηται τὸ αὐτὸ μέσον, ὅπως τὰ σύγχρονα μαθηματικά, διὰ τὴν ἀναγὰγην εἰς ὁλοκληρώσεις τὸν ὑπολογισμόν τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ βάρους ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου ἢ ἀπὸ μιᾶς γραμμῆς. Περαιτέρω μᾶς ἔδωκε τὴν σπουδαιοτάτην ὅλων τῶν ὁλοκληρώσεων του, τὸν ὑπολογισμόν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διὰ μετασχηματισμῶν, οἱ ὁποῖοι μᾶς εἶναι γνωστοὶ ἀπὸ τὰ στοιχειώδη βιβλία.

Διὰ τοὺς ἐπακολουθοῦντας ὑπολογισμοὺς εὐρίσκονται πρὸ παντὸς εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ Ἀρχιμήδους αἱ προτάσεις, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἐπόμενα ὁλοκληρώματα :

$$\int_0^c x \, dx = \frac{1}{2} c^2 \quad (4)$$

καὶ

$$\int_0^c x^2 \, dx = \frac{1}{3} c^3 \quad (5)$$

Ταῦτα ἐκτίθενται ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων, τὸ πρῶτον κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ κωνοειδῶν καὶ σφαιροει-

δέων (πρώτη ἔκδοσις Heiberg 1880 σελὶς 290), τὸ δεύτερον εἰς ἓν πόρισμα τοῦ 10<sup>ου</sup> θεωρήματος Περὶ ἐλίκων, τὰ ὅποια ἐκφράζονται εἰς τοὺς ἐξῆς τύπους :

$$\left. \begin{aligned} h + 2h + 3h + \dots + nh &> \frac{n^2}{2} h \\ h + 2h + 3h + \dots + (n-1)h &< \frac{n^2}{2} h^2 \end{aligned} \right\} (4b)$$

καὶ

$$\left. \begin{aligned} h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (nh)^2 &> \frac{n^3}{3} h^2 \\ h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + ((n-1)h)^2 &< \frac{n^3}{3} h^2 \end{aligned} \right\} (5b)$$

Διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα παρατηρεῖ ὁ Ἀρχιμήδης, ὅτι ἡ ἀπόδειξις εἶναι εὐκόλος. Ἡ ὀρθότης αὐτῆς ἔπεται ἐκ τῶν ἐκφράσεων διὰ τὰ δύο ἄθροίσματα, τὰ ὅποια ἦσαν γνωστὰ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὡς τρίγωνοι ἀριθμοί. Ἡ ὀρθότης τοῦ δευτέρου θεωρήματος ἔπεται ἐκ τῆς ἐξιśώσεως

$$\begin{aligned} &3 [h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (nh)^2] \\ &= (n+1) (nh)^2 + h(h + 2h + 3h + \dots + nh), \end{aligned}$$

τὸ ὅποῖον εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα 10 (Περὶ ἐλίκων) ἐκτίθεται καὶ ἀποδεικνύεται. Ἵνα ἐκ τούτου ληφθῇ ἡ τελευταία ἀνισότης (5b) δεόν νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ τελευταία ἀνισότης εἰς τὸ (4b) καὶ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι

$$n(n-1)^2 + \frac{n^2}{2} < n^3$$

Ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠδύνατο νὰ χρησιμοποίησιν τὰς ἀνισότητας (4b) καὶ (5b), ὡς ἡμεῖς χρησιμοποιοῦμεν

τὰ ὁλοκληρώματα (4) καὶ (5), συνάγεται, ὅταν τεθῇ  $h = dx$  καὶ  $nh = c$ . Ἐκτὸς τούτων χρησιμοποιεῖ οὗτος, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν, ἐπίσης μερικὰς ἀρχὰς ὁλοκληρώσεως, αἱ ὁποῖαι ἀμεσώτατα ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὴν ἀντίληψιν τῶν ὁλοκληρωμάτων ὡς ἀθροισμάτων ὀρίων . . . . . Ἐν γνωστὸν καὶ λίαν περιεκτικὸν μέσον διὰ τὴν μεταφορὰν ἀποτελεσμάτων ὁλοκληρώσεως ἀπὸ μιᾶς περιοχῆς εἰς ἄλλην εἶναι ὁ μεταγενεστέρως σημειούμενος κανὼν τοῦ Guldin, ὁ ὁποῖος ἀπαντᾷ εἰς τὸν Πάππον (σελὶς 682 ἐκδ. Hultsh).

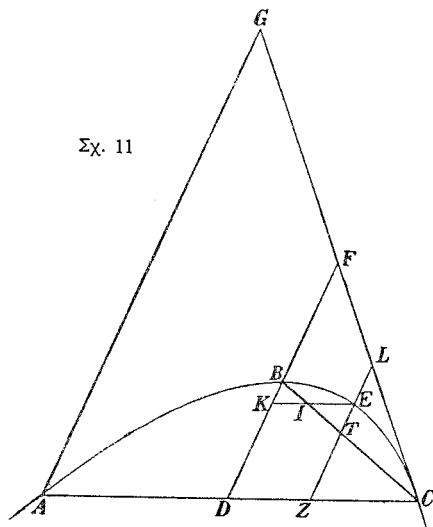
Ἦδη ἐπιθυμοῦμεν νὰ παρουσιάσωμεν τὰς ἐκτεθείσας ἀρχὰς τὰς ὁποίας ἐφαρμόζει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν δευτέρας τάξεως. Ἀρχίζομεν μὲ τὴν ἐφαρμογὴν ὑπ' αὐτοῦ τοῦ τύπου (1) διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐλλείψεως. Κατασκευάζει ἓνα κύκλον μὲ τὸν ἄξονα  $a$  ὡς διάμετρον. Δεχόμεθα, ὅτι αἱ τετμημέναι ὑπολογίζονται ἐπὶ τούτου καὶ ὅτι ὁ κύκλος ἀποκόπτει ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου τὴν χορδὴν  $k_1$  ἐν ᾧ ἡ ἑλλειψις ἐπὶ τῆς ἰδίας καθέτου ἀποκόπτει τὴν χορδὴν  $k$ . Ἐὰν τῶρα  $b$  εἶναι ὁ δεύτερος ἄξων, [Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων θεώρ. 4] δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ  $x$  :

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{k_1} = \frac{k dx}{k_1 dx} = \frac{\int_0^a k dx}{\int_0^a k_1 dx} = \frac{\text{ἑλλειψις}}{\text{κύκλος}}.$$

Εἰς τὰ ἐπόμενα θεωρήματα [5 - 6] ἐξάγονται παραστάσεις διὰ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν μιᾶς ἐλλείψεως καὶ τυχόντος κύκλου ἢ μεταξὺ δύο ἐλλείψεων, ἰδιαιτέρως τὸ θεώρημα, ὅτι ὅμοιαι ἐλλείψεις εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν μεγάλων ἢ τῶν μικρῶν ἄξόνων. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἠδύνατο εὐκόλως

νά προσδιορίση ἓν τμήμα, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα χορδῆς, ἢ χρησιμοποιῶν πλαγιογωνίους συντεταγμένες, ἓν τμήμα περιοριζόμενον ὑπὸ τυχούσης χορδῆς. Τοῦτο ἀσφαλῶς τὸ εἶχε σκεφθῇ, διότι χρησιμοποιεῖ τοὺς ἀντιστοίχους προσδιορισμοὺς εἰς τὸ ἐλλειψοειδές· ἀλλὰ ὁ προσδιορισμὸς ἐπιφανείας εἶναι μόνον μία βοηθητικὴ ἔρευνα, καὶ ἐκ τούτων λαμβάνει ὑπ' ὄψιν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐφαρμογήν.

Σχ. 11



Ἡ δευτέρα ἐφαρμογὴ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους τοῦ τύπου (1) ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς παραβολοειδοῦς τμήματος. Τὸν πρὸς τοῦτο ἀποσκοποῦντα μετασχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως τῆς παραβολῆς ὑπεμνήσαμεν ἤδη εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον. Ἐκεῖ ἐδείχθη (σελὶς 59 καὶ ἐξῆς), ὅτι, ἐὰν (Σχ. 11) μία χορδὴ  $AC = a$  μιᾶς παραβολῆς ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν τετμημένων,

καὶ δὴ καὶ τὸ ἄκρον τῆς  $A$  ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἐν ᾧ αἱ τεταγμέναι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς χορδῆς  $BD$ , τότε ἡ σχέσις  $\frac{y}{y_1}$  μεταξὺ τῶν τεταγμένων τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ  $C$ , αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν αὐτὴν τετμημένην  $x$  εἶναι  $\frac{x}{a}$ . Τοῦτο χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν μετασχηματισμὸν

$$a \int_0^a y \, dx = \int_0^a y_1 x \, dx.$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐκφράζει ὁ Ἀρχιμήδης, λέγων, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος ἐξαρτωμένη εἰς τὸ ἄκρον ἐνὸς μοχλοβραχίονος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν κάθετον ἀπόστασιν τοῦ σημείου  $C$  ἀπὸ τῆς εὐθείας  $AG$ , ἰσορροπεῖ τὸ βάρος ἐνὸς τριγώνου  $AGC$ , τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἄλλου ἄκρου τοῦ μοχλοβραχίονος, ὥστε τὸ  $A$  νὰ κεῖται εἰς τὸ σημεῖον στηρίξεως καὶ τὸ βάρος νὰ δρᾷ παραλλήλως πρὸς τὴν  $AG$ . Τότε τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν τιμὴν πρὸς τὸ  $x$  ἐπιφέρουν ἰσορροπίαν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου, ἀπὸ τοῦ  $AG$  ἰσοῦται πρὸς τὸ  $\frac{1}{3}$  τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου  $C$  ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διὰ τοῦτο τὸ παραβολικὸν τμήμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ  $\frac{1}{3}$  τοῦ τριγώνου  $AGC = \frac{4}{3}$  τοῦ τριγώνου  $ABC$ .

Ὁ Ἀρχιμήδης ἔχει ἤδη ἀποδείξει, ὡς ἐκτίθεται εἰς τὸ τέλος τοῦ 4 κεφαλαίου (σελὶς 103) [Περὶ κωνοειδῶν καὶ σφαιροειδῶν θ. 3], ὅτι εἰς τὴν αὐτὴν παραβολὴν αἱ ἐπιφάνειαι τοιούτων ἐγγεγραμμένων τριγώνων ὡς τὸ  $ABC$  ἔχουν ἴσον μέγεθος, ἐὰν τὰ τμήματα τῆς διαμέτρου  $BD$  εἶναι ἴσα. Ὡς ἐκ τούτου εἶναι τότε, ὡς οὗτος εἰς τὴν

αὐτὴν θέσιν παρατηρεῖ, ἐπίσης ἀποδεδειγμένον, ὅτι τμήματα τῆς αὐτῆς παραβολῆς εἶναι ἰσομεγέθη, ὅταν τὰ εἰς αὐτὰ περιεχόμενα τμήματα πρὸς τὰς διαμέτρους, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὰς περιοριζούσας χορδὰς, εἶναι ἴσα.

Οὕτε εἰς τὸν ἐδῶ ἀνακοινούμενον ὑπ' αὐτοῦ προσδιορισμόν, (σημ. μηχανικόν) οὕτε εἰς τὸν μεταγενέστερον γεωμετρικόν, τὸν ὁποῖον ἤδη ἔχομεν ἀναφέρει, χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης τὴν κατὰ-τμησιν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος διὰ παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν  $AC$ · διὰ τῆς μὴ χρησιμοποίησεως αὐτῆς ἀποφεύγει τὸ ὀλοκλήρωμα  $\int \sqrt{x} \, dx$ . Τὸυναντίον χρησιμοποιεῖται ἡ ἀντίστοιχος κατὰτμησις τῶν τμημάτων ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς δευτέρας τάξεως, δηλαδὴ δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν κατὰ τὸν προσδιορισμόν τοῦ ὄγκου τῶν τμημάτων τούτων εἰς τὴν πραγματείαν *Περὶ κωνοειδῶν*.

Ὡς ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης [θ. 19-22 *Περὶ κωνοειδῶν*] ἀρχίζομεν καὶ ἡμεῖς μὲ τὸ παραβολοειδές· ἐν ᾧ ὅμως αὐτὸς κατὰ πρῶτον ἀποκόπτει ἐν τμήμα διὰ τομῆς ἐπιφερομένης καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, ἐπιθυμοῦμεν ἐδῶ καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἐπιφανείας νὰ μεταβῶμεν ἀμέσως εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποίησιν μιᾶς τυχούσης τομῆς (ὅπως τοιαύτη εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπ' αὐτῆς εὐρίσκομένου ἐπιπέδου τοῦ μεσημβρινοῦ εἰς τὸ σχῆμα 75 παρίσταται διὰ  $AC$ ). Τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐλλείψεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἀποκόπτεται τὸ παραβολοειδές σημειοῦμεν διὰ  $G$ , τὸ τμήμα  $BG$ , τὸ ὁποῖον ἀποκόπτεται διὰ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ἀγομένης διαμέτρου, διὰ  $c$ , καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου ὑπολογίζομεν τὴν τετμημένην  $x$ , λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον τομῆς  $B$  μὲ τὴν ἐπιφάνειαν. Προσδιορίζεται ἡ σχέσις τοῦ παραβολοειδοῦς τμήματος πρὸς κύλινδρον βάσεως  $G$ , ὁ ὁποῖος ἀποκόπτεται μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ πρὸς ταύτην (τὴν βάσιν) παραλλήλου ἐφαπτομένου





$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\text{τρίγωνον } ABC}{\text{τρίγωνον } DEF} \times \frac{y}{z}.$$

Ἐάν τώρα εἶναι  $BG = EH$  εἶναι καὶ τρίγωνον  $ABC =$  τρίγωνον  $DEF$ , ὥς εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου κεφαλαίου ἀπεδείχθη, καὶ  $y = z$ , ἐπεὶ δὴ αἱ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεσημβρινοῦ κάθετοι τομαὶ διὰ τῶν  $BG$  καὶ  $EH$  εἶναι παραβολαὶ ἴσαι. Γενικῶς τὰ τμήματα τοῦ αὐτοῦ παραβολοειδοῦς εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν  $BG$  καὶ  $EH$ . Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου [24] δύναται ὁ Ἀρχιμήδης νὰ χρησιμοποιήσῃ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ βάσεις εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μέχρι τοῦδε ἐπιτευχθέντων.

Ἐν τμήμα ἐνὸς παραβολοειδοῦς προσδιορίζεται κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον [θ. 25-26], μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνταῦθα ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως τῆς ὑπερβολῆς λαμβάνεται

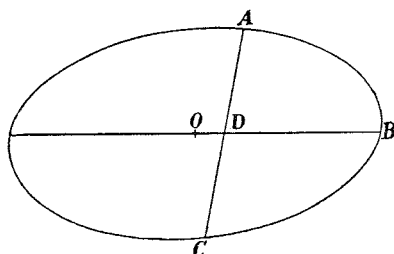
$$\frac{y^2}{q^2} = \frac{x(a+x)}{c(a+c)}.$$

Ὑπὸ τὴν ὑπόδειξιν τοῦ ἄλλοθι εὑρεθέντος προσδιορισμοῦ τῶν ὀλοκληρωμάτων (4) καὶ (5) ἀποδεικνύεται ἐνταῦθα [2], ὅτι

$$\int_0^c x(a+x) dx = c^2 \left( \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} c \right) \quad (6)$$

Δι' ἀνταλλαγῆς τοῦ  $+$  μὲ τὸ  $-$  ἡδύνατο ὁ αὐτὸς προσδιορισμὸς νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς· ἀλλὰ κατὰ περιέργον τρόπον δὲν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης τὴν παράθεσιν ἐπιφανειῶν, διὰ νὰ παραστήσῃ ἐνταῦθα τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως, ὡς ἔκαμε τοῦτο προηγουμένως διὰ τὴν ὑπερβολήν. Τὸυναντίον παριστᾷ ταύτην κατὰ

τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὄγκου ἑνὸς ἡμίσεος ἑλλειψοειδοῦς δι' ἑνὸς γνῶμονος, δηλ. διὰ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ δύο τετραγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μίαν κοινὴν γωνίαν· με' ἄλλας λέξεις : δὲν χρησιμοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἑλλείψεως  $y^2 = kx (a-x)$ , ὅπου  $k$  εἶναι μία σταθερά, ἀλλὰ χρησιμοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἑλλείψεως, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων,  $y^2 = k \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right)$ .



Σχ. 76

Τὸ γεγονός τοῦτο παρέχει εἰς τὸν Ἀρχιμήδη τὴν εὐκαιρίαν, νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸ ὁλοκλήρωμα  $\int_0^c x^2 dx$  εἰς μίαν νέαν σύνδεσιν, ἥτοι :

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right) dx = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{a}{2} \right)^3 = \frac{2}{3} \left( \frac{a}{2} \right)^3.$$

Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς τμήματος διαφόρου τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἑλλειψοειδοῦς χρησιμοποιεῖται τὸ ὁλοκλήρωμα (6) εἰς μίαν νέαν σύνδεσιν. Τὸ σχῆμα 76, ἔστω παριστῶν ἓν μεσημβρινὸν ἐπίπεδον καὶ AC ἡ εὐθεῖα τομῆς ἐπὶ τούτου ἑνὸς καθέτου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀποτεμένει τὸ ἑλλειψοειδὲς (ABC). Κατόπιν λαμβάνεται ὡς ἄξων τῶν τετμημένων ἡ διὰ τοῦ μέσου D τῆς χορδῆς AC ἀγομένη διά-

μετρος καὶ D ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Θέτοντες τώρα  $OD = e$  καὶ ὡς προηγουμένως  $DC = q$ , λαμβάνομεν :

$$\frac{y^2}{q^2} = \frac{\frac{a^2}{4} - e^2 - 2ex - x^2}{\left(\frac{a}{2} - e\right)\left(\frac{a}{2} + e\right)} = \frac{\left(\frac{a}{2} - e\right)\left(\frac{a}{2} + e\right) - x(2e + x)}{\left(\frac{a}{2} - e\right)\left(\frac{a}{2} + e\right)}$$

Τοῦτο σημαίνει νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{a}{2}-e} \left[ \left(\frac{a}{2} - e\right)\left(\frac{a}{2} + e\right) - x(2e + x) \right] dx,$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ τὸ μέρος τῆς ἐντὸς τῆς ἀγκύλης παραστάσεως εἶναι σταθερόν, μεταπίπτει εἰς

$$\left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \left(\frac{a}{2} + e\right) - \int_0^{\frac{a}{2}-e} x(2e + x) dx.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον προηγουμένως ἐκαλέσαμεν (6) καὶ τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν σαφῶς ὁ Ἀρχιμήδης προηγουμένως ὑπελόγισε [2] καὶ ἐχρησιμοποίησε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς τμήματος.

2. Isabella Grigorievna Bachmakova, in «Archive for History of Exact Sciences». Αἱ μέθοδοι διαφορίσεως τοῦ Ἀρχιμήδους, (Les méthodes différentielles d'Archimède, Volume 2, Number 2, 1964, P. 87 - 107).

Εἶναι γνωστὸν τώρα, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ προσδιορίσῃ τὰ ἐμβαδὰ καὶ τοὺς ὄγκους κατεῖχε γενικὴν μέθοδον, ἥ ὁποία συνί-

στατο εἰς τὸ νὰ κατασκευάζῃ, διὰ τὸ σπουδαζόμενον σχῆμα, τὰ «ἀ-  
θροίσματα τοῦ Ῥήμαν ( Riemann )» καὶ νὰ προσδιορίζῃ τὰ ἀνώ-  
τερα καὶ κατώτερα ὄρια των. Ὅπως εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τὰς  
θεωρουμένας ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ δύο αὐτὰ ὄρια συνέπιπτον,  
ἀπεδείκνυε δηλ. ὅτι ἡ κοινὴ τιμὴ των ἦτο ἡ ἔκφρασις τοῦ ζητουμέ-  
νου μεγέθους. Ὁ τελικὸς σταθμὸς ἀνήγετο εἰς τὸ νὰ ἀποδείξῃ, διὰ  
τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅτι τὸ ζητούμενον μέγεθος δὲν ἠδύνατο νὰ  
εἶναι οὔτε μικρότερον οὔτε μεγαλύτερον τῆς ἐκφωνηθείσης τιμῆς.  
Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἀκριβῶς ἐκείνη, ἡ ὁποία εὕρισκεται εἰς τὴν  
βάσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ὀρισμένου ὁλοκληρώματος.

Καίτοι ἀκόμη δὲν ὑπάρχει πλήρης ὁμοφωνία μεταξὺ τῶν ἱστο-  
ρικῶν τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ τῆς ἐρμηνείας τῆς ἀφορώσης εἰς τὸ  
ἀντικείμενον τοῦτο, ἐν τούτοις οὐδεὶς πλέον σήμερον ἀμφισβητεῖ,  
ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν εἰσαγάγει καὶ ἐχρησιμοποίει «τὰ ἀ-  
θροίσματα τοῦ Ῥήμαν».

Κατεῖχεν οὗτος συγκριτικὰς μεθόδους διὰ νὰ προσδιορίσῃ τὰς  
ἐφαπτομένας καὶ νὰ λύσῃ ὀρισμένα προβλήματα μεγίστου καὶ ἐλα-  
χίστου ; Ἡ ἀκόμη καλλίτερον, ἐνεπιστεύθησαν τὴν ἐμφάνισίν των  
(αἱ μέθοδοι αὗται ) μόνον εἰς τὸν 17ον αἰῶνα καὶ κατὰ συνέπειαν  
εἶναι περισσότερον στενῶς συνδεδεμέναι πρὸς τὴν σύγχρονον ἐπο-  
χὴν, παρὰ αἱ ἰδέαι τῆς ὁλοκληρώσεως ; Περὶ τούτου ὑπάρχουσι  
διάφοροι ἀπόψεις καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν εὐκαιρίαν νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ  
αὐτοῦ κατωτέρω.

Εἰς τὸ ἄρθρον τοῦτο θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι  
ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν εὑρεὶ μέθοδον γενικὴν διὰ νὰ προσδιορίζῃ  
τὰς ἐφαπτομένας καὶ ἦτο κάτοχος μεθόδου, ἡ ὁποία τοῦ ἐπέτρεπε  
ν' ἀνάγῃ τὰ προβλήματα τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου εἰς προβλή-  
ματα ἐφαπτομένων. Τὰς μεθόδους αὐτὰς τὰς καλοῦμεν μεθόδους  
διαφορίσεως . . .

Θὰ ἀποδειξώμεν ἐπίσης, ὅτι ὄχι μόνον αἱ μέθοδοι ὁλοκληρώσεως, ἀλλ' ἐπίσης καὶ αἱ μέθοδοι διαφορίσεως τοῦ Ἀρχιμήδους, ἦσαν πολὺ γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ 17ου αἰῶνος, οἱ ὁποῖοι τὰς εἶχον λεπτομερῶς σπουδάσει καὶ ἐφαρμόσει εἰς πολλὰ ἄλλα προβλήματα.

§ 1. Ἡ πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους « Περὶ ἐλίκων » εἰς τὴν ἱστορικομαθηματικὴν παράδοσιν.

Ἡ μέθοδος τῶν ἐφαπτομένων ἐφηρμόσθη καὶ ἐθεμελιώθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν πραγματείαν του « Περὶ ἐλίκων ». Ἡ πραγματεία αὕτη, ἐν τούτοις, ὑπῆρξε περίπτωσις μοναδική. Κατὰ τὸν 3ον αἰῶνα τῆς ἐποχῆς μας ὁ Πάππος ἐπέκρινε τὴν μέθοδον τῆς ἀποδείξεως τῶν θεωρημάτων 5 - 9, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐβασίζετο ἀμέσως ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῶν ἐφαπτομένων τῆς ἑλικος. Ὁ Πάππος ἔγραψε : « Τέλος, φαίνεται, δὲν ὑπάρχει ἀσήμεαντον λάθος παρὰ τοῖς γεωμέτραις, ὅταν εὐρίσκωσιν ἐν πρόβλημα ἐπίπεδον διὰ τῶν κωνικῶν ἢ τῶν γραμμικῶν καὶ κατὰ γενικὸν τρόπον, ὅταν τὸ λύωσι κατὰ τρόπον οὐχὶ κατάλληλον, ὅπως παρουσιάζεται ἡ περίπτωσις διὰ τὸ πρόβλημα τῆς παραβολῆς εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ βιβλίου « Περὶ ἐλίκων » τοῦ Ἀρχιμήδους ὑποτιθέμενης στερεᾶς νεύσεως εἰς τὸν κύκλον, διότι δύναται νὰ εὑρεθῇ τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσε χωρὶς νὰ κάμῃ χρῆσιν προβλήματος στερεοῦ » ( [ 6 ], p. 208 - 209 ).

Ἀκολουθοῦντες τὴν ἀνοιχθεῖσαν ὁδὸν ὑπὸ τοῦ Πάππου, πολλοὶ ἱστορικοὶ τῶν ἐπιστημῶν, ὥς ὁ P. Tannery, Th. Heath καὶ ἄλλοι, κατηύθυναν τὰς προσπάθειάς των διὰ νὰ δώσωσιν ἀπλουστεράς ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὁ H.

G. Zeuthen, φαίνεται, ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἀπεκάλυψε τὰς ιδέας τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐγγραψεν οὗτος, ὅτι διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς μίαν ἔλικα « — ἐννοεῖται ὑπὸ τὸν ὑποχρεωτικὸν ἔλεγχον μιᾶς ἀποδείξεως διὰ τῆς ἐξαντλητικῆς μεθόδου — ὁ Ἀρχιμήδης θεωρεῖ τὸ αὐτὸ ἀπειροστικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ τώρα διὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰς καμπύλας ἐκπεφρασμένας εἰς πολικὰς συντεταγμένας : Ὡς ἀποτέλεσμα, ἡ πολικὴ ὑπεφαπτομένη εἶναι ἴση πρὸς  $r \Theta$  » ( [ 9 ], p. 151 ).

Εἶναι λυπηρὸν ὅμως, ὅτι ὁ H. G. Zeuthen περιορίζεται μόνον εἰς τὴν παρατήρησιν αὐτὴν καὶ δὲν μᾶς δίδει λεπτομερεῇ ἀνάλυσιν τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχιμήδους.

Οἱ μεταγενέστεροι τοῦ H. G. Zeuthen ἱστορικοὶ τῶν μαθηματικῶν, T. Heath, A. Czwalina, M. Simon, S. Lurié συμφωνοῦν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι δεξιωτάτη· κατὰ τὸν A. Czwalina, ἐπὶ παραδείγματι, ὁ Ἀρχιμήδης «εὗρε τὰ διαφορικὰ αὐτὰ θεωρήματα κατὰ τρόπον ὅλως διάφορον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἐχρησιμοποίησε διὰ νὰ τὰ ἀποδείξῃ, διότι ἡ ἀπόδειξις τοῦ δὲν εἶναι ἄμεσος» ( [ 4 ], p. 62 ). Καὶ ὁ S. Lurié ἔγγραψεν ἐπίσης, ὅτι «τὸ ἔξοχον τέχνασμα τῆς λύσεως αὐτῆς καὶ τὸ ἀπροσδόκητον τοῦ ἀποτελέσματος ὑπῆρξαν ἡ αἰτία τῶν διαμαρτυριῶν τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τοῦ Πάππου καὶ ἐξῆς» ( [ 12 ], p. 162 ).

Ἡ ἀντίληψις αὕτη, ἡ ὁποία δὲν ἀπεδείχθη, ἀλλὰ μόνον διευπλώθη, ἤγαγεν εἰς τὸ ἐπόμενον περιστατικόν : τὸ πρόβλημα τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν, τὸ ὁποῖον συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀποκαλύψῃ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους, διὰ τῆς ὁδοῦ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀποδείξεών του, ἐγκατελείφθη καὶ ὀλίγον κατ' ὀλίγον ἀντικατεστάθη δι' ἐνὸς ἄλλου, δηλαδή, πῶς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ στοιχειωδεστέρων μέσων καὶ εὐφυοῦς μεθόδου . . .

Σημειώνομεν, ὅτι τελευταίως, βαθεῖα ἀνάλυσις τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους « Περὶ ἐλίκων » ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ E. J. Dijksterhuis (1956).

§ 2. Τὸ σχέδιον τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους « Περὶ ἐλίκων ».

Ἡ θαυμασία αὐτὴ πραγματεία περιέχει ἐν συνόλῳ 28 θεωρήματα, τὰ ὅποια δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν εἰς τρεῖς ομάδας.

Ἡ πρώτη ὁμάς παίζει ῥόλον εἰσαγωγῆς (θεωρήματα 1-11)· τὰ θεωρήματα αὐτὰ εἶναι, τῷ ὄντι, τὰ ἀναγκαῖα λήμματα διὰ τὰς περαιτέρω ἐρεῦνας. Μόνον ἀπὸ τοῦ θεωρήματος 11 ἀρχίζει ἡ σπουδὴ τῆς ἑλικος.

Ἡ δευτέρα ὁμάς (θεωρήματα 12-20) περιλαμβάνει τὴν σπουδὴν τῶν ιδιοτήτων τῆς ἑλικος καὶ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς· ἐνταῦθα ὁ Ἀρχιμήδης εὐρίσκει τὴν ὑπεφαπτομένην εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς ἑλικος.

Τὰ θεωρήματα τῆς τρίτης ομάδος (θεωρήματα 21-28) ἀναφέρονται εἰς ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἀποτελοῦν ἀντικείμενον τοῦ ἄρθρου τούτου.

Ἐπανερχόμεθα εἰς τὰ λήμματα τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἰς τὰ δύο τελευταῖα λήμματα (θεωρήματα 10 καὶ 11), θεμελιοῖ τὸν τύπον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὄρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ δίδει διὰ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τὰς ἀναγκαῖας ἀνισότητας διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν. Τὰ λήμματα αὐτὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ θεωρήματα τῆς τρίτης ομάδος.

Τὰ ἐννέα ὑπόλοιπα λήμματα συνδέονται ἀμέσως πρὸς τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει ἡμᾶς ἐνταῦθα. Εἰς τὰ θεωρήματα (1) καὶ (2) ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι «ἐὰν δύο σημεῖα μετατοπίζονται εἰς ὁμαλὴν κίνησιν, ἕκαστον διαγράφον μίαν γραμμὴν, καί,



ἐὰν ἐφ' ἐκάστης τῶν γραμμῶν τούτων, τῶν ὁποίων αἱ πρῶται καὶ αἱ δευτέραι διανύονται ὑπὸ τῶν σημείων εἰς ἴσους χρόνους, ληφθῶσι δύο γραμμαί, αἱ οὕτω ληφθεῖσαι γραμμαί ἔχουσι μεταξύ των τὸν αὐτὸν λόγον» ([ 2 ] p. 244).

Αἱ προτάσεις αὗται χρησιμοποιοῦνται διὰ νὰ προσδιορίσωσι τὴν ἔννοιαν τῆς ἑλικος.

Εἰς τὰς προτάσεις (3) καὶ (4) ἀποδεικνύει, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τμήμα εὐθείας, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τῶν δοθέντων κύκλων («οἰοῦδ' ἂν ποτε ἀριθμοῦ») καὶ ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι γραμμαί, εὐθεῖαι καὶ περιφέρεια κύκλου, εἶναι δυνατόν νὰ λάβωμεν εὐθεῖαν μικροτέραν τῆς δοθείσης μεγαλυτέρας γραμμῆς καὶ μικροτέραν τῆς μεγαλυτέρας» ([2], p. 245).

Τέλος, αἱ προτάσεις 5-9, αἱ σπουδαιότεραι δι' ἡμᾶς, συνιστῶσι τὴν βάσιν τῆς μεθόδου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ Ἀρχιμήδους. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν καλλίτερον τὴν ἀξίαν καὶ τὸν ρόλον των, ἐξετάζομεν τώρα τὴν δευτέραν ὁμάδα τῶν προτάσεων.

§ 3. Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἑλικος καὶ ἡ θεμελίωσις τῶν ἰδιοτήτων αὐτῆς.

Ὁ Ἀρχιμήδης δίδει τὸν κινηματικὸν ὅρισμόν τῆς ἑλικος : (α' ὁρισμὸς μετὰ τὸ πόρισμα τοῦ θ. 11).

Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ περιστροφὴ γίνεται κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου. Ὁ Ἀρχιμήδης καλεῖ τὴν εὐθεῖαν ὅπου τὸ σταθερὸν σημεῖον ἔνθα ἀρχίζει ἡ ἑλιξ, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν γωνίαν  $\varphi = 2\pi$ , πρῶτην εὐθεῖαν κ.λπ....

Εἰς τὰ θεωρήματα 14-15 ὁ Ἀρχιμήδης θεμελιώνει μίαν σχέσιν, ἡ ὁποία εἶναι ἰσότημος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἑλικος εἰς πολυ-

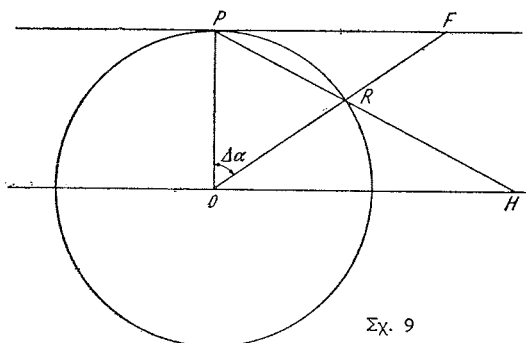
κάς συντεταγμένες

$$\rho = a\varphi \dots\dots$$

§ 4. Ὁ προσδιορισμός τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἑλικά.....

§ 5. Τὰ λήμματα (θεωρήματα 1-11).....

Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι δοθέντος κύκλου καὶ ἐφα-



Σχ. 9

πτομένης εἰς αὐτόν, εἰς τὸ σημεῖον P ( Σχ. 9) δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν εὐθεΐαν τινὰ OF, ὥστε :

$$\frac{FR}{OR} < \frac{\widehat{PR}}{C},$$

ὅπου C εἶναι δοθὲν τόξον τοῦ κύκλου.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως αὐτῆς ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει ἓν εὐθύγραμμον τμήμα  $D > C$  καὶ κατασκευάζει «τὴν νεῦσιν» : Φέρει τὴν εὐθεΐαν PH, ὥστε  $RH = D$  ( Σχ. 9). Ὅθεν ἡ ORF εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεΐα. Πράγματι, τὰ τρίγωνα PRF καὶ ORH εἶναι ὁμοία· συνεπῶς :

$$\frac{PR}{FR} = \frac{RH}{OR} \quad \eta \quad \frac{FR}{OR} = \frac{PR}{RH} < \frac{\widehat{PR}}{C}.$$

Καὶ ἡ πρότασις ἀπεδείχθη. Εἰς τὸ κείμενον, τὸ ὁποῖον διεσώθη, ὁ Ἀρχιμήδης δὲν δεικνύει κατασκευὴν τινὰ τῆς ἀναγκαίας νεύσεως.

Ὡς παρατηρεῖ ὁ Πάππος, ἡ χρησιμοποιουμένη νεῦσις εἰς τὸ θεώρημα (5) δύναται νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Κατὰ τρόπον γενικὸν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς νεύσεις μεταξὺ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν κύκλων διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν. Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἦτο πιθανῶς γνωστὴ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ἀλλὰ εἰς τὰ λήμματα, τὰ ὁποῖα ἐνδιαφέρουν ἡμᾶς, δὲν ἀπασχολεῖται μὲ τὸ ζήτημα αὐτό, διότι λεπτομερὲς ἀνάλυσις τούτου δὲν ἦτο ἀναγκαία.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν λάβωμεν ὡς C τυχόντα πολλαπλάσια τόξου τοῦ θεωρηθέντος κύκλου, ἡ ἀπόδειξις τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι ἀκόμη ἰσχυρά. Ὅθεν προκύπτει, ὅτι ὁ λόγος  $\frac{FR}{RP} = \frac{\Delta r}{r\Delta\alpha}$  δύναται νὰ ληφθῇ τόσον μικρός, ὅσον θέλει τις (σημ. εἰς τὴν παράγραφον ταύτην σημειοῦμεν τὴν γωνίαν  $\widehat{POF}$  διὰ  $\Delta\alpha$ ), καὶ

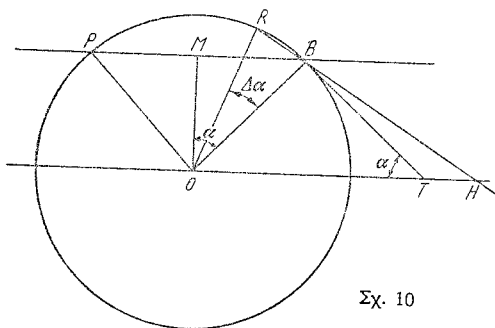
$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\sec \Delta\alpha - 1}{\Delta\alpha} = 0,$$

δηλαδή, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν περιφέρειαν εἶναι ἀπειροστῆς τάξεως ἐν σχέσει πρὸς τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν περιφέρειαν.

Ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Θεώρημα 6.

Δοθέντος κύκλου, καὶ εἰς τὸν κύκλον εὐθείας μικροτέρας τῆς διαμέτρου, εἶναι δυνατόν νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας εἰς τὸν κύκλον, νὰ ἔχῃ λόγον δοθέντα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἣτις ἄγεται ἐκ τοῦ ἄκρου, κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας, πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ κύκλου, ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι



Σχ. 10

μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας τῆς δοθείσης εἰς τὸν κύκλον, πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀχθεῖσαν καθέτως ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν τελευταίαν αὐτὴν εὐθεῖαν ([2], p. 247).

Ἐστω ABP ὁ δοθεὶς κύκλος κέντρου O (Σχ. 10), καὶ ἔστω PB χορδὴ μικροτέρα τῆς διαμέτρου. Φέρομεν τὴν OM κάθετον ἐπὶ τὴν BP καὶ λαμβάνομεν τὸν λόγον  $\frac{a}{b} < \frac{MB}{OM} = \operatorname{tg} \alpha$ .

Διὰ ν' ἀποδείξῃ τὸ θεώρημα (6) ὁ Ἀρχιμήδης φέρει τὴν BT κάθετον ἐπὶ τὴν OB καὶ τὴν OH παράλληλον πρὸς τὴν PB. Ὅθεν  $\widehat{BTO} = \widehat{MOB} = \alpha$  καὶ  $a : b < OB : BT$ . Ὁ Ἀρχιμήδης

ἐκλέγει τὸ τμήμα τῆς εὐθείας C, ὥστε :

$$\frac{a}{b} = \frac{OB}{C}$$

καὶ κατασκευάζει τὴν νεῦσιν : λαμβάνει δευτέραν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου B, ὥστε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τὸ περιλαμβανόμενον μεταξύ τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας OH νὰ εἶναι ἴσον πρὸς C. Παριστῶμεν τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν διὰ RH. Τὸ σημεῖον H δὲν συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον T, ἐπειδὴ  $RH = C > BT$ .

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ORH καὶ FRB συνάγεται

$$\frac{FR}{RB} = \frac{OR}{RH} = \frac{OB}{C} = \frac{a}{b}.$$

Ἡ χρησιμοποιουμένη νεῦσις εἰς τὸ λῆμμα αὐτὸ (θ. 6) δύναται ἐπίσης νὰ κατασκευασθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν κωνικῶν τομῶν.

Οὕτω, βλέπομεν ὅτι τὸ λῆμμα τοῦτο ἀποδεικνύει, ὅτι, ἐὰν  $a : b < \operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{OM}$ , δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν γωνίαν Δα τοιαύτην, ὥστε :

$$\frac{\Delta r}{2r \sin \frac{\Delta \alpha}{2}} = \frac{a}{b}$$

ὅπου  $\Delta r = FR$ .

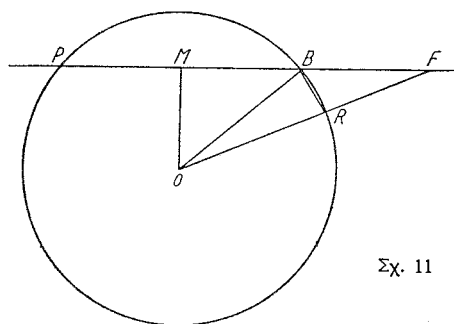
Τὸ θεώρημα (7) συμπληρώνει τὸ θεώρημα (6). Ἐστω τώρα  $a : b$  λόγος τις μεγαλύτερος τῆς  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{OM}$ . Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν τινα OF διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου O τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον R καὶ τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς PB εἰς τὸ σημεῖον F, ὥστε

$$\frac{FR}{BR} = \frac{a}{b} \text{ (}\Sigma\chi. 11\text{)}.$$

Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰ δύο αὐτὰ λήμματα (θ. 6 καὶ 7) ὡς ἐξῆς :

$$(*) \quad \frac{\sec \alpha - \sec (\alpha - \Delta \alpha)}{\sec \alpha 2 \sin \frac{\Delta \alpha}{2}} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{\sec (\alpha + \Delta \alpha) - \sec \alpha}{\sec \alpha 2 \sin \frac{\Delta \alpha}{2}},$$

ὅπου τὸ ἀκραῖον πρὸς τ' ἀριστερὰ μέλος τῆς ἀνισότητος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν κατωτέραν τῆς  $\operatorname{tg} \alpha$  (ἐὰν  $\Delta \alpha$  ἔχῃ ἐκλεγῇ καταλ-



Σχ. 11

λήλως), ἐν ᾧ τὸ δεξιὸν ἀκραῖον μέλος τῆς ἀνισότητος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν ἀνωτέραν τῆς  $\operatorname{tg} \alpha$ , καὶ

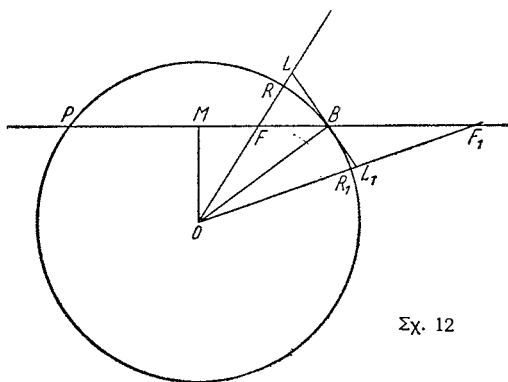
$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\sec (\alpha + \Delta \alpha) - \sec \alpha}{\sec \alpha 2 \sin \frac{\Delta \alpha}{2}} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Μεταβαίνομεν εἰς τὰ θεωρήματα (8) καὶ (9). Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει ὅτι (θεώρ. 8) οἰοῦδήποτε ὄντος τοῦ δοθέντος λόγου

$$\frac{a}{b} > \frac{MB}{OM} [= \operatorname{tg} \alpha ],$$

δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεΐαν  $OL$ , ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον  $B$ , ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα  $R$  καὶ  $L$ , κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε

$$\frac{FR}{BL} = \frac{a}{b} \text{ (}\Sigma\chi. 12\text{)}.$$



Σχ. 12

Ἐπίσης (θεώρημα 9), οἴουδήποτε ὄντος τοῦ δοθέντος λόγου

$$\frac{a}{b} > \frac{MB}{OM} [\operatorname{tg} \alpha ]$$

δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεΐαν  $OL$ , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς  $PB$  εἰς τὸ σημεῖον  $F_1$ , τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον  $R_1$  καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον  $B$  τοῦ κύκλου, εἰς τὸ σημεῖον  $L_1$  κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε

$$\frac{F_1R_1}{BL_1} = \frac{a}{b} \text{ (}\Sigma\chi. 12\text{)}.$$

Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει τὰ λήμματα αὐτὰ τῇ βοήθειᾳ τῶν νεύσεων, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ κατασκευασθῶσι διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν. Εἰς τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις εἶναι

$$(**) \frac{\sec \alpha - \sec (\alpha - \Delta \alpha)}{\sec \alpha \operatorname{tg} \Delta \alpha} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{\sec (\alpha + \Delta \alpha) - \sec \alpha}{\sec \alpha \operatorname{tg} \Delta \alpha},$$

ἢ ἀκόμη, τὸ ἀκραιὸν ἀριστερὸν μέλος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν κατωτέραν τῆς  $\operatorname{tg} \alpha$ , καὶ τὸ ἀκραιὸν δεξιὸν μέλος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν ἀνωτέραν τῆς  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Ἐπίσης εἶναι

$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\sec (\alpha + \Delta \alpha) - \sec \alpha}{\sec \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.^1$$

1. Ὁ E. J. Dijksterhuis ἐρμηνεύει, εἰς σύγχρονον συμβολισμόν, τὰ λήμματα τοῦ Ἀρχιμήδους ὡς ἑξῆς :

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sec \varphi - 1}{\varphi} = 0 \quad (\text{θεώρημα 5})$$

$$\lim_{R \rightarrow B} \frac{RF}{RB} = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \frac{1 - \sec \varphi \cos \alpha}{\alpha - \varphi} = \frac{BM}{OM} = \operatorname{tg} \alpha$$

(θεωρήματα 6 - 9), ὅπου  $\widehat{BOM} = \alpha$ ,  $\widehat{FOM} = \varphi$  (Σχ. 10 καὶ 11).

Ὁ A. Czwalina δίδει τὴν ἐπομένην ἐρμηνείαν εἰς τὸ θεώρημα (7) :

Ἐὰν θέσωμεν  $\widehat{BOM} = \alpha$ ,  $\widehat{FOM} = \varphi$ , τότε

$$RF \equiv r \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} - 1 \right), \quad BR = 2r \sin \frac{\varphi - \alpha}{2}.$$

ἡ παράστασις

$$\frac{\frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} - 1}{2 \sin \frac{\varphi - \alpha}{2}}$$

δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ  $\operatorname{tg} \alpha$  καὶ  $+\infty$ , ὅταν τὸ  $\varphi$  μεταβάλληται ἀπὸ  $\alpha$  ἕως  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .



Ἐπειδὴ  $\sin \Delta\alpha < \Delta\alpha < \operatorname{tg} \Delta\alpha$  (πρᾶγμα γνωστὸν εἰς τὸν Ἀρχιμήδην ὑπὸ ἄλλην μορφήν), αἱ ἀνισότητες (\*) καὶ (\*\*) ἐπιτρέπουσι νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος  $\frac{\Delta r}{r \Delta\alpha}$  (σημ. τοῦ θ. 6) δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς τόσον πλησίον, ὅσον θέλομεν, πρὸς τὴν  $\operatorname{tg} \alpha$ , μὲ

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r \Delta\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

§ 7. Τὸ πρόβλημα τῶν ἀκραίων τιμῶν παρὰ τῷ Ἀρχιμήδει

Εἰς τὴν πραγματείαν του «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου» (βιβλίον β', θεώρ. 4) ὁ Ἀρχιμήδης ἐξετάζει τὸ ἐξῆς πρόβλημα: «Δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ σφαιρικά τμήματα νὰ ἔχωσι μεταξύ των δοθέντα λόγον». ([2], σελ. 101).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τὴν μορφήν τῆς ἀναλογίας:

$$(1) \quad 4a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{m}{m+n} a,$$

ὅπου  $a$  εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας,  $m/n$  ὁ δοθεὶς λόγος καὶ  $x$  τὸ ὕψος τοῦ μεγαλύτερου σφαιρικοῦ τμήματος.

Ὁ Ἀρχιμήδης θέτει ἐν γενικώτερον πρόβλημα: «Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα  $\Delta Z$  εἰς τι σημεῖον  $X$  καὶ νὰ κάμωμεν ὡς τὴν  $XZ$  πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν τετράγωνον πρὸς τὸ  $\Delta X^2$ » ([2], σελ. 103).

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον:

$$(2) \quad S : x^2 = (a - x) : c,$$

ὅπου  $S$  εἶναι ἐπιφάνεια δοθεῖσα,  $\Delta Z = a$ ,  $\Delta X = x$ ,  $XZ = a - x$  καὶ  $c$  εἶναι δοθὲν μῆκος μιᾶς εὐθείας.

«Τοῦτο, (προσθέτει ὁ Ἀρχιμήδης), οὕτως ἀπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει περιορισμόν, προστιθεμένων ὁμῶς τῶν προβλημάτων τῶν ὑπαρχόντων ἐνταῦθα [τουτέστι τοῦ νὰ εἶναι διπλασία ἢ ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ μεγαλύτερα ἢ ΖΘ τῆς ΖΒ ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν ἐλέχθη] δὲν ἔχει περιορισμόν».

Ὑπόσχεται νὰ δώσῃ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν τοῦ προβλήματος εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ([2], σελ. 103). Ἡ λύσις ὁμῶς αὕτη τοῦ Ἀρχιμήδους ἀπωλέσθη. Οἱ Ἕλληνες γεωμέτραι Διοκλῆς καὶ Διονυσόδωρος ἀκμάσαντες μετὰ τὸν Ἀρχιμήδην, δὲν τὴν ἐγνώριζον . . .

Ὁ σχολιαστὴς τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος (6ος αἰ.) ἀνεῦρε τὴν ἀπολεσθεῖσαν λύσιν. . . . Εἰς τὸ κείμενον αὐτὸ διὰ νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα καταφεύγει εἰς δύο κωνικάς τομάς, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς ἑξῆς : τὴν παραβολὴν

$$(3) \quad y = \frac{x^2}{p},$$

ὅπου  $S = pb$ , καὶ τὴν ὑπερβολὴν

$$(4) \quad y = \frac{cb}{a - x}.$$

Αἱ δύο ἐξισώσεις δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν ἀμέσως εἰς τὴν ἀναλογίαν (2).

Διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην λύσεως τοῦ προβλήματος, ὁ Ἀρχιμήδης μεταβαίνει ἐκ τῆς ἀναλογίας (2) εἰς τὴν κυβικὴν ἐξίσωσιν :

$$(5) \quad x^2 (a - x) = Sc = bpc,$$

τὴν ὁποίαν ἐρμηνεύει ὡς σχέσιν μεταξὺ ὄγκων.

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (5) δέχεται θετικὰς ρίζας, ἐὰν

$$Sc \leq \max_{0 \leq x \leq a} x^2 (a - x).$$

Κατὰ ταῦτα, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου τῆς παραστάσεως  $x^2(a-x)$  διὰ  $0 \leq x \leq a$ .

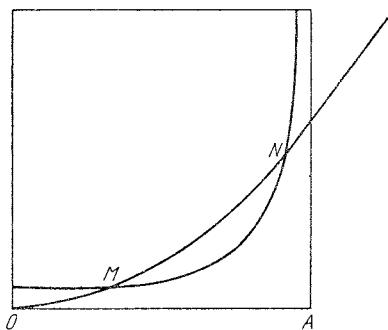
Ὁ Ἀρχιμήδης βεβαιοῖ ὅτι τὸ μέγιστον λαμβάνεται διὰ  $x = \frac{2}{3}a$ .

Εἰς τὸ κείμενον τὸ εὑρεθὲν ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου, ὁ Ἀρχιμήδης δὲν δίδει ἐρμηνείαν τινὰ τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου ἤυρε τὴν τιμὴν αὐτήν.

Τὸ κείμενον ὁμῶς αὐτὸ περιέχει τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι, ἐὰν  $x = \frac{2}{3}a$ ,

ἡ παράστασις  $x^2(a-x)$  ἔχει μεγίστην τιμὴν ἴσην πρὸς  $\frac{4}{27}a^3$ . Ἐξ

οὗ δυνάμεθα νὰ ἀνακατασκευάσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκραίαν τιμὴν.



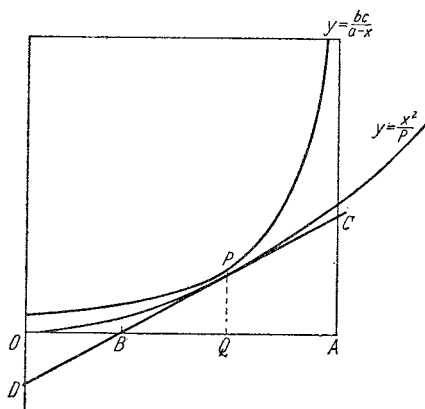
Σχ. 14

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν  $cS > \max x^2(a-x) = \frac{4}{27}a^3$ , ἡ ἐξι-

σωσις (5) δὲν ἔχει θετικὰς ρίζας. Ἐὰν  $cS < \frac{4}{27}a^3$ , ἡ ἐξισωσις (5),

ὥς τὸ ἀποδεικνύει ὁ Ἀρχιμήδης, ἔχει δύο ρίζας θετικὰς, αἵτινες δύνανται νὰ ληφθῶσι διὰ τομῆς τῶν καμπύλων (3) καὶ (4) (Σχ. 14).

Τέλος, εάν  $cS = \frac{4}{27} a^3$ , τότε  $x = \frac{2}{3} a$  εἶναι μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (5). Ὅθεν αἱ καμπύλαι (3) καὶ (4) κέκτονται ἐν σημείον τομῆς, P, τετμημένης  $\frac{2}{3} a$  (Σχ. 15).



Σχ. 15

Ἐστω  $OA = a$ ,  $OQ = \frac{2}{3} a$ . Ὁ Ἀρχιμήδης φέρει τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον P τῆς παραβολῆς (Σχ. 15). Ἀλλὰ κατὰ μίαν ιδιότητα γνωστὴν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν παραβολήν, ἔχομεν

$$PQ = OD,$$

$$\text{ὅθεν } OB = BQ = \frac{1}{3} a = QA.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων BCA, BPQ, ἔχομεν

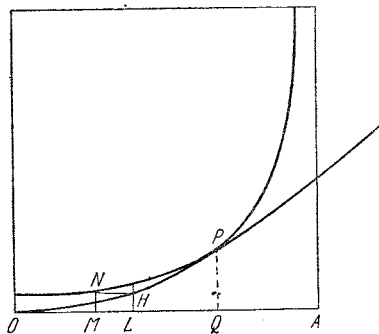
$$\frac{BC}{BP} = \frac{BA}{BQ},$$

ἀλλὰ  $BA = 2BQ$ , ἐξ οὗ  $BC = 2PB$  καὶ  $PB = PC$ .

Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα BC ἐφάπτεται τῆς ὑπερβολῆς

εἰς τὸ σημεῖον P. Οὕτω, τὸ σημεῖον P εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης τῶν καμπύλων (3) καὶ (4), καὶ  $x = \frac{2}{3}a$  εἶναι διπλῆ ρίζα τῆς ἐξισώσεως (5).

Ἐπειτα ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ παράστασις  $x^2 (a-x)$  ἔχει πράγματι μέγιστον διὰ  $x = \frac{2}{3}a$ . Ἀναπαράγομεν τὸν συλλογισμόν του : Ἐστω  $OA = a$ ,  $OQ = \frac{2}{3}a$  (Σχ. 16). Λαμβάνομεν ἐν σημείον M ( $\xi$ , 0), ὅπου  $\xi < \frac{2}{3}a$ , καὶ φέρομεν τὴν MN κάθετον



Σχ. 16

ἐπὶ τὴν OA, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ὑπερβολήν. Τότε  $y_M = MN = \frac{bc}{a-\xi}$ . Τώρα φέρομεν τὴν NH παράλληλον πρὸς τὴν OA καὶ ἔστω H τὸ σημεῖον τομῆς μετὰ τῆς παραβολῆς (3) :

$$y_L = HL = NM = \frac{bc}{a-\xi} = \frac{x^2}{p}.$$

Ὅθεν,  $x = OL > OM = \xi$ , ἐξ ὅ

$$x^2 = \frac{pbc}{a-\xi} < \xi^2,$$

$$\eta \xi^2 (a-\xi) < pbc = Sc = \frac{4}{27} a^3.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει ὅτι, ἐὰν  $\frac{2}{3} a < \xi < a$ , θὰ εἶναι  $\xi^2 (a-\xi) < \frac{4}{27} a^3$ .

Τοῦτο δεικνύει ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιοῦν τὴν ιδιότητα : πλησίον τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἡ μία τῶν καμπύλων (ἢ ὑπερβολή) εὐρίσκεται συμπληρωματικῶς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἄλλης καμπύλης (παραβολή).

Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ κατὰ λέξιν διὰ δύο καμπύλας οἵασδῆποτε  $y = \frac{c}{g(x)}$  καὶ  $y = f(x)$ , ἐὰν μόνον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς  $P$  δὲν εἶναι σημεῖον κλίσεως (inflexion).

Τώρα προβαίνομεν εἰς τὴν ἔκθεσιν τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχιμήδους. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ ἐπόμενον πρόβλημα : Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον (ἢ τὸ ἐλάχιστον) τῆς παραστάσεως  $u(x) = f(x) g(x)$ . Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις  $u(x)$  λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν  $M$  διὰ  $x = x_0$ . Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ  $x_0$ , πρέπει κατὰ τὸν Ἀρχιμήδη νὰ θεωρήσωμεν τὰς δύο καμπύλας :

$$(6) \quad y = f(x)$$

καὶ

$$(7) \quad y = \frac{M}{g(x)}.$$

Δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν εὐκόλως ὅτι, ἐὰν αἱ καμπύλαι (6) καὶ (7) ἔχουσι σημεῖον τομῆς  $P(x_1, y_1)$ , τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς, τὸ γινόμενον  $u(x) = f(x)g(x)$  δὲν δύνανται νὰ ἔχῃ μέγι-

στον (ἢ ἐλάχιστον) διὰ  $x = x_1$ . Πράγματι, ὑποθέτομεν, ὅτι διὰ  $\xi < x_1$  ἡ καμπύλη (6) διέρχεται ἄνωθεν τῆς καμπύλης (7).

$$f(\xi) > \frac{M_1}{g(\xi)}, \quad \mu\epsilon \quad M_1 = f(x_1) g(x_1),$$

ἢ  $f(\xi)g(\xi) > M_1$ . Τότε διὰ  $\eta < x_1$  ἡ καμπύλη (7) διέρχεται ἄνωθεν τῆς καμπύλης (6) :

$$\frac{M_1}{g(\eta)} < f(\eta),$$

ἢ  $f(\eta)g(\eta) < M_1$ . Οὕτω τὸ  $M_1$  δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον διὰ  $u(x)$ .

Δι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ, ὁ Ἀρχιμήδης ἠδύνατο νὰ λάβῃ τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τὴν ὑπαρξιν ἀκραίας τιμῆς· αὐτὴ ἡ συνθήκη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἰδικήν μας. Πράγματι, ὑποθέτομεν ὅτι τὸ γινόμενον  $u(x) = f(x)g(x)$  λαμβάνει τὸ μέγιστόν του  $M$  (ἢ τὸ ἐλάχιστον) διὰ  $x = x_0$ .

Αἱ καμπύλαι  $y = f(x)$  καὶ  $y = \frac{M}{g(x)}$  πρέπει νὰ εἶναι τότε ἐφαπτόμεναι διὰ  $x = x_0$ .

Ἀναγράφομεν τὴν συνθήκην, ἵνα αἱ καμπύλαι αὗται ἔχωσι κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον αὐτό :

$$f'(x_0) = -\frac{M}{g^2(x_0)} g'(x_0)$$

$$\text{ἔξ οὗ } g^2(x_0)f'(x_0) + Mg'(x_0) = 0.$$

Ὅθεν,  $M = f(x_0)g(x_0)$ , ἔξ οὗ τελικῶς ἔχομεν τὴν συνθήκην

$$g(x_0)f'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) = 0$$

Τοῦτο εἶναι ἀκριβῶς ἡ συνθήκη τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκπεφρασμένη διὰ τοῦ συγχρόνου συμβολισμοῦ.

Ἴδου πῶς ἐσκέφθη ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τὴν εὐρη τὴν τιμὴν τοῦ  $x$ , ἢ ὅποια δίδει τὸ μέγιστον εἰς τὸ  $x^2(a-x)$  : ἐὰν αἱ καμπύλαι (3) καὶ (4) ἔχωσι ἐν σημεῖον ἐπαφῆς  $P$  (Σχ. 15), τότε  $OB = BQ$  (ἐπειδὴ  $PD$  εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς) καὶ  $PC = PB$  (ἐπειδὴ  $PD$  εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς), ὅθεν  $OB = BQ = QA = \frac{1}{3}a$  καὶ  $OQ = \frac{2}{3}a = x_0$ . Μετὰ τοῦτο ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθεῖσα συνθήκη (ὑπαρξίς τοῦ σημείου ἐπαφῆς) εἶναι διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅχι μόνον ἀναγκαία, ἀλλὰ καὶ ἀρκετή.

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ηὔρε γενικὴν μέθοδον διὰ τὴν ἀνάγνῃ τὰ προβλήματα τοῦ μεγίστου εἰς προβλήματα ἐφαπτομένων.

### § 8. Συμπέρασμα

Τὰ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρεθέντα θεωρήματα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ἐπόμενα :

1. Διὰ τυχοῦσαν καμπύλην  $\rho = \rho(\varphi)$ , δεδομένην εἰς πολικὰς συντεταγμένας, λαμβάνει

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = \frac{\rho}{S_t} [=tg \alpha],$$

ὅπου  $S_t$  εἶναι ἡ πολικὴ ὑπεφαπτομένη,  $r$  ἡ ἀνυσματικὴ ἀκτίς τῆς ἐφαπτομένης.

2. Διὰ τὴν ἑλικά  $\rho = a\varphi$ , λαμβάνει

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \frac{\rho}{S_t} = \frac{I}{\varphi}, S_t = \rho\varphi.$$

3. Διὰ τὸν κύκλον  $\rho = c$ , λαμβάνει

$$\frac{\rho}{S_t} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = 0.$$



$$4. \text{ Αἱ σχέσεις } \frac{\sec(\alpha + \Delta\alpha) - \sec \alpha}{\Delta\alpha} \text{ καὶ } \frac{\sec \alpha - \sec(\alpha - \Delta\alpha)}{\Delta\alpha}$$

διαφέρουσιν ὀλίγον τῆς  $\operatorname{tg} \alpha \sec \alpha$  δι' ἐκλογὴν ἁρμοζούσης τιμῆς τοῦ  $\Delta\alpha$ , ἥ

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\sec(\alpha + \Delta\alpha) - \sec \alpha}{\Delta\alpha} = \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha.$$

Ὅπως εἶδομεν ὁ Ἀρχιμήδης ἠῦρεν οὕτω γενικὴν μέθοδον διὰ ν' ἀναγὰγῃ τὰ προβλήματα τῆς ἀκραίας τιμῆς εἰς προβλήματα ἐφαπτομένων. Μάλιστα, ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς  $x$  δίδουσα τὸ μέγιστον  $M$  εἰς τὴν παράστασιν  $u(x) = f(x)g(x)$  εἶναι κατ' ἀνάγκην ἡ τεμνομένη τοῦ σημείου τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης  $y = f(x)$  καὶ  $y = \frac{M}{g(x)}$ .

Εἰς τὸν σύγχρονον συμβολισμόν ἡ συνθήκη τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀκόλουθον :

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0$$

Ἡ σημασία τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μεθόδων ὁλοκληρώσεως τῶν αἰώνων 16ου-17ου εἶναι παγκοσμίως γνωστή<sup>1)</sup>.

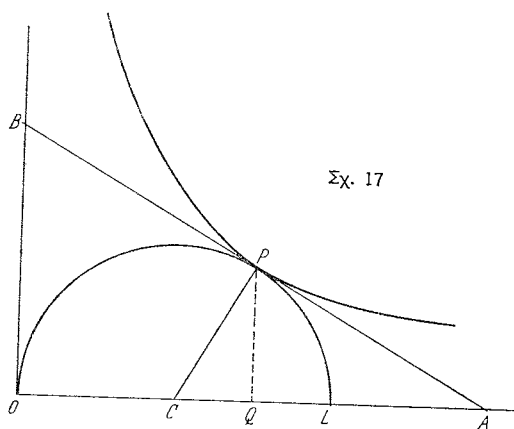
Ἡ σπουδαιότης τῶν ἐργασιῶν τῶν σχετικῶν πρὸς τὰς μεθόδους διαφορίσεως ἔχει ὀλιγώτερον μελετηθῆ. Ἐν τούτοις, οἱ μεγάλοι μαθηματικοὶ τοῦ 16-17 αἰῶνος, ὡς οἱ Viète, Pascal, Fermat, Roberval, Torricelli, Cavalieri, Barrow ἐπέδειξαν ζωηρότατον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ ἐλίκων».

Ἡ σπουδὴ τοῦ ἱστορικοῦ ρόλου τῆς πραγματείας «Περὶ ἐλίκων»

1. Βαθεῖα ἀνάλυσις τῆς ἐπιδράσεως τῆς ἐξαντλητικῆς λεγομένης μεθόδου εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων τοῦ 17ου αἰῶνος ἐδόθη τελευταίως ὑπὸ τοῦ D. T. Whiteside [10].

είναι θέμα, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ εἰδικὰς ἐρεῦνας. Ἐνταῦθα θὰ περιορι-  
σθῶμεν μόνον εἰς τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους τῶν ἀκραίων τιμῶν.

Ἡ μέθοδος αὕτη, ὀνομαζομένη, «μέθοδος τῶν κωνικῶν» ὡς ἀ-  
πέδειξεν ὁ L. Sorokina [13] ἦτο ἤδη πολὺ γνωστὴ καὶ ἐπὶ μα-  
κρὸν χρησιμοποιουμένη ὑπὸ τοῦ Ricci καὶ τοῦ E. Torricelli.  
Εἰς ἐπιστολὴν ἀπευθυνομένην πρὸς τὸν Torricelli ([8], v. 3, p.  
243-244), ὁ Ricci δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τὴν σχετικὴν  
πρὸς τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως  $u = x \sqrt{x(a-x)}$ . Οὗτος ἀνάγει  
τὸ πρόβλημα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου τῆς ἐφαπτομένης  
τῆς καμπύλης  $y = \sqrt{ax-x^2}$  καὶ  $y = M/x$  (Σχ. 17).



Σχ. 17

Χρησιμοποιοῦντες τὰς γνωστὰς ιδιότητες τῶν ἐφαπτομένων  
τῆς ὑπερβολῆς καὶ τοῦ κύκλου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι  $BP = PA$   
καὶ ὅτι  $CP$  εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν  $AB$ , ἐξ οὗ συνάγομεν ἄνευ δυ-  
σκολίας, ὅτι  $OQ = \frac{3}{4} OL = \frac{3}{4} a$ , ὅπου  $a$  εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ  
κύκλου.

Ὁ Ricci παρατηρεῖ, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου πάσης παραστάσεως τῆς μορφῆς  $u = f(x)$ .

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὕτην πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὰς καμπύλας  $y = f(x)$  καὶ  $y = M/x$ . Αἱ ιδιότητες τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ὑπερβολὴν εἶναι γνωσταί, ὁπότε ἀπομένει νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης  $y = f(x)$ . Ὁ Ricci θέτει τὸ αὐτὸ πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου  $y = f(x)$  εἶναι ἡ ἔλλειψις  $y^2 = k^2x(a-x)$ .

Ὁ E. Torricelli γενικεύει τὸ τεθὲν πρόβλημα. Ζητεῖ τὴν ἀκραίαν τιμὴν τῆς συναρτήσεως  $u = x^m(a-x)^n$ ,  $0 \leq x \leq a$ .

Δεικνύει, ὅτι ἡ ἀκραία αὕτη τιμὴ λαμβάνεται, ὅταν

$$\frac{x}{a-x} = \frac{m}{n}$$

([8], v. 1, p. 2, p. 257).

Ἀναλύνοντες τοὺς συλλογισμοὺς τῆς ἀποδείξεως, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ὁ Torricelli ἐφαρμόζει καὶ αὐτὸς τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους. Θεωρεῖ τὴν συνάρτησιν

$$z = \sqrt[n]{u} = x^{\frac{m}{n}}(a-x)$$

καὶ ἀναζητεῖ τὴν συνθήκην διὰ τὴν ὁποῖαν αἱ καμπύλαι  $y = a - x$

καὶ  $y = \frac{M}{x^{\frac{m}{n}}}$  ἔχουσιν ἐν σημεῖον ἐπαφῆς.

Κατὰ ταῦτα, βλέπομεν ὅτι ἡ μέθοδος τῆς ἀκραίας τιμῆς τοῦ Ἀρχιμήδους ἦτο γνωστὴ καὶ ἐχρησιμοποιεῖτο ὑπὸ τῶν μαθηματικῶν τοῦ 17ου αἰῶνος.

Οἱ μαθηματικοὶ τοῦ 17ου αἰῶνος εἶχον σαφῶς κατανοήσει τὴν σπουδαιότητα τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὴν ἐπεξεργασίαν

τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων καὶ ἔβλεπον εἰς τὸν Ἀρχιμήδη τὸν μεγαλοφυᾶ προγενέστερόν των. Ὁ G. W. Leibniz ἔγραψεν: «Ἀναγινώσκοντες μετὰ προσοχῆς τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν θαυμάζομεν τὰς νεωτέρας ἀνακαλύψεις τῶν γεωμετρῶν».

Βιβλιογραφία

- [1] Archimedes, Opera omnia, 3 vol., Ed. I. L. Heiberg, 2. Ed. Leipzig : Teubner, 1910 - 1915.
- [2] Les Oeuvres complètes d' Archimède, trad. P. Ver Eecke, Paris—Bruxelles : Desclée—de—Brouwer 1921.
- [3] Dijksterhuis, E. J., Archimedes. Copenhagen: Ejnar Munksgaard 1956.
- [4] Archimedes, Über Spiralen. Übers. mit Anm. und Anh., A. Czwalina.
- [5] Heath, T., A History of Greek Mathematics, 2 vol. Oxford 1921.
- [6] Pappus d' Alexandrie, La collection mathématique, trad. P. Ver Eecke. Paris : Bruges 1933.
- [7] Simon, M., Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte. Berlin 1909.
- [8] Torricelli, E., Opera, edite de G. Loria e G. Vassura. Faenza 1919-1944.
- [9] Zeuthen, H. G., Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen âge. Paris: Gauthier - Villars 1902.
- [10] Whiteside, D. T., Patterns of mathematical thought in the later seventeenth Century. Arch. Hist. Exact Sci. 1 (1961).

- [11] Bachmakova, I. G., Differential methods in Archimedes' Works. Actes du VIII<sup>e</sup> Congrès International d'Histoire des Sciences, Florence, 1956, pp. 120-122.
- [12] Lurié, S. J., Archimède. Moscou—Léningrand, 1945 (en russe).
- [13] Sorokina, L. A., Conférence au IV Congrès des mathématiciens de l'URSS, 1961.

3. Charles Mugler. Archimède, tome II, éd. Les Belles Lettres, Paris 1971, p. 4-5.

«Τὸ τέλος τῆς πραγματείας Περὶ ἐλίκων, τὰ θεωρήματα 21-28, εἶναι ἀφιερωμένα εἰς ἓν ἐκ τῶν ἐξόχων ἐπιτευγμάτων τῆς μεγαλοφυΐας του, εἰς τὸν τετραγωνισμόν τῆς ἑλικος. Αἱ σελίδες αὗται παρουσιάζουσι κατὰ σαφῆ τρόπον τὰς συναφεῖς δυσκολίας, αἵτινες ὑπῆρχον κατὰ τὸν 3ον αἰ. π.Χ., διὰ τὸν ὑπολογισμόν ἐμβαδοῦ ἐπιφανείας περιβαλλομένης ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς καὶ καμπύλης μὴ κυκλικῆς, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ μέσα τῆς ἐφευρετικότητος διὰ τῶν ὁποίων ὁ Ἀρχιμήδης ἐθριάμβευσε κατὰ τῶν δυσκολιῶν αὐτῶν. Μὲ τὸν σημερινὸν συμβολισμόν τὸ πρᾶγμα βέβαια δὲν εἶναι δύσκολον. Ἡ ἐξίσωσης τῆς ἐλλείψεως εἰς πολικὰς συντεταγμένας, ἐχούσης τὴν ἀρχὴν της εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ὡς ἀρχικὴν εὐθεῖαν περιστροφῆς κειμένην ἐπὶ τῆς τετμημένης εἶναι

$$(1) \quad \rho = \frac{a}{2\pi} \varphi,$$

καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἑλικος ἐκ τῆς πρώτης περιστροφῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὠρισμένον ὀλοκλήρωμα

$$(2) \quad A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi, \quad \text{ἐξ οὗ}$$

$$(3) \quad A = \frac{a^2 \varphi^3}{8\pi^2 3} \bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

..... ὅπερ ἐπέτυχεν ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τῶν ἀνωτέρω μνημονευθέντων θεωρημάτων.

## ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΜΑΡΤΥΡΙΩΝ

274. Ἐκ τοῦ E. Wiedemann, Συμβολαὶ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, Συνεδρία τῆς Φυσικο-ιατρικῆς Ἑταιρείας ἐν Ἐρλάνγκεν, τόμος 1905 σελ. 234 (Beiträge zur Geschichte der Naturwiss. Sitzungsber, d. Phys. — med. Soz. in Erlangen, Vol. 1905, S. 234).

18. Ὁ Ἀρχιμήδης ἡσχολεῖτο μὲ τεχνάσματα (σημ. ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ Ἀραβος el Kindi) τῆς γεωμετρίας (τῆς μηχανικῆς) (Hijal el Handasa), ὡς ἐπίσης μὲ καυστικὰ κάτοπτρα, ἀκόμη δὲ μὲ τὴν κατασκευὴν πολεμικῶν μηχανῶν καὶ τὸν βομβαρδισμὸν φρουρίων, προσέτι δὲ μὲ συσκευάς, αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιοῦντο ἐναντίον στρατοῦ κατὰ τὴν ὑποχώρησιν ἢ κατὰ τὴν ἀντεπίθεσιν.

275. Ἀρχιμήδης

(Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἔργου τοῦ E. Wiedemann, σελ. 247, ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀραβος Qifti, σελ. 66) :

Ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ σοφός, ὁ μαθηματικός, εἷς Ἕλληνα, ἔζη ἐν Αἰγύπτῳ καὶ ἐκεῖ ἡδραίωσε τὰς γνώσεις του. Παρὰ τῶν Αἰγυπτίων ἔμαθε τὰ διάφορα μέρη τῆς γεωμετρίας, διότι αὐτοὶ παλαιόθεν εἶχον ἀσχοληθῆ μὲ αὐτήν. Συνέγραψε πολλὰ ὥραῖα ἔργα. Ὁ el Chatib (ὁ κῆρυξ) μοῦ εἶπε, καὶ οὗτος ἦτο ὁ ἀρμοδιώτερος, τὸν ὁποῖον εἶδα, κατὰ καταγωγὴν, μόρφωσιν, εὐφράδειαν καὶ προθυμίαν πρὸς βοήθειαν. Οὗτος λέγει : Συνήντησα τοὺς πλέον πεπειραμένους ἐκ τῶν διασημοτέρων Σετχηδων τῆς χώρας μου, καὶ οὗτοι ἦσαν σύμφωνοι,

ὅτι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος διήνοιξε τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν ἀγρῶν τῆς Αἰγύπτου καὶ ὅστις ἔθεσε τὰς βάσεις διὰ τὰ ἀναχώματα, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται σύνδεσις τοῦ ἐνὸς τόπου πρὸς τὸν ἄλλον, κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν πλημμυρῶν τοῦ Νείλου, οὗτος ἦτο ὁ Ἀρχιμήδης. Τοῦτο τὸ ἔκαμε πρὸς χάριν ἐνὸς τῶν βασιλέων τῆς Αἰγύπτου. Τὸ αἷτιον δι' αὐτὰ (σημ. τὰ ἀναχώματα) ἦτο, ὅτι οἱ κάτοικοι τῶν περισσοτέρων τόπων τῆς Αἰγύπτου, ὅταν τὰ ὕδατα τοῦ Νείλου ἀνέρχοντο ἐγκατέλιπον τοὺς ἀγροὺς καὶ κατέφευγον εἰς τοὺς πλησίον λόφους, ἐκ τοῦ φόβου μήπως πνιγῶσι, καὶ ἔμενον ἐκεῖ μέχρις ὅτου τὰ ὕδατα τοῦ Νείλου ὑπεχώρουν. Ὅταν ἤρχιζεν ἡ ὑποχώρησις τῶν ὑδάτων, οἱ κάτοικοι κατήρχοντο εἰς τὰ πεδινὰ μέρη καὶ ἤρχιζον νὰ σπεύρουν. Διὰ νὰ γίνῃ ὅμως αὐτὸ εἰς τὰ κατώτατα μέρη ἔπρεπε αὐτὰ πρῶτα νὰ ξηρανθοῦν, ὁπότε σπορὰ δὲν ἐπρόφθανε νὰ γίνῃ. Ὅταν ἐπληροφορήθη αὐτὰ τὰ πράγματα ὁ Ἀρχιμήδης, ὅταν ἦτο ἐκεῖ, ἐμέτρησεν ὅλους τοὺς ἀγροὺς τῶν περισσοτέρων τόπων, ὥς πρὸς τὸ μέγιστον ὕψος τῶν ὑδάτων, εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθανον τὰ ὕδατα τοῦ Νείλου καὶ ἐκλείσεν αὐτοὺς μὲ τείχη. Μεταξὺ τῶν διαφόρων τόπων ἔκτισεν ἀναχώματα καὶ εἰς τὸ μέσον τῶν ἀναχωμάτων ἔκαμε γεφυρώματα, διὰ τῶν ὁποίων τὸ ὕδωρ ἀπὸ τὸν ἓνα τόπον ἔφθανε εἰς τὸν ἄλλον. Καὶ διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἕκαστος σπεύρει τὸν ἀγρόν του χωρὶς ἀπωλείας. Ἐξ ἐκάστου ἀγροκτήματος καθώρισε ἐν μέρος, τοῦ ὁποίου τὸ εἰσόδημα διετίθετο διὰ τὴν διατήρησιν τῶν ἀναχωμάτων. Ταῦτα εἶναι μέχρι σήμερον γνωστὰ καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν χρησιμεύει ἰδιαίτερα Ἀρχὴ εἰς τὴν Αἴγυπτον, ἡ Ἀρχὴ (Ὑπηρεσία)

---

276. *P s. H y g i n u s G r o m a t i c u s, De limitibus constituendis. Ed. K. Lachmann in: Die Schriften der römischen Feldmesser, Band I, Berlin 1848 (Nachdruck Hildesheim 1967), S. 166-208.*

*S. 183, 17 - 184, 13*



τῶν ἀγρῶν καὶ πρὸς τοῦτο προσέχουν πολὺ καὶ ἐνθυμοῦμαι, ὅταν ἤμην παιδί, ἡ περιοχὴ αὐτὴ μαζὶ μὲ τὰς ἀνατολικὰς περιοχὰς τῆς Αἰγύπτου τοῦ el Gauḥ εἶχον ἀνατεθῇ πρὸς ἐπιθεώρησιν (ὁ θεὸς ἂς εἶναι εἰς αὐτὸν οἰκτίρμων) εἰς τὸν πατέρα μου. Εἶχεν εἰς τὴν διάθεσίν του φρουράν, ἐπιθεωρητάς, καὶ ἐνοικιαστάς. Ἡ ἀπασχόλησίς του ἦτο κοπιωδεστάτη.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἔγραψε πλῆθος ἔργων διὰ τὰ πράγματα αὐτὰ καὶ δι' ὅ,τι σχετίζεται μὲ αὐτά :

1. Περὶ τοῦ ἐπταγώνου εἰς τὸν κύκλον. 2. Περὶ τῆς μετρήσεως τοῦ κύκλου. 3. Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. 4. Περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου (1 βιβλίον). 5. Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων (1 βιβλίον). 6. Περὶ τῶν τριγώνων (1 βιβλίον). 7. Περὶ τῶν παραλλήλων γραμμῶν. 8. Περὶ τῶν ὑποθέσεων διὰ τὰς ἀρχὰς (στοιχεῖα) τῆς γεωμετρίας. 9. Περὶ δεδομένων μεγεθῶν (1 βιβλίον). 10. Περὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων (1 βιβλίον). 11. Ἔργον ἐνδείξεως τῶν ὥρῶν διὰ ὑδραυλικῶν ὀργάνων, τὰ ὅποια ἐκτοξεύουν σφαιρίδια (1 βιβλίον).

Ὁ δὲ Muhamed ibn Ishaq el Nadim (σημ. οὗτος εἶναι ὁ συντάκτης τοῦ καταλόγου ἐλληνικῶν ἔργων, τοῦ Fihrist) ἀναφέρει τὰ ἐξῆς : «Οὗτος λέγει : Ἐμπιστον πρόσωπον μοῦ ἀνέφερε, ὅτι οἱ Ῥωμαῖοι 25 ἐκ τῶν βιβλίων τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ ἔκαυσαν, ὡς περὶ τὰ. Περὶ τοῦ περιστατικοῦ ὑπάρχει λεπτομερὴς ἐκθεσις, ἡ ὁποία δὲν ἀνακοινοῦται, διότι εἶναι ἐκτεταμένη».

---

276. Ψευδο-Ὑγῖνος γεωμετρικὸς (τοπογράφος)

Πρέπει νὰ ἐρωτηθῇ κατὰ πρῶτον ποῖον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ κόσμου, ποῖος ὁ λόγος τῆς γενέσεως ἢ τῶν συμβαινόντων, πόση εἶναι ἡ γῆ ἐν τῷ κόσμῳ . . . Διότι καὶ διὰ τὸν Ἀρχιμήδη, ἄνδρα

*Quaerendum est primum quae sit mundi, quae ratio oriundi aut occidenti, quanta sit mundo terra ..... Nam et Archimedem, virum praeclari ingenii et magnarum rerum inventorum, ferunt scribisse quantum arenarum capere posset mundus, si repleretur. Credamus ergo illum divinarum rerum magnitudinem ante oculos habuisse: qua ratione dicamus «tot saeculis unus mortaliū hoc scire potuerit: unus propter hoc laboravit et per incrementa umbrarum deprehendit?».*

277. *Eutocius, Comm. in Conica Apollonii Pergaei. Apoll. Perg. opera vol. II, ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1893, p. 218, 3-15.*

Δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσεως ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ἐπεὶ δὲ ἐπακτικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν ἐλέγετο, ἐζητήσαμεν αὐτὸ καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου Συντάξεως·

278.— P. 354, 1. Εἰς τὸ δ'.

Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὃ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμει, ζήτησιν μὲν ἔχει, ποσαχῶς αἱ τῶν κόνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ κύκλου περιφερεία συμβάλλουσιν ἥτοι ἐφαπτόμεναι ἢ τέμνουσαι, ἔστι δὲ καὶ χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυγχάνουσιν . . . δέδεικται δὲ

ἐξόχου πνεύματος καὶ πολλῶν πραγμάτων ἐφευρέτην, λέγουν, ὅτι ἔγραψε πόσῃν ἄμμον θὰ ἠδύνατο νὰ χωρέσῃ ὁ κόσμος, ἐὰν ἐπληροῦτο μὲ αὐτήν. Ἄς πιστεῦσωμεν, ὅτι ἐκεῖνος εἶχε πρὸ ὀφθαλμῶν τὸ μέγεθος τῶν θείων πραγμάτων δηλ. : Κατὰ ποίαν λογικὴν «εἰς διάστημα τόσων αἰώνων εἰς τῶν θνητῶν νὰ δύναιται νὰ γνωρίσῃ τοῦτο : εἰς εἰργάσθῃ διὰ τοῦτο καὶ τὸ κατενόησε διὰ τῆς αὐξήσεως τῶν σκιῶν» ; (σημ. ὑπαινίσσεται τὴν μέτρησιν τῆς διαμέτρου τοῦ ἡλίου διὰ τῶν κυλινδρίων εἰς τὸν Ψαμμίτην).

277. Εὐτόκιος εἰς σχόλιά του τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

Διότι ἀπεδείχθη μὲν εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὸ εἰκοστὸν τρίτον θεώρημα, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουσι λόγον μεταξύ των, τὸ γινόμενον τῶν λόγων τῶν πλευρῶν· ἐπειδὴ δὲ τὸ πρᾶγμα ἐλέγετο ὑπὸ τῶν σχολιαστῶν μᾶλλον ἐπαγωγικώτερον καὶ οὐχὶ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον, ἤρευνήσαμεν αὐτὸ καὶ τὸ ἐγράψαμεν εἰς τὴν ἔκδοσίν μας, εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ εἰς τὰ σχόλια τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Συντάξεως τοῦ Πτολεμαίου·

278.— σ. 354,4. Εἰς τὸ 4ον.

Τὸ τέταρτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν, ὦ φίλε συνάδελφε Ἀνθέμιε, ἐρευνᾷ μὲν κατὰ πόσους τρόπους αἱ κωνικαὶ τομαὶ καὶ μεταξύ των καὶ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου συναντῶνται ἢ ἐφαπτόμεναι ἢ τεμνόμεναι, εἶναι δὲ τοῦτο καὶ χαρίεν καὶ σαφές διὰ τοὺς γνωρίζοντας . . . Ἀποδεικνύονται δὲ εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ὅλα διὰ τῆς εἰς

τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, ὥσπερ καὶ  
 Εὐκλείδης ἔδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν  
 ἐπαφῶν. εὐχρηστος δὲ καὶ ἀναγκαῖος ὁ τρόπος οὗτος καὶ τῷ  
 Ἀριστοτέλει δοκεῖ καὶ τοῖς γεωμέτραις καὶ μάλιστα τῷ  
 Ἀρχιμήδει.

ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅπως καὶ ὁ Εὐκλείδης ἀπέδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. Εὐχρηστον δὲ καὶ ἀναγκαῖον τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ἀποδείξεως, φαίνεται, ὅτι θεωρεῖ καὶ ὁ Ἀριστοτέλης καὶ οἱ γεωμέτραι καὶ μάλιστα ὁ Ἀρχιμήδης.



## ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

- Περὶ τὸ 510.— BOËTHIUS. Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικὴν. Ῥώμη
- Περὶ τὸ 530.— ΙΣΙΔΩΡΟΣ. Ἐκδοσις τοῦ κειμένου ἐν Κωνσταντινουπόλει
- Περὶ τὸ 540.— ΕΥΤΟΚΙΟΣ. Σχόλια ἔργων τινῶν ἐν Κωνσταντινουπόλει
- Περὶ τὸ 830.— ΛΕΩΝ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ. Ἐκδοσις τοῦ κειμένου ἐν Κωνσταντινουπόλει
- Περὶ τὸ 870.— IBN QURRA. Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου ὑπὸ τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, ἀραβιστὶ
- Περὶ τὸ 1036.— AL-BIRUNI. Περὶ τῆς εὐρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ, ἀραβιστὶ
- 1270.— MOERBEKE, WILHELM VON. Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικὴν. Φλωρεντία
- 1450.— CREMONA, JACOB VON. Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικὴν
- 1462.—REGIOMONTANUS, I. (MÜLLER, I.). Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικὴν.
- 1501.— VALLA, G. Τμήματά τινα ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικὴν, εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ «De rebus expetiendis et fugiendis, Venedig

- 1646.— VIÈTE, FRANÇOIS. Opera mathematica von Francisci à Schooten, Leydensis. Repr. Hildesheim - N. York, 1970
- 1716.— WOLFF, CHRISTIAN. Mathematisches Lexikon. Leipzig. Repr. Hildesheim 1965
- 1741.— WOLFF, CHRISTIAN. Elementa matheseos universae tom. V, Halle/S. Repr. Hildesheim, 1971
- 1751.— TAQUET, ANDREA. Elementa geometriae plane et solide quibus accerunt selecta ex Archimede auctori Patavii
- 1768.— BENTON, WILLIAM. ENZYCLOPAEDIA BRITANNICA. The University of Chicago. Archimedes
- 1796.— KÄSTNER, A.G. Geschichte der Mathematik I. Göttingen, Repr. Hildesheim-N. York, 1970
- 1797.— KÄSTNER, A. G. Geschichte der Mathematik II. Göttingen, Repr. Hildesheim - N. York, 1970
- 1799.— ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΣ ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ. Στοιχείων μαθηματικῶν ἐκ παλαιῶν καὶ νεωτέρων, τομ. Β', 'Αρχιμήδεια θεωρήματα. Μόσχα.
- 1843.— SCHICK, HEINRICH-AUGUST. Über die Himmelsgloben des Anaximander und des Archimedes. Hanau
- 1879.— ZOTENBERG, M. H. Traduction Arabe du traité des corps flottants d'Archimède. Extrait au journal Asiatique
- 1882.— GÜNTHER, S. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden. Z. F. Math. Phys. 27 Suppl. hist.—lit. Abt.=Gesch. Math. 4, 5. 1-134
- 1882/3.— HUNRATH, K. Über das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern. Gymn. Progr. Hadersleben
- 1884.— HUNRATH, K. Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Dezimalbrüche. Kiel



## ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

- 1895.— HULTSCH, F. Archimedes, Pauly-Wissowa Real-Encyclopädie. Stuttgart
- 1907.—CANTOR, MORITZ. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, Leipzig. Repr. Stuttgart 1965
- 1909.— SIMON, MAX. Geschichte der Mathematik im Altertum. Berlin
- 1909.—HEIBERG, I. L. Δεύτεραι Φροντίδες. In: Festkrift til H. G. Zeuthen, Kopenhagen 1909. S. 63-65
- 1910-11.—SUTER, HEINRICH. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise. Bibliotheca Mathematica 3. Folge, vol. 2, S. 2-78 (Aus Carl Schoy, Al-Biruni), Die trigonometrischen Lehren... 1927. Hannover
- 1916.— HEIBERG, I. L. Le rôle d'Archimède dans le développement des sciences exactes. Scientia vol. 20, p. 81-89
- 1922.—BOSMANS, H. Guillaume de Moerbeke et le Traité des corps flottants d'Archimède. Revue des Questions scientifiques
- 1922.— TANNERY, PAUL. Mémoires scientifiques, vol. 5. Paris-Toulouse
- 1924.— DEVENTER, CH. M. van. Grepen uit de historie der Chemie. Haarlem. S. 108-127
- 1925.— RICHARDT, TH. Archimedes' beregning av  $\sqrt[3]{3}$ . Norsk. Mat. Tidsskrift 7, 73-88
- 1927.— HASKINS, C. H. Studies in the History of Medieval Science, 2d ed. Cambridge, Mass
- 1927.—48.—SARTON, G. Introduction to the History of Science, 3 vol. in 5. Baltimore
- 1928.— BROMWICH, T. J. The methods used by Archimedes for approximating to square roots. Math. Gazette 14, 253-257

## APXIMHΔHΣ

- 1930.— ZACHARIAS, MAX. Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Götschen Lehrbücherei Bd. 16, Berlin
- 1932.— BESSEL/HAGEN, E.—SPIES, O. Halbregelmässiges 14—Flach. Quellen und Studien z. Geschichte d. Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. 2. Berlin
- 1937.—BELL, E.T. MEN of Mathematics
- 1941.—SCHEFFERS, GEORG. Lehrbuch der Mathematik. Berlin
- 1942/3.—SCHREK, D. J. E. De sikkel van Archimedes. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 30, 1-13
- 1945.—BONNY, CH. Les oeuvres d'Archimède et les progrès de la construction navale. Revue et Bulletin Technique de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Louvain et de l'Union des Ingénieurs navals de Belgique. No. 2, 41-68
- 1947.— BURGER, D. Heeft Archimedes de brandspiegels uitgevonden? Faraday 17, 1-10
- 1948.— COHEN, MORRIS R. and DRABKIN, I. E. A Source book in Greek Science. McGraw-Hill book Co. Inc. N. York-Toronto-London
- 1949.— TOEPLITZ, OTTO. Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften B. LVI. Berlin - Göttingen - Heidelberg (Springer-Verlag)
- 1950.—LINDELÖF - ULLRICH. Einführung in die höhere Analysis. Leipzig
- 1951.— BECKER, OSKAR — HOFMANN, JOS. E. Geschichte der Mathematik. Bonn
- 1952.— WESTPHAL, WILHELM. Physikalisches Wörterbuch. Berlin-Göttingen-Heidelberg

## ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

- 1953-1963.—HOFMANN, JOSEPH, E. Geschichte der Mathematik I. W. de Gruyter, Berlin (Sg Göschen)
- 1956.— HOFMANN, JOSEPH, E. Über Viètes Konstruktion des regelmässigen Siebenecks. Centaurus vol. 4: no 3:p. 177-184
- 1956.— DIJKSTERHUIS, E. J. Die Mechanisierung des Weltbildes, ins deutsch übertragen von H. Habicht. Berlin-Göttingen-Heidelberg
- 1956.— WAERDEN, B. L. van der. Erwachende Wissenschaft. Basel-Stuttgart
- 1956.— NEWMAN, JAMES R. The world of Mathematics I. London
- 1957.— HOFMANN, JOSEPH, E. Geschichte der Mathematik II, III, W. de Gruyter. Berlin (Sg Göschen)
- 1957.— LEJEUNE, A. Recherches sur la catoptrique grecque. Brussels-Paris
- 1957.— CLAGETT, M. Three notes. Isis 48, 182f.
- 1960.— HOFMANN, JOSEPH, E. Der Mathematikunterricht Heft 1, Stuttgart, S. 47-49
- 1960.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S). 'Ανθολογία ἀρχαίων κειμένων. 'Αθήναι, σ. 30-31, 38-40.
- 1960.— DE CAMP, SPRAGUE, L. The ancien engineers. Doubleday and Co. New York. Ins deutsch vom Rudolf Ritscher. Econ, Düsseldorf-Wien, 1964
- 1960.— MESCHKOWSKI, HERBERT. Wandlungen des mathematischen Denkens. Braunschweig
- 1961.— MESCHKOWSKI, HERBERT. Denkweise grosser Mathematiker. Braunschweig

## ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

- 1961.— HOFMANN, JOSEPH, E. Grundlagen der Archimedischen Kreismessung. Der Mathematikunterricht 7. Heft 3. Stuttgart, S. 59-75
- 1962.— MITTELSTRASS, JÜRGEN. Die Rettung der Phänomene. W. de Gruyter. Berlin
- 1964.— BECKER, OSKAR. Die Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. ORBIS ACADEMICUS. Freiburg-München
- 1964.— ΜΕΓΑΛΗ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ. Έκδ. Κ. Έμμανουήλ Ἀθῆναι
- 1965.— GARDNER, M. Archimedes, mathematician and inventor. New York.
- 1965.— DIELS, HERMANN. Antike Technik. Archimedes, 24. 33f. 83. 113. 114f. 200. 211. O. Zeller, Osnabrück
- 1966.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Ἀρχιμήδης. Παγκόσμιον Λεξικὸν τῶν Ἔργων. Ἐκ. Spiritus Mundi, τόμ. α', σελ. 225-232  
Διευθυντής: ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΑΘ. ΣΠΑΝΟΠΟΥΛΟΣ
- 1966.— BABINI, I. El. método, introd. y notas Buenos Aires
- 1966.— TRONQUART, G. Quelques réflexions sur Archimède et sa mort. In: Bull. de l'Assoc. G. Budé. Paris, S. 299-308
- 1967.— CLAGETT, M. A medieval Archimedean-type proof of the Law of the lever. In: Miscellanea A. Combes. Roma. S. 805-817
- 1967.— DRACHMANN, A. G. Archimedes and the science of Physics. Centaurus 12, 1-11
- 1967.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Δυνάμεις με κλασματικούς εκθέτας παρ' Ἀρχιμήδει (Powers with fractional exponents by Archimedes). «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΘ', 37/38, σελ. 111-117

## ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

- 1967.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). 'Αρχιμήδεια I. «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΘ', 37/38, σελ. 150-153
- 1967.— MATHEMATISCHES WÖRTERBUCH. Archimedes Deutsche Akademie der Wiss. zu Berlin. Josef Naas-Hermann Ludwig Schmid. Stuttgart-Berlin
- 1968-1969.— SINISGALI, LEONARDO. ARCHIMEDE. Alberto Tallone, Torino
- 1968.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Τὰ κατορθώματα τοῦ Ἀρχιμήδους. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι», 5, Ἰούλιος, Ἀθήναι, σελ. 75-82
- 1968.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Τεχνικὰ ἐπιτεύγματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι», 6, Αὐγούστος, Ἀθήναι, σελ. 61-63
- 1969.— MEYERS LEXIKON DER TECHNIK UND DER NATURWISSENSCHAFTEN I. Bibl. Inst. Mannheim
- 1970.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Ἡ Τεχνικὴ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι», 5, Μάϊος, Ἀθήναι, σελ. 39-46
- 1970.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Τὸ τηλεβόλον τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὸ ὑγρὸν πῦρ τῶν Βυζαντινῶν. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι», 10, Ὀκτώβριος, Ἀθήναι, σελ. 51-53
- 1970.— MUGLER, CHARLES. ARCHIMÈDE, tome I, De la sphère et du cylindre, La mesure du cercle, Sur les conoïdes et les sphéroïdes. Texte établi et traduit. Éd. Les Belles Lettres. Paris
- 1970.— DELSEDIME, PIERO. Uno strumento astronomico descritto nel corpus Archimedeo: La dioptra di Archimede, Physis, rivista internazionale di storia della scienza, 2. Forschungsinstitut des Deutschen Museums, Reihe B, Abh. Nr. 6. München 1971.

- 1971.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, τόμ. 46, σελ. 65 - 84
- 1971.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.), Μηχανικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Ἀρχιμήδους. Περιοδικὸν «Θέματα Συγχρόνου Τεχνολογίας», Ἰούνιος - Ἰούλιος, Ἀθῆναι, σελ. 40 - 45.48
- 1971.— MUGLER, CHARLES. ARCHIMÈDE, tome II. Des spirales, De l'équilibre des figures planes, L'Arenaire, La quadrature de la parabole. Texte établi et traduit. Éd. Les Belles Lettres. Paris
- 1971.— MUGLER, CHARLES. ARCHIMÈDE, tome III. Des corps flottants, Stomachion, La méthode, Le livre des lemmes, Le problème des boeufs. Texte établi et traduit. Éd. Les Belles Lettres. Paris
- 1972.— MUGLER, CHARLES. ARCHIMÈDE, tome IV. Commentaires d'Eutocius et fragments. Éd. Les Belles Lettres. Paris.
- ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ, ΚΩΝΣΤ. Δ. Ἀρχιμήδης. Νεώτερον Ἑγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἥλιος. Ἐκδ. ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΠΑΣΣΑΣ. Ἀθῆναι
- ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Ν.Θ., ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ, Γ. Ἀρχιμήδης. Μεγάλη Ἑλληνικὴ Ἑγκυκλοπαιδεία. Ἐκδ. ΠΑΥΛΟΣ ΔΡΑΝΔΑΚΗΣ. Ἀθῆναι
- ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ, Α. Ἑγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἐλευθερουδάκη. Ἀθῆναι

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

### Α

- Ἄγγελος Μάι 366  
 ἀγούμενον 256  
 ἀγμένος 6, 18, 20-24, 56-60, 64, 224, 242, 284, 300, 324, 362  
 ἄγω -ομαι 16, 24, 56, 72, 108, 128, 130, 134, 136, 150, 226, 242, 250, 298, 300  
 ἀδύνατον 50, 52, 56-60, 64, 86, 112, 134, 136, 156, 158, 182, 248, 262, 264  
 αἰσθανόμεθα 2  
 αἵτημα 366  
 αἰτούμεθα 108,  
 ἀκίνητον 272, 276  
 ἀκλινές 334  
 ἄκρα 54  
 ἄκται, 40, 70, 224, 238, 250, 252  
 ἀλίκος 90, 92, 180, 186, 202, 206, 208, 212, 214, 282  
 ἄλιος 180-190, 194, 204  
 ἀλλαλαῖν 26, 76, 78, 82, 86, 92, 196  
 ἀλλάλας 40, 42, 46  
 ἀλλαλος 4, 6, 14, 24, 26, 32, 66, 70, 82, 86, 90-94, 118, 126, 186, 200, 202, 212, 220, 278, 300, 364  
 ἀλλᾶν 30-34  
 ἄλλαν 22, 156, 184  
 ἀμβλεῖα 48-54, 242, 372, 374  
 ἀμβλυγώνιον 228, 230  
 ἄμῖν 196, 218  
 ἀμιόλιος 158, 160  
 ἀμίσεια 24  
 ἀμφοτέρος 32, 34, 38, 110, 112, 116, 120, 122, 126, 136, 140, 144, 152, 154, 160, 246, 258  
 ἄμων 182, 190, 218  
 ἀναγεγράφαται 76, 78, 86, 90, 94  
 ἀναγκαῖον 48, 242  
 ἀναγμένος 220, 338  
 ἀναγραφέωντι 30, 38  
 ἀναγράψαντες 220  
 ἀνακλιθήσεται 318  
 ἀναλογία 182, 200, 204, 214  
 ἀνάλογον 122, 130, 162, 170, 172, 198, 200, 204 - 208, 214, 222  
 ἀναμφιλογώτατα 196  
 ἀνάρμοστον 214  
 ἀνατολὰ 186  
 ἀνατέλλων 184  
 ἀναφέρονται 284  
 ἀνέλκεται 284  
 ἀνενεχθήσεται 320, 334

- Ἄνθემιος 560  
 ἀνισᾶν γραμμᾶν 10, 16  
 ἄνισος 48, 54, 110, 190, 192  
 ἀνίσων χωρίων 220  
 ἀνοίσειται 280, 284  
 ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων  
 164, 166  
 ἀντιβλέπεσθαι 186  
 ἀντιθλίβονται 300  
 ἀντιθλιψοῦνται 288  
 ἀντιπεπονημέν 122  
 ἀντιπεπονηθῶς 116, 120, 142, 396,  
 416, 418  
 ἄνωσις 492  
 ἀξιόπιστα 184  
 ἄξων 9, 286-290, 296, 300, 302, 316,  
 320-324, 328-332, 338, 342  
 ἀοίκητος 180  
 ἀπεναντίον 144  
 ἀπέχω 114, 200, 202  
 ἀποδεδειγμένων 220  
 ἀποδέδεικται 222  
 ἀποδεδείχασι 220  
 ἀποδείξιας (ες) 2-10, 180, 182, 220  
 ἀποκατασταθῇ 8, 38  
 ἀπολαφθεῖσα 10, 18, 22-26, 58, 122,  
 134, 150, 156  
 ἀπολαφθὲν 100, 302  
 Ἀπολλώνιος 561  
 ἀπόστασις 200  
 ἀποστέλλομες 220  
 ἀποστημάτων 214  
 ἀποτεμεῖν 10  
 ἀποτετμακὸς 296  
 ἀπότημα 298  
 ἄπτεισθαι 44, 286, 302, 316-320,  
 336, 340, 342, 362, 364  
 ἀποφαίνομαι 184, 186  
 ἀποχρέοντι 198  
 ἀποχρεόντως 196  
 ἀποχωριζόμενος 186  
 ἀριθμείσθων 198  
 ἀριθμὸς 8, 20, 30, 48, 62, 66, 72, 86,  
 94, 144, 146, 180, 182, 196, 198,  
 202 - 210  
 Ἀρίσταρχος 180, 182, 184, 212, 214  
 Ἀριστοτέλης 562  
 ἄρτιος 28, 114, 118, 124  
 ἄρχα τᾶς ἑλικος 44-48, 54, 62-66,  
 72, 80, 88, 94, 100  
 ἄρχα τᾶς περιφορᾶς 54, 58, 62-66,  
 70-74, 80, 94  
 Ἀρχιμήδης 2, 218, 384  
 ἀστρολόγων 180, 184, 212  
 ἄστρον 182, 212, 214  
 ἀσύμμετρα 120  
 ἄτις 184  
 ἄτοπον 150  
 ἀφαιροῦμαι 14, 108, 110, 120, 122,  
 132, 168, 248, 254  
 ἀφᾶς 16, 24, 48, 52, 62  
 ἀφεθὲν 272, 282, 316, 318, 330, 338  
 ἀφείσθω 272, 294, 300, 322, 332,  
 354, 362  
 ἀφέξει 200  
 ἀφιστακὸς 186  
 ἀφωμένον 290  
 ἀφικνεῖται 40, 42  
 ἀχθείη 222  
 ἀχθεῖσα 224, 232, 248 - 252  
 ἀχθεισᾶν 156, 186, 188  
 ἀχθῇ 8, 22, 54, 250  
 ἄχθω (ν, σαν) 16, 54, 58, 62, 66, 122,  
 124, 132, 136, 140, 148, 152, 188  
 222-226, 236, 242-254, 290, 298,  
 300, 322, 324, 332, 336, 354



## Β

- βαπτισθήσεται 367  
 βάρος 108-118, 122, 132, 280, 284  
 βασιλεὺς 108, 214  
 βάσις 4, 6, 128-132, 140, 144, 148,  
 158, 170-174, 218, 230, 250-262,  
 274, 286, 300, 302, 316, 330, 336,  
 340, 342, 372, 374  
 βία 284, 354, 364  
 βιασθὲν 280  
 βιβλίον 2, 4, 10, 96  
 Βιτρούβιος 492  
 βλέπειν 186  
 βούλομαι 2  
 βρέχεσθαι 336

## Γ

- γὰ 180-184, 194, 196, 214, 274, 276,  
 286, 290  
 γεγεννημένος 70  
 γεγενῆσθαι 2, 218  
 γεγονέτω 132  
 γεγραμμένα 46-54, 58, 62, 66, 70-74,  
 80, 102  
 γεγραμμένος 2, 60, 86, 88, 94, 100,  
 180, 196  
 γεγραφήκαμες 8  
 γεγράφω 22, 24, 48, 68, 72, 78, 276  
 γεγράφωσαν 102  
 Γέλων 180, 214  
 γεναμένου 218  
 γένοιτο 182, 204, 206, 210, 214  
 γενομενῶν 26, 32  
 γενόμενος 26, 144, 200, 204-210,  
 214  
 γεωμέτραι 220  
 γεωμετρία 2, 218  
 γεωμετρικῶν 180  
 γεωμετρικῶς 386  
 γεωμετρούμενων 10, 220  
 γινωσκομένοι 198  
 γινωσκόμενον 200  
 γινώσκομες 196  
 Γινῶμαι 519  
 γνώριμος 218  
 γνωρίμως ἐγγράφεσθαι 144-158  
 γραμμὰ (ἡ) 10-14, 18, 26, 32, 34, 38,  
 40, 44-48, 54, 60, 78, 84, 86, 92,  
 160, 162, 192, 222, 226, 250  
 γραμμᾶν 16, 20-24, 28, 36, 42, 54,  
 56, 64, 76  
 γραφὰς 180  
 γραφεῖς (εἶσα) 40, 62, 66  
 γραφέωντι 8, 100  
 γωνία 40, 42, 48-54, 58, 66, 68, 70,  
 74-78, 90, 108, 128, 130, 136, 144,  
 184-192, 226, 232, 234, 240, 242,  
 320, 324, 328, 330, 332, 340,  
 342, 352, 358, 364, 372

Δ

- δακτυλιαία 202, 206  
 δάκτυλος 196, 202-206  
 δεδειγμένον 184, 190, 254  
 δέδεικται 6, 36, 38, 46, 50, 56, 60,  
 64, 96, 124, 126, 138, 140, 194,  
 196, 202, 212, 214, 226, 228, 232,  
 240, 282, 296, 298, 338  
 δεδειχθαι 58  
 δεδομένος 20, 22, 24, 60  
 δεδόσθω 16, 18, 20-24, 154  
 δεδυκός 294, 296, 324, 332  
 δεῖ 6, 108  
 δεικνύειν 4, 34, 48, 180, 184, 188,  
 194, 196, 218  
 δεικτέον 10, 14, 26, 32, 40, 44-50,  
 54, 58, 60, 64, 74, 88, 94, 102, 110,  
 116, 122, 132, 142-148, 156, 158,  
 162, 182, 200, 226, 254, 262, 280,  
 284, 294, 296, 354  
 δείξει 9, 126, 160, 168  
 δειξοῦμεν 36  
 δειχθήσεται 46, 60, 64, 68, 80, 86,  
 90, 96, 98, 100, 118, 202, 212, 228,  
 232-236, 244, 256, 258, 364  
 δέκα μονάδες 202, 206  
 δέκα μυριάδες 212  
 δεκαπλασίας 162, 164, 170, 172  
 δεκαπλασίων 200  
 δεκάς 198  
 δευτέρα 162, 200  
 δευτέρα περιφορὰ 46, 50, 58, 70, 80  
 δευτέρας περιόδου 198  
 δεύτερος (α-ον) 4, 40, 58, 70, 80,  
 94, 96, 212  
 δεύτερος κύκλος 58, 80, 82, 96  
 δευτέρων ἀριθμῶν 198-208  
 Δημόκριτος 388  
 διαιρεθείσων 70  
 διαιρεῖν 16, 118, 124, 138, 146, 148,  
 168, 170, 180, 190, 194, 236, 242  
 διαιρετέον 142  
 διαιρέσις 124  
 διακοσιοστὸν 190, 194  
 διαμέτροι 66, 70, 80, 124, 126, 146,  
 156, 158, 212  
 διάμετρος 4, 6, 18, 22, 24, 54, 56, 60, 64,  
 66, 126, 144-148, 152, 158, 168,  
 170, 184, 188, 190, 194, 196, 202-  
 212, 220-224, 236, 238, 242-254,  
 318, 322, 336, 364  
 διανοεῖσθαι 70  
 διανύει 8, 14, 40  
 διαπορεύομαι 10, 12, 14, 40, 42, 46  
 διαστημάτεσσι 8, 10, 100, 102  
 διαστήματι 8, 40, 48, 62, 64, 68, 72,  
 88  
 διαφέρει 170  
 διαχθεῖσα 16  
 διαφορικός καὶ ὁλοκληρωτικός λο-  
 γισμὸς XI, 519  
 διάχθω 24, 238  
 διάχθωσαν 90,  
 διδόμεν 2  
 διελόντι 98, 132, 172  
 διέστακεν 118  
 Διοκλῆς 544  
 Διονυσόδωρος 544  
 διπλάσιος (ίων) 4, 28, 30, 36, 40,  
 42, 58, 60, 116, 138, 142, 152,  
 162-168, 172, 174, 226, 232, 256,  
 324, 328, 334, 338, 354, 364  
 δισσοῖς κλιμάτεσσι 336

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

- |  |   |
|--|---|
| <p>δίχα 42, 66, 72, 110, 116, 122, 132,<br/>142-146, 224, 226, 232, 248, 254</p> <p>δοθεὶς λόγος 20-24</p> <p>δοθεισῶν 16</p> <p>δοκιμάζομες 2</p> <p>δοξάζοντες 180</p> <p>Δοσίθεος 2, 218</p> <p>δρόμος 182</p> <p>δυνάμει 80, 90, 170, 172, 222,<br/>252</p> <p>δυνάμει ποτ' ἀλλάλαις 6, 90</p> | <p>δυνάμεις με κλασματικούς ἐκθέτας<br/>508, 510, 512</p> <p>δυνατὸν 4, 10, 16, 20-24, 42, 50 - 56,<br/>60, 64-78, 82, 84, 90, 92, 96, 112,<br/>122, 128, 132, 134, 154, 218, 220,<br/>244, 246, 254, 262, 272, 290</p> <p>δυσμύρια 194</p> <p>δύο 36, 140, 164, 168, 170, 174</p> <p>δύσεται 282</p> <p>δυσὶ 28, 32</p> <p>δυσὼν 192</p> |
|--|---|

## Ε

- |   |   |
|---|---|
| <p>ἐβδομος 4, 190, 206-210</p> <p>ἐβδόμων ἀριθμῶν 212, 214</p> <p>ἐγγεγραμμένον 66-70, 74, 80, 84, 86,<br/>94, 148, 150, 190</p> <p>ἐγγεγράφω 78, 84, 92, 148, 152-158</p> <p>ἐγγραφεὶς 70, 72, 78, 150, 258, 262</p> <p>ἐγγραφῶντι 144, 254</p> <p>ἐγγράψαι 66, 70-74, 78, 84, 154, 254</p> <p>ἐγγύτερον 150-154, 158, 170</p> <p>ἐδείχθη 118, 130, 160, 168, 194, 246,<br/>248, 264</p> <p>ἐδοκίμασα 386</p> <p>εἰ γὰρ μὴ 54, 60, 64, 76, 82, 112,<br/>148, 156, 158, 244, 262</p> <p>εἰ καὶ 10, 12, 16, 32, 38, 40-54, 58, 60,<br/>66, 108, 112, 114, 120, 128, 142-<br/>146, 150, 160, 186, 192, 222, 228,<br/>250-258, 286, 290, 294</p> <p>εἶμεν 2, 6-10, 24, 28, 48, 66-76, 82,<br/>90, 92, 108, 120, 122, 132, 136,<br/>148, 152-158, 180-184, 188, 194,<br/>196, 202, 212, 214, 218, 220, 226,<br/>230-238, 242, 244, 254, 274, 286,<br/>290, 292, 298, 300, 316, 330-334.</p> | <p>εἰρημενῶν 88</p> <p>εἰρημένος 4, 10, 34, 36, 46, 48, 52,<br/>60, 66, 68, 74-78, 88, 122, 132,<br/>136, 140, 142, 180, 182, 190, 194,<br/>202, 212, 240, 244, 248</p> <p>ἐκβεβλήσθω(σαν) 18, 76, 78, 82,<br/>84, 126, 132, 148, 222, 238, 242,<br/>298, 300, 324, 360</p> <p>ἐκβληθεῖσιν 44</p> <p>ἐκβληθέντι 44</p> <p>ἐκδίδομες 2</p> <p>ἐκόμιζεν 4</p> <p>ἐκτων ἀριθμῶν 210, 212</p> <p>ἐλασσον 4, 36, 120, 154, 186, 188,<br/>206-214, 230-248, 254, 258, 262,<br/>264, 274</p> <p>ἐλάσσονα λόγον 32, 34, 38, 50, 52,<br/>64, 82, 92</p> <p>ἐλασσοῦντες 254</p> <p>ἐλάσσων(των) 16-24, 32, 46, 50,<br/>54-60, 64-86, 90-94, 102, 130, 132,<br/>138, 148, 154-158, 170, 184-196,<br/>200, 212, 214, 342, 358</p> |
|---|---|

# ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

- ἔλιξ 6-10, 38-54, 58-94, 100, 102  
 ἔμπεσῶντι 40  
 ἔμφασις 396  
 ἐναλλάξ 58, 60, 142, 160  
 ἐναρμόζει 182-190  
 ἐναρμόσεις 370  
 ἐνεχθήσεται 298-302, 326, 328  
 ἐντὶ 2, 6, 24, 28, 30, 34, 36, 42, 76,  
 78, 82, 84, 86, 92, 94, 100-114,  
 118, 124-128, 130, 134, 140, 152,  
 158, 160, 162, 166, 170, 180, 194,  
 202-212, 222, 250, 252, 260, 274,  
 278  
 ἐξακισμυρίας 202  
 ἔξει 4, 12, 20, 56, 58, 80, 102, 104,  
 142, 164, 166, 222, 228, 236,  
 ἐξορίσαι 386  
 ἐξοῦντι 6, 10, 14, 32, 34, 38, 44, 46,  
 146, 200  
 ἐὼν (ἐοῦσα) 10, 14, 52, 58, 64, 88,  
 118, 164, 174, 182, 188, 190, 194,  
 200, 212, 218, 228, 244, 320, 326  
 ἐπεεχέυθω(σαν) 3, 42, 126-136, 146,  
 148, 152, 160, 236, 242, 246  
 ἐπιδειξοῦμες 28  
 ἐπιζευχθειςσιν 10  
 ἐπιζευχθέντι 8, 100  
 ἐπίπεδον 2-6, 38, 66, 70-76, 80, 84,  
 90, 92, 108, 134, 188, 226, 384,  
 386, 398  
 ἐπίτριτον 160, 218, 250, 252, 256-264  
 392  
 ἐπιφάνεια 4, 182, 268, 278, 326, 328,  
 384, 386  
 ἐπιψαυέτω 22, 24, 42, 48, 50, 54, 62  
 ἐπιψαύη 6, 42, 48, 50, 54, 58, 60-66  
 ἐπιψαύουσα 8, 16, 22, 24, 44, 50,  
 54-58, 62, 188, 220-226, 236, 238,  
 242-252  
 ἐπιψαυουσιν 186  
 ἐπροχειριζάμεθα 218  
 Ἐρατοσθένης 384  
 ἐρρέθη 418  
 ἐσσεῖται 4, 14, 16, 20-24, 34, 58,  
 66-74, 92, 108-118, 122, 130, 132,  
 138, 140, 142, 148, 152, 156,  
 160, 170, 176, 200, 204-208, 214,  
 220-224, 232, 236, 244, 246,  
 250-256, 264, 274-278, 282, 284,  
 288-292, 298, 300, 320, 324, 328  
 ἐσσοῦνται 6, 26, 32, 40, 52, 68, 124,  
 132, 144, 148, 150, 162, 198, 208,  
 220, 222, 246, 258, 262, 282-286,  
 320  
 ἔστε 66, 68, 76, 78, 196  
 ἐτέθεν 196  
 Εὐδοξος XI, 184, 388  
 εὐθειᾶν 44, 88, 92, 94, 100  
 εὐθύγραμμον 146-150, 154-158, 218  
 Εὐκλείδης 514, 562  
 εὐπαράχωρητα 218  
 Εὐτόκιος, 544, 545, 561  
 ἐφαπτομένα 48, 170, 324, 336, 354,  
 362  
 ἐφεξῆς 372  
 ἔχοντι 52, 232-238, 242, 256  
 ἔχωντι 112, 142, 146  
 ἔωντι 6, 112, 114, 128, 160, 186, 192,  
 198

Z

- |  |                          |
|--|--------------------------|
| Ζεύξιππος 180, 196                                     | ζύγιον 232-234, 238, 242 |
| ζυγός 226 - 230, 238, 242, 406, 416 -<br>424, 436, 450 | ζωδίων 184               |

H

- |   |  |
|---|--|
| ἡμες 218  | ἡμίσεα 116, 130, 190                                 |
| ἡμικύκλιον 422  | ἡμίσεια 18-22, 54, 56, 60, 64, 226,<br>228, 252, 324 |
| ἡμικυλίνδριον 446, 448, 452   | ἡμισφαίριον 6, 286-290, 420, 422,<br>426             |
| ἡμιόλιος 4, 6, 296-300, 302, 316<br>320, 322, 326, 328, 330, 336, 338,<br>358, 398, 410, 416, 462 | Ἡρακλείδας 2, 4                                      |

Θ

- |                                    |                          |
|------------------------------------|--------------------------|
| θάτερον 40, 134, 226, 238, 242     | θηγγάνειν 186            |
| θέμεν 22                           | θλιβησοῦνται 276, 282    |
| θεώρημα 2, 218, 220, 370, 372, 386 | θλιβόμενον 268           |
| Θέων Συμυρναῖος 510                | θλίβονται 274, 278, 280  |
| θεωρία 370                         | θυμαρίδειον ἐπάνθημα 511 |

I

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| Ἰάμβλιχος 511, 512,                | ισορροπήσει 112, 120, 228, 234,<br>238, 242, 394, 398 |
| Ἰπποκράτης ὁ Χῖος XI               | ισορροπησοῦντι 110, 112, 118, 120<br>284              |
| ἰσᾶν 26, 32, 36, 76, 92            | Ἰσορροπίας 298  |
| ἰσοβάρεος 272, 284                 | Ἰσορροπικῶν (οἷς) 142, 394                            |
| ἰσογκος 284, 294, 302              | ἰσόρροπος 394, 414, 428, 436, 440                     |
| ἰσοις χρόνοις 14                   | ἰσοταχέως 8-12, 38, 44, 46                            |
| ἰσομεγέθεος 118, 368               | ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι 90, 92                        |
| ἰσορροπεῖ 230, 234, 238, 240       | ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν 82, 86                        |
| ἰσορροπεῖτω 226, 230, 232-238, 242 |   |
| ἰσορροπέωντι 108                   |   |

Κ

- καθειμένα 368  
 κάθετος 14, 18-24, 56, 60, 64, 190,  
 226, 232, 242, 250, 268, 286, 290,  
 292, 298, 300, 320, 326, 328  
 καλείσθω 6, 38, 40, 198  
 κανόνιον 188  
 κανών 184, 186, 196  
 καταβῆντι 282  
 καταβασοῦνται 272  
 καταγμένα 170  
 καταδεδικώς 278  
 καταδὺν 276  
 καταδύσεται 276, 278  
 κατασκευασθέντι 64, 66  
 κατεσκευάσθω 52, 92, 246, 320  
 κατέχεις δὲ 180  
 κατονομαζίαν 182  
 κατῳνομασμένος 180, 198  
 κέεσθαι 108, 126  
 κείμαι 20, 26, 108, 114, 116, 124, 128,  
 130, 136, 148, 168, 182-186, 226,  
 232-240, 256, 258, 262, 264, 362  
 κεκλιμένον 302, 322, 340, 342, 354,  
 362  
 κέντρον βάρους 118-160, 168, 174,  
 176, 228-234, 274, 290, 324, 328,  
 352, 368, 388, 390, 394, 414, 420,  
 424, 432, 448  
 κέχρηται 220  
 κλίσθαι 286  
 κοινὸς 36, 68, 246, 248  
 κοινὸν μέτρον 116, 118  
 κομισθέντεσσιν 2  
 Κόνων 17, 218  
 κορυφὰ 6, 144, 150, 152, 158, 184-  
 190, 248-254, 274  
 κόσμος 180-184, 188, 194, 196, 212,  
 214  
 κουφότερον 276-280, 284, 286, 290,  
 294, 300, 316, 368  
 κρεμάσθω 226-238, 242  
 κρέμασις 228, 230  
 κύβος 384  
 κύκλος 8, 10, 18-24, 40, 44, 48-54,  
 58-90, 96-102, 188, 190, 194,  
 196, 218, 220, 288  
 κύκλου περιφέρεια 16, 46-64  
 κυλίνδριον 186  
 κύλινδρος 4, 184-188, 220, 384, 390  
 398, 410, 426  
 κωνικοῖς στοιχείοις 222  
 κωνοειδὲς 6, 390, 442  
 κώνου τομὰ 220, 222, 236, 238,  
 242-250

Λ

- λαμβάνω 2, 6, 10, 14, 16, 46, 62, 64,  
 70, 72, 184, 244, 246  
 λαφθεῖσα 14, 188, 330  
 λαφθὲν 68-72, 186  
 λαφθέωντι 8, 10, 14, 100  
 λαφθῇ 10, 162  
 λαφθήσεται 234  
 λέγω (λέγομεν) 62, 66, 72, 86, 108,

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

- |   |  |
|---|--|
| <p>112, 114, 120, 126, 128, 130, 144,<br/>180, 246, 256<br/>λελαμμένα 174<br/>λέλαπται 68<br/>λελάφθω 10, 60, 64, 102, 170, 200,<br/>230, 294, 336, 380, 384<br/>λεπτὸς 186<br/>λευκὸς 186<br/>λῆμμα 10, 218, 220, 368, 392</p> | <p>λόγος 10, 12, 18-26, 34, 44, 46,<br/>50-60, 64, 80-104, 116, 120, 122,<br/>132, 134, 138, 142, 146-150, 154-<br/>158, 162-174, 180, 190, 192, 200,<br/>202, 212, 222-226, 230-238, 252,<br/>324, 334, 340, 342, 362, 390, 392<br/>416<br/>λοιπᾶν 36<br/>λοιπὸς 122, 126-130, 138, 160, 170,<br/>176, 212, 260</p> |
|---|--|

## Μ

- |   |   |
|---|---|
| <p>μακέων 108, 112, 120<br/>μαῖκος 108, 116, 120, 170, 172, 222,<br/>228, 252<br/>μακύνειν 184<br/>μάκωνος 196, 202<br/>μαστεύειν 2<br/>μέγεθος 26, 78, 86, 90, 94, 118, 120,<br/>122, 126, 132-136, 140, 142, 150,<br/>152, 160, 172, 180, 182, 186, 196,<br/>202, 206-214, 258, 272, 274, 280,<br/>388-392<br/>μέγιστος 4, 6, 26, 84, 94, 134, 160,<br/>162, 188, 194, 250, 256, 258, 262,<br/>264, 396, 398, 416<br/>μείζων 4, 16-20, 24, 32, 34, 42, 50-<br/>60, 64-100, 108, 110, 120, 132,<br/>138, 148, 150, 156, 170, 182, 184,<br/>190-196, 200, 202, 220, 232-236<br/>240-244, 252, 262, 264, 324-330,<br/>334-340, 364</p> | <p>μεμενακὸς 8, 10<br/>μένω 6, 8, 38, 182, 228, 234, 286,<br/>322<br/>μέσος 114, 118, 124, 126, 130-138,<br/>152, 170, 186, 228, 234, 238, 250,<br/>252<br/>μεταξὺ 18-26, 56, 58, 62, 66, 114,<br/>122, 124, 170<br/>μηχανικοῖς 228, 232<br/>μηχανικῶν 218, 220<br/>μηχανικῶς 386<br/>μιᾷ περιφορᾷ 72<br/>μονὰς 198, 200-214<br/>μυριάδες 202-212<br/>μυριάδων μυριάν 210<br/>μυριάκις μυριάδες 194, 196<br/>μυριάκις μυρίαίς μυριάδεσσι 214<br/>μυριάκις μυριοστῶν 198<br/>μυριοπλασίων 194, 196, 212<br/>μυρίων 196, 206, 208</p> |
|---|---|

Ν

νεύουσα 18-24, 232-240  
Νικόμαχος 512  
νοήσαιεν 180

νοείσθω 188, 226, 238, 242, 272 -  
290, 398, 402-406, 416, 422, 444,  
448

Ο

ὀγδὼν ἀριθμῶν 212, 214  
ὀκτώ 184, 198, 200, 204, 208-212  
οἶονταί 180  
οἶσομαι 272, 276, 282, 284, 288,  
290, 292, 326, 368  
ὁμοίως 12, 14, 16, 30, 34, 40, 46, 48,  
50, 52, 60, 64-68, 72, 100, 108,  
122, 126, 130, 138, 146, 148, 184,  
228, 232-236, 240, 244, 256, 258,  
262  
ὁμοίως τεταγμένα 392  
ὁμόλογος 12, 108, 128, 130, 136, 224  
ὁμωνύμως 40  
ὀξεΐα 48-54, 58

ὄργανον 184  
ὀρθογώνιον κωνοειδές 296, 300,  
302, 316, 320, 328, 334, 412,  
416-420  
ὀρθογωνίου κώνου τομὰ 6, 142-150,  
154-158, 168, 170, 218-224, 238  
242, 244, 250-256, 302, 318, 322,  
332-338, 392, 416, 420-424  
ὀρθός 22, 50-54, 58, 62, 66, 70, 80,  
184, 186, 190-194, 226, 232-242,  
288, 296, 300, 302, 316, 320, 328  
ὀρίζων 186, 188, 226  
ὀρῶν 386  
ὄψις 184-190

Π

πάντεσσι 68  
Πάππος 532, 537  
πᾶς 30, 68, 70, 112-118, 124, 132,  
136, 148, 156, 162, 366  
παραβαλεῖν 142  
παραβεβλήσθω 142  
παραβολή 392  
παραλληλόγραμμον 122, 124, 126,  
132, 136, 152, 254, 372  
παράλληλος 22, 56, 136-140, 146,  
170, 220, 224, 248-252

πασᾶν 14, 26, 30, 32-38, 78  
πειρασοῦμαι 180  
πεμπταμόρια 162, 168, 170  
πέμπτων ἀριθμῶν 208, 210  
πενταπλάσιος 28, 160, 162, 174, 180  
πέρας 8, 10, 18-22, 38, 44-48, 54,  
58, 62, 66, 72, 88, 100, 102, 138,  
152, 190  
περιγράφω 5, 14, 66-76, 80-84, 90,  
92  
περιέχω-ομαι 22, 26-38, 42, 50-54,



## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

- 66, 70-80, 84-90, 94, 98, 142, 144,  
150, 158, 186-194, 222, 224, 242,  
244, 250, 252, 260  
περιλαφθέν 10, 74, 80, 86, 100  
περιλειπόμενος 134, 148, 150, 156,  
254-258, 262  
περίμετρος 14, 108, 182, 190-196  
περί τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων  
383, 384  
περιφέρεια 14-26, 44-78, 80, 82,  
84, 88, 90, 94, 102, 190, 194, 274-  
278.  
περιφορὰ 8, 38, 40, 42, 48, 60,  
62, 66, 72, 86, 88, 94, 100  
πέσωντι 76-84  
πεφροντικότεσιν 214  
Πλάτων XI  
πλήθος 14, 26, 32, 76, 78, 82, 86,  
114, 118, 124, 146, 180, 182,  
204-214  
ποιέω -ῶ 48, 54, 66, 68, 74, 78, 84,  
90, 128, 136, 156, 182, 242, 254  
πολλαπλασιάζαντες 200, 204  
πολύγωνον 14, 254, 258, 262  
Πόρισμα 30, 38, 68, 70, 74, 86, 114,  
254  
ποτιβαλεῖν 18-24, 50, 54, 60, 64  
ποτικείσθω 26, 32  
ποτιλαβόντα 26-30  
ποτιλαφθέν 8, 30, 40  
ποτιπέπτωκεν 26  
ποτιπεσῶντι 44, 46  
ποτιπιπτουσᾶν 46, 48  
ποτ' ὀρθᾶς 4, 6, 18, 22, 24, 60, 66,  
70, 80  
πίσμα 384, 390, 450, 452, 456, 458,  
464  
πρόβλημα βοεικὸν 467  
προαγόμενα 40, 44, 52, 54, 62,  
68, 74  
προκείμενον 184, 196, 202, 226  
προλαμβάνόμενα 388  
προτεθέν 66 - 74, 126, 134, 140,  
226, 254, 258  
Πτολεμαῖος 560  
πρώτα περιφορᾶ 44-48, 54, 58, 62,  
66, 74, 94  
πρώτος κύκλος 44, 54, 74, 80, 96  
πρώτων ἀριθμῶν 196, 198, 206,  
208  
πυραμῖς 220, 274-280

## Ρ

- ρήθέντα 36, 38  
ρήθημεν 180, 196  
ῥῆμαν 531

## Σ

- Σαμβύκη 509  
σαμεῖον 6-14, 24, 38-48, 54, 62, 66-  
72, 80, 88, 94, 100, 108, 112, 114,  
118, 122-130, 134-144, 150, 152,  
156-160, 170, 174, 176, 186, 226-  
238, 242, 246-254, 268, 276, 316,  
336, 352, 354, 364  
Σάμιος 180

- στέφανος 492  
 στοιχεῖα κωνικά 220  
 Στοιχείοις 392, 402  
 Στομάχιον 369  
 συγκείμενος 66-76, 80, 84, 90, 92,  
     112-118, 124, 126, 132-136, 140,  
     142, 150, 152, 156, 160, 164-168,  
     172, 174, 180, 196, 338  
 σύμμετρον 116, 120  
 συμπίπτειν 54, 58, 62, 64, 68, 88,  
     124, 126, 136  
 συναμφοτέρως 34, 80-88, 92-104,  
     138, 140, 154, 162-168, 174, 200,  
     204, 246  
 συνάμφω 370  
 συνεχεῖ ἀναλογία 160  
 συνωνύμων 198  
 σφαῖρα 2, 4, 182, 202-214, 286,  
     288, 396  
 σφαιροειδὲς 404, 410, 440  
 σχαμάτων 370  
 σχῆμα 6, 66-86, 90-94, 108, 126,  
     128, 144, 174, 286, 290, 342

# Τ

- ταλικοῦτος 180, 182, 186, 204, 206,  
     212, 214, 278-282, 328  
 ταυτᾶν 86, 90  
 ταχθέντα λόγον 4, 18, 20, 24  
 τεθέωντι 26, 32, 226, 258  
 τέμνειν 4, 20, 42, 50, 58, 62, 66-70,  
     72, 112, 124, 126, 130, 132, 144,  
     146, 152, 188, 224, 238, 242, 246,  
     248, 276, 288, 290, 296, 362  
 τεταγμένως 170, 392  
 τεταγμένως κατηγμέναι 412  
 τεταραγμένα ἀναλογία 164, 166  
 τετάρτων ἀριθμῶν 198, 206, 208,  
     226, 232, 254  
 τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου  
     τομῆς 218  
 τετρωκοστημόριον 196, 202  
 τετρωκοστὸς 208, 210  
 τμαθέωντι 6  
 τμαμάτεσσιν 258, 262  
 τομά 6, 62, 122, 132, 170, 238,  
     248, 250, 268, 274  
 τομεὺς 66, 84, 88-94, 102  
 τόμος 168, 170, 176  
 τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον 46  
 τορνευθέντος 184  
 τρίγωνον 18, 42, 126, 128, 132-140,  
     144-160, 218, 224-232, 236-264,  
     364, 390, 394, 396  
 τρισμυριοπλασίων 194  
 τρίτα ὀκτὰς 200  
 τρίτα περιφορᾷ 46  
 τρίτας περιόδου 198  
 τρίτος(ον) 4, 32-38, 74, 80, 82-96,  
     140, 160, 162, 212, 220, 226, 228,  
     240, 244, 258, 262  
 τρίτων ἀριθμῶν 198, 206, 208  
 τρόπος 32, 40, 72, 86, 144, 168,  
     184, 196, 198

## Υ

- ὑγρὸν 268, 272, 274, 276  
 ὑπερβάλλει 180  
 ὑπερβαλλόμενος 182, 184  
 ὑπερέχει 10, 12, 16, 26, 38, 42, 70,  
     74-84, 88, 98, 102, 110, 160, 162,  
     218, 244, 246, 262, 272, 276, 330  
 ὑπερεχουσᾶν 26, 30, 32, 38, 76,  
     86, 92  
 ὑπεροχά 10, 16, 26, 32, 34, 38, 42,  
     70, 76, 80, 88, 102, 218, 244, 246,  
     262, 302, 330, 332, 338, 342  
 ὑποβαρῆ 367  
 ὑποθεσίων τινῶν 180  
 ὑπόκειμαι 12, 108, 110, 120, 160,  
     162, 180, 182, 188, 194, 196, 202,  
     226, 232, 234  
 ὑπολαμβάνω 180, 182, 196, 214  
 ὑπολαπτέον 182  
 ὑποτείνουσα 190, 194  
 ὕψος 4, 144, 148, 170, 172, 180,  
     218, 220, 230, 248-262

## Φ

- φαίνομαι 182, 184, 214  
 φάμενοι 2  
 φαιῆς 182  
 φαιμί 8, 10, 42, 122, 156, 226, 232,  
     234, 238, 242, 244, 330  
 Φειδία δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρὸς 184  
 φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος 515  
 φιλία 218  
 φιλοπονίαν 2  
 φιλοσοφίας προεστῶτα 386  
 φύσιν 268

## Χ

- χαίρει 2  
 χιλιάγωνον 184, 188, 194  
 χίλια μονάδες 206, 212  
 χίλια μυριάδες 200, 204, 208,  
     214  
 χρησόμεθα 390  
 χρόνος 10, 12, 14, 40, 42, 46  
 χωρίον 4, 8, 10, 36-40, 66-80, 84 -  
     104, 124-142, 148, 218, 220, 226-  
     248, 254-258, 262, 264  
 χωρίς 30-34, 38, 68, 78, 80, 82, 90,  
     92

## Ψ

- Ψαμμίτης 180  
 ψάμμος 180, 182, 196, 202-214  
 ψεύδος 4, 6

Ω

ὠήθην 214

ὠρμασεν 8, 38

ὠσαύτως 66

ὥσπερ 6, 182

Amthor 499, 505

Aristotelis XI, 562

Bachmakova, I. G. XI, XII, 519,  
530

Barrow 551

Cavalieri 551

Czwalina 533

Dijksterhuis, E.I. 533, 534, 542

Fermat 551

Heath, T. 532,

Lachmann 558

Lebègue H. 468

Leibniz, W. XI, 554

Mugler, Ch. XI, XII, 519, 555

Nesselmann, 495

Newton, I. XI

Pascal 551

Ricci 553

Riemann 531

Roberval 551

Schiller, Fr. von, X, 508

Simon, M. XII, 533

Simplicii XI

Sorokina, L. 552

Struwe 495

Tannery, P. 532

Torricelli 551, 553

Viète 551

Wallis, J. XII

Whiteside, D.T. 551

Wiedemann, E. 557

Wurm 499

Zeuthen, H. G. XI, XII, 479, 519,  
533



102

2

32. / 376 / 01482  
ds. R. AT / EH

180/76/09814(4)/0-0002

**Freie Universität Berlin**



4052009/188

14  
1400



**Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ**

**ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ**

**ΑΠΑΝΤΑ**

**2**

**TABLE N°**

**76**

**9814**