Subject:
Date:

تابع :

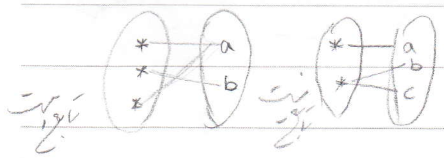
رابطه ی f را یک تابع از A به B می‌نامیم اگر در هر دو شرط زیر صدق کند :

① به ازای هر x عضوی مانند y عضو B وجود داشته باشد ، به طوری که

1) $\forall x \in A \; \exists y \in B$ s.t $(x,y) \in f$

2) اگر $(x,y) \in f$ ، $(x,z) \in f \rightarrow y = z$

یعنی هر عضو A را نتوان به یک عضو از B نسبت دهیم ؛ به عبارت دیگر اگر مولفه های اول باهم برابر باشند
آنگاه باید مولفه های دوم نیز باهم برابر باشند



*

دو تابع f و g را باهم برابر می‌نامیم هرگاه هر دو شرط زیر را داشته باشند :

① دامنه های f و g باهم مساوی باشند
② ضابطه های f و g باهم مساوی باشند

ex : آیا دو تابع باهم برابرند :

* $f(x) = \dfrac{2x^2+5x}{x}$
* $g(x) = 2x + 5$

شرط ۲ ؛ $f(x) = \dfrac{2x^2+5x}{x} = 2x + 5 = g(x)$ ✓

شرط ۱ ؛ $D_f = R - \{0\}$
$D_g = R$ $\Longrightarrow D_f \neq D_g$ ✗

Subject:
Date:

**

فرض می‌کنیم f و g دو تابع باشند، در این صورت توابع زیر و دامنه‌های آن را تعریف می‌کنیم

① $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ $\quad * \; D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

② $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad * \; D_{fg} = D_f \cap D_g$

③ $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad * \; D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{g(x) = 0\}$

**

هرگاه f و g دو تابع باشند تابع ترکیب f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$(gof)(x) = g(f(x))$

$D_{gof} = \{x \in D_g \mid f(x) \in D_g\}$

*

تابع f از A به B را یک به یک می‌نامیم اگر به ازای هر x_1، x_2 از دامنه‌ی f تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ ایجاب کند

که $f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$ ؛ $x_1 = x_2$

* تابع $f: A \to B$ را پوشا می‌نامیم هرگاه به ازای $\forall y \in B, \exists x \in A$ s.t. $f(x) = y$

**

تابع وارون یک تابع: $f: A \to B$ را وارون‌پذیر می‌نامیم هرگاه f یک به یک و پوشا باشد و وارون آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم

ex: $f(x_1) = f(x_2)$

$\sqrt[5]{x_1^3 - 1} = \sqrt[5]{x_2^3 - 1} \longrightarrow x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1 \longrightarrow x_1^3 = x_2^3$

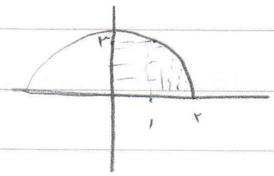
$x_1 = x_2$ وارون‌پذیر است

$$y = \sqrt[5]{x^3 - 1}$$

$$y^5 = x^3 - 1 \rightarrow y^5 + 1 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y^5 + 1} \quad \rightarrow y = \sqrt[3]{x^5 + 1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^5 + 1}$$



★ نکته:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

✓ تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، می‌گوییم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.t} \;\; 0 < |x - a| < \delta \;.\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

✓ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید

$$\lim_{x \to 2} (-3x + 1) = -5$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.t} \;\; 0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |f(x) - (-5)| < \varepsilon$$

$$|-3x + 1 + 5| < \varepsilon \qquad \delta = \varepsilon/3$$

$$|-3x + 6| < \delta \Rightarrow |-3(x - 2)| < \varepsilon \rightarrow 3|x - 2| < \varepsilon \rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$*\ \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4 \rightarrow \frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4 = 2(x+1) - 4$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.} \ 0 < |x-1| < \delta \ : \ |f(x) - 4| < \varepsilon$

$|2x+2-4| < \varepsilon \rightarrow |2x-2| < \varepsilon$

$|2(x-1)| < \varepsilon \rightarrow |x-1| < \varepsilon/2 \rightarrow \delta = \varepsilon/2$

$*\ \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-4} = -1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ 0 < |x-3| < \delta \rightarrow |f(x) - (-1)| < \varepsilon$

$\left|\frac{x-2}{x-4} + 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-2+x-4}{x-4}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{2x-6}{x-4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2|x-3|}{|x-4|} < \varepsilon$ (*)

چون مخرج را [illegible] حساب می‌کنیم

$|x-4|$ را پایین انتخاب می‌کنیم

دلخواه $\delta = 1 : |x-3| < \delta \xrightarrow{\delta = 1} |x-3| < 1 \rightarrow -1 < x-3 < 1$

$2 < x < 4 \xrightarrow{-4}$

$-2 < x-4 < 0 \rightarrow 0 < |x-4| < 2$

[illegible] $|x-4| = 0 \rightarrow$ چون صفر شد باید قطر δ را تغییر دهیم

Subject:
Date:

$\delta = \frac{1}{2}$ دلخواه $\qquad |x-3| < \delta \xrightarrow{\delta = 1/2} |x-3| < \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \xrightarrow{+3} \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \xrightarrow{-4} \frac{5}{2} - 4 < x-4 < \frac{7}{2} - 4$$

$$-\frac{3}{2} < x-4 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-4| < \frac{3}{2}$$

فرض باشد $\quad |x-4| = \frac{1}{2} \quad (*) \quad \frac{2|x-3|}{|x-4|} < \varepsilon \xrightarrow{|x-4| = 1/2} \frac{2|x-3|}{\frac{1}{2}} < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

* تمرین تحویلی: حدود زیر را از تعریف ثابت کنید

① $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2}{x-2} = 7$

② $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{4}{3}$

③ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-3}{x^2-3x+3} = 1$

④ $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{6}$

⑤ $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2-16}{x+4} = -8$

* قضیه: اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد آنگاه این حد منحصر به فرد است یعنی

اگر داشته باشیم

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2\end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

Subject:
Date:

* قضایای حد:

$\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim g(x)$ موجود باشند (هر دو متناهی باشند)

فرض کنید f و g دو تابع باشند در این صورت قضایای زیر را درباره حد داریم

① $\lim_{x\to a} x = a$ ② $\lim_{x\to a} \overset{\text{عدد ثابت}}{c} = c$

✓ ③ $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

④ $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

✓ ⑤ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ s.t : $\lim g(x) \neq 0$

✓ ⑥ $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$

⑦ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

نکته: عکس قضیه‌ها فوق (بند ۳،۲) لزوماً درست نیست، مثلاً

* $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \underbrace{\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)}_{\text{وجود داشته}}$

عکس قضیه: $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ وجود داشته باشد $\not\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد

Subject:
Date:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq 1\\ 2 & 1<x<2\end{cases}$$ مثلاً

$$g(x)=\begin{cases}-1 & 0\leq x\leq 1\\ -2 & 1<x<2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ حد ندارد

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-2$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)=$ ندارد

$$\lim_{x\to 1}(f(x)+g(x))=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}(1+(-1))=0 & 0\leq x\leq 1\\ \lim(2+(-2))=0 & 1<x<2\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} 0=0$$ حد دارد

* حل تمرین: تمرین های ۳، ۵، ۶ درست است (اشکال نقص)

(مثال) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{0}{0} \to \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=4$

* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}=0/0 \to \times\dfrac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$

$$\frac{(x-1)}{(x-1)(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{-1}{12}$$

* $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ قرینه

Subject:
Date:

* تمرین کلاسی : حدهای زیر را بدست آورید.

(۱) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$ (۲) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

(۳) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}$ (۴) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}$

* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1} = \dfrac{0}{0}$ $x+x^2+\dots+x^n-n$
$= (x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\dots+(x^n-1)$

$x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$

$\Rightarrow \lim \dfrac{\cancel{(x-1)}\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\dots+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1\right]}{\cancel{(x-1)}}$

$= \lim \left(1+(x+1)+(x^2+x+1)+\dots+1+x\right) = 1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

تعریف حد راست : فرض کنید تابع f بر بازه بازی مانند (a,c) تعریف شده باشد بطوری که $c>a$

در این صورت برای حد راست داریم $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \quad 0<|x-a|<\delta$
$\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
$\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Subject:
Date:

تعریف حد چپ: فرض کنید تابع f در بازه بازی مانند (c,a) تعریف شده باشد $c<a$ در این صورت برای هر

حد چپ داریم $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : -\delta < x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال: $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{|x-1|} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = 3$

مثال: $\displaystyle \lim_{x\to n\in \mathbb{Z}} [x] \to \lim_{x\to n^+} [x] = n$

$$\to \lim_{x\to n^-} [x] = n-1$$

$$* \lim_{x\to 0} [2x] \to \lim_{x\to 0^+} [2x] = [2(0)] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} [2(0^-)] = -1$$

قضیه: فرض کنید تابع f روی یک همسایگی محذوف از a کراندار باشد اگر $\displaystyle \lim_{x\to a} g(x) = 0$ در این

صورت داریم $\displaystyle \lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

تمرین کلاسی: (1) $\displaystyle \lim_{x\to 2} (x-2)^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

Subject:
Date:

② $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x[x]}{2x+|x|}$

③ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x-2}{|x-2|+[x-2]}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(-1)^{[x]}}{x-2}$

⑥ $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \left([3x]+[-3x]\right)$

⑦ $\lim\limits_{x\to 4} \left([x]-[\tfrac{x}{4}]\right)$

تمرین: همه نقاطی را بیابید که f در آنها حد داشته باشد

$$f(x)=\begin{cases} x-[x] & \text{اگر } [x] \text{ زوج باشد} \\ x-[x+1] & \text{اگر } [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

مثال) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) \times \dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+x} = \frac{1}{2}$$

مثال) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right) \times \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Subject:

Date:

قضیه فشردگی: اگر سه تابع f و g و h بصورت زیر تعریف شده باشند $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

مثال) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{[x] + [x^2] + \cdots + [x^n]}{x^n}$ $\qquad * \; [x^k] - 1 < [x^k] \leq [x^k]$

$=$

نکته: برای حد توابعی که ضابطه‌ی آنها روی اعداد گویا عوض می‌شوند یعنی
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in Q \\ f_2(x) & x \notin Q \end{cases}$$

تابع f در نقطه a حد دارد اگر تنها اگر داریم:
$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x) = L$$

مثال) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \in Q \\ x^2 - 1 & x \notin Q \end{cases}$ در چند نقطه حد دارد؟

Subject:
Date:

$* \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{[x]+[x^2]+\dots+[x^n]}{x^n}$

می دانیم $x^k-1<[x^k]\le x^k$

$x-1<[x]<x$

$x^2-1<[x^2]\le x^2$

$\vdots$

$x^n-1<[x^n]\le x^n$

$(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^n-1)<[x]+[x^2]+\dots+[x^n]\le x+x^2+\dots+x^n$

طرفین تقسیم بر x^n :

$\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^n-1)}{x^n}<\dfrac{[x]+[x^2]+\dots+[x^n]}{x^n}\le\dfrac{x+x^2+\dots+x^n}{x^n}$

$\xrightarrow{\text{از طرفی}}$

$\lim \dfrac{x+x^2+\dots+x^n}{x^n}=\lim\dfrac{\frac{x(1-x^n)}{1-x}}{x^n}=\lim\dfrac{x(1-x^n)}{x^n(1-x)}=\dfrac{x}{x-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^n-1)}{x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x+x^2+\dots+x^n)-(1+1+\dots+1)}{x^n}$

$=\lim\dfrac{x+x^2+\dots+x^n}{x^n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x^n}=\dfrac{x}{x-1}-0=\dfrac{x}{x-1}$

پس بنابر قضیه فشار :

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[x]+[x^2]+\dots+[x^n]}{x^n}=\dfrac{x}{x-1}$

Subject:
Date:

تمرین تحویلی: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$, $g(x)=1+x-[x]$ پیوستگی

تابع‌های fog و gof را بیابید.

تعریف مشتق در یک نقطه: اگر تابع f در یک همسایگی a تعریف شده باشد و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد

می‌گوییم تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را با $f'(a)$ نشان می‌دهیم.

تعریف مشتق در حالت کلی:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق عبارت زیر را بیابید.

$* \ y=x^2+2x$ $\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{\cancel{x-a}\ h}$

$$=\lim\frac{(x+h)^2+2(x+h)-x^2+2x}{h}$$

$$=\lim\frac{\cancel{x^2}+h^2+2xh+2x+2h-\cancel{x^2}\cancel{-2x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x+2)}{h}=2x+2$$

Subject:
Date:

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آنگاه f در $x = a$ پیوسته است.

برای اینکه ثابت کنیم تابع f در a پیوسته است کافی است نشان دهیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

یعنی

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a) \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot (0) = 0$$

نکته: ۱) عکس قضیه فوق درست نیست، مثال: $f(x) = |x|$ در نقطه $x = 0$

پیوسته است ولی در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

۲) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد (ناپیوسته باشد) آنگاه تابع f در $x = a$ مشتق پذیر نیست

۳) ممکن است تابع f در a پیوسته باشد ولی $f'(a)$ وجود نداشته باشد زیرا شرط پیوسته بودن

تابع f برای وجود $f'(a)$ شرط لازم است ولی کافی نیست.

مثال) مشتق پذیری هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید

Subject:
Date:

1) $f(x) = |x^2 - 2x|$ $\qquad x_0 = 2$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ $\qquad x_0 = 2$

3) $f(x) = x^2[x]$ $\qquad x = 0$

4) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\qquad x = 0$

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 4 + 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x(x-2)}{x-2} = 2$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-x^2 + 2x + 4 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-x(x-2)}{x-2} = -2$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-2} - 0}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2[x]}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3}{x} = x^2 = 0$

$\lim \dfrac{x^2[x]}{x} = \dfrac{-x^3}{x} = -x^2 = 0$

4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ = حد ندارد ⇒ تابع f در $x=0$ پیوسته نیست ⇒ مشتق‌پذیر نیست

تمرین کلاسی: در چه نقاطی از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ مماس بر منحنی موازی $y = -3x$ است

در چه نقاطی خط مماس عمود بر خط $y = -\dfrac{x}{9}$ است؟

Subject:
Date:

✓ فرض کنید تابع $f(x) = (-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$ آیا f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است؟

✓ مقدار a و b را چنان بیابید که تابع f در هر نقطه مشتق پذیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b & |x| < 1 \end{cases}$$

✓ اگر تابع f به صورت زیر باشد مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ را بدست آورید:

$f(x) = [x] \sin x$

Subject:
Date:

* فرمول‌های مشتق

۱) $y = u^n \Rightarrow y' = n u' u^{n-1}$

۲) $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

۳) $y = f(x) . g(x) \Rightarrow y' = f'(x) g(x) + g'(x) f(x)$

۴) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x) . g(x) - g'(x) . f(x)}{(g(x))^2}$

۵) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

۶) $y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$

۷) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

۸) $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$

۹) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$

۱۰) $tg\, u \Rightarrow y' = u'(1 + tg^2 u)$

۱۱) $y = \cot u \rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

اول

** $(x^2+5)^3 (x^4 - 3x + 1)$

$3(2x)(x^2+5)^2(x^4 - 3x + 1) + (4x^3 - 3)(x^2+5)^3$

Subject:
Date:

** $y = \left(\frac{2x-1}{x+7}\right)^4 : \quad (4)\left[\frac{(2)(x+7) - (2x-1)}{(x+7)^2}\right]\left(\frac{2x-1}{x+7}\right)^3$

** $\cos^4 \sqrt[3]{x^2} + \cos^3(\sin x) + 3\cos^2 3x^2 :$

$(4)\left(\frac{2}{3}\right)\left(x^{-1/3}\right)\left(-\sin^4 \sqrt[3]{x^2}\right) + 3\left(\cos^2(\sin x)\right) \times (\cos x) \times (-\sin(\sin x))$

$+ 3(2\cos 3x^2)(6x)(-\sin(3x^2))$

** $y = \sin^4(x^2+3x+2)^3$

$y' = 4\left(\sin^3(x^2+3x+2)^3\right) \times \left(\cos(x^2+3x+2)\right)^3 \times 3(x^2+3x+2)^2$

$\times (2x+3)$

مشتق زنجیره‌ای: اگر تابع g در نقطه x و f در نقطه $g(x)$ مشتق داشته باشند آنگاه تابع مرکب $fog(x)$ در نقطه x مشتق دارند و مشتق آن زیر است:

$(fog(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$

اگر $y = f(u)$, $u = g(x)$

$y' = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Subject:
Date:

** $f(x) = x^3$; $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = ?$

$$g'(x)\quad \frac{dg}{df} = 2x f'(x^2) = (2x)(3)x^4 = 6x^5$$

*** $f(u) = u^2 + 5u + 5$ $\quad u = g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $\quad (fog(x))' =$

$f \to u \to x$

$$(fog(x))' = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5) \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \left(\frac{2(x+1)}{x-1} + 5\right)\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$$

* مشتق گیری ضمنی: برای توابع ضمنی از مشتق گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

نکته ۱) توابعی نتوان در آن‌ها x را برحسب y یا y را برحسب x بدست آورد تابع ضمنی می‌گوییم.

// فرمول مشتق ضمنی.

$F(x, y) = 0$

$$y' = \frac{-f'_x}{f'_y}$$

Subject:
Date:

$x^2y + xy^2 + y^4 - 7x + y = 0$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{-(2xy + y^2 - 7)}{x^2 + 2xy + 4y^3 + 1}$$

تمرین عملی: مشتق توابع زیر را بدست آورید

۱) $\cos^2(\sin 3x)$

۲) $y = \dfrac{5\sin(\cos 4x)}{1 - \sin x}$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = ?$

۱) $x\sin y + y\sin x = xy$

۲) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{19}$

۳) $y\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 5$

۴) $x^2y + \sin^2 y = y$

$x = t + t^2$

$y = t + t^3 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ? \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ? \quad t = 1, 2$

مشتق توابع مثلثاتی

1) $y=\sin^{-1}u \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad u\in[-1,1]$

2) $y=\cos^{-1}u \Rightarrow y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad u\in[-1,1]$

3) $y=tg^{-1}u \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{1+u^2} \qquad u\in R$

4) $y=\cot^{-1}u \rightarrow y'=\dfrac{-u'}{1+u^2} \qquad u\in R$

مثال) $y=\left(\sin^{-1}(3x^2)\right)^4$

$$(4)\left(\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\left(\sin^{-1}(3x^2)\right)^3$$

مشتق توابع معکوس: هرگاه تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ مشتق پذیر باشد و به ازای هر $x\in[a,b]$ $f'(x)\neq 0$ باشد، آنگاه تابع $x=f^{-1}(y)$ در بازه $[f(a),f(b)]$ یا $[f(b),f(a)]$ مشتق پذیر است و داریم

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

مثال) $f'(x)=1+(f(x))^7 \rightarrow (f^{-1})'(x)=?$

$y=f(x)$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

$$\rightarrow (f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{1+\underbrace{(f(x))}_{y}^{7}} \rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^7}$$

Subject:
Date:

مثال $f(x) = x^{2} - 4x + 7 \qquad D_f = [2, +\infty)$

$(f^{-1})'(7) = ? \qquad (7 \in D_{f^{-1}})$

$7 = x^{2} - 4x + 7 \rightarrow x^{2} - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0 \times, \quad x = 4 \checkmark$

$(f^{-1})'(7) = \dfrac{1}{f'(4)} = \dfrac{1}{4}$

مثال $h(x) = (f\circ g)(x) \qquad g(x) = \sin^{2}\dfrac{\pi}{x}$

$f'(\frac{3}{4}) = 2\sqrt{3} \qquad h'(3) = ?$

$h'(x) = g'(x)\, f'(g(x))$

$g'(3) = 2\sin\dfrac{\pi}{3} \times \cos\dfrac{\pi}{3} \times (-\dfrac{\pi}{9}) = \dfrac{\sqrt{3}}{18} - \pi$

$g(3) = \dfrac{3}{4} \qquad \rightarrow f'(\frac{3}{4}) = \sqrt{3}/2$

$h'(3) = g'(3)\, f'(g(3))$

$h'(3) = \dfrac{-\pi\sqrt{3}}{18} \times \dfrac{2\sqrt{3}}{9} = \dfrac{-\pi}{3}$

مثال $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \cdots}}} \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = ?$

توان ۲
$\rightarrow$

$y^{2} = \sin x + \underbrace{\sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x}}}_{y} \Longrightarrow y^{2} - \sin x - y = 0$

$y' = \dfrac{-F'_x}{F'_y} = -\dfrac{-\cos x}{2y-1} = \dfrac{\cos x}{2y-1}$

مثال) $f(x) = 2x^3 + x + 1$

معادله خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} را در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر آن بدست آورید

~~$f(4)=$~~

$2x^3 + x + 1 - 4 = 0$ $\qquad$ $f'(x) = 6x^2 + 1$

$x = 1$ $\qquad$ $f'(1) = 7$

$$m = (f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$$

$m = \frac{1}{7}$

$x_0 = 4$ $\qquad$ $y - 1 = \frac{1}{7}(x - 4)$

$y_0 = 1$ $\qquad$ $y = \frac{1}{7}x - \frac{4}{7} + \frac{7}{7}$

$$y = \frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$$

مشتق مراتب بالاتر

تعریف: هرگاه مشتق تابع f موجود باشد (f پیوسته و مشتق پذیر باشد) آنگاه f' نیز یک تابع است، حال اگر مشتق f' موجود باشد (پیوسته و مشتق پذیر باشد)، آنگاه f'' نیز یک تابع می‌شود، به همین ترتیب اگر مشتق مرتبه $(n-1)$ f موجود باشد (پیوسته و مشتق پذیر باشد) آنگاه مشتق مرتبه n ام f یعنی $f^{(n)}$ نیز موجود است، برابر است با $(f^{(n-1)})'$

Subject:
Date:

مثال)

$y = \cos x$ $\quad$ $f^{n} \in ?$

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x$

$f''''(x) = \cos x$

$f^{n}(x) = \begin{cases} & \text{فرد} \\ & \text{زوج} \end{cases}$

تمرین کلاسی: ۱) به ازای چه مقادیری از a ، b ، c تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x^{3} & x \le 1 \\ ax^{2} + bx + c & x > 1 \end{cases}$$

در $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد:

۲) $f(x) = \begin{cases} \tan x & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ a\sin 2x + b\cos 2x + c & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق مرتبه دوم دارد

a, b, c را بدست آورید.

✓ اگر $f(x) = \sqrt{x^{2} + x}$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را در هر یک از موارد زیر بیابید:

1) $y = f(x + \sqrt{x})$ $\qquad$ 2) $f(\cos x + \cot x)$

Subject:
Date:

۳) $f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ ۲) $f(f(x^2))$

فرض کنید $f(x)=\sin(n\sin^{-1}x)$ ثابت کنید:

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+n^2f(x)=0$$

$f(x)=[x]\sin^2\pi x \quad x\in R$ تابع مشتق f را بیابید.

اگر تابع f مشتق‌پذیر در a باشد مقدار $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ را حساب کنید.

تعریف: تابع f در نقطه‌ی d یک max نسبی دارد هرگاه یک همسایگی از نقطه‌ی d مانند $N(d,\delta)$ وجود داشته باشد بطوریکه f در آن همسایگی در آن تعریف شده باشد و داشته باشیم

$$\forall x\in N(d,\delta):\ f(d)\geq f(x)$$

تعریف: تابع 〃 〃 c 〃 min نسبی 〃 〃 〃 〃 〃 〃 c $N(c,\delta)$ 〃 〃 〃 〃

$$\forall x\in N(c,\delta):\ f(c)\leq f(x)$$

قضیه: اگر تابع f در نقطه‌ی c اکسترمم نسبی باشد لزومی ندارد که تابع f در c پیوسته و مشتق‌پذیر باشد

۲) 〃 〃 فقط در بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده باشد آنگاه چون f در همه‌ی نقاط

Subject:
Date:

ابتدایی و انتهایی بازه، یعنی a و b تعریف شده است بنابراین a و b نمی‌توانند نقاط اکسترمم نسبی تابع f باشند.

تعریف Max و min مطلق: فرض کنید $c, d \in D_f$ باشند:

1) $f(d)$ را max مطلق تابع f بر روی دامنه‌ی خود می‌گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f \quad f(d) \geq f(x)$$

2) $f(c)$ را min مطلق تابع f روی دامنه‌ی خود می‌گوییم هرگاه داشته باشیم

$$\forall x \in D_f \quad f(c) \leq f(x)$$

طریقه بدست آوردن اکسترمم‌های نسبی: برای این منظور ابتدا $f'(x)$ را بدست می‌آوریم و آن را مساوی صفر گذاشته و نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم؛ (نقاط بحرانی آن دسته از نقاطی هستند که:

1) $f'(x) = 0$ سپس از دو روش می‌توان اکسترمم‌های نسبی را بدست آورد:

2) $f'(x)$ موجود نباشد

1) آزمون مشتق اول: نقاط بحرانی بدست آمده را داخل جدول تعیین علامت می‌نویسیم و f' را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط اکسترمم را بدست می‌آوریم

۲) آزمون مشتق ۲: بعد از بدست آوردن نقاط بحرانی ابتدا مشتق دوم تابع f را بدست می‌آوریم

سپس نقاط بحرانی را در f'' جایگذاری می‌کنیم، حال، اگر در نقاط بحرانی:

$f'' > 0 \rightarrow$ min نسبی

$f'' < 0 \rightarrow$ max نسبی

نکته: برای بدست آوردن min و max مطلق ابتدا min و max نسبی را بدست می‌آوریم سپس در بازه داده شده f ابتدا و انتهای بازه را نیز بدست می‌آوریم. حال تمام این نقاط را با هم مقایسه می‌کنیم، بزرگترین عدد max مطلق، کوچکترین عدد min مطلق می‌باشد

✓ در بازه $[-1,2]$ نقاط اکسترمم مطلق تابع زیر را بدست آورید:

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \rightarrow 3x(x-1) \rightarrow x=0 ,\; x=1$ نقاط بحرانی

آزمون مشتق اول:

x		0		$+1$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$

$x=0 \rightarrow f(0) = 0$ max نسبی

$x=1 \rightarrow f(1) = -\frac{1}{2}$ min نسبی

$f(-1) = -\frac{5}{2}$ min مطلق

$f(2) = 2$ max مطلق

آزمون مشتق دوم: $f''(x) = 6x - 3$

نقاط بحرانی:

$x=0 \Rightarrow f''(0) = -3 < 0 \Rightarrow$ max نسبی

$x=1 \rightarrow f''(1) = 6-3 = 3 > 0 \rightarrow$ min نسبی

Subject:
Date:

قضیه: هرگاه تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر بازه $[a,b]$ دارای max مطلق و min مطلق است؛ یعنی نقاطی مانند c و d در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ چنان وجود دارد بطوری‌که

$$\forall x \quad \exists c,d \in [a,b] \ \text{s.t} \ \underbrace{f(c)}_{\text{min مطلق}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(d)}_{\text{max مطلق}}$$

نکته: هر تابع که روی بازه بسته‌ای پیوسته باشد روی آن بازه اکسترمم مطلق دارد

قضیه رول: فرض کنید تابع f دارای شرایط زیر است:

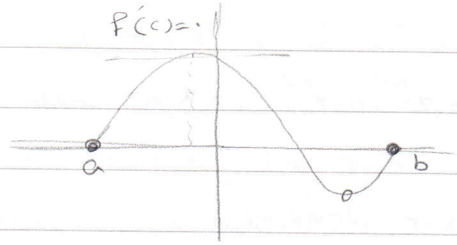
۱) f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد
۲) f بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد
۳) $f(a)=f(b)=0$ باشد

در این صورت عددی مانند c بر بازه (a,b) وجود دارد بطوری‌که $f'(c)=0$

تعمیم: اگر تابع f در شرایط زیر صدق کند: ۱) f روی بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد
۲) f روی بازه‌ی باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد
۳) $f(a)=f(b)=k$ باشد $k=$ عدد حقیقی

آنگاه در این صورت عددی مانند c بر بازه‌ی (a,b) وجود دارد بطوری‌که $f'(c)=0$

✓ عکس قضیه رول ممکن است درست نباشد

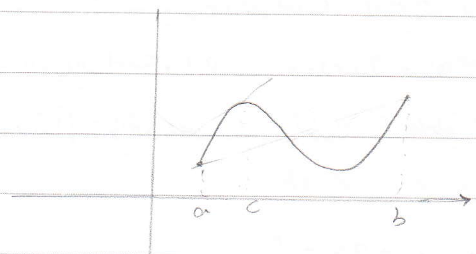


تعبیر قضیه رول سه شرط اول برقرار است

قضیه مقدار میانگین: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد

آنگاه حداقل یک نقطه c در بازه (a,b) وجود دارد بطوری که $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یا $$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



مثال: ابتدا نشان دهید که هر یک از توابع زیر در بازه داده شده در شرایط قضیه رول صدق می‌کند سپس

مقدار c در قضیه رول را بدست آورید:

✓ $f(x)=x^4-4x^2$ $\quad x\in[0,2]$

صدق می‌کند

$f'(c)=0 \Rightarrow 4c^3-8c=0$

$4c(c^2-2)=0 \rightarrow c=0$

$\rightarrow c=\pm\sqrt{2}$

Subject:

Date:

مثال) معادله $\underbrace{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x}_{f(x)} = 0$ که در آن $n \in N$ و $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ اعداد حقیقی هستند را در نظر بگیرید، فرض کنید $x = r$ یک ریشه مثبت این معادله باشد، با استفاده از قضیه رول نشان دهید معادله ی $n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$ حداقل یک ریشه ی مثبت کوچکتر از r دارد

$f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ ریشه معادله

از فرض: $x = r > 0 \rightarrow [0, r]$

چون تابع f یک چند جمله ای است بنابراین در بازه بسته $[0, r]$ پیوسته است و در بازه باز $(0, r)$ مشتق پذیر است و داریم $f(0) = f(r) = 0$

پس تمام شرایط قضیه رول برقرار است بنابراین طبق قضیه رول داریم

$\exists c \in (0, r) \ s.t \ f'(c) = 0 \quad *$

$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x$

$f'(x) = n x^{n-1} + (n-1)(a_1) x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \xrightarrow{*} f'(c) = 0$

مثال) فرض کنید L عددی مثبت و زوج باشد a و b اعدادی حقیقی باشند، با استفاده از قضیه رول نشان دهید که معادله ی $f = x^n + ax + b = 0$ نمی تواند بیش از دو ریشه حقیقی داشته باشد: (n یک عدد صحیح مثبت زوج)

چون تابع f روی R پیوسته و مشتق پذیر است بنابراین

$f'(x) = n x^{\overbrace{n-1}^{\text{فرد}}} + a \Rightarrow$ فقط یک ریشه دارد

$n x^{n-1} + a = 0 \Rightarrow x^{n-1} = \frac{-a}{n} \Rightarrow x = \sqrt[n-1]{\frac{-a}{n}}$

$\rightarrow f'(x) = 0$ فقط یک ریشه دارد

Subject:
Date:

فرض خلف: فرض می‌کنیم تابع f بیش از دو ریشه حقیقی داشته باشد و x_1, x_2, x_3

ریشه های f باشند. $x_1 < x_2 < x_3$: فرض ، چون تابع f در $[x_1, x_2]$ پیوسته و بر (x_1, x_2)

مشتق پذیر است و $f(x_1) = f(x_2) = 0$
ریشه‌های f می‌باشند

پس طبق قضیه رول داریم $\exists c_1 \in (x_1, x_2)$ s.t $f'(c_1) = 0$

از طرفی چون تابع f در $[x_2, x_3]$ پیوسته و بر بازه (x_2, x_3) مشتق پذیر $f(x_2) = f(x_3)$
ریشه‌های f

پس طبق قضیه رول داریم $\exists c_2 \in (x_2, x_3)$ s.t $f'(c_2) = 0$

f' در c_1, c_2 ریشه دارد $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$

تمرین تحویلی: (۱) فرض کنید n عددی فرد و طبیعی، a, b اعدادی حقیقی باشند، با استفاده

از قضیه رول نشان دهید معادله $x^n + ax + b = 0$ بیش از سه ریشه حقیقی نمی‌تواند داشته باشد

(۲) با استفاده از قضیه رول ثابت کنید معادله $x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد که در بازه

$[0,1]$ قرار دارد

Subject:
Date:

نکته: از ترکیب قضیه رول و قضیه بولتزانو، محک زیر برای جدا کردن جوابهای حقیقی معادله ی

$f(x)=0$ بدست می‌آید. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند بطوریکه (1 $f(x)$ در بازه

بسته $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر

۲) $f(a)$ ، $f(b)$ مختلف العلامت باشند

۳) $f'(x)$ برای همه‌ی مقادیر x در بازه (a,b) مخالف صفر باشد

آنگاه معادله $f(x)=0$ در بازه بسته $[a,b]$ یک و تنها یک جواب خواهد داشت

مثال: ابتدا نشان دهید که تابع زیر در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند سپس

مقدار c مربوط به آن را بدست آورید: $f(x)=x^3-3x+1 \quad x\in[0,3]$

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \longrightarrow \overset{18}{(19-1)}=f'(c)\times(3)$$

$$f'(c)=6$$

$$f(3)=3^3-(3\times3)+1=19 \qquad 3x^2-3=6$$

$$f(0)=0-0+1=1 \qquad 3x^2=9$$

$$f'(x)=3x^2-3 \qquad x^2=3$$

$$x=\pm\sqrt{3} \longrightarrow c=\sqrt{3}$$

غ ق ق

Alal & Matal

Subject:
Date:

مثال) برای هر عدد حقیقی x_1 ، x_2 نشان دهید $|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$

$\sin a$ در تمام R پیوسته است

مشتق پذیر (x_1, x_2) ، $[x_1, x_2]$ پیوسته است

طبق قضیه مقدار میانگین $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$\cos(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$|\cos(c)| = \frac{|\sin(x_2) - \sin(x_1)|}{|x_2 - x_1|}$$

$$|\cos(a)| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin(x_2) - \sin x_1|}{|x_2 - x_1|} \leq 1$$

$$|\sin(x_2) - \sin(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$$

تمرین کوئیز) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید

۱) اگر $0 < a < b$ آنگاه داریم: $\dfrac{b-a}{b} < \ln \dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$

۲) ثابت کنید اگر $a < b$ باشد آنگاه

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctg} b - \operatorname{Arctg} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Subject:
Date:

۳) فرض کنید $f(x) = Ln(\cos x)$

ثابت کنید اگر $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

آنگاه $(a-b)\,tgb < Ln\,\frac{\cos b}{\cos a} < (a-b)\,tga$

تمرین ۵) نقاط max مطلق را برای توابع زیر بیابید:

① $f(x) = |x|(x-2)$ $\quad [-1, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-2) & x<0 \\ x(x-2) & x\geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & -1<x<0 \\ 2x-2 & 0\leq x\leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2=0 \rightarrow x=1 \text{ غ ق ق} \\ 2x-2=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

$x=0$ مشتق ناپذیر

$f''(1) = 2 > 0 \rightarrow$ min نسبی

$f'(0) = 2$ مطلق max

$f(-1) = -3$ مطلق min

$f(2) = 0$

② $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-3)^2}$ $\quad [-5, 4]$

$f(x) = 1 - (x-3)^{2/3}$

$f'(x) = \frac{2}{3}(x-3)^{-1/3} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}} \Rightarrow$ $x=3$ نقطه بحرانی

$f(3) = 1$ max

$f(-5) = -3$ min

$f(4) = 0$

Atal & Matal

تعریف: فرض کنید f روی یک همسایگی نقطه $x=c$ دارای مشتقات مرتبه ی اول و دوم باشد

در این صورت هرگاه:

۱) اگر $f''(c)>0$ باشد آنگاه تابع f در نقطه ی $(c, f(c))$ تقعر (تقعر رو به بالا) دارد

۲) اگر $f''(c)<0$ " " " " " محدب "

نقاط عطف: برای بدست آوردن نقاط عطف، ابتدا نقاط بحرانی تابع f' را می یابیم ($f''=0$ می گذاریم و ریشه های آن را بدست می آوریم) سپس f'' را تعیین علامت می کنیم، اگر f'' مثبت باشد تقعر رو به بالا و اگر $f''<0$ تقعر رو به پایین است (است)، حال اگر این ریشه های f'' تغییر تقعر دهند نقاط عطف می باشند

مثال) نقاط عطف توابع زیر را پیدا کنید:

*۱) $f(x)=4x^4-4x^3$

$f'(x)=16x^3-12x^2$

$f''(x)=48x^2-24x$

$24x(2x-1)=0 \rightarrow x=0$

$\rightarrow x=\frac{1}{2}$

0	$\frac{1}{2}$

مثال) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

مثال) تابع $y = x^3 + ax^2 + 2$ را در نظر بگیرید، مقدار a را چنان بیابید که نقطه $x=1$ نقطه‌ی عطف

شرایط عطف:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2$

$f''(x) = 6x + 2a = 0$

$6 + 2a = 0 \longrightarrow a = -3$

مجانب‌ها

مجانب قائم: ریشه‌های مخرج را مجانب قائم گوییم در صورتی که وقتی x به سمت آن نقطه میل می‌کند $f(x)$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

* ریشه‌های مخرج در صورتی مجانب قائم هستند که اگر حالت $\frac{0}{0}$ پیش آید مقدار حد پس از رفع ابهام حد کامل بی‌نهایت باشد.

مجانب افقی: خط $y=b$ را مجانب افقی تابع f گوییم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad , \exists M > 0 :$ اگر $x > M \Rightarrow f(x) \neq b$

Subject:
Date:

۲) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ ، $\exists M > 0$ اگر $x < -M \Rightarrow f(x) \neq b$

برای تعیین مجانب افقی یک تابع ابتدا x را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم در این صورت حد تابع مجانب افقی می‌باشد $y = b$ است

نکته) در ~~تابع~~ تابع کسری شرط وجود مجانب افقی این است: درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد

در این صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت مجانب ~~افقی~~ مایل می‌باشد

* شرط وجود مجانب افقی در توابع کسری، درجه مخرج بیشتر از صورت باشد

* مجانب مایل) : شرط لازم وجود مجانب مایل در تابع $y = f(x)$ آن است که وقتی $x \to \infty$ آنگاه $y \to \infty$ میل کند، خط ~~خط~~ $y = ax + b$ را مجانب مایل گوییم، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد

۱) $\lim_{x \to \infty} |f(x) - (ax+b)| = 0$

یک تابع کسری وقتی مجانب مایل دارد: ۱) اینکه صورت فقط یک واحد بزرگتر از مخرج باشد ۲) اگر صورت کسر را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت

Subject:
Date:

یک معادله درجه اول بصورت $ax+b$ باشد

تعیین مجانب مایل) به روش حد. اگر $y = ax+b$ معادله مجانب مایل تابع f باشد در این

صورت داریم: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\infty} f(x)-ax$

مثال) معادله مجانب های مایل توابع زیر را بدست آورید:

۱) $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

۲) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

۳) $y = x + \sqrt{x^2-2x}$

۴) $y = \frac{x^2-4x+1}{x-1}$