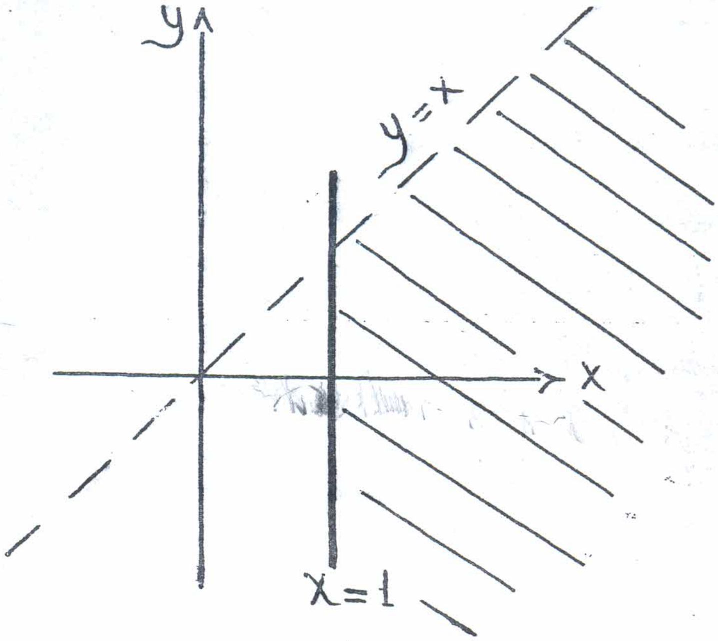
مثال: أوجد المجال والمدى مع رسم المجال للدالة

1) $f(x,y) = \sqrt{x-1}\cdot \ln(x-y)$

الحل :- المجال :- لوجود الجذر $\Leftarrow x-1 \geq 0 \Leftarrow x \geq 1$

لوجود $\ln$ $\Leftarrow x-y > 0 \Leftarrow y < x$

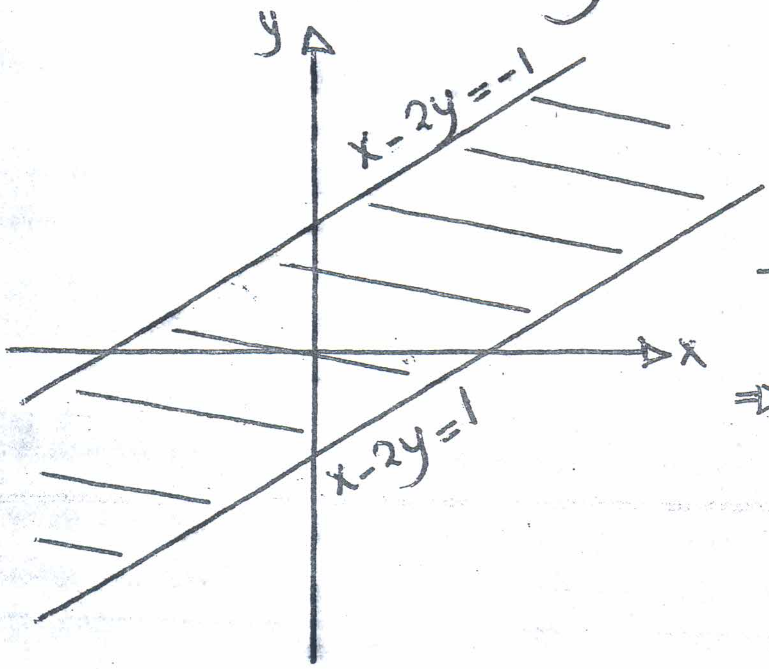
نرسم المجال كالتالي :



المدى هو $\mathbb{R}$

---

2) $f(x,y) = \cos^{-1}\sqrt[3]{x-2y}$



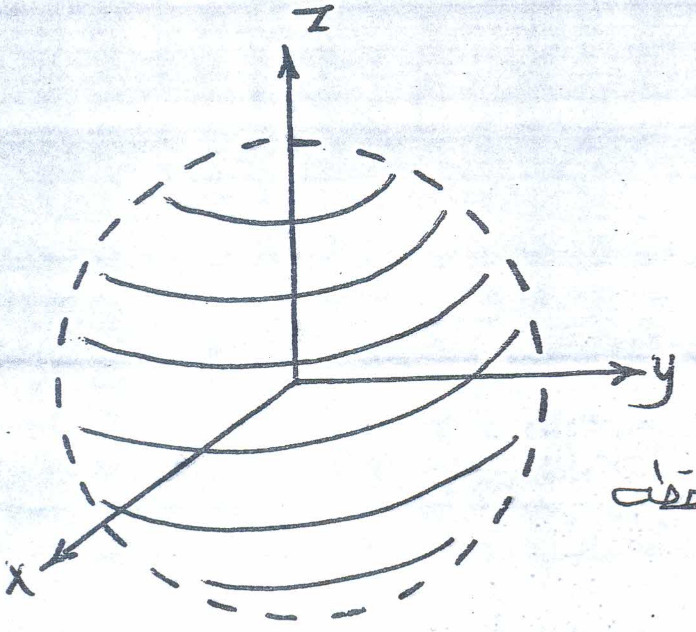
لابد أن يتحقق

$-1 \leq \sqrt[3]{x-2y} \leq 1$

المجال : $\Rightarrow -1 \leq x-2y \leq 1$

المدى هو $[0,\pi]$

3) $f(x, y, z) = \ln(16 - x^2 - y^2 - z^2)$



الحل : * المجال هو :

لوجود الـ $\ln$ يجب أن

$16 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 16$

وهو الحجم داخل الكره التي مركزها نقطه الاصل و نصف قطرها 4 .

* المدى : الكميه داخل الـ $\ln$ هي

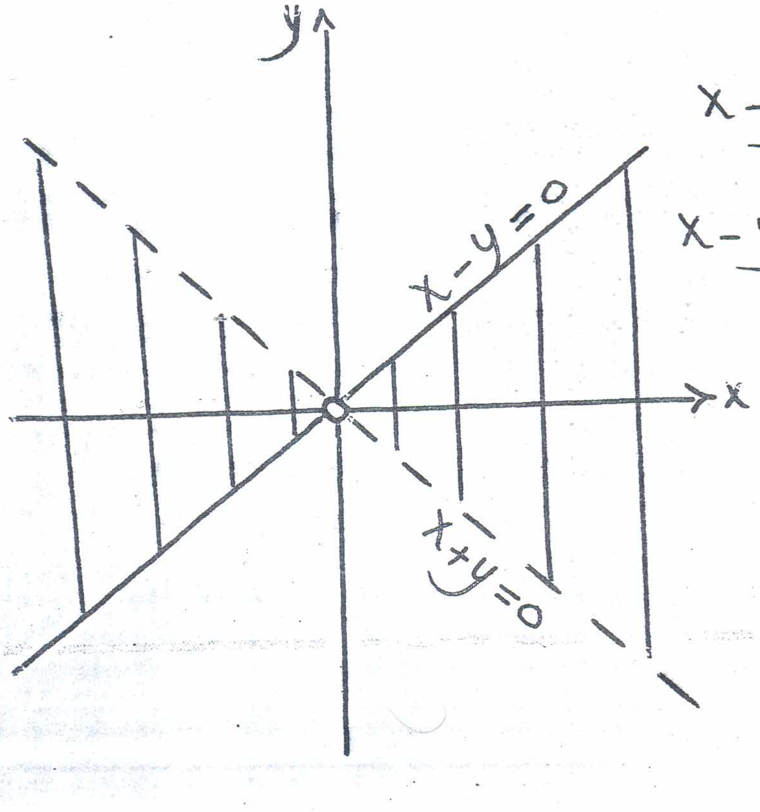
$0 < 16 - x^2 - y^2 - z^2 \leq 16$

$\Rightarrow -\infty < \ln(16 - x^2 - y^2 - z^2) \leq \ln 16$

المدى هو $(-\infty, \ln 16]$

---

4) $z = \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$



الحل : المجال :

$x - y \geq 0 \ \& \ x + y > 0$

أو

$x - y \leq 0 \ \& \ x + y < 0$

* المدى : $[0, \infty)$

مثال : أوجد قيمة k التي تجعل $f(x,y)$ متصلة على $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الحل : لكي تكون $f(x,y)$ عند $(0,0)$ يجب ان تكون $k =$ قيمة النهاية للدالــــه عند $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

نستخدم المسارات $y = mx^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m x^6}{x^6 + m^2 x^6} = \frac{m}{1 + m^2} \Rightarrow$$ تعتمد على m

النهاية غير موجوده ، لا يمكن أن تصبح $f(x,y)$ متصلة على $\mathbb{R}^2$ مهما كانت قيمة k .

مثال : أوجد النهاية التالية (أن وجدت)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^4 + y^2}$$

الحل: نستخدم مجموعة المسارات $y = mx^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(mx^4)}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin mx^4}{x^4}}{1 + m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

النهاية غير موجوده لانها تعتمد على m.

مثال:- ادرس اتصال الداله

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الحل:- نوجد النهايه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$$ نستخدم المسارات $\Rightarrow y = mx^3$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{mx^{12}}{(x^6 + m^2x^6)^2} = \frac{m}{(1+m^2)^2}$$

النهايه غير موجوده لانها تعتمد على m

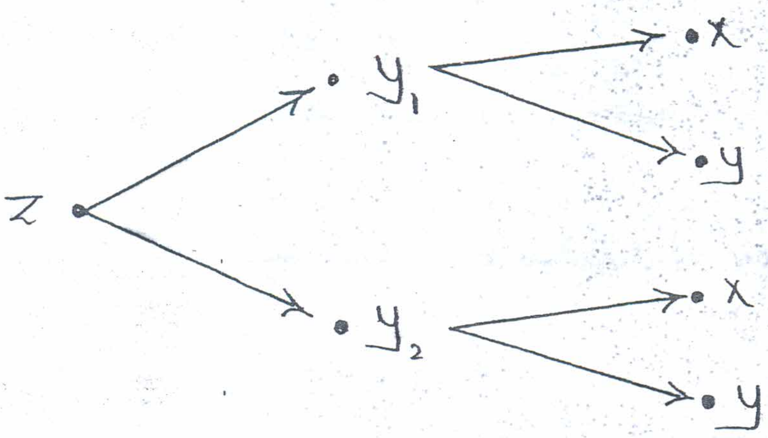
$\Leftarrow$ الداله غير متصله عند $(0,0)$

مثال: شركه تنتج منتجين y_1 & y_2 باستخدام حجم عماله x وحجم معدات y ، إذا كان حجم الانتاج السنوى للمنتجين هو Z معرف كالتالى

$$Z = f(y_1, y_2) \quad , \quad y_1 = x^2 - y^2 \quad \& \quad y_2 = 2xy$$

أوجد معدل تغير حجم الانتاج السنوى بالنسبه لحجم العماله

الحل: المطلوب هو إيجاد $\frac{\partial Z}{\partial x}$ ولدينا



$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x}$$

$$= f_{y_1} \cdot 2x + f_{y_2} \cdot 2y$$

مثال :- أوجد $\frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial x}$ اذا كان $ye^{x} + \sin 2Z - xZ = ye^{Z}$

الحل : الدالة المعطاه دالة ضمنية اذاً

$$F(x,y,z) = ye^{x} + \sin 2Z - xZ - ye^{Z} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_Z} = -\frac{ye^{x} - Z}{2\cos 2Z - x - ye^{Z}}$$

$$\& \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_Z} = -\frac{e^{x} - e^{Z}}{2\cos 2Z - x - ye^{Z}}$$

مثال اذا كان حجم الانتاج لشركه تنتج منتجين x, y باستخدام عمالة Z تتحدد من العلاقة

$$f(x,y,z) = Ze^{2x+y}$$

أوجد (١) معدل تغير حجم الانتاج بالنسبه الى حجم المنتج x

(٢) معدل تغير حجم الانتاج بالنسبه الى حجم العمالة Z

(٣) أحسب المعدلين السابقين عند $x = 10$, $y = 20$, $Z = 15$

الحل :- (١) معدل تغير الانتاج بالنسبه للمنتج x هو $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$= Ze^{2x+y} \cdot 2 = 2Ze^{2x+y}$$

(٢) معدل تغير الانتاج بالنسبه الى العمالة $= \partial f / \partial Z$

$$= e^{2x+y}$$

(٣) نعوض عن $x = 10$, $y = 20$, $Z = 15$

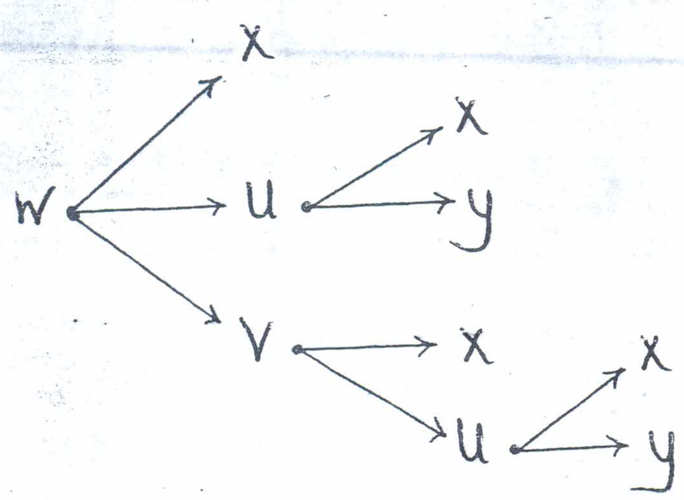
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 30e^{40} \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial Z} = e^{40}$$

مثال :- اذا كان $W = x^2 u + \tan^{-1}(uv)$

$$u = \sqrt{x^2+y^2}, \quad v = \ln(x^2 - 2u)$$

أوجد $\dfrac{\partial W}{\partial x}$

الحل : لدينا العلاقات الآتيه :



$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial x} = 2xu + \left(x^2 + \frac{v}{1+(uv)^2}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{u}{1+(uv)^2}\right)\frac{2x}{x^2-2u} + \frac{u}{1+(uv)^2}\cdot\frac{-2}{x^2-2u}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

مثال :- أوجد النهايه

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{(x^3+y^2)^2}$$

الحل

نستخدم المسارات $y = mx^2$

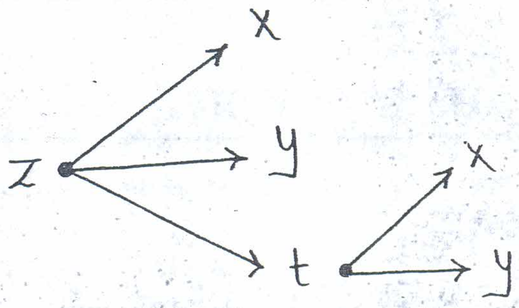
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sin mx^2)^2}{(x^3+m^2x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin mx^2}{x^2}\right)^2}{(1+m^2x)^2} = \frac{m^2}{1+c}$$

قيمه النهايه m^2 تعتمد على m $\Leftarrow$ النهايه غير موجوده

مثال :- اذا كان $z = x^2y^2 + y\,f(y/x)$ أثبت أن

$$\frac{z_x}{y} + \frac{z_y}{x} = 4xy + \frac{f(y/x)}{x}$$

الحل :- نفرض $t = y/x \Leftarrow z = x^2y^2 + y\,f(t)$



$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= 2xy^2 + y\,f'(t)\cdot\frac{-y}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_x}{y} = 2xy - \frac{y}{x^2}f'(t) \longrightarrow (1)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = 2x^2y + f(t) + y\,f'(t)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{z_y}{x} = 2xy + \frac{f(t)}{x} + \frac{y}{x^2}f'(t) \longrightarrow (2)$$

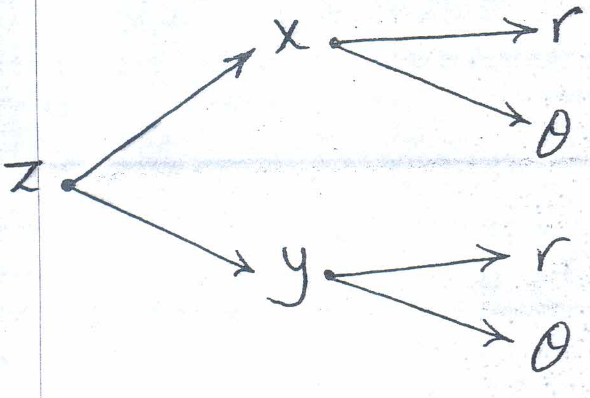
نجمع (1) , (2)

$$\frac{z_x}{y} + \frac{z_y}{x} = 4xy + \frac{f(t)}{x}$$

$$= 4xy + \frac{f(y/x)}{x}$$

مثال: أوجد $z_{r\theta}$ اذا كان $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

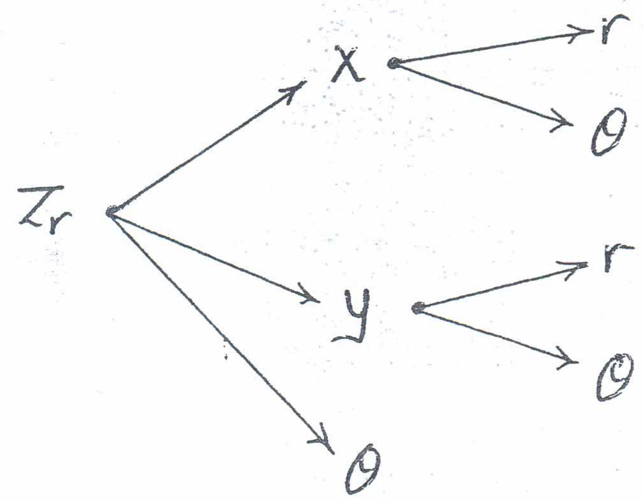
الحل: نفرض $x = r\cos\theta$ & $y = r\sin\theta$ $\Leftarrow$ $z = f(x,y)$



$$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = z_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + z_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$z_r = f_x \cdot (\cos\theta) + f_y \cdot (\sin\theta)$$

$\Rightarrow$



$$z_{r\theta} = \frac{\partial z_r}{\partial \theta} = \frac{\partial z_r}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z_r}{\partial \theta}$$

$$= (\cos\theta\, f_{xx} + \sin\theta\, f_{yx})(\cos\theta)$$

$$+ (\cos\theta \cdot f_{xy} + \sin\theta \cdot f_{yy})(\sin\theta)$$

$$+ (-\sin\theta \cdot f_x + \cos\theta \cdot f_y)$$

مثال :- اذا كان $u = f(x,y)$ & $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

أثبت أن $u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2$

الحل

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= f_x \cdot \cos\theta + f_y \cdot \sin\theta \longrightarrow (1)$$

$$u_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= f_x (-r\sin\theta) + f_y (r\cos\theta)$$

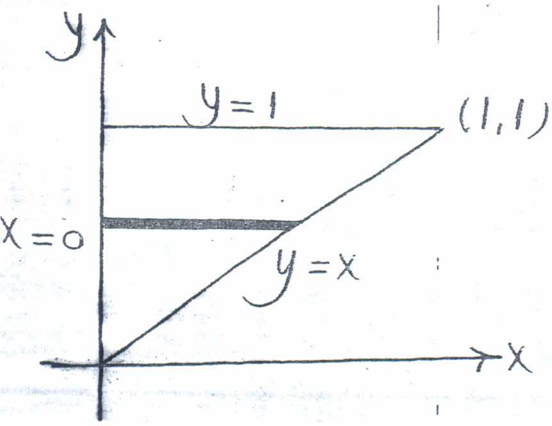
$$\Rightarrow \quad \frac{u_\theta}{r} = -f_x \cdot \sin\theta + f_y \cdot \cos\theta \longrightarrow (2)$$

نربع (1) , (2) ثم نجمع

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2 = f_x^2 \cos^2\theta + f_y^2 \sin^2\theta + 2 f_x f_y \sin\theta\cos\theta$$
$$+ f_x^2 \sin^2\theta + f_y^2 \cos^2\theta - 2 f_x f_y \sin\theta\cos\theta$$
$$= f_x^2 + f_y^2 = u_x^2 + u_y^2$$

مثال :- أوجد التكامل $\int_0^1 \int_x^1 \cos y^2 \, dy \, dx$

الحل : نغير ترتيب التكامل



$$\int_0^1 \int_0^y \cos y^2 \, dx \, dy$$

$$\int_0^1 y\cos y^2 \, dy = \frac{1}{2} \sin y^2 \Big|_0^1 = \frac{\sin 1}{2}.$$

مثال : أوجد النقط الواقعة على السطح الزائدى $x^2+4y^2-z^2=4$
التى لها مستوى تماس يوازى $2x+2y+z=5$

الحل :-
* معادلة السطح الزائدى $F = x^2+4y^2-z^2-4=0$

* العمودى على السطح $\underline{n}_1 = < F_x , F_y , F_z >$

$= < 2x , 8y , -2z >$

* العمودى على المستوى $2x+2y+z=5$ هو

$\underline{n}_2 = < 2 , 2 , 1 >$

* شرط التوازى

$\underline{n}_1 \parallel \underline{n}_2 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{8y}{2} = \frac{-2z}{1}$

$\Rightarrow x = 4y \quad \& \quad z = -2y$

بالتعويض فى معادلة السطح

$x^2+4y^2-z^2=4 \Rightarrow 16y^2+4y^2-4y^2=4$

$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow z = \mp 1$

مثال : أوجد معادلة المستوى المماس و المستقيم العمودي للسطح $2xz^2 - 3xy = 4x + 3$ عند النقطة $(1, -1, 2)$

الحل :-
المتجه العمودي على السطح هو

$$\underline{n} = (2z^2 - 3y - 4)i + (-3x)j + (4xz)k$$

عند النقطة $(1, -1, 2)$ يكون

$$\underline{n} = 7i - 3j + 8k$$

المستوى المماس هو $7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0$

المستقيم العمودي $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{8}$

مثال : أثبت أن السطحين $x^2+y^2+z^2 = x$ & $x^2+y^2+z^2 = y$ متعامدين عند نقط تقاطعهم

الحل : نقط تقاطع السطحين تحقق أن

$$x^2+y^2+z^2 = x = y \longrightarrow ①$$

العمودي للسطح الاول هو $\underline{n_1} = (2x-1)i + 2yj + 2zk$

العمودي للسطح الثاني هو $\underline{n_2} = 2xi + (2y-1)j + 2zk$

نوجد حاصل الضرب القياسي (dot product) للمتجهين

$$\underline{n_1} \cdot \underline{n_2} = 2x(2x-1) + 2y(2y-1) + 2z(2z)$$

نستخدم ①

$$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x - 2y \longrightarrow$$

$$= 2(x^2+y^2+z^2-x) + 2(x^2+y^2+z^2-y) = 0 \Rightarrow n_1 \ldots$$

مثال: أوجد معادلات أعمدة السطح $z = x^2 + y^2$

عند نقطة تقاطعه مع المستقيم

$x = -1 + t \quad , \quad y = 2 + t \quad \& \quad z = 7 + 2t$

الحل: نوجد تقاطع المستقيم مع السطح بحلهم سويا"

$$\Rightarrow 7 + 2t = (-1+t)^2 + (2+t)^2$$

$$= 1 - 2t + t^2 + 4 + 4t + t^2$$

$$\Rightarrow 2t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1$$

النقطة الأولى $t = 1$

$(0, 3, 9)$

النقطة الثانية $t = -1$

$(-2, 1, 5)$

المتجه العمودي على السطح $z = x^2 + y^2 \Leftarrow x^2 + y^2 - z = 0 =$

هو $\underline{n} = F_x i + F_y j + F_z k = 2x i + 2y j - k$

المتجه العمودي للنقطة الأولى

$\underline{n} = 0 i + 6 j - k$

$\Downarrow$

العمودي الأول

$$\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 3}{6} = \frac{z - 9}{-1}$$

المتجه العمودي للنقطة الثانية

$\underline{n} = -4 i + 2 j - k$

$\Downarrow$

العمودي الثاني

$$\frac{x + 2}{-4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 5}{-1}$$

مثال: أثبت أن السطحين : السطح الناقص $x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$
والكرة $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ يتماسان عند النقطة
$(1, 1, 2)$.

الحل :-

لكي يكون أي سطحين متماسان عند نقطة ما يجب أن
يكون لهما نفس معادلة المستوى المماس عند تلك النقطة

⇐ يجب أن يتحقق أن
① كلاهما يمر بالنقطة
② العمودي على السطح الاول عند النقطة هو $\underline{n}_1$ يوازي العمودي للسطح الثاني $\underline{n}_2$ عند النقطة

النقطة $(1,1,2)$ واقعة على السطح الناقص لأن $3(1)+2(1)+4=9$
النقطة $(1,1,2)$ واقعة على الكرة لأن $1+1+4-8-6-16+24=0$

العمودي على $3x^2+2y^2+z^2=9$ ⇐ $\underline{n}_1 = (6x)i + (4y)j + (2z)k$
عند النقطة $(1,1,2)$ هو $\underline{n}_1 = 6i + 4j + 4k$

العمودي على الكرة ⇐ $\underline{n}_2 = (2x-8)i + (2y-6)j + (2z-8)k$
عند النقطة $(1,1,2)$ هو $\underline{n}_2 = -6i - 4j - 4k$

بما أن $\underline{n}_1 \parallel \underline{n}_2$ ⇐ السطحين يتماسان

مثال :- أثبت أن المنحنى $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ & $xy + xz = 2$

يمس السطح $xyz - x^2 - 6y = -6$ عند النقطة $(1,1,1)$

الحل :-

* نوجد المتجه $\underline{V}$ الذي يمس منحنى تقاطع السطحين

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad xy + xz = 2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

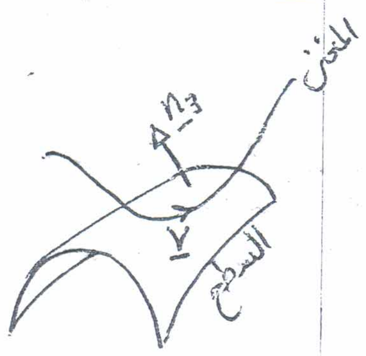
$$\underline{n}_1 = \langle 2x, -2y, 2z \rangle \qquad \underline{n}_2 = \langle y+z, x, x \rangle$$

$$\downarrow (1,1,1) \qquad\qquad \downarrow (1,1,1)$$

$$\underline{n}_1 = \langle 2, -2, 2 \rangle \qquad \underline{n}_2 = \langle 2, 1, 1 \rangle$$

$$\underline{V} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle -2, 1, 3 \rangle$$

* المتجه العمودي على السطح $xyz - x^2 - 6y = -6$



$$\underline{n}_3 = \langle yz - 2x, xz - 6, xy \rangle$$

$$\downarrow (1,1,1)$$

$$\underline{n}_3 = \langle -1, -5, 1 \rangle$$

- المنحنى يمس السطح إذا تحقق $\underline{n}_3 \perp \underline{V}$

$$\underline{n}_3 \cdot \underline{V} = \langle -2, 1, 3 \rangle \cdot \langle -1, -5, 1 \rangle$$

$$= 2 - 5 + 3 = 0 \implies \underline{n}_3 \perp \underline{V}$$

مثال أوجد ...

$2x^2 + 2y + z = 1$ & $z = 2x^2 - y^2$

الحل

* السطح $z = 2x^2 - y^2$ له العمودي $\underline{n}_1$

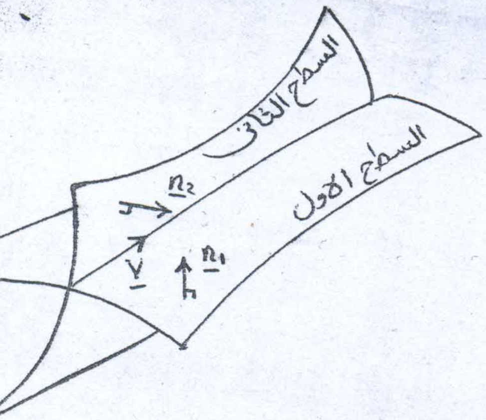
$\underline{n}_1 = \langle 4x , -2y , -1 \rangle$

عند النقطة $(1, 3, -7)$ العمودي $\underline{n}_1 = \langle 4 , -6 , -1 \rangle$

* السطح $2x^2 + 2y + z = 1$ له العمودي $\underline{n}_2$

$\underline{n}_2 = \langle 4x , 2 , 1 \rangle$

عند النقطة $(1, 3, -7)$ العمودي $\underline{n}_2 = \langle 4 , 2 , 1 \rangle$



* المتجه $\underline{v}$ الموازي (المماس) لمنحنى تقاطع السطحين هو

$$\underline{v} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \langle -4 , -8 , 32 \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \langle 1 , 2 , -8 \rangle$$

المستقيم المماس يمر بالنقطة $(1, 3, -7)$ ويوازي $\underline{v}$

$$x - 1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+8}{-7}$$

مثال : أوجد التكامل

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

الحل : مساحة التكامل

$y: 0 \to 1$ & $x: \sqrt{y-y^2} \to \sqrt{1-y^2}$

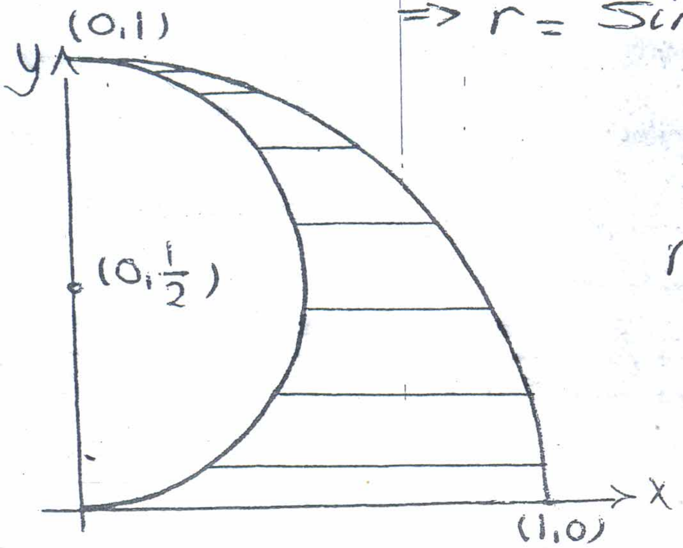
دائرة (النصف الايمن) | دائرة (النصف الايمن)

$x^2 = y - y^2$ | $x^2 = 1 - y^2$

$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1/4$ | $x^2 + y^2 = 1$

أو $r^2 = r\sin\theta$ | أو $r = 1$

$\Rightarrow r = \sin\theta$



نستخدم الاحداثيات القطبية

فيكون $r: \sin\theta \longrightarrow 1$

$\& \ \theta: 0 \longrightarrow \pi/2$

دالة التكامل

$$dA = r\,dr\,d\theta \ , \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$\iint = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sin\theta}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{1-r^2}\,\Big|_{\sin\theta}^{1} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

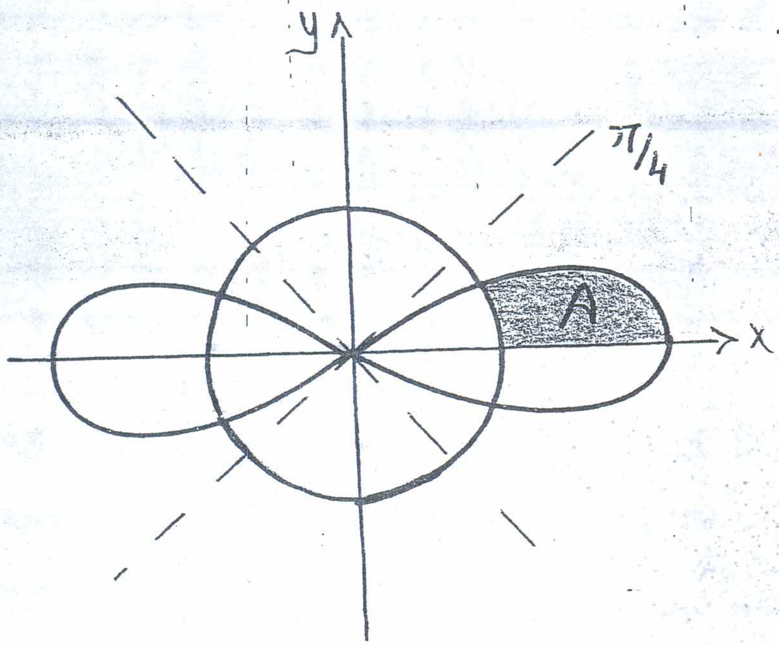
مثال: أحسب مساحة المنطقة الواقعة خارج الدائرة

$x^2+y^2=a^2$ وداخل الليمنسكيت $r^2=2a^2\cos 2\theta$

الحل :-

المساحة المطلوبة هي $4A$

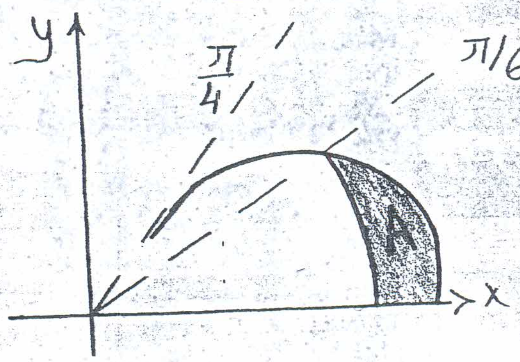
نقط التقاطع



$r^2=a^2$ & $r^2=2a^2\cos 2\theta$

$\Rightarrow \cos 2\theta = 1/2$

$\Rightarrow 2\theta = \pi/3 \Rightarrow \theta = \pi/6$



$$\text{المساحة} = 4A = 4\iint_A dA$$

$$= 4\int_0^{\pi/6}\int_a^{\sqrt{2a^2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

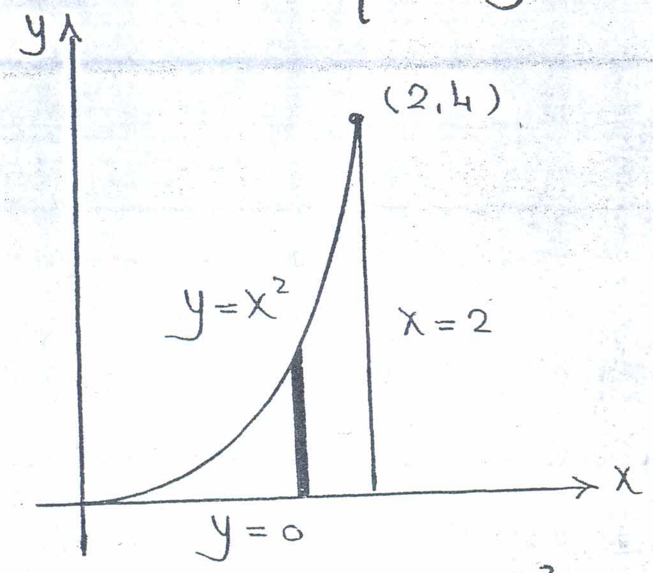
$$= 4\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(2a^2\cos 2\theta - a^2)\,d\theta$$

$$= 2\left(\frac{2a^2\sin 2\theta}{2} - a^2\theta\right)\Big|_0^{\pi/6}$$

$$= 2\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2\pi}{6}\right)$$

مثال :- أوجد التكامل الثنائي $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx \, dy$

الحل :
يجب تغيير ترتيب التكامل ، فنرسم أولاً مساحة التكامل $\{ x : \sqrt{y} \to 2 \quad \& \quad y : 0 \to 4 \}$



نختار شريحة رأسية فيكون

$$dA = dy\,dx \quad \& \quad \begin{cases} y : 0 \to x^2 \\ x : 0 \to 2 \end{cases}$$

$$\iint = \int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{y^2}{2} \cos x^5 \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^4}{2} \cos x^5 \, dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^2 5x^4 \cos x^5 \, dx$$

$$= \frac{1}{10} \sin x^5 \Big|_0^2 = \frac{1}{10} \sin 32 .$$

مثال : أوجد التكامل

1) $\int_0^2 \int_{2y}^4 y e^{x^3}\, dx\, dy$

2) $\int_0^2 \int_0^{4-y} \sin\left(\frac{y}{x+y}\right) dx\, dy$

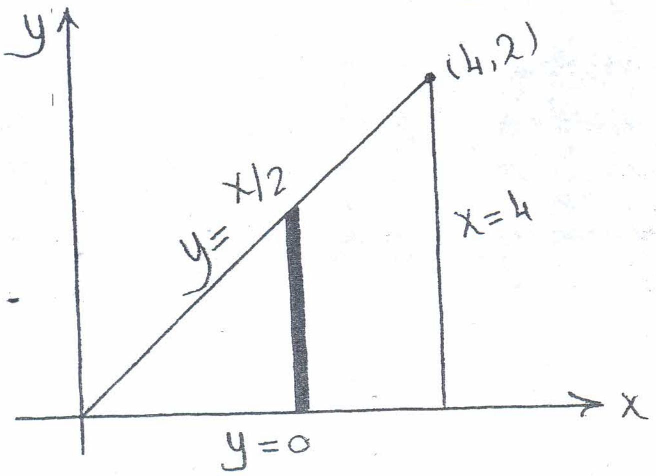
بإستخدام $y = uv$ ، $x+y = u$

الحل :-

1) $\int_0^2 \int_{2y}^4 y e^{x^3}\, dx\, dy$

يجب تغيير ترتيب التكامل ← مساحة التكامل هي

$y : 0 \to 2 \quad \& \quad x : 2y \to 4$



نستخدم شريحة رأسية

$\int_0^4 \int_0^{\frac{x}{2}} y e^{x^3}\, dy\, dx$

$\int_0^4 e^{x^3}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x/2}\right) dx$

$= \int_0^4 \frac{1}{8} x^2 e^{x^3}\, dx \quad = \frac{1}{24}\int_0^4 3x^2 e^{x^3}\, dx$

$= \frac{1}{24}\left(e^{x^3}\Big|_0^4\right) = \frac{1}{24}\left(e^{64} - 1\right)$

مثال: أوجد وزن الجزء داخل الدائرة $x^2+y^2=2y$ وخارج الدائرة $x^2+y^2=1$ ، اذا كانت الكثافة هي

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

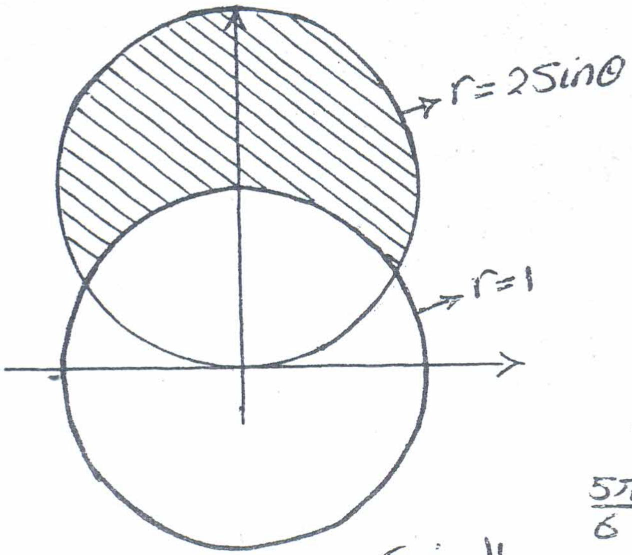
الحل:- الدائرة $x^2+y^2=2y \Leftarrow x^2+(y-1)^2=1$

وتكون بالاحداثيات القطبية $r^2=2r\sin\theta$

$$\Downarrow$$

$$r=2\sin\theta$$

-الدائرة $x^2+y^2=1$ بالاحداثيات القطبية هي $r=1$



نقط التقاطع هي

$2\sin\theta=1 \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6} \ , \ \frac{5\pi}{6}$

$$\text{الوزن} = \iint_A \rho \, dA$$

$$\text{الوزن} = \int_{\pi/6}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{1}^{2\sin\theta} \rho \ r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{1}^{2\sin\theta} \frac{k}{r} \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= k \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2\sin\theta-1) \, d\theta$$

$$= k\left(-2\cos\theta-\theta\right)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} = k\left(\sqrt{3}-\frac{5\pi}{6}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= k\left(2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$$

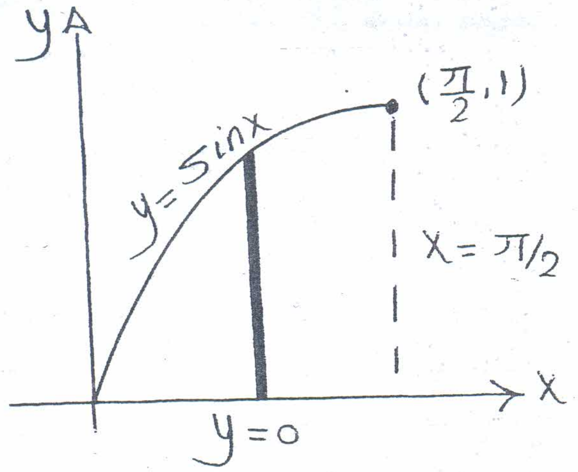
مثال: أوجد التكامل $\int_0^1 \int_{\sin^{-1}y}^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\,dx\,dy$

الحل: لكى نستطيع تكامل الداله يجب تغيير ترتيب التكامل

فباستخدام شريحه أفقيه وجدنا حدود التكامل

$x: \sin^{-1}y \to \pi/2 \quad \& \quad y: 0 \to 1$

فتكون مساحه التكامل كالتالى



نستخدم شريحه رأسيه

فيكون

$dA = dy\,dx$

$y: 0 \to \sin x \quad \& \quad x: 0 \to \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} \sec^2(\cos x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sec^2(\cos x) \cdot y \Big|_0^{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sec^2(\cos x) \cdot \sin x\,dx$$

$$= -\tan(\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = -\tan(0) + \tan(1)$$

$$= \tan 1.$$

مثال: حول هذا التكامل الى الاحداثيات الكارتيزيه

لحسابه $\int_0^{\pi/2}\int_0^{3\sin\theta} r^2 \sin 2\theta \, dr\, d\theta$

الحل نكتب التكامل على الشكل

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\sin\theta}}_{\text{مساحه التكامل}} \underbrace{r\sin 2\theta}_{\text{داله التكامل}} \cdot \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dx\,dy}$$

داله التكامل

$= r\sin 2\theta$

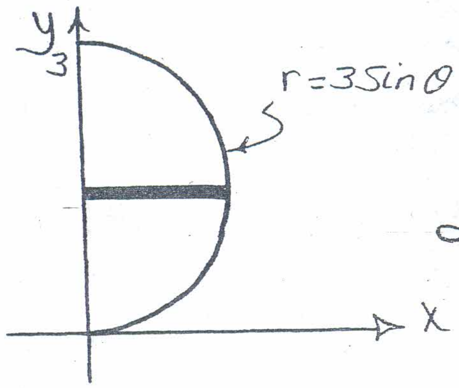
$= 2r\sin\theta\cdot\cos\theta$

$= 2y\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

مساحه التكامل

$r: 0 \to 3\sin\theta$

$\& \ \theta: 0 \to \pi/2$



المعادله $r = 3\sin\theta$ ترسم الدائره الموضحه

لأن $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 3y \Rightarrow x = \sqrt{3y-y^2}$

التكامل $= \int_0^3\int_0^{\sqrt{3y-y^2}} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

$= \int_0^3 2y\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^{\sqrt{3y-y^2}} dy$

$= \int_0^3 2y(\sqrt{3y} - y)\, dy = \int_0^3 2\sqrt{3}\, y^{3/2} - 2y^2\, dy$

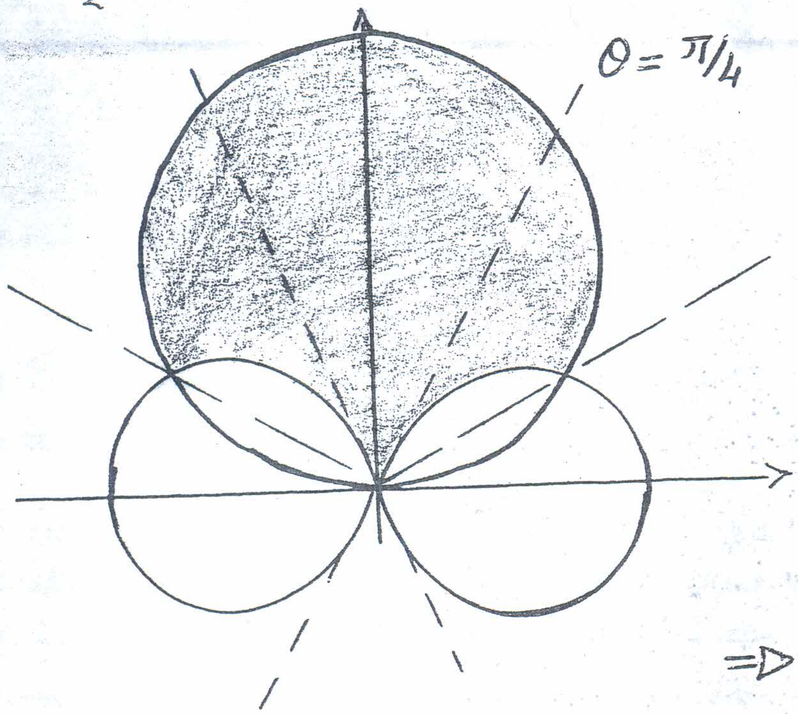
$= 2\sqrt{3}\,\frac{3^{5/2}}{5/2} - \frac{2}{3}3^3 = \frac{18}{5}$

مثال :- أوجد وزن الجزء داخل الدائرة $r = a\sin\theta$

وخارج الليمنسكيت $r^2 = \frac{a^2}{2}\cos 2\theta$, اذا كانت

الكثافة $\rho = k(x^2+y^2)$ حيث k ثابت

الحل :- نرسم الدائرة $r = a\sin\theta$ والليمنسكيت $r^2 = \frac{a^2}{2}\cos 2\theta$



نوجد نقط التقاطع

$$a^2\sin^2\theta = \frac{a^2}{2}\cos 2\theta$$

$$2\sin^2\theta = \cos 2\theta$$

$$2\sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$4\sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1/4 \Rightarrow \sin\theta = 1/2$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/6 \ \& \ \frac{5\pi}{6}$$

الوزن = التكامل الثنائي للكثافة على المساحة

$$\text{الوزن} = \iint_A \rho\, dA \Rightarrow$$ نستخدم التماثل

$$= 2\iint k(x^2+y^2)\,dA = 2\iint k r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

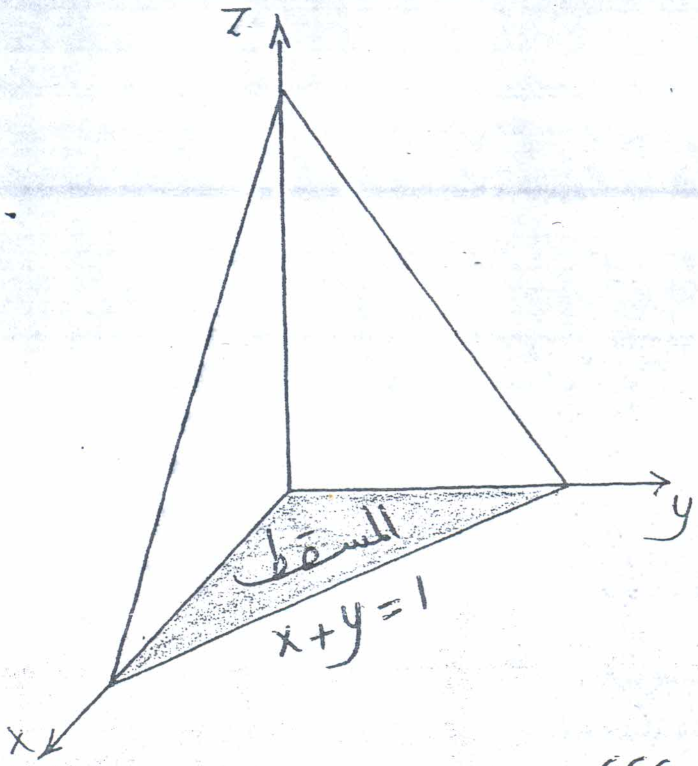
$$= 2k\left(\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{\sqrt{\frac{a^2}{2}\cos 2\theta}}^{a\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{a\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta\right)$$

$$= 2k\left(\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{a^4}{4}\left(\sin^4\theta - \frac{1}{4}\cos^2 2\theta\right) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{a^4}{4}\sin^4\theta\,d\theta\right)$$

مثال :- إستخدم التكامل الثلاثي لإيجاد الحجم المحدد بالمستويات

$$x+y+z=1 \qquad y=0 \qquad x=0 \qquad z=0$$

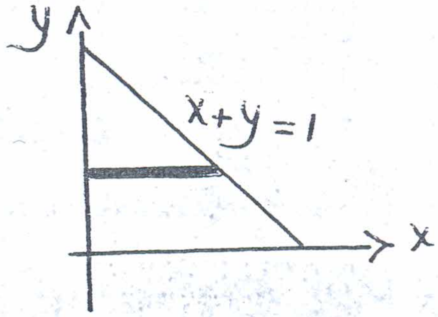
الحل :-



الحجم المطلوب محدد بين

$$z=0 \quad \& \quad z=1-x-y$$

ومسقطه على المستوى xy هو



$$\text{الحجم} = \iiint dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} dz\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1-x-y \; dx\, dy$$

$$= \int_0^1 (1-y) - \frac{(1-y)^2}{2} - y(1-y) \; dy$$

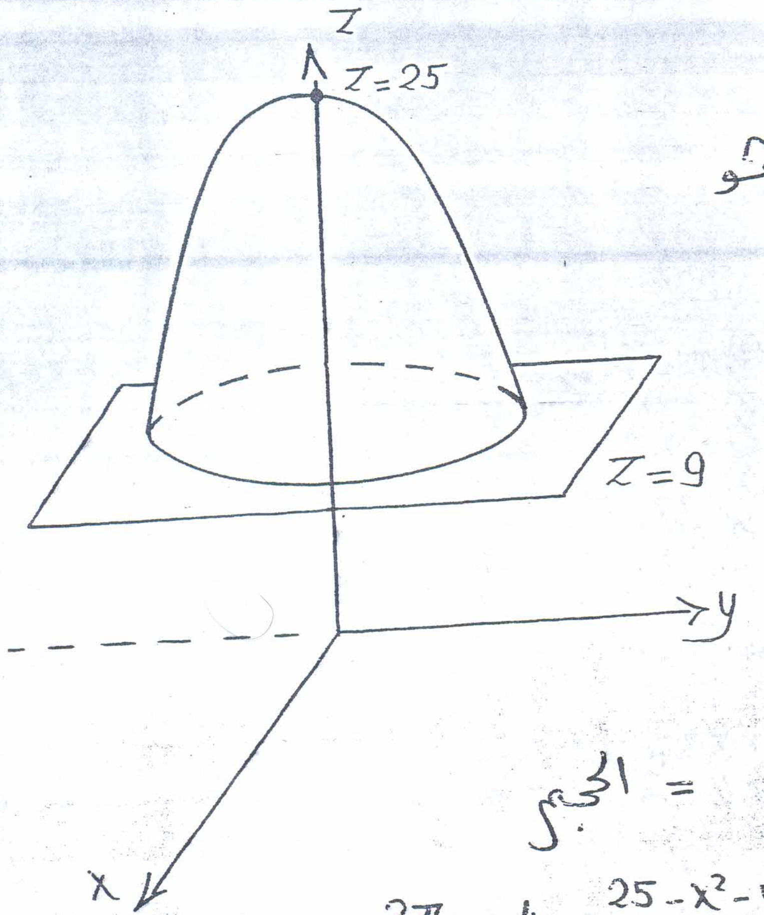
$$= y - \frac{y^2}{2} + \frac{(1-y)^3}{6} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

مثال : أوجد الحجم الواقع بين السطحين $Z = 9$, $Z = 25$

وداخل السطح $x^2 + y^2 = 25 - Z$

الحل :



مسقط الحجم على المستوى xy هو

$$x^2 + y^2 = 25 - 9$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

$$\Rightarrow r : 0 \to 4 \;\; \& \;\; \theta : 0 \to 2\pi$$

نستخدم الاحداثيات الاسطوانيه

$$\text{الحجم} = \iiint_V dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{4} \int_9^{25-x^2-y^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{4} \int_9^{25-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{4} r(25 - r^2 - 9) \, dr \, d\theta$$

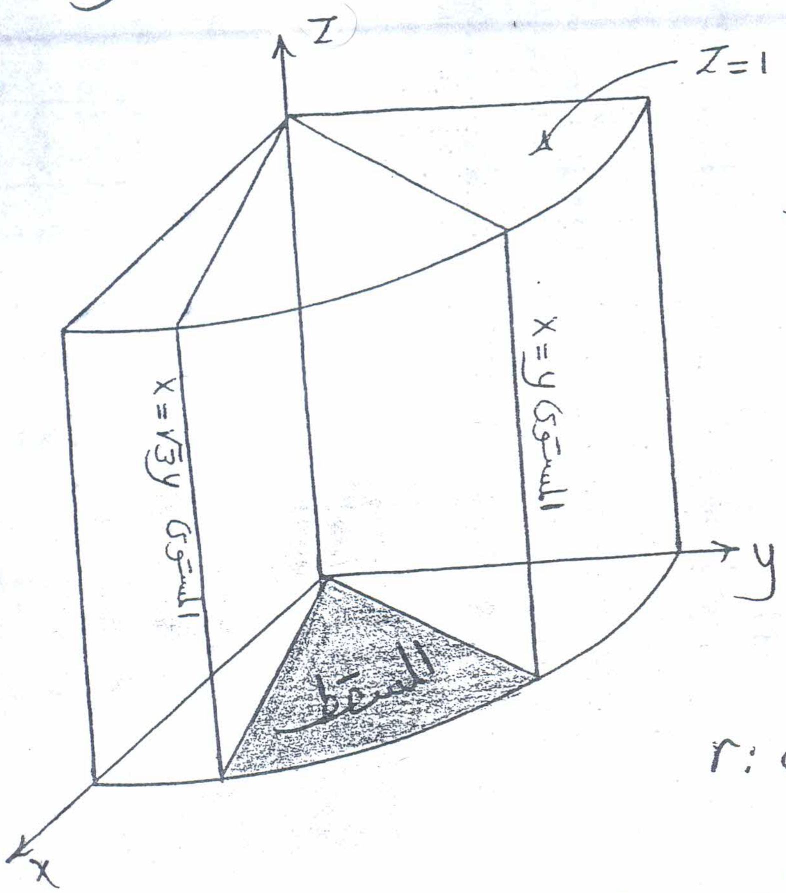
$$= \int_0^{2\pi} 16\left(\frac{r^2}{2}\right) - \frac{r^4}{4} \Big|_0^4 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 64 \, d\theta = 128\pi$$

مثال :- استخدم الاحداثيات الاسطوانية لحساب التكامل

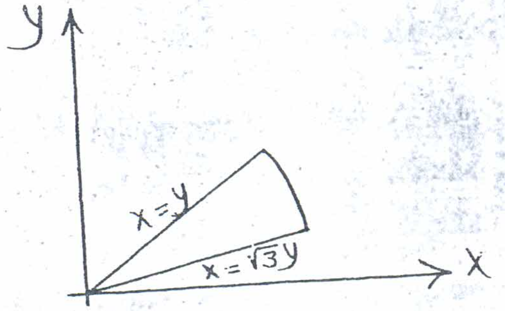
$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\; dV$$

حيث V هو الجسم الواقع في الثمن الاول ومحدد بـ $z=0$ ، $z=1$ ، $y=x$ ، $x=\sqrt{3}\,y$ ، $x^2+y^2=1$



الحل :-

من الرسم نجد أن مسقط الجسم على المستوى xy هو



$$r: 0 \to 1 \quad \& \quad \theta: \frac{\pi}{6} \to \pi/4$$

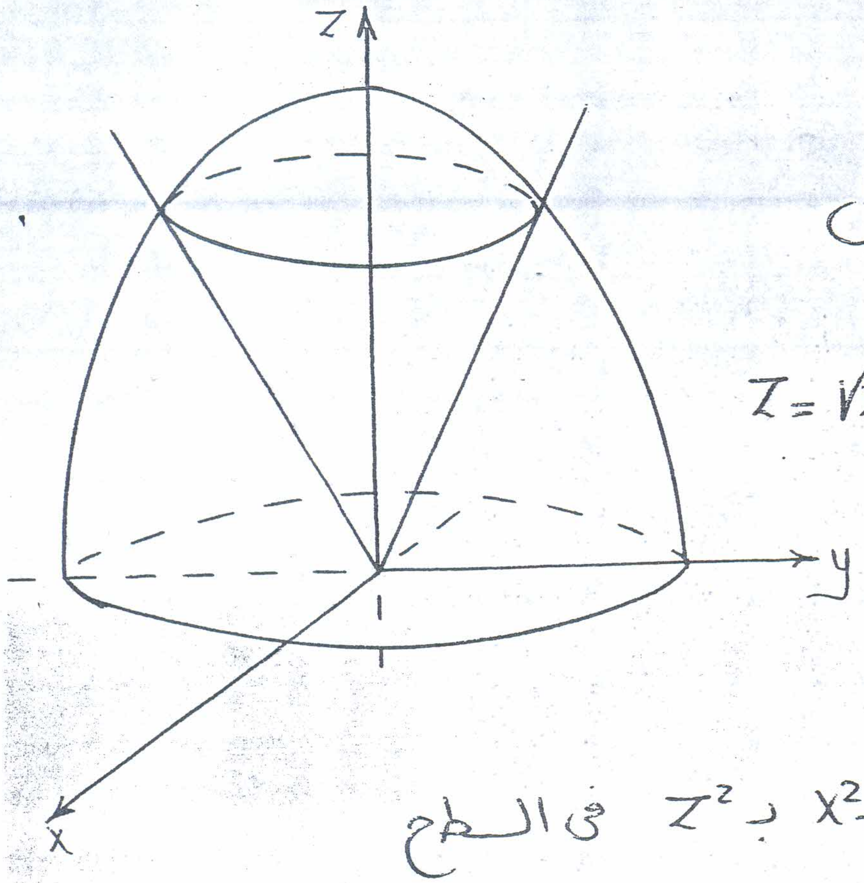
الجسم محدد من أسفل بالسطح $z=0$ ومن أعلى بـ $z=1$

$$\iiint = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^1\int_0^1 r \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^1 r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{36}$$

مثال : أوجد التكامل $\iiint_V xy\, dV$ حيث V هو الجسم الواقع أعلى المخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ وأسفل السطح
$$x^2+y^2+z=6$$



الحل :

نوجد دائرة التقاطع لحل المعادلتين

ملحوظة : المعادلة $z=\sqrt{x^2+y^2}$ تمثل النصف العلوى فقط من المخروط $(z^2=x^2+y^2)$

التقاطع : نعوض عن x^2+y^2 بـ z^2 فى السطح

$$x^2+y^2+z=6 \Rightarrow z^2+z-6=0 \Rightarrow$$

$$(z+3)(z-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=2 \Rightarrow x^2+y^2=4 \\ z=-3 \Rightarrow \text{مرفوضه} \end{cases}$$

نستخدم الاحداثيات الاسطوانيه

$$\iiint_V xy\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{6-r^2} r^2\sin\theta\cos\theta \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \sin\theta\cos\theta\,(6r^3-r^5-r^4)\, dr\, d\theta$$

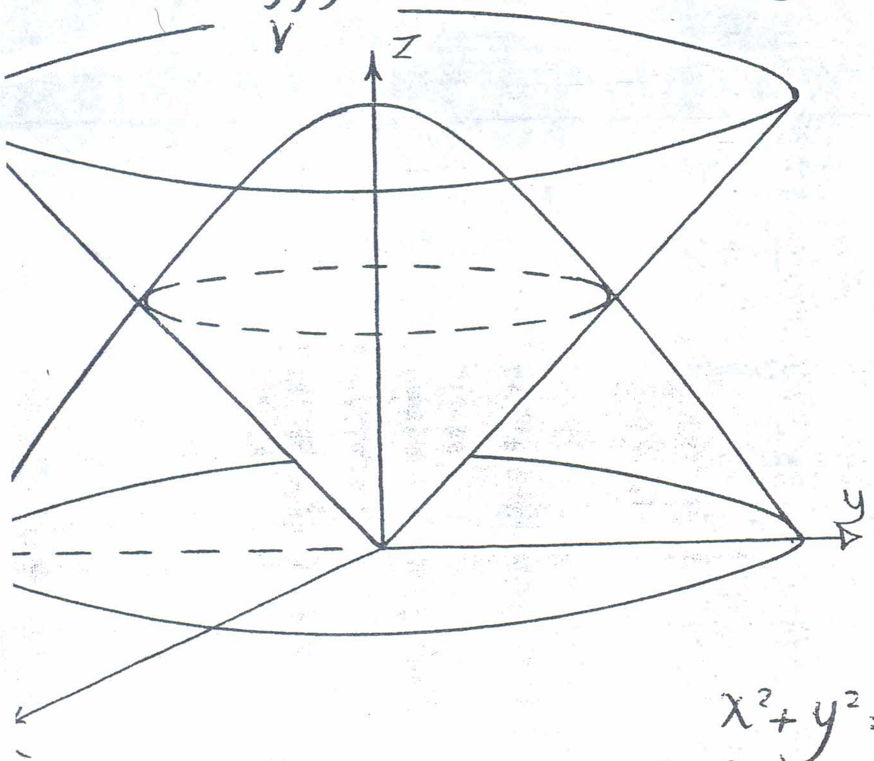
$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\left(\frac{104}{15}\right) d\theta = \left(\frac{104}{15}\right)\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = \text{Zero}$$

مثال :- أوجد وزن الجسم المحدد من أسفل بالمخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$

ومن أعلى بالسطح $x^2+y^2+z=6$ ، إذا كانت

الكثافة $= k$ ، k ثابت

الحل :- الكثافة $= k \Leftarrow$ الوزن $= \iiint_V k\, dV$



- تقاطع السطحين هو

قطعه على المستوى xy

$x^2+y^2 = z^2$ &

$x^2+y^2+z=6$

$\Rightarrow z^2+z-6=0$

$z=-3$ & $z=2$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$x^2+y^2=9$ $\qquad$ $x^2+y^2=4$

$$\text{الوزن} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} k\, dz\,(r\,dr\,d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{6-r^2} k\,r\, dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} kr(6-r^2-r)\,dr\,d\theta$$

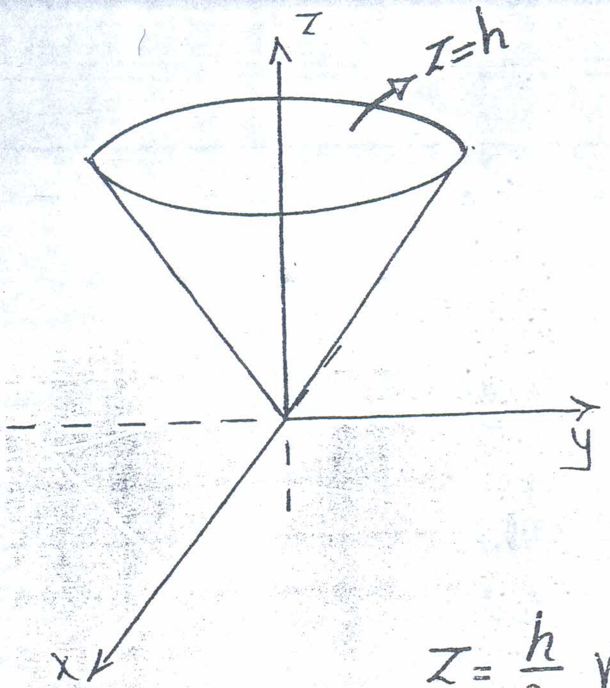
$$= \int_0^{2\pi} k\left(3r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^2\, d\theta \qquad = \frac{20}{3}k(2\pi)$$

مثال :- أستخدم التكامل الثلاثي لإيجاد حجم المخروط

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{h^2}$$

الواقع أعلى المستوى $z=0$ و أسفل المستوى $z=h$

الحل :-



مسقط الحجم المطلوب على المستوى xy هو دائرة نصف قطرها a

$\Leftarrow$ نستخدم الاحداثيات الاسطوانية

$$dv = r\,dz\,dr\,d\theta$$

الحجم محدد من أعلى بالمستوى $z=h$

ومن أسفل بالسطح $z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$

حدود التكامل كالتالي : $r: 0\to a$, $z: \frac{h}{a}r\to h$

$\&\ \theta: 0\to 2\pi$

$$V=\iiint_V dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int^{h} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\left(h-\frac{hr}{a}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} h\left(\frac{a^2}{2}\right)-\frac{h}{a}\left(\frac{a^3}{3}\right)\,d\theta \quad = \int_0^{2\pi}\frac{ha^2}{6}\,d\theta$$

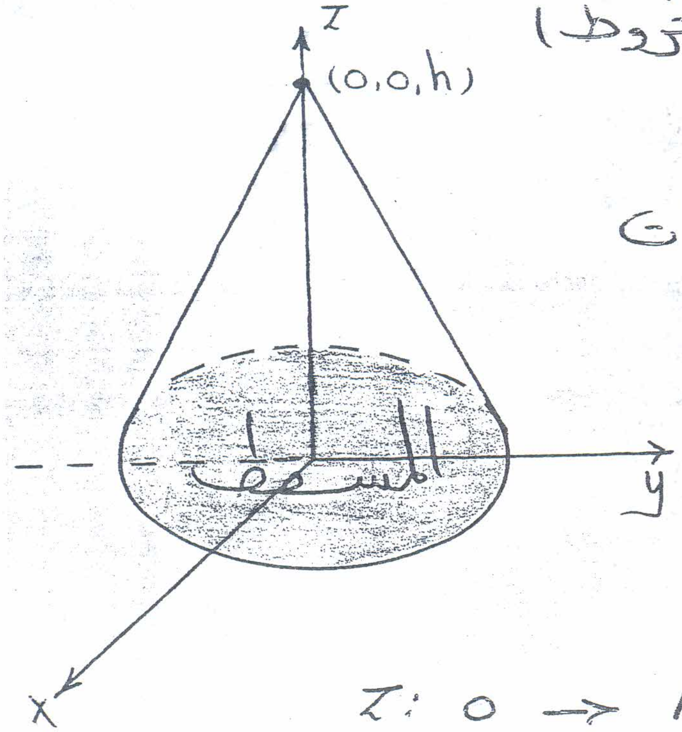
$$=\frac{\pi h a^2}{3}$$

مثال: إستخدم التكامل الثلاثى لإيجاد الحجم المحدد بالمخروط $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{(h-z)^2}{h^2}$ الذى رأسه $(0,0,h)$ و المستويين

$$z=h \quad , \quad z=0$$

الحل: السطح $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{(h-z)^2}{h^2} \Leftarrow x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}(h-z)^2$

يرسم فى المستوى xy دائره نصف قطرها a وفى المستوى $z=h$ يكون نقطه (رأس المخروط)



- مسقط الحجم على المستوى xy هو دائره ⟸ نستخدم الاحداثيات الاسطوانيه حيث

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$r: 0 \to a \quad \& \quad \theta: 0 \to 2\pi$$

$$z: 0 \to h-\sqrt{\frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)} = h-\frac{h}{a}r$$

$$\text{الحجم} = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h-\frac{h}{a}r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\left(h-\frac{h}{a}r\right) dr\,d\theta$$

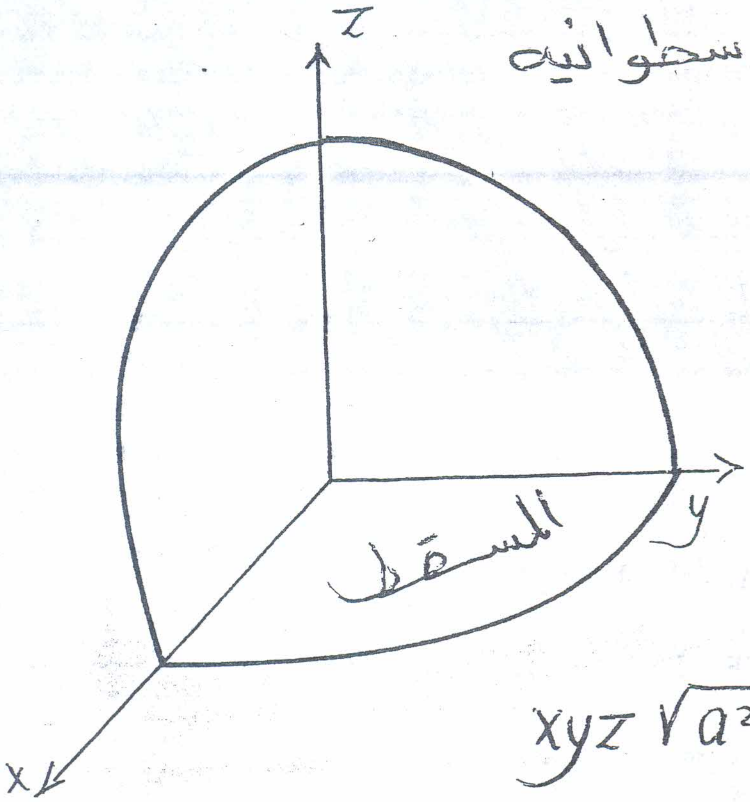
$$= \int_0^{2\pi} h\left(\frac{a^2}{2}\right)-\frac{h}{a}\left(\frac{a^3}{3}\right) d\theta \quad = \int_0^{2\pi}\frac{1}{6}ha^2\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\pi h a^2$$

مثال أوجد التكامل $\iiint_V xyz\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}\, dv$ حيث

V هو الثمن الموجب من الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$

الحل



نستخدم الاحداثيات الاسطوانيه

$$Z: 0 \to \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow Z: 0 \to \sqrt{a^2-r^2}$$

$$r: 0 \to a \ \& \ \theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$$

$$dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$

دالة التكامل $xyz\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$

$$= r^2 Z \sin\theta \cos\theta \sqrt{a^2-r^2-z^2}$$

$$\iiint = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^3 Z \sin\theta \cos\theta \sqrt{a^2-r^2-z^2}\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r^3 \sin\theta\cos\theta \cdot \left(-\frac{1}{2}\cdot \frac{(a^2-r^2-z^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{\sqrt{a^2-r^2}}\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} \frac{1}{3} r^3 \sin\theta \cos\theta \cdot (a^2-r^2)^{3/2}\, dr\, d\theta$$

نستخدم التعويض $r = a\sin\phi$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^7 \sin^3\phi \cos^4\phi \cdot \sin\theta\cos\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{a^7}{105}$$

مثال: أوجد dy/dx إذا كان $x^y + y^x = 1$

الحل: الدالــه المعطاه ضمنيــه $F = x^y + y^x - 1 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{yx^{y-1} + y^x \ln y}{x^y \ln x + xy^{x-1}}$$

مثال: أوجد النهايات القصوى للدالــه

$$f(x,y) = 2x^3 - (x-y)^2 - 6y$$

الحل: نوجد النقط الحرجه بحل المعادلتين

$$f_x = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2(x-y) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}(x-y) \rightarrow ①$$

$$f_y = 0 \Rightarrow 2(x-y) - 6 = 0 \Rightarrow x - y = 3 \rightarrow ②$$

نعوض بـ ② في ① $\Leftarrow$ $x^2 = 1$ $\Leftarrow$ $x = \pm 1$

النقط الحرجه هي $(1,-2)$ & $(-1,-4)$

$f_{xx} = 12x - 2$ $\qquad f_{yy} = -2$ $\qquad f_{xy} = 2$

at $(1,-2)$: $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = -ve < 0 \Rightarrow$ Saddle Point

at $(-1,-4)$: $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = +ve > 0$ & $f_{xx} < 0$

نهايه عظمى محليــه حيث $f_{max} = 13$

مثال:- أوجد النهايات القصوى المحلية للدالة

$$Z = y^3 - 2(x-y)^2 - 3y + 1$$

الحل: نوجد النقط الحرجة بحل المعادلتين

$$Z_x = 0 \Rightarrow -4(x-y) = 0 \Rightarrow x = y \rightarrow (1)$$

$$Z_y = 0 \Rightarrow 3y^2 + 4(x-y) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\& \; x = \pm 1$$

النقط الحرجة هي $(1,1)$, $(-1,1)$

$$Z_{xx} = -4 \quad , \quad Z_{xy} = 4 \quad \& \quad Z_{yy} = 6y - 4$$

$$\text{at } (1,1): \quad Z_{xx} Z_{yy} - Z_{xy}^2 = -4(2) - 16 < 0$$

Saddle Point

$$\text{at } (-1,-1): \quad Z_{xx} Z_{yy} - Z_{xy}^2 = -4(-10) - 16 > 0$$

$\& \; Z_{xx} < 0 \Rightarrow$ نهايه عظمى محليه

$$f_{max}(-1,-1) = 3$$

مثال: أوجد أقصر بعد من النقطة $(1,2,3)$ الى المستوى

$$x+y-z=1$$

الحل: البعد من النقطة $(1,2,3)$ الى أى نقطة

(x,y,z) هو $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$ وإذا

كانت النقطة (x,y,z) على المستوى $x+y-z=1$

$$\Rightarrow z = x+y-1$$

فيكون البعد هو $f = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(x+y-4)^2}$

ونريد أن نجعله أصغر ما يمكن:

نوجد النقط الحرجة بحل المعادلتين

$$f_x = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 2(x+y-4) = 0$$

$$\Rightarrow 2x+y=5 \rightarrow ①$$

$$f_y = 0 \Rightarrow 2(y-2) + 2(x+y-4) = 0$$

$$\Rightarrow x+2y=6 \rightarrow ②$$

بحل ①، ② نوجد النقطة الحرجة التي تقع على المستوى وتحقق أقصر بعد عن النقطة $(1,2,3)$

$$① \,\&\, ② \Rightarrow x = 4/3 \quad \& \; y = \frac{7}{3} \Rightarrow z = 1/3$$

$$\Rightarrow f_{min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال : أوجد أقرب نقط السطح $xyz=4$ الى $(1,0,0)$

الحل : نريد أن نجعل دالة المسافة أصغر ما يمكن

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$$

وبما أن النقطة (x,y,z) على السطح $xyz=4 \Leftarrow$

$$z=\frac{4}{xy} \Rightarrow d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+\frac{16}{x^2y^2}} \longrightarrow \text{I}$$

نوجد النقط الحرجة $d_x=0$ & $d_y=0$

$$d_x=0 \Rightarrow 2(x-1)-\frac{32}{x^3y^2}=0 \Rightarrow x^3y^2(x-1)=16 \longrightarrow 1$$

$$d_y=0 \Rightarrow 2y-\frac{32}{x^2y^3}=0 \Rightarrow x^2y^4=16$$

$$\Rightarrow y^4=\frac{16}{x^2} \Rightarrow y^2=\pm\frac{4}{x} \longrightarrow 2$$

نعوض في 1 ب 2 $\Leftarrow x^2(x-1)=\pm 4$

$$x^3-x^2-4=0 \qquad\qquad x^3-x^2+4=0$$

$$x=2 \qquad\qquad x=-1.3146$$

$$y=\pm\sqrt{2} \qquad\qquad y=\pm\sqrt{3.043}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

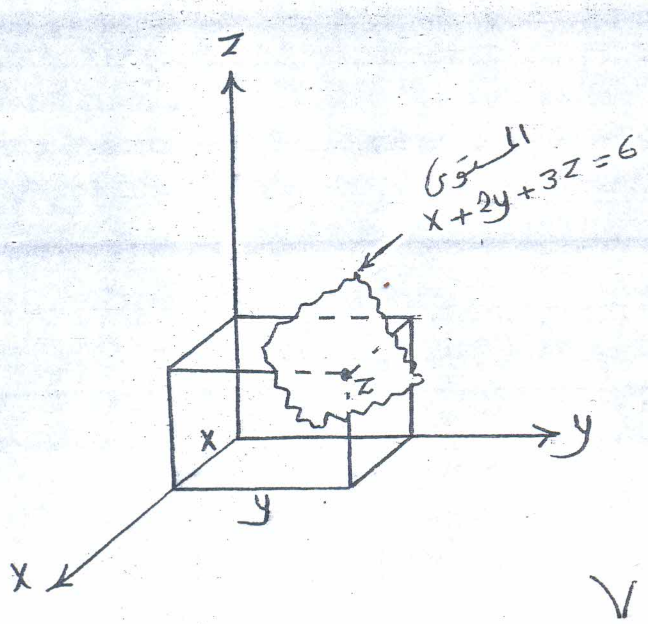
$$d=\sqrt{5} \qquad\qquad d=\sqrt{11.44}$$

أصغر بعد يحدث عند $(2,\pm\sqrt{2})$ والبعد $=\sqrt{5}$

مثال : أوجد أبعاد صندوق ذات أكبر حجم و الذي يقع

في الثمن الاول و ثلاث أضلاع له على محاور الاحداثيات

و أحد رؤوسه تقع في المستوى $x+2y+3z=6$



الحل :

حجم الصندوق $= \quad V = xyz$

بما أن أحد رؤوسه تقع في مستوى

$\Leftarrow$ لدينا $x+2y+3z=6$

* الطريقة الاولى

$$V = xyz = xy\left(\frac{6-x-2y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(6xy - x^2y - 2xy^2\right)$$

- نوجد النقط الحرجة :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow 6y - 2xy - 2y^2 = 0 \Rightarrow y(3-x-y) \rightarrow ①$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow 6x - x^2 - 4xy = 0 \Rightarrow x(6-x-4y) = \rightarrow ②$$

- من المعادلة ①

$y = 0$

$\downarrow ②$

$x(6-x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 6$

$y = 3-x$

$\downarrow ②$

$x(3x-6) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad x = 2$

$y = 3 \quad y = 1$

الحل الوحيد الغير مرفوض هو $x = 2$, $y = 1$ $\Longrightarrow z = \frac{2}{3}$

* الطريقة الثانية : باستخدام معاملات لاجرانج

الدالة المساعدة $= h = xyz + \lambda(x + 2y + 3z - 6) = 0$

$h_x = 0 \Rightarrow yz + \lambda = 0$ ①

$h_y = 0 \Rightarrow xz + 2\lambda = 0$ ②

$h_z = 0 \Rightarrow xy + 3\lambda = 0$ ③

$h_\lambda = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z - 6 = 0$ ④

② - 2① $\Rightarrow z(x - 2y) = 0 \Rightarrow z = 0$ or $x = 2y$
مرفوض

③ - 3① $\Rightarrow y(x - 3z) = 0 \Rightarrow y = 0$ or $x = 3z$
مرفوضة

$x = 2 \Leftarrow x + x + x = 6 \Leftarrow$ ④ بالتعويض فى

$y = 1$

$z = 2/3$

* ابعاد الصندوق هى $(2, 1, 2/3)$ و حجمه $4/3$

مثال :- إذا كانت درجه الحراره لأى نقطه (x, y, z) على سطح الكره $x^2+y^2+z^2=4$ هى $T=100xy^2z$. أوجد اكبر واصغر درجه حراره على سطح الكره .

الحل :-

* الطريقه الاولى :-

على سطح الكره $x^2+y^2+z^2=4$ لدينا $y^2=4-x^2-z^2$

فتكون درجه الحراره

$$T=100xz(4-x^2-z^2)$$

$$T=400xz-100x^3z-100xz^3$$

- نوجد النقط الحرجه

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \Rightarrow 400z-300x^2z-100z^3=0$$

$$\Rightarrow z(4-3x^2-z^2)=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=0 \Rightarrow 400x-100x^3-300xz^2=0$$

$$\Rightarrow x(4-x^2-3z^2)=0 \quad (2)$$

من المعادله (1)

$z=0$

$\xrightarrow{(2)}$ $x(4-x^2)=0$

$\Rightarrow x=0$ or $x^2=4$

$z^2=4-3x^2$

$\xrightarrow{(2)}$ $x(4-x^2-12+9x^2)=0$

$x=0$ or $x^2=1$

$z^2=4$ $\quad$ $z^2=1$

النقط الحرجه $(x=0, z=\pm 2)$ $(x=\pm 1, z=\pm 1)$

$(x=0, z=0)$ $(x=\pm 2, z=0)$

$T_{xx} = -600xz$, $T_{zz} = -600xz$,

$T_{xz} = 400 - 300x^2 - 300z^2$ & $D = T_{xx}T_{zz} - (T_{xz})^2$

x	z	D
0	2	$<0 \Rightarrow$ Saddle
0	-2	$<0 \Rightarrow$ Saddle
1	1	>0 & $T_{xx}<0 \Rightarrow$ عظمى $\Rightarrow T = 200$
1	-1	>0 & $T_{xx}>0 \Rightarrow$ صغرى $\Rightarrow T = -200$
-1	1	>0 & $T_{xx}>0 \Rightarrow$ صغرى $\Rightarrow T = -200$
-1	-1	>0 & $T_{xx}<0 \Rightarrow$ عظمى $\Rightarrow T = 200$
0	0	$<0 \Rightarrow$ Saddle
2	0	$<0 \Rightarrow$ Saddle
-2	0	$<0 \Rightarrow$ Saddle

* الطريقه الثانيـــه

$$h = 100xy^2z + \lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

$h_x = 0 \Rightarrow 100y^2z + 2x\lambda = 0$ ①

$h_y = 0 \Rightarrow 200xyz + 2y\lambda = 0$ ②

$h_z = 0 \Rightarrow 100xy^2 + 2z\lambda = 0$ ③

$h_\lambda = 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-4 = 0$ ④

$$②*x - ①*y \Rightarrow 200x^2yz - 100y^3z = 0$$

$$\Rightarrow yz(2x^2 - y^2) = 0 \quad ⑤$$

$$②*z - ③*y \Rightarrow 200xyz^2 - 100xy^3 = 0$$

$$\Rightarrow xy(2z^2 - y^2) = 0 \quad ⑥$$

من المعادلـــه ⑤

- $y = 0$
  - $\downarrow$ $T = 0$
- $z = 0$
  - $\downarrow ⑥$ $x = 0$ or $y = 0$
    - $x = 0 \xrightarrow{④} y = \pm 2 \Downarrow T = 0$
    - $y = 0 \xrightarrow{④} x = \pm 2$
- $y^2 = 2x^2$
  - $\downarrow ⑥$ $x = 0 \Rightarrow y = 0$ $(T = 0)$
  - or $2z^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2z^2$
    - $\downarrow ④$ $x^2 + 2x^2 + x^2 = 4$
    - $\Downarrow$ $4x^2 = 4$
      - $x = 1$
        - $z = 1$
          - $y = \sqrt{2}$, $T = 200$ عظمى
          - $y = -\sqrt{2}$, $T = 200$ عظمى
        - $z = -1$
          - $y = \sqrt{2}$, $T = -200$ صغرى
          - $y = -\sqrt{2}$, $T = -200$ صغرى
      - $x = -1$
        - $z = 1$
          - $y = \sqrt{2}$, $T = -200$ صغرى
          - $y = -\sqrt{2}$, $T = -200$ صغرى
        - $z = -$
          - $y = \sqrt{2}$, $T = 200$ عظمى
          - y … T …

مثال أوجد أقرب نقطة على المخروط $z^2 = x^2+y^2$ للنقطة $(4,2,0)$

الحل :-

* نفرض هذه النقطة (x,y,z) ⇐ بعدها عن $(4,2,0)$

$$d = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+z^2} \Rightarrow d^2 = (x-4)^2+(y-2)^2+z^2$$

- الطريقة الاولى

$$f = d^2 = (x-4)^2+(y-2)^2+z^2$$
$$= (x-4)^2+(y-2)^2+x^2+y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \Rightarrow 2(x-4)+2x = 0 \Rightarrow x = 2 \\ f_y = 0 \Rightarrow 2(y-2)+2y = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{نقطة حرجة}$$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (4)(4) - 0 > 0 \xrightarrow{f_{xx} > 0} (\text{نقطة صغرى})$$

النقطة $(2,1,\pm\sqrt5)$ هي الاقرب ولها $d = \sqrt{10}$

- الطريقة الثانية (Lagrange)

$$h = (x-4)^2+(y-2)^2+z^2 + \lambda(x^2+y^2-z^2)$$

$$h_x = 0 \Rightarrow 2(x-4)+2x\lambda = 0 \quad ①$$

$$h_y = 0 \Rightarrow 2(y-2)+2y\lambda = 0 \quad ②$$

$$h_z = 0 \Rightarrow 2z - 2\lambda z = 0 \Rightarrow 2z(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$h_\lambda = 0 \Rightarrow x^2+y^2-z^2 = 0 \quad ③$$

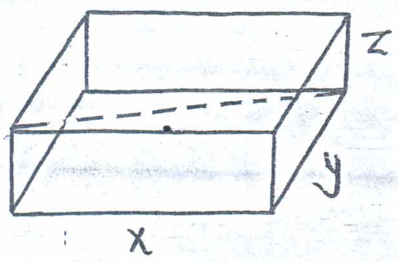
$$\text{if } z = 0 \xrightarrow{③} x = 0,\ y = 0 \xrightarrow{① \text{ or } ②} \text{مرفوضة}$$

$$\text{if } \lambda = 1 \xrightarrow[②]{①} x = 2,\ y = 1 \xrightarrow{③} \begin{cases} z = \sqrt5 \Rightarrow d = \sqrt{10} \\ z = -\sqrt5 \Rightarrow d = \sqrt{10} \end{cases}$$

مثال: إذا كان قطر صندوق يساوي $\sqrt{300}$ ، أوجد أبعاد الصندوق بحيث يكون له أكبر حجم.

الحل

قطر الصندوق هو $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$



$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=300$$

حجم الصندوق هو $V=xyz$

- نستخدم معاملات لاجرانج

$$h=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-300)$$

$$h_x=0 \Rightarrow yz+2\lambda x=0 \quad (1)$$

$$h_y=0 \Rightarrow xz+2\lambda y=0 \quad (2)$$

$$h_z=0 \Rightarrow xy+2\lambda z=0 \quad (3)$$

$$h_\lambda=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=300 \quad (4)$$

$$(2)*x-(1)*y \Rightarrow x^2z-y^2z=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 & \text{مرفوض} \\ y=x \end{cases}$$

$$(3)*x-(1)*z \Rightarrow x^2y-yz^2=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 & \text{مرفوض} \\ z=x \end{cases}$$

بالتعويض في (4) $\Leftarrow 3x^2=300 \Leftarrow x=10$

$y=10$

$z=10$

- أكبر حجم هو $V=1000$