

Caio Sérgio Calçada • José Luiz Sampaio

FÍSICA

CLÁSSICA

1

MECÂNICA



Caio Sérgio Calçada • José Luiz Sampaio

FÍSICA

CLÁSSICA

1

MECÂNICA

1ª edição



© Caio Sérgio Calçada
José Luiz Sampaio

Copyright desta edição:

SARAIVA S. A. Livros Editores, São Paulo, 2012
Rua Henrique Schaumann, 270 – Pinheiros
05413-010 – São Paulo – SP

SAC | 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Calçada, Caio Sérgio
Física clássica, 1: mecânica / Caio Sérgio Calçada, José
Luiz Sampaio. — 1. ed. — São Paulo: Atual, 2012.

Suplementado pelo manual do professor.

Bibliografia.

ISBN 978-85-357-1552-1 (aluno)

ISBN 978-85-357-1553-8 (professor)

1. Física (Ensino médio) I. Sampaio, José Luiz. II. Título.

12-10620

CDD-530.07

Índice para catálogo sistemático:

1. Física : Ensino médio 530.07

Gerente editorial: Lauri Cericato

Editor: José Luiz Carvalho da Cruz

Editores-assistentes: Tomas Masatsugui Hirayama/Solange Martins/

Alexandre Sanchez/Cátia Akisino

Preparação de texto: Solange Martins

Auxiliares de serviços editoriais: Rafael Rabaçal Ramos/Eduardo Oliveira Guaitoli/

Guilherme Gaspar/Daniella Haidar Pacifico/Margarete Aparecida de Lima

Digitação e cotejo de originais: Elgo W. P. de Mello/Rosana de Angelo/Vania Maria Biasi/

Guilherme Gaspar/Eliana Akisino/Elillyane Kaori Kamimura/Kendy Baglioni Haibara

Coordenadora de iconografia: Cristina Akisino

Pesquisa iconográfica: Enio Lopes

Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Luciana Azevedo/Maura Loria/

Eduardo Sigrist/Elza Gasparotto/Aline Araújo/Patricia Cordeiro/Rhennan Santos/Gabriela Moraes

Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa

Assessoria de arte: Maria Paula Santo Siqueira

Assistente de produção e arte: Grace Alves

Projeto gráfico e capa: Ulhôa Cintra Comunicação Visual

Ilustrações: Alberto De Stefano/Conceitograf/Luiz Augusto Ribeiro/Luiz Fernando Rubio

Marcos Aurélio Neves Gomes/Rafael Herrera/Rodval Matias/Zapt

Diagramação: Zapt Editora Ltda.

Coordenação de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves

725.220.001.003

Impressão e Acabamento:

Visite nosso site: www.atualeditora.com.br
Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

O material de publicidade e propaganda reproduzido nesta obra está sendo utilizado para fins didáticos, não representando qualquer tipo de recomendação de produtos ou empresas por parte dos autores e da editora.

Apresentação

Apresentamos a **nova edição** da obra **Física Clássica**, destinada a alunos do ensino médio. Em relação às edições anteriores, esta apresenta algumas alterações.

Em primeiro lugar, os cinco volumes da coleção foram totalmente revisados e redimensionados para esta NOVA VERSÃO em **três volumes**, respondendo a um pedido dos professores adotantes. Com isso pretende-se acompanhar a seriação habitual do ensino médio de três anos, facilitando o trabalho cotidiano de alunos e professores. Para evitar que assuntos e exercícios importantes fossem excluídos, cada volume é acompanhado de um CD-ROM contendo *complementos de teoria, leituras e exercícios complementares*.

Em segundo lugar, foi acrescentado o assunto **Física Moderna**, que está sendo exigido em vários vestibulares de todo o país.

Em terceiro lugar, o assunto **Análise Dimensional** foi dividido ao longo dos três volumes, já a partir do capítulo 1 do volume 1. No segundo volume, há um apêndice mostrando como a Análise Dimensional pode ser usada para prever fórmulas.

Em quarto lugar, foram acrescentados vários itens e leituras sobre:

- aplicações tecnológicas;
- análise de fenômenos naturais;
- descrições de experimentos fundamentais;
- história da Física.

Finalmente, quase todos os capítulos foram reformulados, muitos tipos de exercícios foram acrescentados, os exercícios de vestibulares foram atualizados e foram incluídas questões do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio).

As características básicas da obra **Física Clássica** foram mantidas. Entre elas podemos citar:

- a obra é completa e abrange todo o conteúdo do Ensino Médio;
- a teoria é bastante detalhada e aprofundada;
- a linguagem é simples, sem perder o rigor;
- há um grande número de exercícios resolvidos e propostos que se dividem em: *exercícios de aplicação*, *exercícios de reforço* e *exercícios de aprofundamento*;
- em cada capítulo há várias séries de exercícios de aplicação e de reforço; todavia, os de aprofundamento formam uma série que é apresentada no final do capítulo;
- em cada volume, além do sumário geral, organizamos um **índice remissivo** ao final.

A distribuição dos assuntos pelos **três volumes** (incluindo os CDs) é a seguinte:

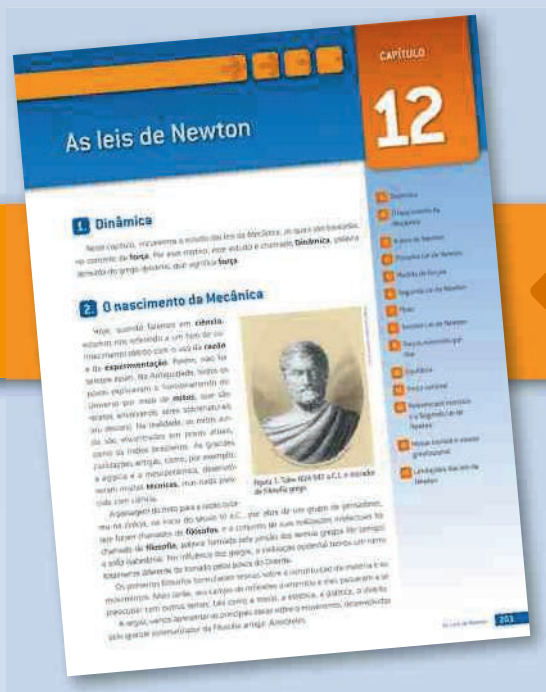
- Volume 1: Mecânica (incluindo Fluidomecânica e Gravitação);
- Volume 2: Termologia, Óptica e Ondas;
- Volume 3: Eletricidade e Física Moderna.

Sugestões e críticas a respeito desta obra serão bem-vindas e podem ser enviadas diretamente à Editora.

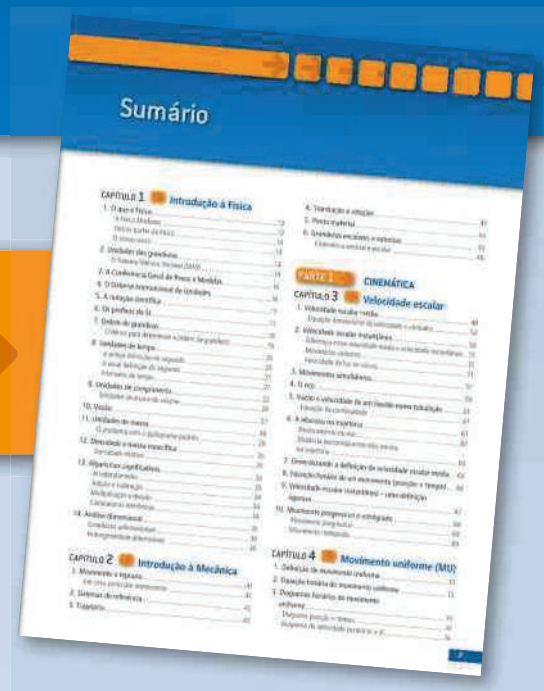
Os autores

Conheça sua obra

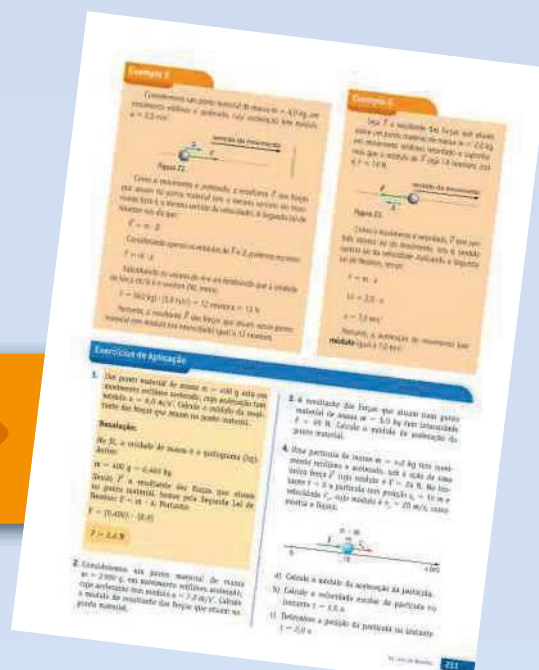
Antes de começar o estudo vamos apresentar a coleção a você. Ela compreende três volumes, sendo a estrutura de cada livro composta por: partes, capítulos, exemplos e exercícios. Os exercícios estão agrupados em três blocos: de **aplicação**, de **reforço** e de **aprofundamento**.



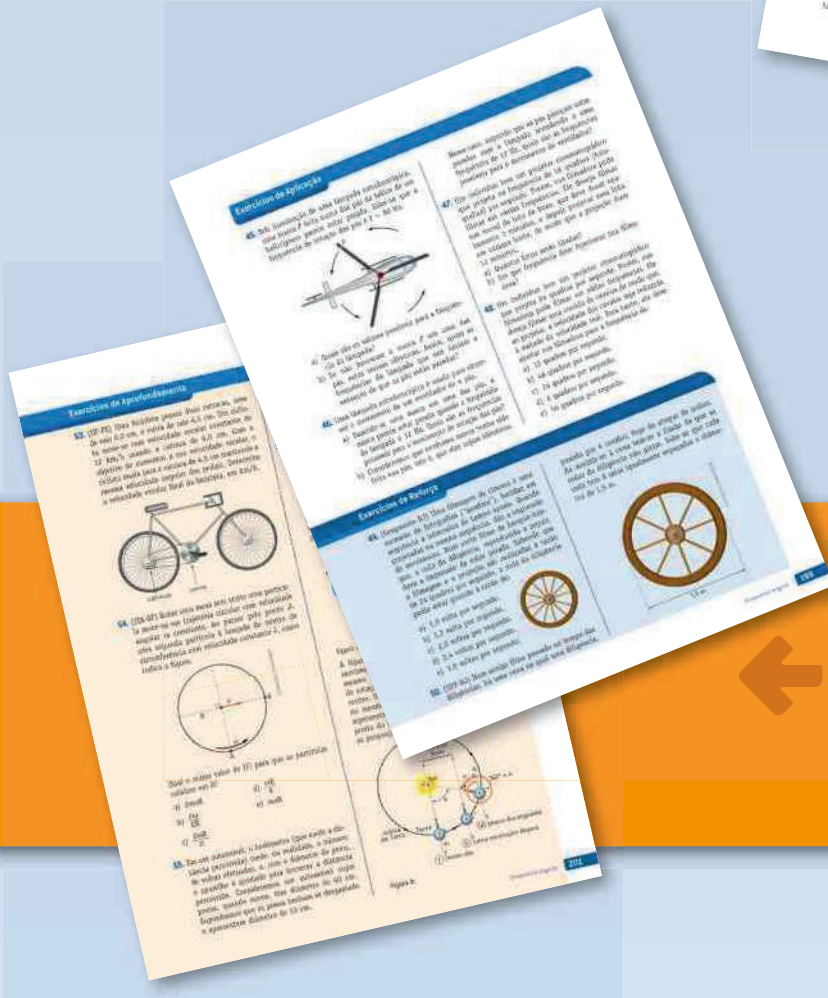
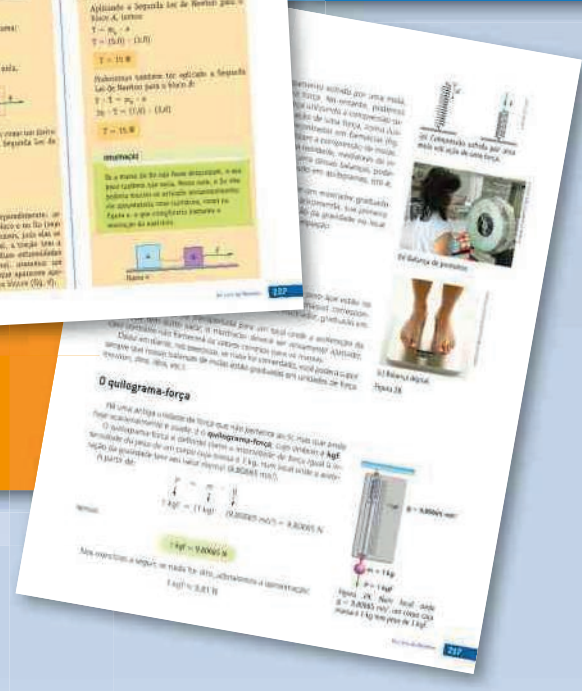
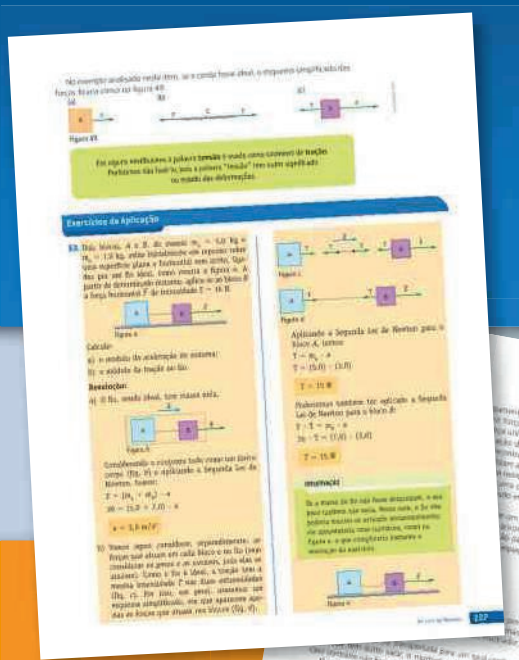
O texto procura elucidar todos os pontos conceituais com clareza e profundidade. A linguagem rigorosa do ponto de vista físico utiliza inúmeros EXEMPLOS visando facilitar a sua compreensão.



A abertura sinaliza, por meio do título em destaque, o assunto que será tratado no capítulo. À direita um pequeno SUMÁRIO local apresenta os tópicos abordados no capítulo.



O boxe OBSERVAÇÃO orienta e traz dicas. Nos espaços laterais destacam-se elementos GRÁFICOS e variadas ILUSTRAÇÕES cuja principal função é enriquecer, explicar e contextualizar conceitos e fenômenos descritos pelos autores.

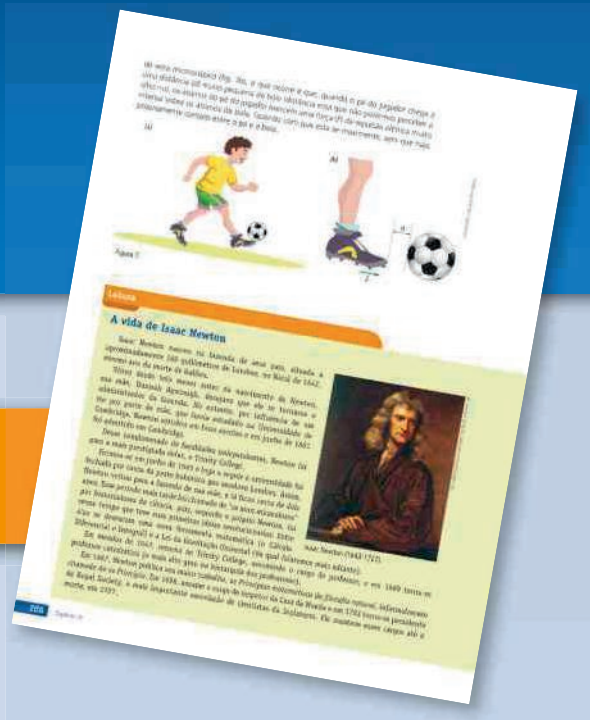


A obra é muito rica na qualidade e quantidade de EXERCÍCIOS, divididos em três grupos: **aplicação**, **reforço** e **aprofundamento**. Para cada tipo de exercício proposto há sempre um exercício resolvido semelhante.

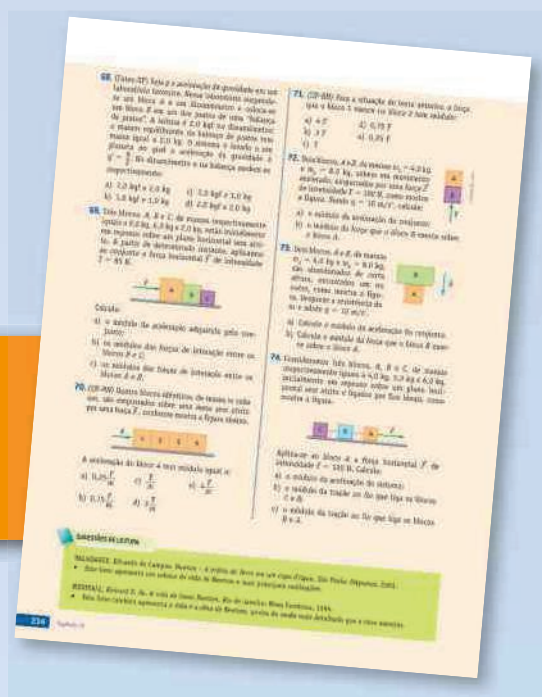
Há também o boxe LEITURA, em que detalhes de uma inovação tecnológica ou uma biografia são apresentados.



Em certos momentos você encontrará um boxe com SUGESTÕES DE LEITURA. Caso você tenha interesse em se aprofundar no tema, procure uma biblioteca ou livreria e aproveite as indicações.



Em certas páginas, o boxe PROCURE NO CD orienta para a leitura de novos textos e para a execução de exercícios complementares selecionados especialmente para alunos que já adquiriram alguma autonomia no estudo da Física e que desejam novos desafios.



Sumário

CAPÍTULO 1 Introdução à Física

1. O que é Física	12
A Física Moderna	13
Outras partes da Física	14
O nosso curso	14
2. Unidades das grandezas	14
O Sistema Métrico Decimal (SMD)	14
3. A Conferência Geral de Pesos e Medidas	16
4. O Sistema Internacional de Unidades	16
5. A notação científica	17
6. Os prefixos do SI	17
7. Ordem de grandeza	19
Critérios para determinar a ordem de grandeza	19
8. Unidades de tempo	20
A antiga definição do segundo	20
A atual definição do segundo	21
Intervalos de tempo	21
9. Unidades de comprimento	22
Unidades de área e de volume	24
10. Vazão	27
11. Unidades de massa	28
O problema com o quilograma-padrão	29
12. Densidade e massa específica	30
Densidade relativa	31
13. Algarismos significativos	32
Arredondamento	33
Adição e subtração	34
Multiplicação e divisão	34
Calculadoras eletrônicas	34
14. Análise dimensional	35
Grandezas adimensionais	36
Homogeneidade dimensional	36

CAPÍTULO 2 Introdução à Mecânica

1. Movimento e repouso	41
Um caso particular interessante	41
2. Sistemas de referência	42
3. Trajetória	42

4. Translação e rotação	43
5. Ponto material	44
6. Grandezas escalares e vetoriais	44
Cinemática vetorial e escalar	46

PARTE 1 CINEMÁTICA

CAPÍTULO 3 Velocidade escalar

1. Velocidade escalar média	49
Equação dimensional da velocidade e unidades	50
2. Velocidade escalar instantânea	50
Diferença entre velocidade média e velocidade instantânea	51
Movimento uniforme	51
Velocidade da luz no vácuo	51
3. Movimentos simultâneos	57
4. O eco	59
5. Vazão e velocidade de um líquido numa tubulação	61
Equação da continuidade	61
6. A abscissa na trajetória	63
Deslocamento escalar	63
Distância percorrida entre dois pontos na trajetória	63
7. Generalizando a definição de velocidade escalar média	64
8. Equação horária de um movimento (posição \times tempo)	66
9. Velocidade escalar instantânea – uma definição rigorosa	67
10. Movimento progressivo e retrógrado	69
Movimento progressivo	69
Movimento retrógrado	69

CAPÍTULO 4 Movimento uniforme (MU)

1. Definição de movimento uniforme	73
2. Equação horária do movimento uniforme	73
3. Diagramas horários do movimento uniforme	74
Diagrama posição \times tempo	74
Diagrama da velocidade escalar ($v \times t$)	74

4. Velocidade relativa	79
Definição de velocidade relativa.....	79
Uma regra prática para calcular a velocidade relativa	79
5. Cálculo do deslocamento escalar a partir do diagrama horário da velocidade.....	85

CAPÍTULO 5 Movimento uniformemente variado (MUV)

1. Aceleração escalar média	88
2. Equação dimensional da aceleração	88
Unidades de aceleração	88
3. Aceleração escalar instantânea	89
4. Movimento acelerado e movimento retardado.....	91
5. Os sinais algébricos da aceleração escalar e da velocidade escalar.....	91
6. Movimento uniformemente variado (MUV).....	93
7. A velocidade escalar no MUV.....	93
Diagramas horários da velocidade e da aceleração	93
8. Posição do móvel em função do tempo	94
Análise dimensional dos termos da equação.....	94
Diagrama horário posição \times tempo	94
9. Inversão de sentido do movimento	98
10. Equação de Torricelli.....	100
11. Cálculo do deslocamento escalar a partir do diagrama horário da velocidade.....	102
12. A equação horária da posição (demonstração).....	103
13. A velocidade escalar média no MUV	106

CAPÍTULO 6 Movimento vertical no vácuo

1. Queda livre	111
Equacionamento da queda livre	111
Equação horária da velocidade.....	112
Equação horária das ordenadas ou das posições	112
2. Lançamento vertical para cima.....	118
Equacionamento e discussão dos sinais algébricos da velocidade e da aceleração	118
Sinais algébricos da velocidade escalar	118
Sinais algébricos da aceleração escalar	118
Equações do lançamento vertical.....	119
Propriedades do lançamento vertical livre	119
3. Gráficos do movimento vertical no vácuo	123
Queda livre.....	123
Lançamento vertical para cima	123

CAPÍTULO 7 Diagramas horários

1. Introdução matemática	128
Revisão de Trigonometria	128
Coeficiente angular de uma reta	128
2. Determinação gráfica da velocidade escalar média.....	129
3. Determinação gráfica da velocidade escalar instantânea	129
Caso particular.....	130
4. Aceleração escalar	131
Caso geral.....	131
Caso particular.....	131

CAPÍTULO 8 Vetores

1. Grandezas escalares e grandezas vetoriais	142
2. Direção e sentido	142
3. Vetor	143
4. Igualdade de vetores	144
5. Adição de vetores	145
Casos particulares	145
Vetores de mesma direção e mesmo sentido	145
Vetores de mesma direção e sentidos opostos	145
Adição com o vetor nulo	145
Adição de mais de dois vetores	146
6. Regra do paralelogramo	146
7. Lei dos Cossenos e Lei dos Senos.....	146
Propriedade.....	147
8. Subtração de vetores.....	152
9. Multiplicação de um vetor por um número	155
10. Decomposição de um vetor	156

CAPÍTULO 9 Cinemática vetorial

1. Vetor deslocamento	161
2. Velocidade vetorial média.....	162
3. Velocidade vetorial instantânea	163
Alguns casos particulares	164
Movimento retilíneo uniforme	164
Movimento circular e uniforme	164
Movimento retilíneo uniformemente acelerado	165
Movimento retilíneo uniformemente retardado	165
Movimento circular uniformemente acelerado	165
4. Aceleração vetorial média.....	165
5. Aceleração vetorial instantânea	167
Trajetória retilínea.....	167
Trajetória curvilínea.....	167
Alguns casos particulares	168
Movimento retilíneo e uniforme.....	168
Movimento circular e uniforme	168
Movimento circular uniformemente acelerado	168

CAPÍTULO 10 Composição de movimentos

1. Composição de movimentos de mesma direção 172
1º caso: \vec{v}_{FS} e \vec{v}_{HF} têm a mesma direção e o mesmo sentido 173
2º caso: \vec{v}_{FS} e \vec{v}_{HF} têm a mesma direção e sentidos opostos 173
2. Composição de movimentos de direções quaisquer 176
3. Velocidade de um corpo em relação a outro 178

CAPÍTULO 11 Cinemática angular

1. Medidas de ângulos 182
2. Deslocamento angular 183
3. Velocidade angular 184
Velocidade angular e velocidade escalar 185
Equação horária da posição angular no MCU 186
4. Período e frequência 190
Relação entre o período, a frequência e as velocidades 190
Fenômenos periódicos 191
Satélites artificiais da Terra 191
5. Transmissão de movimento circular 194
6. Rolamento 195
7. A persistência retiniana e o efeito estroboscópico 198

PARTE 2 DINÂMICA

CAPÍTULO 12 As leis de Newton

1. Dinâmica 203
2. O nascimento da Mecânica 203
Aristóteles 204
Galileu 204
3. A obra de Newton 204
4. Primeira Lei de Newton 207
Referenciais inerciais 209
5. Medida de forças 209
6. Segunda Lei de Newton 210
Unidade de força 210
Movimentos acelerado e retardado 210
1º caso: \vec{F} tem o mesmo sentido da velocidade \vec{v} 210
2º caso: \vec{F} tem sentido oposto ao da velocidade \vec{v} 210
7. Peso 215
Dinamômetro 217
O quilograma-força 217
8. Terceira Lei de Newton 219
O dinamômetro e a Terceira Lei de Newton 222
O enunciado de Newton 222
9. Forças exercidas por fios 226
10. Equilíbrio 229

11. Força variável 230
12. Referenciais inerciais e a Segunda Lei de Newton 230
Referenciais não inerciais 231
13. Massa inercial e massa gravitacional 231
14. Limitações das leis de Newton 232

CAPÍTULO 13 Algumas aplicações das leis de Newton

1. Elevadores em movimento vertical 235
Elevador em queda livre 236
Caso em que o sentido de \vec{a} é para baixo e $a > g$ 238
2. Polia fixa 240
Uma utilidade para as polias 241
3. Decomposição de forças 245
Como escolher as direções de decomposição 246
1º caso: A partícula tem aceleração \vec{a} não nula 246
2º caso: A partícula tem aceleração nula, isto é, está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme 246
4. Plano inclinado 251

CAPÍTULO 14 Lançamento não vertical

1. Movimento de projéteis 259
2. Lançamento horizontal 260
Galileu e os projéteis 261
O Princípio de Relatividade 261
3. Lançamento oblíquo 264
Relação entre as velocidades 266
Retomando o Princípio de Relatividade 267
4. Estudo do alcance 272
Ângulos de lançamento complementares 273
5. Equações vetoriais do movimento de um projétil 274
6. Alcance máximo em geral 276
7. Galileu, Newton e a Lei da Inércia 277
8. Trajetórias possíveis com força resultante constante 278

CAPÍTULO 15 Forças de atrito

1. Atrito entre sólidos 283
2. Origem das forças de atrito 285
3. Atrito de rolamento 286
4. Força de atrito dinâmico 289
5. Força de atrito estático 291
Ângulo de atrito 293
6. Resistência dos fluidos 297

CAPÍTULO 16 Força elástica

1. Lei de Hooke 304
A mola ideal 306
Associação de molas 306

CAPÍTULO 17 Movimento plano em trajetória curva

1. Os efeitos de uma força	310
2. Componentes da força resultante	311
A componente tangencial	311
A resultante centrípeta	311
O módulo da força resultante	312
3. O movimento circular e uniforme	312
Inserindo a velocidade angular	313
4. A força centrífuga	326
Movimento circular e uniforme	326
Alguns exemplos de forças centrífugas	327
A força de Coriolis	328

CAPÍTULO 18 Trabalho e energia cinética

1. Energia cinética de uma partícula	332
Equação dimensional e unidade de energia	332
2. Trabalho de uma força constante	333
Trabalho de uma força constante – movimento retilíneo	334
Equação dimensional e unidade do trabalho	335
3. Trabalho da força peso	339
Movimento vertical	339
Movimento retilíneo e oblíquo	339
Combinando um movimento retilíneo horizontal com um movimento vertical	340
4. Trabalho de uma força constante em trajetória curva	340
Trabalho do peso em uma trajetória qualquer	341
5. Trabalho de uma força variável	344
Movimento em uma dimensão	344
6. Teorema da energia cinética	347
7. Trabalho da força elástica	353
8. Trabalho de uma força variável em trajetória curva	355
Trabalho de uma força centrípeta	356
Trabalho da força normal sobre um corpo que se desloca em superfície curva	356

CAPÍTULO 19 Energia e potência

1. Forças conservativas e não conservativas	361
Forças não conservativas	362
2. Energia potencial	362
3. Energia potencial gravitacional	364
Nível de referência ou plano horizontal de referência	364
Variação de energia potencial gravitacional	364
Centro de massa (CM)	365
4. Energia potencial elástica	367
Sistema bloco-mola	368
Variação da energia potencial elástica	368

5. Energia mecânica – conservação da energia mecânica ...	369
Estratégia para aplicação do Princípio da Conservação da Energia Mecânica	370
6. Dissipação de energia mecânica	385
7. Potência	386
Potência mecânica	387
Potência mecânica média	387
Unidade de potência no SI	387
Potência mecânica instantânea	387
O cavalo-vapor e o <i>horsepower</i>	388
Potência e velocidade para uma força constante	388
Alguns casos particulares	389
Gráfico da potência em função do tempo	389
Outras formas de energia	389
8. A conservação de energia	393
9. Rendimento de uma máquina	394

CAPÍTULO 20 Quantidade de movimento e impulso

1. Quantidade de movimento de uma partícula	399
2. Impulso de uma força constante	401
3. Impulso de uma força variável	404
Generalização do Teorema do Impulso	405
Força média	405
4. Quantidade de movimento de um sistema	409
5. Forças internas e externas	410
6. Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento	411
Aplicações do Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento	413
7. A Segunda Lei de Newton	420

CAPÍTULO 21 Colisões

1. O que é uma colisão?	423
2. Classificação das colisões	426
Choques superelásticos	427
3. Colisões unidimensionais	428
4. Colisão com superfície fixa	431
Determinação do coeficiente de restituição	432
5. Casos particulares do choque elástico	434
Colisão unidimensional e elástica entre corpos de massas iguais	434
Colisão oblíqua e elástica entre partículas de massas iguais, estando uma delas inicialmente em repouso	435

CAPÍTULO 22 Centro de massa

1. O que é centro de massa?	440
2. Localização do centro de massa	442

3. Centro de massa de corpos extensos.....	444
4. Movimento do centro de massa	446

CAPÍTULO 23 **Estática dos corpos rígidos**

1. Momento de uma força	450
Centro de gravidade.....	451
2. Alavancas	454
3. Definição geral de torque	455
Binário	455
4. Condição de equilíbrio de rotação	456
O Teorema das Três Forças	456
5. Sistemas indeterminados.....	461
6. Estabilidade do equilíbrio de rotação	461

CAPÍTULO 24 **Gravitação**

1. Os primeiros modelos de mundo	465
O modelo de Ptolomeu	466
O modelo de Copérnico	466
Tycho Brahe.....	466
Galileu e Copérnico	466
2. O modelo de Kepler	467
Primeira Lei de Kepler.....	467
Segunda Lei de Kepler	468
Terceira Lei de Kepler.....	469
3. Lei da Gravitação Universal.....	472
Forças gravitacionais entre corpos extensos	473
4. Corpos em órbitas circulares	476
Imponderabilidade	476
A Terceira Lei de Kepler e a órbita circular.....	476
5. Aceleração da gravidade e campo gravitacional.....	478
Influência da rotação da Terra	479
Aceleração da gravidade no interior da Terra	480
6. Energia potencial.....	483
Velocidade de escape	484
O efeito estilingue.....	485
7. Marés	487

PARTE 3 **FLUIDOMECÂNICA**

CAPÍTULO 25 **Fluidostática – Lei de Stevin**

1. Pressão	489
Resistência à penetração	490
2. Líquido em equilíbrio estático	492
Líquido em recipiente acelerado.....	493
3. Tensão superficial	493

4. Forças e pressões em fluidos	495
5. Lei de Stevin.....	496
Paradoxo hidrostático	498
Força em uma barragem	498
Equilíbrio de líquidos imiscíveis.....	499
A Lei de Stevin e os gases.....	499
6. Vasos comunicantes	504
Manômetro	504
7. Princípio de Pascal	508
Mecanismos hidráulicos	508
8. Pressão atmosférica	510
Coluna de água.....	511
Outras unidades de pressão.....	512
Variação da pressão atmosférica com a altitude	512
O canudinho.....	513

CAPÍTULO 26 **Fluidostática – Princípio de Arquimedes**

1. Empuxo	517
2. Empuxo e densidade	519
Navios e submarinos	520
Flutuação do gelo	520
Queda em um fluido.....	521
Sedimentação	521
3. Centro de empuxo	527
4. O significado do empuxo	528
Empuxo e fluido deslocado	529
Um caso especial.....	530

CAPÍTULO 27 **Fluidodinâmica**

1. Escoamento de fluidos	533
1ª hipótese: O escoamento é não viscoso	533
2ª hipótese: O escoamento é incompressível.....	533
3ª hipótese: O escoamento é irrotacional	533
4ª hipótese: O escoamento é estacionário	534
Tubo de escoamento	534
2. Pressão e velocidade	534
Dois exemplos de fluido real	535
3. Equação de Bernoulli.....	536
Casos particulares	537
4. Equação de Torricelli	537
5. Tubo de Venturi.....	541
6. Tubo de Pitot.....	543

Respostas	546
-----------------	-----

Bibliografia	563
--------------------	-----

Significado das siglas de vestibulares e olimpíadas	564
---	-----

Índice remissivo	570
------------------------	-----

Introdução à Física

1. O que é Física

A Física é a ciência básica da natureza. Ela procura descobrir do que é feito o Universo e como seus componentes se combinam, se transformam e se movimentam.

No final do século XIX a Física estava dividida nas seguintes partes: Mecânica, Termologia, Óptica, Ondulatória e Eletromagnetismo.

A Mecânica procura determinar as leis que governam os movimentos. Usando essas leis podemos, por exemplo, lançar um foguete que viaje até a Lua (fig. 1).

A Termologia estuda o calor. Por meio das leis da Termologia podemos, por exemplo, construir uma geladeira (fig. 2).

A Óptica estuda a luz. Uma das aplicações da Óptica é a construção de instrumentos tais como óculos, binóculos, telescópios e microscópios (fig. 3).

A Ondulatória estuda um fenômeno chamado **onda**. Um tipo de onda que nos é familiar é a onda formada no mar (fig. 4), mas há outros tipos. Por exemplo, no volume 2 desta coleção veremos que o som é uma onda.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 1. Para prever o movimento de um foguete, usamos as leis da Mecânica.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 3. Um microscópio é construído com base nas leis da Óptica.



FOODFOLIO/EASYPIX

Figura 2. Uma geladeira é construída usando-se as leis da Termologia.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 4. A onda formada no mar é um dos tipos de onda.

1. O que é Física
2. Unidades das grandezas
3. A Conferência Geral de Pesos e Medidas
4. O Sistema Internacional de Unidades
5. A notação científica
6. Os prefixos do SI
7. Ordem de grandeza
8. Unidades de tempo
9. Unidades de comprimento
10. Vazão
11. Unidades de massa
12. Densidade e massa específica
13. Algarismos significativos
14. Análise dimensional

A palavra *física* vem do termo grego *physis* (pronuncia-se "fisis"), que significa "natureza".

O Eletromagnetismo estuda os fenômenos elétricos e magnéticos, permitindo, por exemplo, entender a formação de raios (fig. 5) e a construção de computadores (fig. 6), assim como o funcionamento de uma bússola (fig. 7).



Figura 5. Os raios são descargas elétricas que ocorrem entre duas nuvens ou entre uma nuvem e a Terra.



Figura 6. Para construir um computador precisamos conhecer o Eletromagnetismo.



Figura 7. Para entender o funcionamento de uma bússola precisamos entender o magnetismo.

Naquela época (final do século XIX), um tipo especial de transformação da matéria, denominado **reação química**, era estudado pela **Química**, considerada uma ciência separada da Física.

A Física Moderna

No final do século XIX foram observados alguns fenômenos que a Física até então conhecida não sabia explicar. Esses fenômenos só puderam ser explicados com a criação de duas teorias revolucionárias, no início do século XX: a **Teoria da Relatividade** e a **Mecânica Quântica**. A partir daí, a Física criada no século XX passou a ser chamada **Física Moderna**, e a Física desenvolvida até o final do século XIX foi denominada **Física Clássica**.

A Mecânica Quântica conseguiu explicar o mecanismo das reações químicas e, assim, houve uma fusão entre a Física e a Química. A Física estuda todas as transformações sofridas pela matéria, incluindo as reações químicas. Desse modo, podemos considerar a Química como uma das partes da Física e, portanto, já não tem sentido estabelecer uma oposição entre fenômeno físico e fenômeno químico, como se fazia antigamente. Os fenômenos químicos são casos particulares dos fenômenos físicos.

Outras partes da Física

A Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica permitiram o surgimento de outras especialidades da Física, como, por exemplo: a **Astrofísica** (que estuda os planetas, as estrelas, as galáxias); a **Física do Estado Sólido**; a **Cosmologia** (que estuda o surgimento e as transformações do Universo); a **Física de Partículas Elementares** (elétrons, prótons, nêutrons e outras partículas).

O nosso curso

No nosso curso estudaremos quase exclusivamente a Física Clássica. Apenas nos três últimos capítulos do volume 3 desta coleção apresentaremos algumas noções de Física Moderna. A razão disso é que a Física Moderna exige, para a sua compreensão, ferramentas matemáticas não conhecidas por um aluno de ensino médio. Apenas para adiantar, podemos dizer que:

- A Teoria da Relatividade só é necessária para estudar o movimento de corpos que se movem com velocidades próximas à velocidade da luz e a interação entre corpos de massas muito grandes, como planetas e estrelas.
- A Mecânica Quântica só é necessária para estudar o comportamento de objetos muito pequenos, como moléculas, átomos, prótons, nêutrons, elétrons, etc.

Portanto, para o estudo de corpos macroscópicos, que não se movem com velocidades muito grandes, podemos usar a Física Clássica. Em alguns casos, como veremos, podemos analisar o movimento de prótons, elétrons e nêutrons sem usar a Mecânica Quântica, desde que suas velocidades sejam pequenas em comparação com a velocidade da luz.

Neste volume estudaremos apenas a Mecânica. As outras partes da Física serão estudadas nos próximos volumes. Porém, antes de começarmos o estudo da Mecânica (no capítulo 2), vamos apresentar algumas noções que serão úteis para o estudo não só da Mecânica, mas também de toda a Física.

2. Unidades das grandezas

Muitas leis da Física são apresentadas por meio de equações envolvendo grandezas tais como velocidade, força, energia, etc. Portanto, o processo de medida das grandezas é muito importante. Neste capítulo vamos introduzir as unidades de algumas grandezas. As outras unidades serão apresentadas à medida que as grandezas forem sendo estudadas.

O Sistema Métrico Decimal (SMD)

Antigamente não havia uniformidade nas unidades de medida usadas pelos vários países. Na realidade, não havia uniformidade nem dentro de um mesmo país: as unidades usadas em uma cidade poderiam ser diferentes das usadas em outra cidade.

Essa situação começou a mudar durante a Revolução Francesa (1789-1799). Em 1790, um dos membros da Assembleia Constituinte apresentou uma proposta de reforma das unidades de medida, a qual foi aceita. Então, a Assembleia pediu à Academia Francesa de Ciências que fizesse um projeto. A academia nomeou um comitê formado por grandes cientistas da época.



STEFANO BIANCHETTI/CORBIS/LATINSTOCK

Figura 8. Antoine Lavoisier (1743-1794) foi um dos membros do comitê encarregado de propor a reforma das unidades.

No final de 1791 o comitê apresentou sua proposta, cujos principais pontos eram:

- para qualquer tipo de unidade (comprimento, área, massa, etc.), os múltiplos e submúltiplos seriam obtidos usando-se a base 10;
- a unidade de comprimento que mais tarde seria chamada **metro** (e simbolizada por *m*) foi escolhida como sendo a décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre que passa por Paris (fig. 9);
- a unidade de massa deveria ser a massa da água pura, à temperatura de 4 °C (pois, como veremos no volume 2, nessa temperatura a densidade da água é máxima), contida num cubo cujo volume é igual a 1 centímetro cúbico (fig. 10). Essa unidade foi chamada **grama** e simbolizada por *g*.

A proposta foi aceita, e assim lançada a base do **Sistema Métrico Decimal** (a palavra *métrico* vem do grego *metron*, que significa “medida”).

Foi formada uma expedição de agrimensores que entre 1792 e 1799 trabalhou para fazer a medição precisa do quarto de meridiano e assim, calculando sua décima milionésima parte, poder determinar o tamanho do metro. Terminada a tarefa, foi construída uma barra de platina, na qual foram feitas duas marcas cuja distância (à temperatura de 0 °C) era igual a 1 metro. Posteriormente a barra foi substituída por outra, feita de platina e irídio (platina iridiada) (fig. 11), que é mais resistente a deformações.

Mais tarde verificou-se que o quarto de meridiano era um pouco maior do que se pensava. Entre mudar a definição de metro e mudar o padrão de platina, optou-se por mudar a definição, e assim o metro ficou sendo a distância entre as duas marcas na barra de platina que havia sido construída como padrão. Feita essa opção, o comprimento do quarto de meridiano ficou valendo então 10 002 288 metros.

Pela proposta inicial, a unidade de massa (1 grama) deveria ser a quantidade de água pura, a 4 °C, contida no volume de 1 cm³. No entanto, esse volume foi considerado pequeno demais para se trabalhar, podendo conduzir a imprecisões. Assim foi substituído pelo volume de um cubo cujo lado medisse 1 decímetro (fig. 12), e a nova unidade de massa foi chamada de **quilograma** (cujo símbolo é *kg*).

Foi construído, então, um cilindro de platina iridiada (fig. 13), cuja massa é igual à massa de água (a 4 °C). Esse cilindro tornou-se o padrão de massa, o **quilograma-padrão**.

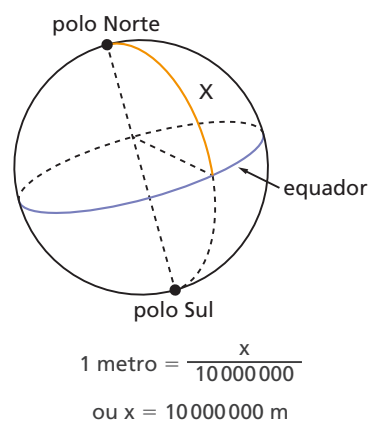
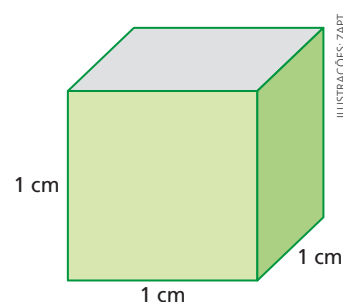


Figura 9.



$$\text{volume} = 1 \text{ centímetro cúbico} = 1 \text{ cm}^3$$

Figura 10. A massa da água a 4 °C contida em um cubo de volume 1 cm³ é igual a 1 grama.



Figura 11. O metro é a distância (a 0 °C) entre duas marcas feitas numa barra constituída de uma liga de platina e irídio.

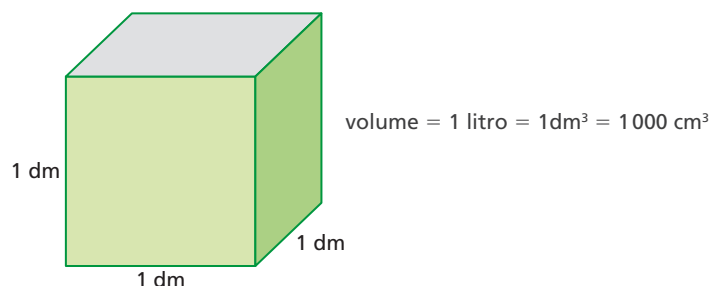


Figura 12. A unidade de massa é dada pela quantidade de água pura, a 4 °C, contida em 1 dm³.



Figura 13. Cilindro de platina iridiada, cuja massa é o quilograma-padrão.

3. A Conferência Geral de Pesos e Medidas

Aos poucos, a França foi obtendo a adesão de outros países ao Sistema Métrico Decimal (SMD), tendo o Brasil aderido a ele em 1863. Em 1875 foi realizada em Paris a 1ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM), da qual participaram quinze países (incluindo os Estados Unidos e a Grã-Bretanha) que oficializaram o Tratado do Metro. Nessa ocasião foi criado um órgão denominado Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), sediado em Sèvres, nos arredores de Paris, com a função de estabelecer as unidades de medida de todas as grandezas e promover reuniões periódicas da CGPM.

O metro e o quilograma-padrão ficaram sob a guarda do BIPM, o qual se encarregou de produzir cópias que foram enviadas aos países participantes do Tratado do Metro.

Nos países de língua inglesa que aderiram ao Tratado do Metro, o SMD passou a ser usado em trabalhos científicos. Para outros fins continuaram a ser usadas as unidades antigas (jarda, pé, polegada, etc.), mas sem as imprecisões de antigamente, pois essas unidades foram definidas legalmente a partir dos padrões do SMD (adiante apresentaremos essas definições).

Com o passar do tempo, foi aumentando o número de países participantes do Tratado do Metro.

OBSERVAÇÃO

Bureau é uma palavra francesa que significa “escritório”, “repartição”.

4. O Sistema Internacional de Unidades

Em 1960, a 11ª CGPM estabeleceu uma nova reforma nas unidades, e o SMD passou a ser chamado **Sistema Internacional de Unidades**, com abreviatura internacional **SI**.

As unidades SI foram divididas em três grupos:

- unidades de base;
- unidades suplementares;
- unidades derivadas.

Após a 14ª CGPM, realizada em 1971, as unidades de base passaram a ser as relacionadas na tabela 1. Perceba que, com exceção da candela, todos os nomes das unidades de base são masculinos: o metro, o ampère, o kelvin, etc. Neste livro usaremos apenas as três primeiras unidades; as outras serão estudadas nos próximos volumes.

As unidades suplementares estão relacionadas na tabela 2. Todas as outras unidades são derivadas, isto é, podem ser obtidas a partir das unidades de base e das unidades suplementares, como veremos ao longo do curso.

Grandeza	Unidade	
	Nome	Símbolo
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	s
intensidade de corrente elétrica	ampère	A
temperatura termodinâmica	kelvin	K
quantidade de matéria	mol	mol
intensidade luminosa	candela	cd

Tabela 1. Unidades de base do SI.

Grandeza	Unidade	
	Nome	Símbolo
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esterorradiano	sr

Tabela 2. Unidades suplementares do SI.

Atualmente, a adesão ao SI é praticamente total. Entre os países ocidentais, apenas os Estados Unidos ainda usam o antigo Sistema Britânico, embora utilizem o SI em trabalhos e publicações científicas.

5. A notação científica

Nas várias áreas da Física aparecem números muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, a distância (D) da Terra à Lua é aproximadamente igual a 380 milhões de metros:

$$D \cong 380\,000\,000 \text{ m}$$

enquanto o raio (r) de um átomo de hidrogênio é dado aproximadamente por:

$$r \cong 0,00000000005 \text{ m}$$

Para evitar escrever tantos zeros, podemos usar as potências de 10. Assim, os valores de D e r podem ser escritos de outro modo:

$$D = \overbrace{380\,000\,000}^{7 \text{ zeros}} \text{ m} = 38 \cdot 10^7 \text{ m} = (3,8 \cdot 10) \cdot 10^7 \text{ m} = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$r = \underbrace{0,00000000005}_{11 \text{ casas após a vírgula}} \text{ m} = \frac{5 \text{ m}}{\underbrace{100\,000\,000\,000}_{11 \text{ zeros}}} = \frac{5 \text{ m}}{10^{11}} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

No caso da distância D , obviamente temos: $38 \cdot 10^7 = 3,8 \cdot 10^8$.

No entanto, os físicos preferem representar as medidas na forma de um número entre 1 e 10 multiplicado por uma potência de 10:

$$x \cdot 10^n \text{ (em que } 1 \leq x < 10\text{)}$$

Assim, entre $38 \cdot 10^7$ e $3,8 \cdot 10^8$, os físicos preferem $3,8 \cdot 10^8$. Esse modo de representar as medidas costuma ser chamado **notação científica**.

6. Os prefixos do SI

Com o estabelecimento do SI foram adotados alguns prefixos para representar algumas potências de 10. Após a 19ª CGPM, realizada em 1991, os prefixos adotados são os relacionados na tabela 3; nela estão destacados os prefixos mais usados e que, assim, devem ser memorizados.

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{-24}	yocto	y	10^1	deca	da
10^{-21}	zepto	z	10^2	hecto	h
10^{-18}	atto	a	10^3	quilo	k
10^{-15}	femto	f	10^6	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^9	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	mili	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

Tabela 3. Prefixos do SI usados para formar alguns múltiplos e submúltiplos decimais das grandezas.

Exemplo 1

Vamos observar o uso desses prefixos considerando a unidade **metro**, cujo símbolo é **m**:

- $1 \text{ Mm} = 1 \underbrace{\text{megametro}}_{\substack{\text{M} \\ \text{m}}} = 10^6 \text{ metros} = 1\,000\,000 \text{ m}$
- $1 \text{ nm} = 1 \underbrace{\text{nanometro}}_{\substack{\text{n} \\ \text{m}}} = 10^{-9} \text{ metro} = \frac{1 \text{ m}}{10^9} = \frac{1}{1\,000\,000\,000} \text{ m} = 0,\underbrace{000000001}_{\substack{9 \text{ casas} \\ \text{após a} \\ \text{vírgula}}} \text{ m}$

Exemplo 2

Por razões históricas, o **quilograma** é a única unidade de base do SI (veja tabela 1) que já vem com um prefixo:

$$1 \text{ kg} = \underbrace{\text{quilograma}}_{10^3} = 10^3 \text{ gramas}$$

Um engano comum é usar a letra **K** (maiúscula) para indicar o prefixo quilo. Como você pode observar na tabela 3, o símbolo do prefixo quilo é **k** (minúsculo).

Há um decreto do governo federal aprovando a Resolução nº 12/1988 do Conmetro (Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial), a qual apresenta as unidades legais a serem usadas no Brasil e as regras de uso do SI. Em um trecho dessa resolução lemos:

Na forma oral, os nomes dos múltiplos e submúltiplos decimais das unidades são pronunciados por extenso, prevalecendo a sílaba tônica da unidade.

As palavras quilômetro, decímetro, centímetro e milímetro, consagradas pelo uso com o acentoônico deslocado para o prefixo, são as únicas exceções a esta regra; assim sendo, os outros múltiplos e submúltiplos decimais do metro devem ser pronunciados com o acentoônico na penúltima sílaba (mé), por exemplo, megametro, micrometro (distinto de micrômetro, instrumento de medição), nanometro etc.

Assim, por exemplo, nanometro é pronunciado “nanométrô”, e não “nanômetro”, como erroneamente apresentam alguns dicionários.

Exercícios de Aplicação

1. Passe para a notação científica:

- | | |
|------------|----------------------------|
| a) 529 | g) 0,278 |
| b) 7843 | h) 0,5697 |
| c) 5971432 | i) $749 \cdot 10^7$ |
| d) 73 | j) $59,47 \cdot 10^{-9}$ |
| e) 0,7 | k) $0,38 \cdot 10^4$ |
| f) 0,52 | l) $0,7159 \cdot 10^{-12}$ |

2. Lembrando que o símbolo do metro é **m**, apresente os valores a seguir usando prefixos do SI.

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) 10^3 m | b) 10^6 m | c) 10^9 m |
|---------------------|---------------------|---------------------|

- | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|
| d) 10^{12} m | g) 10^{-3} m | j) 10^{-12} m |
| e) 10^{-1} m | h) 10^{-6} m | k) 10 m |
| f) 10^{-2} m | i) 10^{-9} m | l) 10^2 m |

3. A seguir temos múltiplos e submúltiplos do litro (L) usando prefixos do SI. Apresente os valores correspondentes usando potências de 10.

- | | | |
|--------------------|---------|---------|
| a) 5 pL | e) 9 cL | i) 6 ML |
| b) 6 nL | f) 4 dL | j) 5 GL |
| c) 7 μL | g) 3 hL | k) 7 TL |
| d) 8 mL | h) 2 kL | l) 2 fL |

7. Ordem de grandeza

Às vezes nos interessamos apenas pelo valor **aproximado** de uma grandeza, e não pelo seu valor **exato**. Isso pode acontecer por vários motivos. Em alguns casos, porque faltam dados para fazermos o cálculo exato. Em outros, porque fazemos o cálculo aproximado antes de efetuarmos os cálculos exatos, apenas para depois compararmos os resultados, de modo a estarmos mais seguros de não termos cometido nenhum erro nos cálculos.

Ao fazermos um cálculo aproximado, é comum darmos como resposta **a potência de 10 mais próxima** do resultado encontrado, e a resposta dada dessa maneira costuma ser chamada de **ordem de grandeza**.

Consideremos, por exemplo, o número 850.

As potências de 10 mais próximas do número 850 são 10^2 e 10^3 :

$$10^2 < 850 < 10^3$$

Porém, o número 850 está mais próximo de 10^3 que de 10^2 . Assim, a ordem de grandeza de 850 é 10^3 .

Para obtermos a ordem de grandeza de um número N qualquer, em primeiro lugar fazemos sua apresentação na notação científica:

$$N = x \cdot 10^y$$

em que $1 \leq x < 10$ e y é um número inteiro.

Em seguida verificamos se x é maior ou menor que 5,5:

- Se $x > 5,5$, fazemos $x = 10$.
- Se $x < 5,5$, fazemos $x = 1$.

No caso de $x = 5,5$ é indiferente arredondar para mais ou para menos.

A razão de usarmos o número 5,5 é que ele está no meio do intervalo que vai de 1 a 10 na reta real (fig. 14):

$$5,5 - 1 = 10 - 5,5 = 4,5$$

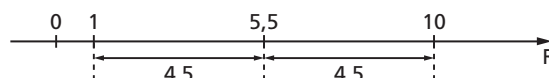


Figura 14. O número 5,5 está no meio do intervalo $[1; 10]$.

Exemplo 3

Em cada caso a seguir, vamos determinar a ordem de grandeza do número N .

a) $N = 2,8 \cdot 10^7$

Podemos observar que $2,8 < 5,5$.

Assim, fazemos a aproximação: $2,8 \approx 1$.

Portanto, $N = 2,8 \cdot 10^7 = 1 \cdot 10^7$

e a ordem de grandeza de N é 10^7 .

b) $N = 6,4 \cdot 10^{-15}$

Temos: $6,4 > 5,5$.

Portanto, fazemos a aproximação: $6,4 \approx 10$.

Assim, $N = 6,4 \cdot 10^{-15} = 10^1 \cdot 10^{-15} = 10^{-14}$

e a ordem de grandeza de N é 10^{-14} .

Critérios para determinar a ordem de grandeza

Vimos que, para obter a ordem de grandeza de um número N , em primeiro lugar devemos representá-lo na notação científica:

$$N = x \cdot 10^n$$

em que $1 \leq x < 10$. Em seguida, trocamos o x pela potência de 10 mais próxima dele.

Para determinarmos essa proximidade, podemos proceder de dois modos:

1º) Um modo é o que seguimos neste capítulo: procuramos obter um número y entre 1 e 10, tal que:

$$y - 1 = 10 - y \quad \text{ou} \quad 2y = 11 \Rightarrow y = 5,5$$

Assim, para $x > 5,5$, fazemos $x = 10$ e, para $x < 5,5$, fazemos $x = 1$.

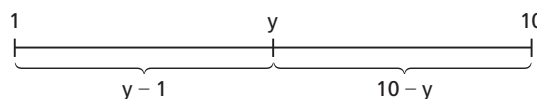


Figura 15.

2º) Há autores que preferem outro modo: a proximidade baseada na proporcionalidade.

$$\frac{y}{1} = \frac{10}{y} \Rightarrow y^2 = 10 \Rightarrow y = \sqrt{10} \approx 3,16$$

Assim, por esse critério, se $x > \sqrt{10}$, fazemos $x = 10$ e, se $x < \sqrt{10}$, fazemos $x = 1$.

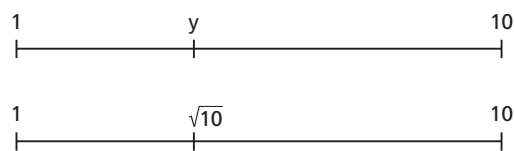


Figura 16.

No nosso curso usaremos o primeiro modo, que é o mais usual.

Exercícios de Aplicação

4. Dê a ordem de grandeza dos seguintes números:

- | | | |
|----------|------------------------|------------|
| a) 200 | d) $7,4 \cdot 10^{11}$ | g) 0,027 |
| b) 800 | e) $7,4 \cdot 10^{-4}$ | h) 0,0031 |
| c) 4 328 | f) $2,1 \cdot 10^{-7}$ | i) 0,00074 |

5. Supondo que no Brasil cada família tenha em média um televisor, qual é a ordem de grandeza do número de televisores nas residências brasileiras?

Resolução:

A população brasileira hoje está próxima de 200 milhões de habitantes, isto é, o número de habitantes é:

$$N \approx 200 \cdot 10^6$$

Supondo que, em média, cada família tenha quatro pessoas, o número de televisores é:

$$T \approx \frac{200 \cdot 10^6}{4} \approx 50 \cdot 10^6 \approx 5 \cdot 10^7$$

Portanto, a ordem de grandeza pedida é 10^7 .

6. Supondo que cada pessoa beba 2 litros de água por dia, qual é a ordem de grandeza do número de litros de água utilizada para beber, pela população brasileira, em um ano?

8. Unidades de tempo

No SI a unidade de tempo é o **segundo**, cujo símbolo é s. No entanto, frequentemente, usamos outras unidades não pertencentes ao SI, como, por exemplo, o minuto, a hora, o dia, a semana, o ano, o século, etc. (tabela 4).

Devemos tomar cuidado para não confundir o minuto “unidade de tempo” com o minuto “unidade de ângulo”; o mesmo cuidado deve ser tomado em relação ao segundo.

Assim, se quisermos representar, por exemplo:

3 horas, 20 minutos e 40 segundos

devemos escrever 3 h 20 min 40 s e **não** 3 h 20' 40"

Nome	Símbolo	Valor em unidade do SI
minuto	min	1 min = 60 s
hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
dia	d	1 d = 24 h = 1 440 min = 86 400 s
ano	a	1 a = 365 d 5 h 48 min 46 s

Tabela 4. Algumas unidades de tempo não pertencentes ao SI.

A antiga definição do segundo

Um dia é equivalente a 86 400 segundos, e era a partir daí que se definia o segundo até algum tempo atrás:

$$1 \text{ segundo} = \frac{1}{86\,400} \text{ do dia solar médio}$$

O **dia solar** equivalia ao intervalo de tempo entre dois pores do sol consecutivos (no capítulo 11 veremos que há um outro dia, o **dia sideral**).

No entanto, à medida que foram sendo construídos relógios cada vez mais precisos, verificou-se que a rotação da Terra não é uniforme, isto é, o tempo gasto pela Terra para efetuar uma rotação completa em torno do seu eixo não é sempre o mesmo. Além disso, na média, o valor de um dia aumenta 1 milésimo de segundo a cada 100 anos. A razão principal disso é o fenômeno das marés (que explicaremos com mais detalhes no capítulo 24, mas há também a contribuição (em menor escala) de ventos de grande intensidade e dos derretimentos e congelamentos das geleiras.

A atual definição do segundo

Como consequência dos problemas que acabamos de apontar, a 13ª CGPM, de 1967, resolveu usar para definir o segundo um relógio atômico que utiliza o isótopo 133 do césio $^{133}_{55}\text{Cs}$. O átomo de césio emite uma radiação (veremos o que é isso no volume 3), a partir da qual se define atualmente o segundo.

O segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do césio-133.



Figura 17. Relógio atômico.

Intervalos de tempo

Para representar instantes de tempo é costume usar a letra t , às vezes com índices; por exemplo: t_1 , t_2 , t_i , t_f . Para representar intervalos de tempo, usamos o símbolo Δt . Assim, dados dois instantes de tempo t_1 e t_2 , com t_2 posterior a t_1 , temos:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Exemplo 4

Suponhamos que num determinado dia um filme exibido na televisão inicie no instante $t_1 = 14 \text{ h } 15 \text{ min}$ e termine no instante $t_2 = 16 \text{ h } 25 \text{ min}$. A duração do filme foi o intervalo de tempo Δt dado por:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 16 \text{ h } 25 \text{ min} - 14 \text{ h } 15 \text{ min}$$

$$\Delta t = 2 \text{ h } 10 \text{ min}$$

Exercícios de Aplicação

7. Calcule o valor aproximado do número de segundos contido em um ano.

Resolução:

1 ano \cong 365 dias; 1 dia = 24 h; 1 h = 3 600 s
Assim:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ano} &= (365 \text{ d}) \left(24 \frac{\text{h}}{\text{d}} \right) \left(3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \right) \cong \\ &\cong \underbrace{(365) (24) (36)}_{315360} \cdot 10^2 \text{ s} \cong 31536 \cdot 10^3 \text{ s} \cong \\ &\cong 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \end{aligned}$$

8. Considere um relógio de ponteiros. Em um mês, qual o número aproximado de voltas executadas pelo ponteiro dos minutos?

9. Calcule a ordem de grandeza do número de batidas do coração de um ser humano ao longo de sua vida.

10. Determine os valores de x , y e z nos casos a seguir.

- a) $1,5 \text{ h} = x \text{ h } y \text{ min}$
- b) $3,2 \text{ h} = x \text{ h } y \text{ min}$
- c) $4\,520 \text{ s} = x \text{ h } y \text{ min } z \text{ s}$
- d) $\frac{7}{3} \text{ h} = x \text{ h } y \text{ min}$

11. Em uma prova de corrida, que começou às 9 h 43 min 32 s, o atleta vencedor atingiu a linha de chegada às 12 h 27 min 13 s. Calcule o intervalo de tempo correspondente ao percurso desse atleta.

Exercícios de Reforço

12. (Vunesp-SP) No Sistema Internacional de Unidades, um intervalo de tempo de 2,4 min equivale a:

- a) 24 s c) 144 s e) 240 s
b) 124 s d) 164 s

13. (PUCC-SP) Um intervalo de tempo de 25 972,5 segundos é igual a:

- a) 7 h 12 min 52,5 s d) 7 h 772 min 0,5 s
b) 7 h 21 min 145 s e) 432,875 h
c) 432 h 52,5 min

14. (UF-RJ) Numa fila de banco há 300 pessoas. O guarda autoriza a entrar no banco, durante 10 segundos, 30 pessoas. Para nova autorização há a espera de 20 minutos. Levando-se em consideração serem sempre constantes os intervalos mencionados, as 300 pessoas da fila serão atendidas, aproximadamente, em:

- a) 201 min d) 171 min
b) 191 min e) 161 min
c) 181 min

15. (Acafe-SC) No ano 2004 foram realizadas eleições para prefeito, vice-prefeito e vereador em todos os municípios do Brasil. Os candidatos utilizaram o horário político gratuito na mídia e realizaram comícios, fazendo diversos discursos. Enrico Fermi observou, certa vez, que a duração padrão de um discurso é de aproximadamente um microséculo. Considerando todos os anos com 365 dias, é correto afirmar que a duração de um microséculo, em minutos, é:

- a) 24,25 c) 36,50 e) 52,56
b) 87,60 d) 120,00

16. (Fuvest-SP) No estádio do Morumbi 120 000 torcedores assistem a um jogo. Através de cada uma das 6 saídas disponíveis podem passar

1 000 pessoas por minuto. Qual é o tempo mínimo necessário para se esvaziar o estádio?

- a) uma hora d) $\frac{1}{3}$ de hora
b) meia hora e) $\frac{3}{4}$ de hora
c) $\frac{1}{4}$ de hora

17. (Enem-MEC) “Comprimam-se todos os 4,5 bilhões de anos de tempo geológico em um só ano. Nesta escala, as rochas mais antigas reconhecidas datam de março. Os seres vivos aparecem inicialmente nos mares, em maio. As plantas e animais terrestres surgiram no final de novembro.” (Don L. Eicher, *Tempo geológico*.)

Meses	(em milhões de anos)
JAN.	4 500
FEV.	4 125
MAR.	3 750
ABR.	3 375
MAIO	3 000
JUN.	2 625
JUL.	2 250
AGO.	1 875
SET.	1 500
OUT.	1 125
NOV.	750
DEZ.	375

Na escala de tempo anterior, o sistema solar surgiu no início de janeiro e vivemos hoje à meia-noite de 31 de dezembro. Nessa mesma escala, Pedro Álvares Cabral chegou ao Brasil também no mês de dezembro, mais precisamente na:

- a) manhã do dia 1. d) tarde do dia 20.
b) tarde do dia 10. e) noite do dia 31.
c) noite do dia 15.

9. Unidades de comprimento

Vimos que, com o estabelecimento do Sistema Métrico Decimal, o metro ficou sendo a distância entre dois finos riscos numa barra de platina iridiada. No entanto, com o avanço da ciência e da tecnologia, esse padrão começou a ser considerado impreciso. Na busca de maior precisão, a 11ª CGPM, realizada em 1960, adotou como base o **comprimento de onda** (veremos o que é isso no volume 2) de uma determinada radiação emitida pelo átomo de criptônio-86; o metro passou a ser definido como 1 650 763,73 comprimentos de onda dessa radiação.

Porém, com o passar do tempo, mesmo esse novo padrão deixou de oferecer a precisão exigida em algumas experiências mais sofisticadas. Desse modo houve nova mudança de padrão, passando-se a usar a velocidade da luz no vácuo, a qual pode ser medida com muita precisão. A 17ª CGPM, realizada em 1983, estabeleceu que:

O metro é o comprimento da trajetória percorrida pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundo.

Isso significa que, em 1 segundo, a luz percorre no vácuo exatamente 299 792 458 metros.

No SI, para medir comprimentos, devemos usar o metro ou um de seus múltiplos ou submúltiplos obtidos com o uso dos prefixos da tabela 3.

Por exemplo:

- $1 \text{ cm} = 1 \underbrace{\text{centímetro}}_{\text{c m}} = 10^{-2} \text{ m} = \frac{1}{10^2} \text{ m} = 0,01 \text{ m}$
- $1 \text{ mm} = 1 \underbrace{\text{milímetro}}_{\text{m m}} = 10^{-3} \text{ m} = \frac{1}{10^3} \text{ m} = 0,001 \text{ m}$
- $1 \text{ }\mu\text{m} = 1 \underbrace{\text{micro metro}}_{\mu \text{ m}} = 10^{-6} \text{ m} = \frac{1}{10^6} \text{ m} = 0,000001 \text{ m}$
- $1 \text{ km} = 1 \underbrace{\text{quilômetro}}_{\text{k m}} = 10^3 \text{ m} = 1000 \text{ m}$

No entanto, em certas áreas da Física, ou em outras atividades, são usadas algumas unidades que não pertencem ao SI; essas unidades estão relacionadas na tabela 5 (a única que precisa ser memorizada é o angström).

Nome	Símbolo	Valor em unidades do SI
angström	Å	10^{-10} m
unidade astronômica	UA	$1,49597870 \cdot 10^{11} \text{ m}$
parsec	pc	$3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m}$
ano-luz	AL	$\sim 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$
milha marítima	–	1 852 m
milha terrestre	mi	$\sim 1\,609 \text{ m}$

Tabela 5. Algumas unidades de comprimento não pertencentes ao SI.

O **angström**, que é usado na área de Física Atômica, é aproximadamente igual ao diâmetro do átomo de hidrogênio.

A **unidade astronômica**, o **ano-luz** e o **parsec** são usados na Astronomia. A unidade astronômica (UA) é igual à distância média entre o centro do Sol e o da Terra, e o ano-luz é a distância percorrida pela luz, no vácuo, em um ano. O parsec está definido no exercício 69.

É importante ressaltar que antigamente se usava uma unidade de comprimento denominada **mícron**, cujo símbolo era μ e cuja relação com o metro era:

$$1 \mu = 10^{-6} \text{ m}$$

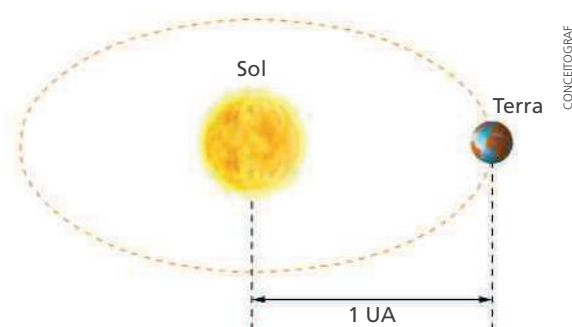


Figura 18.

Essa unidade foi abolida pela 13ª CGPM, em 1967. No seu lugar devemos usar o micrometro:

$$1 \text{ micrometro} = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$

Na tabela 6 apresentamos algumas unidades do antigo Sistema Britânico.

Nome (em português)	Nome (em inglês)	Símbolo	Equivalência no Sistema Britânico	Valor em unidades do SI
polegada	inch	in.	–	2,54 cm = 0,0254 m
pé	foot	ft	1 ft = 12 in.	30,48 cm = 0,3048 m
jarda	yard	yd	1 yd = 3 ft	91,44 cm = 0,9144 m
milha terrestre	mile	mi	1760 yd	~1 609 m

Tabela 6. Algumas unidades de comprimento do Sistema Britânico.

Não é necessário memorizar essas unidades, mas é útil ter essa tabela por dois motivos. Em primeiro lugar, para poder interpretar publicações feitas nos Estados Unidos. Em segundo, porque, às vezes, essas unidades são usadas no Brasil. Por exemplo:

- nas propagandas de televisores, a distância d assinalada na figura 19 é dada em polegadas;
- as altitudes alcançadas pelos aviões são dadas em pés.

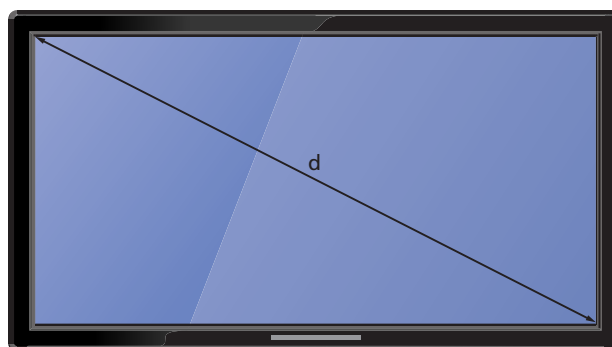


Figura 19.

Unidades de área e de volume

Durante o nosso curso, frequentemente precisaremos calcular áreas e volumes e, para isso, é necessário conhecer suas unidades.

No SI a unidade de área é o **metro quadrado (m^2)**, que é a área de um quadrado cujo lado mede 1 metro (fig. 20), e a unidade de volume é o **metro cúbico (m^3)**, que é o volume de um cubo cuja aresta mede 1 metro (fig. 21).

Uma unidade de volume muito usada (mas que não pertence ao SI) é o litro (ℓ), que é o volume de um cubo de aresta igual a 1 decímetro (fig. 22):

$$1 \ell = 1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3 = 1 000 \text{ cm}^3$$

Para o símbolo do litro pode-se também usar a letra "ele" maiúscula:

$$1 \ell = 1 \text{ L}$$

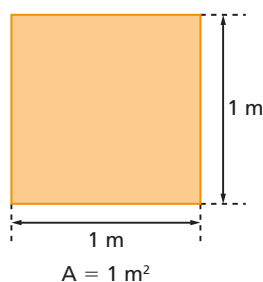


Figura 20.

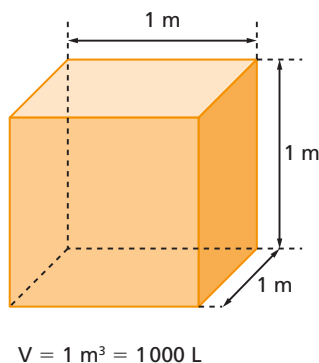


Figura 21.

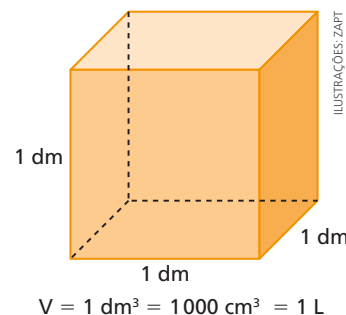


Figura 22.

PROCURE NO CD

No conteúdo relativo ao capítulo 1 do CD, apresentamos as fórmulas das áreas e dos volumes das figuras geométricas mais usuais.

Na linguagem médica é muito usada a unidade mililitro (mℓ):

$$1 \text{ mℓ} = 1 \text{ mililitro} = 10^{-3} \ell = 1 \text{ cm}^3$$

Na proposta inicial do Sistema Métrico Decimal foi estabelecida como unidade de área o **are**, que era a área de um quadrado cujos lados mediam 10 metros (fig. 23):

$$1 \text{ a} = 1 \text{ are} = (10 \text{ m})^2 = 100 \text{ m}^2 = 10^2 \text{ m}^2$$

Por razões históricas, na medida de grandes extensões de terra, até hoje é usado como unidade de área o **hectare**, que equivale a 100 ares.

$$1 \text{ ha} = 1 \text{ hectare} = 10^2 \text{ ares}$$

Na realidade, o nome deveria ser **hectoare**, pois o prefixo correspondente a cem é **hecto**; no entanto, o costume consagrou a palavra **hectare**.

É importante destacar que o hectare não pertence ao SI.

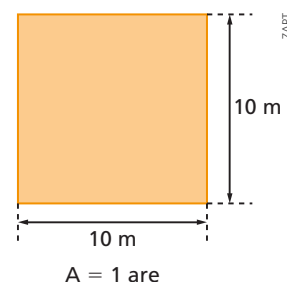


Figura 23.

Exercícios de Aplicação

18. Execute as seguintes transformações:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) 1 m^2 em cm^2 | c) 1 cm^2 em m^2 |
| b) 1 m^3 em cm^3 | d) 1 cm^3 em m^3 |

Resolução:

Temos:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 10^2 \text{ cm}$$

$$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

Assim:

$$\text{a) } 1 \text{ m}^2 = (10^2 \text{ cm})^2 = 10^4 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } 1 \text{ m}^3 = (10^2 \text{ cm})^3 = 10^6 \text{ cm}^3$$

$$\text{c) } 1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{d) } 1 \text{ cm}^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

19. Faça as seguintes transformações:

- | | |
|--------------|-------------------------|
| a) 1 cm em m | h) 1 Gm em m |
| b) 1 m em cm | i) 1 m em mm |
| c) 1 m em dm | j) 1 mm em m |
| d) 1 dm em m | k) 1 μm em m |
| e) 1 km em m | l) 1 nm em m |
| f) 1 m em km | m) 1 pm em m |
| g) 1 Mm em m | n) 1 Å em m |

20. Faça as seguintes mudanças de unidades:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) 1 m^2 em dm^2 | d) 1 mm^2 em m^2 |
| b) 1 dm^2 em m^2 | e) 1 cm^2 em mm^2 |
| c) 1 m^2 em mm^2 | f) 1 mm^2 em cm^2 |

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| g) 1 m^3 em dm^3 | j) 1 L em cm^3 |
| h) 1 dm^3 em m^3 | k) 1 m^3 em L |
| i) 1 L em dm^3 | l) 1 cm^3 em L |

21. De acordo com as regras da Fifa (Fédération Internationale de Football Association), em um campo de futebol cada meta deve ser formada de dois postes verticais unidos no alto por uma barra horizontal (travessão). A distância entre os postes deve ser de 8 jardas e a distância entre a borda mais baixa do travessão e o solo deve ser igual a 8 pés. Consulte a tabela 6 e calcule, em metros:

- a distância entre os postes verticais;
- a distância entre a borda mais baixa do travessão e o solo.

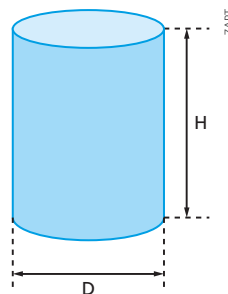
22. Uma propaganda apresenta um televisor com “tela de 50 polegadas”. Calcule essa distância em centímetros (consulte a tabela 6).

23. O texto a seguir foi retirado de uma notícia publicada no jornal *Folha de S.Paulo*, no dia 10 de outubro de 2010. Calcule, em quilômetros quadrados, a área do vale do Paraíba.

“Diante das encostas artificialmente nuas da serra da Mantiqueira em Guaratinguetá (SP), privadas da mata atlântica que as cobria por fazendas de café há muito falidas, fica claro o quanto vai dar trabalho replantar a floresta. E ainda mais na escala desejada pelo projeto do corredor ecológico: 150 mil hectares em 10 anos, uns 10% da área do vale do Paraíba.”

24. Pegue um conta-gotas do tipo usado em remédios de nariz. Usando uma seringa de injeção, verifique quantas gotas de água cabem em 1 cm^3 . Em seguida calcule:

- o valor aproximado, em cm^3 , do volume de cada gota.
- a ordem de grandeza do número de gotas de água que cabem em um tanque cilíndrico cujo diâmetro da base é $D = 4 \text{ m}$ e cuja altura é $H = 6 \text{ m}$.



Exercícios de Reforço

25. (PUC-SP) O pêndulo de um relógio “cuco” faz uma oscilação completa em cada segundo. A cada oscilação do pêndulo o peso desce $0,02 \text{ mm}$. Em 24 horas o peso se desloca, aproximadamente:

- $1,20 \text{ m}$
- $1,44 \text{ m}$
- $1,60 \text{ m}$
- $1,73 \text{ m}$
- $1,85 \text{ m}$

26. (UF-AC) Num campo de futebol não oficial, as traves verticais do gol distam entre si $8,15 \text{ m}$. Considerando que 1 jarda vale 3 pés e que 1 pé mede $30,48 \text{ cm}$, a largura mais aproximada desse gol, em jardas, é:

- $6,3$
- $8,9$
- $10,2$
- $12,5$
- $14,0$

27. (UF-SC) Uma tartaruga percorre trajetórias, em relação à Terra, com os seguintes comprimentos: 23 centímetros ; $0,66 \text{ metro}$; $0,04 \text{ metro}$; 40 milímetros . O comprimento da trajetória total percorrida pela tartaruga, nesse referencial, em cm , é:

- 42
- 97
- $24,34$
- $23,78$

28. (Enem-MEC) No depósito de uma biblioteca há caixas contendo folhas de papel de $0,1 \text{ mm}$ de espessura, e em cada uma delas estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura. Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?

- 10^2
- 10^4
- 10^5
- 10^6
- 10^7

29. (PUC-SP) Quantos litros comporta, aproximadamente, uma caixa-d'água cilíndrica com 2 metros de diâmetro e 70 cm de altura?

- 1250
- 2200
- 2450
- 3140
- 3700

30. (UF-AL) Quantos litros de ar cabem no interior de uma esfera de raio 21 cm ? (Use: $\pi = \frac{22}{7}$.)

- $38,808$
- $155,232$
- $388,08$
- $1552,32$
- $3880,8$

31. (Unifor-CE) Um aquário de vidro, com a forma de um cubo, tem capacidade para 27ℓ de água. Qual é a área, em centímetros quadrados, das cinco placas de vidro que compõem esse aquário?

- 4000
- 4500
- 5000
- 5500
- 6000

32. (UF-AC) O reservatório cilíndrico da caneta esferográfica tem 2 mm de diâmetro e 10 cm de altura. Considerando-se que se gastou toda a tinta de uma caneta desse tipo em 100 dias, o gasto médio diário, em milímetros, foi de:

- $\pi \cdot 10^{-3}$
- $\pi \cdot 10^{-1}$
- $2\pi \cdot 10^{-3}$
- π
- $\frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}$

33. (Enem-MEC) Com o objetivo de trabalhar com seus alunos o conceito de volume de sólidos, um professor fez o seguinte experimento: pegou uma caixa de polietileno, na forma de um cubo com um metro de lado, e colocou nela 600 litros

de água. Em seguida, colocou, dentro da caixa com água, um sólido que ficou completamente submerso. Considerando que, ao colocar o sólido dentro da caixa, a altura do nível da água passou a ser 80 cm, qual era o volume do sólido?

- a) $0,2 \text{ m}^3$ d) 20 m^3
 b) $0,48 \text{ m}^3$ e) 48 m^3
 c) $4,8 \text{ m}^3$

34. (UE-PA)

Os vasos sanitários representam cerca de um terço do consumo de água de uma casa. O Brasil tem hoje 100 milhões de bacias sanitárias antigas, que gastam em média 40 litros por descarga. (*Galileu*, nº 140, mar. 2003.)

Visando à economia de água, foi idealizada uma caixa de descarga de bacia sanitária com formato de um paralelepípedo retângulo, cuja base possui 32 cm de comprimento e 10 cm de largura, sendo o consumo por descarga, em média, 20% do volume de água consumido na descarga das bacias antigas. Nessas condições pede-se:

- a) a altura da caixa de descarga atual;
 b) o número de litros de água que são economizados em 30 dias, em uma residência com 5 pessoas que acionam, cada uma, em média, a descarga 4 vezes ao dia, considerando que as bacias antigas foram substituídas pelas atuais.

10. Vazão

Suponhamos que um líquido esteja escoando por um cano cilíndrico cuja seção reta é S (fig. 24). Sendo V o volume do líquido que passa por S no intervalo de tempo Δt , a vazão (ϕ) do líquido através de S é definida por:

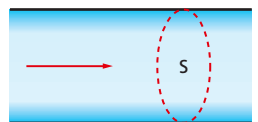


Figura 24.

$$\phi = \frac{V}{\Delta t}$$

No SI a unidade de vazão é m^3/s , que pode ser escrita de outro modo:

$$\text{m}^3/\text{s} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercícios de Aplicação

35. Uma torneira despeja um líquido à razão de 90 litros por minuto. Calcule a vazão dessa torneira em m^3/s e cm^3/s .

Resolução:

Lembrando que $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$, temos:

$$\phi = \frac{V}{\Delta t} = \frac{90 \text{ L}}{1 \text{ min}} = \frac{90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}}$$

$$\phi = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Lembrando que $1 \text{ L} = 10^3 \text{ cm}^3$, temos:

$$\phi = \frac{V}{\Delta t} = \frac{90 \text{ L}}{1 \text{ min}} = \frac{90 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}}$$

$$\phi = 1,5 \cdot 10^3 \text{ cm}^3/\text{s}$$

36. Um líquido flui através de um cano cilíndrico de modo que por uma seção reta passam 720 litros a cada 2,0 minutos. Calcule:

- a) a vazão em L/s , cm^3/s e m^3/s ;
 b) o tempo necessário para que passe um volume de 270 litros por uma seção reta do cano;
 c) o volume que passa por uma seção reta em 20 segundos.

37. Um tanque é alimentado por duas torneiras. A primeira torneira, funcionando sozinha, enche o tanque em 4,0 horas e a segunda torneira, funcionando sozinha, enche o tanque em 6,0 horas. Estando o tanque inicialmente vazio, se as duas torneiras forem abertas simultaneamente, em quanto tempo o tanque ficará cheio?

Exercícios de Reforço

38. Transforme:

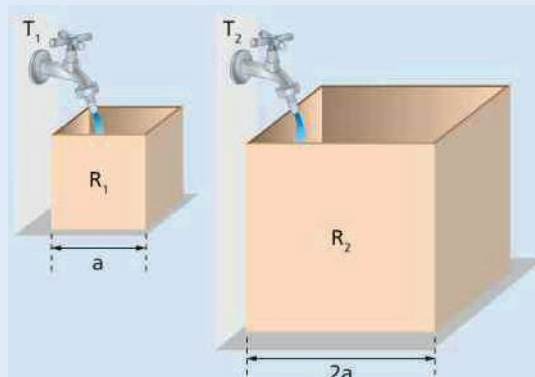
- a) $1 \text{ m}^3/\text{s}$ em L/s
- b) $1 \text{ m}^3/\text{min}$ em L/min
- c) $1 \text{ m}^3/\text{min}$ em L/s
- d) $1200 \text{ cm}^3/\text{s}$ em m^3/min

39. Uma mangueira que despeja água à razão de 900 litros a cada 3,0 minutos é usada para encher um tanque cuja capacidade é 45 m^3 .

- a) Calcule a vazão em L/min , L/s e m^3/s .
- b) Em quanto tempo o tanque ficará cheio?

40. Um tanque é alimentado por três torneiras. Funcionando sozinhas, a primeira enche o tanque em 2,0 horas, a segunda, em 5,0 horas, e a terceira, em 10,0 horas. Se o tanque estiver inicialmente vazio e abrirmos simultaneamente as três torneiras, em quanto tempo o tanque ficará cheio?

41. (UFF-RJ) As torneiras T_1 e T_2 enchem de água os reservatórios cúbicos R_1 e R_2 cujas arestas medem, em metros, a e $2a$, conforme mostra a figura. A torneira T_1 tem vazão de 1 litro por hora. Qual deve ser a vazão da torneira T_2 para encher R_2 na metade do tempo que T_1 gasta para encher R_1 ?



LUZ FERNANDO RUBIO

11. Unidades de massa

O conceito de massa é mais complexo do que parece à primeira vista. No capítulo 12 e no volume 3 (na parte relativa à Física Moderna), faremos discussões mais detalhadas, mas, por enquanto, apresentaremos esse conceito do modo como surgiu historicamente.

Inicialmente a massa aparece como uma grandeza que mede a quantidade de matéria que há num corpo. Desse modo, se a massa de uma moeda é de 1 unidade, duas moedas idênticas a ela terão massa de 2 unidades, três moedas idênticas à primeira terão massa de 3 unidades, e assim por diante. A massa de um corpo pode ser obtida por meio da comparação desse corpo com **corpos-padrão**, utilizando-se uma balança de braços iguais.

No caso da figura 25, por exemplo, diremos que os corpos A e B têm a **mesma massa**, se a balança ficar em equilíbrio ao se colocar o corpo A em um dos pratos da balança e o corpo B no outro prato.

Naturalmente esse processo não serve para medir as massas de objetos muito grandes (como, por exemplo, a Terra) nem muito pequenos (como, por exemplo, um próton); nesses casos são utilizados outros métodos, que veremos mais adiante.

Vimos que a unidade de massa no SI é o quilograma (kg). Assim, por exemplo, na figura 26 o corpo C está equilibrado numa balança de braços iguais pelos corpos A e B, de massas respectivamente iguais a $1,0 \text{ kg}$ e $0,8 \text{ kg}$. Portanto, a massa do corpo C é $1,8 \text{ kg}$.

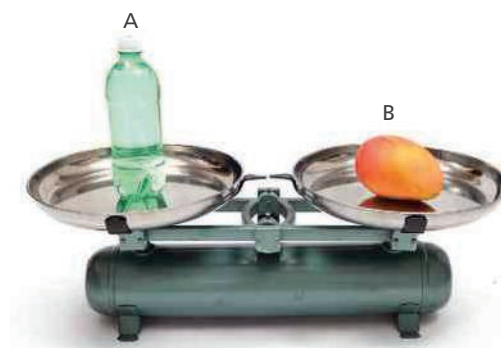


Figura 25.

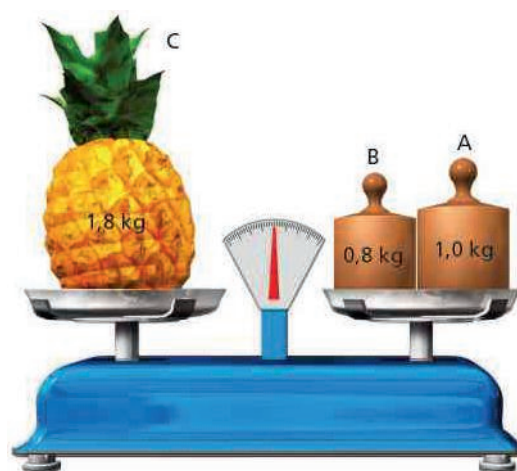


Figura 26.

FERNANDO FAVORETTO/CIAR IMAGEM

MARCOS AURELIO NEVES GOMES

Como já vimos, o quilograma é a única unidade de base do SI que contém um prefixo (o prefixo quilo):

$$1 \text{ kg} = \underbrace{\text{quilo}}_{\text{k}} \underbrace{\text{grama}}_{\text{g}} = 10^3 \text{ g}$$

$$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$$

Por esse motivo, os múltiplos e submúltiplos decimais da unidade de massa são formados acrescentando-se os prefixos à palavra **grama**, e não à palavra **quilograma**.

Há duas unidades de massa que não pertencem ao SI, mas que são usadas com frequência: a tonelada (*t*) e a unidade de massa atômica (*u*).

$$1 \text{ t} = 1 \text{ tonelada} = 10^3 \text{ kg}$$

$$1 \text{ u} = 1 \text{ unidade de massa atômica} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

A unidade de massa atômica (cujo valor não precisa ser memorizado) é usada na Física Atômica e é aproximadamente igual à massa do próton e à do nêutron.

OBSERVAÇÃO

Sabemos que 10^{-9} corresponde ao prefixo nano. Assim, alguém poderia, por exemplo, escrever:

$$10^{-9} \text{ kg} = 1 \text{ nanoquilograma} = 1 \text{ nkg}$$

No entanto isso **não é correto**, pois, de acordo com as regras do SI, não se usam simultaneamente dois prefixos (no caso, os prefixos *n* e *k*). Se quisermos usar prefixo, nesse caso o correto é:

$$10^{-9} \text{ kg} = 10^{-9} \cdot 10^3 \text{ g} = 10^{-6} \text{ g} = 1 \mu\text{g} = 1 \text{ micrograma}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 10^3 & \text{k} & \mu \end{array}$$

O problema com o quilograma-padrão

Vimos que o padrão de massa é um cilindro de platina iridiada, guardado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas. Nos últimos anos observou-se uma pequena diminuição na massa desse cilindro (cerca de 50 microgramas). Ainda não se sabe exatamente a razão, mas uma das hipóteses aventadas é que ao longo do tempo o cilindro venha liberando gases que ficaram aprisionados em seu interior durante o processo de fundição. Atualmente, há muitos físicos empenhados na tarefa de encontrar um outro padrão de massa que seja mais preciso e menos sujeito a variações.

Exercícios de Aplicação

42. Faça as transformações.

- a) 1 g em kg
- b) 1 kg em g
- c) 1 mg em g
- d) 2 t em kg

43. Em uma amostra de 2,0 mg do elemento químico polônio, há $6,0 \cdot 10^{18}$ átomos. Calcule a massa de cada átomo de polônio em:

- a) miligrama;
- b) quilograma.

Exercícios de Reforço

44. (Fuvest-SP) Um conhecido autor de contos fantásticos associou o tempo restante de vida de certa personagem à duração de escoamento da areia de uma enorme ampulheta. A areia se escoava uniforme, lenta e inexoravelmente, à razão de 200 gramas por dia. Sabendo-se que a ampulheta comporta 30 kg de areia e que $\frac{2}{3}$ do seu conteúdo inicial já se escoaram, quantos dias de vida ainda restam à personagem?

- a) 100 b) 50 c) 600 d) 2000 e) 1000

45. (UF-MG) Dona Margarida comprou terra adubada para sua nova jardineira, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são: 1 m de comprimento, 25 cm de largura e 20 cm de altura. Sabe-se que 1 kg de terra ocupa um volume de $1,7 \text{ dm}^3$. Nesse caso, para encher totalmente a jardineira, a quantidade de terra que dona Margarida deverá utilizar é aproximadamente:

- a) 85,0 kg b) 8,50 kg c) 29,4 kg d) 294,1 kg

46. (Cefet-PR) Um antibiótico de uso pediátrico é apresentado sob a forma de 400 mg de amoxicilina para cada 5 mL de solução. Uma criança com a idade de 30 meses, com 15 kg de massa, deve fazer o uso de 4 mL desse medicamento a cada 12 horas. Considerando que o tratamento deve durar 9 dias,

qual será a quantidade de amoxicilina consumida pela criança até o término do tratamento?

- a) 28,8 g d) $5,76 \cdot 10^{-2}$ kg
b) $2,88 \cdot 10^{-1}$ kg e) 6,8 g
c) 5,76 g

12. Densidade e massa específica

Consideremos um corpo de massa m e volume V . Definimos a densidade do corpo por:

$$d = \frac{m}{V}$$

É importante observar que V é o volume total do corpo, incluindo eventuais espaços ociosos em seu interior, como o caso da figura 27.

Se o corpo for maciço e homogêneo (fig. 28), a densidade pode ser chamada de massa específica (μ) do material de que é feito o corpo.

$$\mu = d = \frac{m}{V}$$

No Sistema Internacional de Unidades, a unidade de massa específica ou densidade é o kg/m^3 , mas frequentemente são usadas as unidades g/cm^3 e kg/L . No exercício 47 mostraremos que:

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ kg/L} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Observe que:

$$\text{kg/m}^3 = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\text{g/cm}^3 = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

No volume 2, no estudo da Termologia, veremos que a massa específica de uma substância varia com a temperatura e, no caso dos gases, varia também com a pressão. Na tabela 7 apresentamos alguns valores de densidade (ou massas específicas).



Figura 27.

CLIVE STREET/DOORBING KINDERSLEY/GETTY IMAGES



Figura 28.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Material ou corpo	Densidade em kg/m^3	Material ou corpo	Densidade em kg/m^3
ar (a 0°C e ao nível do mar)	1,293	mercúrio (a 0°C)	$13,6 \cdot 10^3$
água (a 4°C)	$1,00 \cdot 10^3$	vidro comum	$(2,4 \text{ a } 2,8) \cdot 10^3$
água do mar	$1,03 \cdot 10^3$	alumínio	$2,7 \cdot 10^3$
gelo	$0,917 \cdot 10^3$	aço	$7,86 \cdot 10^3$
sangue humano	$1,06 \cdot 10^3$	cobre	$8,92 \cdot 10^3$
corpo humano (média)	$1,0 \cdot 10^3$	prata	$11,3 \cdot 10^3$
álcool etílico (a 20°C)	$0,79 \cdot 10^3$	ouro	$19,3 \cdot 10^3$
gasolina (a 20°C)	$(0,68 \text{ a } 0,72) \cdot 10^3$	platina	$21,4 \cdot 10^3$
óleo (a 20°C)	$(0,8 \text{ a } 0,9) \cdot 10^3$	cortiça	$0,22 \cdot 10^3$
		madeira	$(0,12 \text{ a } 1,3) \cdot 10^3$

Tabela 7. Densidades.

O grama foi originalmente definido como a massa de água (a 4 °C) contida em 1 cm³. Assim, é natural que sua massa específica seja 1,00 g/cm³ ou 1,00 · 10³ kg/m³. A razão de a definição exigir a temperatura de 4 °C é que, como veremos no estudo da Termologia, a densidade da água é máxima a essa temperatura.

Densidade relativa

Consideremos dois materiais (ou corpos), A e B. Denominamos **densidade de A em relação a B** (d_{AB}) o quociente:

$$d_{AB} = \frac{d_A}{d_B}$$

No caso de sólidos e líquidos, em geral tomamos como referência (B) a água a 4 °C. No caso dos gases, em geral tomamos o oxigênio como referência (a 0 °C e ao nível do mar).

A densidade relativa não tem unidade, pois é o quociente de duas grandezas de mesma unidade.

Exercícios de Aplicação

47. Um corpo de massa 800 g ocupa um volume de 200 cm³. Calcule a densidade desse corpo em:

a) g/cm³ b) kg/m³ c) kg/L

Resolução:

- a) Sendo $m = 800$ g e $V = 200$ cm³, temos:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{800 \text{ g}}{200 \text{ cm}^3} \Rightarrow d = 4,00 \text{ g/cm}^3$$

- b) 1 g = 10⁻³ kg e 1 cm = 10⁻² m. Assim:

$$1 \text{ cm}^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

Portanto:

$$d = 4,00 \text{ g/cm}^3 = 4,00 \cdot \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} \Rightarrow d = 4,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

- c) 1 g = 10⁻³ kg e 1 cm³ = 10⁻³ L. Portanto:

$$d = 4,00 \text{ g/cm}^3 = 4,00 \cdot \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-3} \text{ L}} \Rightarrow d = 4,00 \text{ kg/L}$$

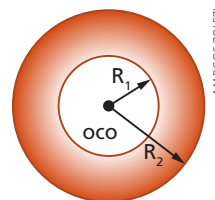
Comparando os resultados dos itens a, b e c, percebemos que:

$$1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ kg/L}$$

48. Um corpo de massa 600 gramas ocupa volume de 200 cm³. Calcule a densidade desse corpo em g/cm³, kg/L e kg/m³.

49. Um corpo de cobre tem a forma de uma casca esférica de raio interno $R_1 = 4,00$ cm e raio externo $R_2 = 10,0$ cm (a parte interna é oca).

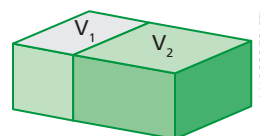
Calcule a densidade do corpo sabendo que a massa específica do cobre é 8,92 g/cm³.



50. Sabendo que a massa específica do alumínio é 2,7 g/cm³, calcule:

- a) a massa de um corpo maciço de alumínio cujo volume é 30 cm³;
b) o volume de um corpo maciço de alumínio cuja massa é 2,16 kg.

51. Na figura representamos um corpo feito de duas partes. Uma das partes tem volume $V_1 = 30$ cm³ e densidade $d_1 = 4,0$ g/cm³; a outra tem volume $V_2 = 70$ cm³ e densidade $d_2 = 2,0$ g/cm³. Calcule a densidade do corpo.



52. Calcule o volume aproximado (em litros) do corpo de um homem de massa 70 kg (consulte a tabela 7).

53. As massas específicas do aço e do ouro são 7,86 g/cm³ e 19,3 g/cm³, respectivamente. Calcule a densidade do ouro em relação ao aço.

Exercícios de Reforço

54. Ao nível do mar e à temperatura de $27\text{ }^{\circ}\text{C}$, a densidade do ar é $1,177\text{ kg/m}^3$. Calcule a massa do ar contido em uma sala em forma de paralelepípedo de lados $5,000\text{ m}$, $4,000\text{ m}$ e $3,000\text{ m}$.
55. (Fuvest-SP) Uma chapa de cobre de 2 m^2 , utilizada em um coletor de energia solar, é pintada com tinta preta cuja massa específica, após a secagem, é $1,7\text{ g/cm}^3$. A espessura da camada é da ordem de $5\text{ }\mu\text{m}$. Qual é a massa de tinta seca existente sobre a chapa?
56. As massas específicas do cobre e do alumínio são, respectivamente, iguais a $8,92\text{ g/cm}^3$ e $2,7\text{ g/cm}^3$. Qual é a densidade do cobre em relação ao alumínio?
57. (Unicamp-SP) Impressionado com a beleza de uma moça ($1,70\text{ m}$ de altura e 55 kg de massa) um escultor de praia fez a estátua dela, de areia e do mesmo tamanho da moça. Faça uma estimativa dos valores de:
- volume da estátua (em litros);
 - ordem de grandeza do número de grãos de areia usados na escultura.
58. (Unifor-CE) Dois líquidos A e B , quimicamente inertes e não miscíveis entre si, de densidade $d_A = 2,80\text{ g/cm}^3$ e $d_B = 1,60\text{ g/cm}^3$, respectivamente, são colocados em um mesmo recipiente. Sabendo que o volume do líquido A é o dobro do de B , a densidade da mistura, em g/cm^3 , vale:
- $2,40$
 - $2,30$
 - $2,20$
 - $2,10$
 - $2,00$
59. Sabe-se que a massa específica do alumínio é $2,7\text{ g/cm}^3$. Uma bola feita de alumínio tem diâmetro 20 cm e massa 10 kg . Essa bola é oca ou maciça?

13. Algarismos significativos

Quando fazemos uma medida, ela nunca é totalmente precisa; há sempre uma **incerteza**. Essa incerteza se deve a vários fatores, como, por exemplo, a habilidade de quem faz a medida e o número de medidas efetuadas. Mas o principal fator de incerteza é o limite de precisão dos instrumentos. Por exemplo, suponhamos que vamos medir o comprimento de uma caixa de fósforos, como indica a figura 29, usando duas réguas diferentes, a régua A e a régua B . A régua A está graduada em centímetros; a régua B apresenta cada centímetro dividido em 10 mm .

Observamos primeiramente a medida fornecida pela régua A . Vemos que o comprimento x é maior que 4 cm e menor do que 5 cm , mas vemos também que x está mais próximo de 5 que de 4 , isto é, $x > 4,5$. Podemos fazer então uma **estimativa** do comprimento x_A fornecido pela régua A :

$$x_A = 4,7\text{ cm}$$

Pela régua A temos certeza do algarismo 4 , mas o algarismo 7 é **duvidoso**; na realidade, observando a figura vemos que x_A pode estar entre $4,6$ e $4,8$, isto é, há uma incerteza de $0,1\text{ cm}$ **para mais** ou **para menos**. Uma maneira de expressar isso é dizer que a medida fornecida por A é:

$$x_A = 4,7 \pm 0,1\text{ cm}$$

\swarrow certo \searrow duvidoso

em que $0,1\text{ cm}$ é o valor estimado da incerteza.



Figura 29.

Suponhamos que alguém quisesse arriscar mais uma casa decimal na medida, colocando, por exemplo:

$$x_A = 4,73 \text{ cm}$$

É fácil perceber que **isso não é razoável**, pois o algarismo 7 já é duvidoso e, assim, o algarismo 3 é mais duvidoso ainda; os físicos diriam que o algarismo 3 **não é significativo**, pois, com o instrumento usado, não temos a menor condição de estimar o algarismo que vem após o 7. Nessa medida há dois algarismos significativos: o algarismo **certo**, 4, e o primeiro **duvidoso**, 7.

Observemos agora a medida x_B , feita pela régua B. Aí vemos que o comprimento x é um pouco maior que 4,7, e um pouco menor que 4,8. Podemos então avaliar o comprimento x_B como sendo 4,75 cm, com uma incerteza que pode ser avaliada em metade de um milímetro (ou 0,05 cm), e expressar a medida por:

$$x_B = 4,75 \pm 0,05 \text{ cm}$$

em que a incerteza avaliada é de 0,05 cm. Nessa medida dizemos que há três algarismos significativos: os algarismos certos 4 e 7 e o algarismo duvidoso 5.

Nos exercícios em geral não mencionaremos a incerteza.

Ao contarmos o número de algarismos significativos de uma medida devemos ter um cuidado especial com o algarismo zero: o zero não é significativo quando serve apenas para localizar a vírgula decimal. Por exemplo, na medida:

$$0,00037090$$

os quatro primeiros zeros não são significativos. Assim, tomando cuidado com o caso especial do zero, temos:

Algarismos significativos são os algarismos certos mais o primeiro duvidoso.

Os cuidados com o uso do número correto de algarismos significativos devem ser mantidos quando usamos a notação científica. Assim, por exemplo, $1,2 \cdot 10^3$ não tem o mesmo significado físico que $1,20 \cdot 10^3$.

No primeiro caso temos dois algarismos significativos, enquanto no segundo caso temos três.

Exemplo 5

Consideremos as medidas 5,7 cm, 5,70 cm e 5,700 cm. Do ponto de vista matemático, podemos dizer que:

$$5,7 = 5,70 = 5,700 \text{ (matematicamente iguais)}$$

No entanto, quando esses valores representam medidas, podemos dizer que elas não têm o mesmo significado físico.

5,7 tem 2 algarismos significativos

5,70 tem 3 algarismos significativos

5,700 tem 4 algarismos significativos

Arredondamento

Mais adiante veremos que muitas vezes necessitamos diminuir a precisão da medida, isto é, considerar uma aproximação da medida de um número menor de algarismos significativos; tal processo chama-se **arredondamento**. Assim, temos, por exemplo:

$$4,73 \cong 4,7 \text{ ou } 4,73 \cong 5$$

$$6,28 \cong 6,3 \text{ ou } 6,28 \cong 6$$

Não há unanimidade quanto à regra de arredondamento. Adotaremos as seguintes:

- se o algarismo a ser eliminado for 4 ou menos, o arredondamento é para menos;
- se o algarismo a ser eliminado for 5 ou mais, o arredondamento é para mais.

Assim, por exemplo, temos: $5,84 \approx 5,8$, mas $5,87 \approx 5,9$.

Adição e subtração

Quando adicionamos (ou subtraímos) medidas, o número de casas decimais do resultado deve ser igual ao menor número de casas decimais encontrado entre os termos adicionados (ou subtraídos). Por exemplo, ao somar 7,2 com 1,53:

$$\begin{array}{r} 7,2 \\ + 1,53 \\ \hline 8,73 \end{array}$$

O resultado deve ser expresso como 8,7, pois dessa forma ele fica com o mesmo número de casas decimais que o 7,2, termo com menor número de casas decimais.

Multiplicação e divisão

Quando multiplicamos (ou dividimos) medidas, o número de algarismos significativos no resultado é igual ao **menor** número de algarismos significativos encontrados entre as medidas multiplicadas (ou divididas). Assim, por exemplo:

$$\underbrace{4,52}_{3 \text{ significativos}} \cdot \underbrace{1,3}_{2 \text{ significativos}} = 5,876 \rightarrow \underbrace{5,9}_{2 \text{ significativos}}$$

Calculadoras eletrônicas

Ao usar uma calculadora eletrônica, você deve tomar cuidado com os algarismos significativos. Às vezes ela fornece um número de algarismos significativos **maior** do que o adequado. Observemos a divisão $3,2 \div 7,4$, por exemplo. A calculadora nos fornece 0,432432432. No entanto, pelas regras vistas acima, o resultado deve ter apenas **dois** algarismos significativos; assim, você deve fazer um arredondamento:

$$\underbrace{3,2}_{2 \text{ sig.}} \div \underbrace{7,4}_{2 \text{ sig.}} = \underbrace{0,432432432}_{\text{calculadora}} \rightarrow \underbrace{0,43}_{2 \text{ sig.}}$$

Em outros casos, a calculadora dá um número de algarismos significativos **menor** que o adequado. Por exemplo, no caso da multiplicação $2,4 \cdot 2,5$, a calculadora fornece o resultado 6. No entanto, pelas regras vistas, o nosso resultado deve conter **dois** algarismos significativos; portanto, você deverá providenciar o ajuste:

$$\underbrace{2,4}_{2 \text{ sig.}} \cdot \underbrace{2,5}_{2 \text{ sig.}} = \underbrace{6}_{\text{calculadora}} \rightarrow \underbrace{6,0}_{2 \text{ sig.}}$$

OBSERVAÇÕES

- Durante os cálculos, às vezes, podemos trabalhar com um número de algarismos significativos maior que o adequado; mas no final dos cálculos recomenda-se dar a resposta com o número correto.
- Às vezes, damos as respostas com um número de algarismos significativos maior que o recomendado; de outro modo poderia não ficar claro se você acertou ou errou o exercício.

Exercícios de Aplicação

60. Dê o número de algarismos significativos de cada medida a seguir.
- a) 6,824 c) 0,000370
b) 0,00037
61. Faça os arredondamentos necessários de modo que cada medida seja expressa com três algarismos significativos:
- a) 5,676 c) 8,5726
b) 5,674
62. Dê o resultado de cada operação a seguir, respeitando as regras dos algarismos significativos:
- a) $5,174 + 6,2 - 3,89$
b) $2,43 \cdot 5,167$
63. Em cada operação, fornecemos a resposta que aparece no mostrador de uma calculadora eletrônica. Faça os arredondamentos necessários para que as respostas respeitem as regras dos algarismos significativos:
- a) $2,3 \cdot 4,17 = 9,591$
b) $5,297 \div 3,14 = 1,686942675$
c) $292,5 \div 3,25 = 90$
64. (Cefet-PE) A medição do comprimento de um lápis foi realizada por um aluno usando uma régua graduada em mm. Das alternativas apresentadas, aquela que melhor expressa corretamente a medida obtida é:
- a) 15 cm c) 15,00 cm e) 150,00 mm
b) 150 mm d) 15,0 cm

14. Análise dimensional

Na tabela 1 apresentamos as unidades de base do SI: metro, quilograma, segundo, ampère, etc. Com exceção das grandezas suplementares (tabela 2), qualquer outra grandeza tem suas unidades expressas em função das unidades básicas; por isso, essas unidades são chamadas **unidades derivadas**.

As grandezas correspondentes às unidades básicas são: comprimento, massa, tempo, etc. Essas grandezas são chamadas **grandezas básicas** ou **dimensões**.

Consideremos, por exemplo, a grandeza comprimento. Ela pode ser medida em metro, centímetro, jarda, polegada, etc. Porém, seja qual for a unidade usada, temos:

$$\begin{aligned} \text{unidade de área} &= (\text{unidade de comprimento})^2 \\ &\text{ou} \\ \text{grandeza área} &= (\text{grandeza comprimento})^2 \end{aligned}$$

Dizemos, então, que:

A área tem a dimensão de comprimento ao quadrado.

①

Do mesmo modo, como a unidade de vazão no SI é $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, podemos dizer que:

A vazão tem a dimensão de $(\text{comprimento})^3 \cdot (\text{tempo})^{-1}$.

②

Para facilitar os enunciados de frases tais como ① e ②, atribuímos símbolos às dimensões (grandezas básicas). Neste volume necessitaremos apenas das grandezas básicas **comprimento**, **massa** e **tempo**, cujos símbolos são apresentados na tabela 8. As outras grandezas básicas serão estudadas nos volumes 2 e 3 desta coleção.

Exemplo 6

- a) No SI a unidade de área é o **metro quadrado** (m^2). Essa unidade é derivada, pois é obtida a partir da unidade básica **metro**.
- b) A unidade de vazão, no SI, é **metro cúbico por segundo** (m^3/s ou $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$). Essa unidade é derivada, pois é obtida a partir das unidades básicas **metro** e **segundo**.

Quando expressamos as dimensões de uma grandeza derivada, colocamos o símbolo dessa grandeza entre colchetes. Assim, representando a área por A , a frase ① pode ser escrita:

$$[A] = L^2 \quad \text{③}$$

e a frase ② pode ser escrita:

$$[\phi] = L^3 \cdot T^{-1} \quad \text{④}$$

Dizemos que L^2 é a **expressão dimensional da área**, e $L^3 \cdot T^{-1}$ é a **expressão dimensional da vazão**. A equação ③ é chamada **equação dimensional da área**, e a equação ④ é chamada **equação dimensional da vazão**.

Na equação ③ não aparecem as dimensões M e T . Podemos indicar isso colocando essas dimensões com expoentes zero:

$$[A] = L^2 M^0 T^0$$

Do mesmo modo, podemos reescrever a equação (4) do seguinte modo:

$$[\phi] = L^3 M^0 T^{-1}$$

Quando temos uma grandeza mecânica G qualquer, é costume apresentar sua equação dimensional usando-se sempre as três dimensões básicas: primeiramente L , depois M e em seguida T . Assim, em geral, a equação da grandeza G terá a forma:

$$[G] = L^x M^y T^z$$

sendo que, eventualmente, um ou mais dos expoentes pode ser nulo.

Grandezas adimensionais

Vimos que a densidade relativa não tem unidade, pois é obtida pela divisão de duas grandezas que têm a mesma unidade e, portanto, há cancelamento das unidades. Nesse caso, dizemos que a densidade relativa é uma grandeza adimensional. Representando-se a densidade relativa por d_R , sua equação dimensional é:

$$[d_R] = L^0 M^0 T^0$$

Os números também são adimensionais. Portanto, quando multiplicamos uma grandeza por um número diferente de zero, a dimensão da grandeza não é alterada.

Homogeneidade dimensional

Mais adiante encontraremos equações envolvendo grandezas, de modo que em um dos membros (ou nos dois) há uma soma de termos. Nesse caso, todos os termos, nos dois membros da equação, devem ter a mesma dimensão. Não podemos somar (ou subtrair) nem igualar termos de dimensões diferentes. Por exemplo, no capítulo 5 encontraremos a seguinte equação:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

Os termos s , s_0 , $v_0 t$ e $\frac{a}{2} t^2$ devem ter a mesma dimensão.

Dimensão	Símbolo
comprimento	L
massa	M
tempo	T

Tabela 8. Símbolos de algumas dimensões.



PROCURE NO CD

Neste capítulo, apresentamos algumas regras do SI, mas outras também importantes você encontra no conteúdo do CD relativo ao capítulo 1.

Exercício de Aplicação

65. Apresente as equações dimensionais das seguintes grandezas:

a) volume;

b) densidade.

Exercícios de Aprofundamento

66. Na época da Revolução Francesa vigorou durante três anos uma reforma nas unidades de tempo. Foram abolidas as unidades hora, minuto e segundo, ficando como unidade básica o dia, juntamente com seus submúltiplos decimais: o decidia (décima parte do dia), o centidia (centésima parte do dia) e o milidia (milésima parte do dia). Foram construídos, então, relógios adaptados à reforma, como o ilustrado na figura, em que o ponteiro pequeno efetua uma volta por dia, enquanto o ponteiro grande efetua dez voltas por dia. Em relação a um relógio atual, que horas está marcando este relógio?



67. (Enem-MEC) O sistema de fusos horários foi proposto na Conferência Internacional do Meridiano, realizada em Washington, em 1884. Cada fuso corresponde a uma faixa de 15° entre dois meridianos. O meridiano de Greenwich foi escolhido para ser a linha mediana do fuso zero. Passando-se um meridiano pela linha mediana de cada fuso, enumeram-se 12 fusos para leste e 12 fusos para oeste do fuso zero, obtendo-se, assim, os 24 fusos e o sistema de zonas de horas. Para cada fuso a leste do fuso zero, soma-se 1 hora, e, para cada fuso a oeste do fuso zero, subtrai-se 1 hora. A partir da Lei nº 11.662/2008, o Brasil, que fica a oeste de Greenwich e tinha quatro fusos, passa a ter somente 3 fusos horários. Em relação ao fuso zero, o Brasil abrange os fusos 2, 3 e 4. Por exemplo, Fernando de Noronha está no fuso 2, o estado do Amapá está no fuso 3 e o Acre, no fuso 4. A cidade de Pequim, que sediou os XXIX Jogos Olímpicos de Verão, fica a leste de Greenwich, no

fuso 8. Considerando-se que a cerimônia de abertura dos jogos tenha ocorrido às 20 h 8 min, no horário de Pequim, do dia 8 de agosto de 2008, a que horas os brasileiros que moram no estado do Amapá devem ter ligado seus televisores para assistir ao início da cerimônia de abertura?

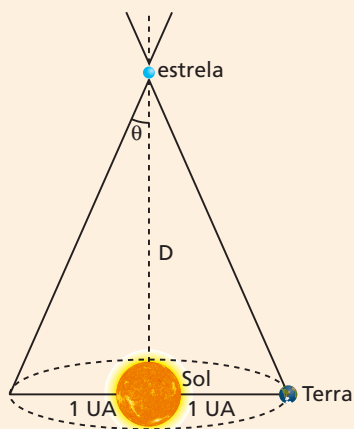
- a) 9 h 8 min, do dia 8 de agosto.
- b) 12 h 8 min, do dia 8 de agosto.
- c) 15 h 8 min, do dia 8 de agosto.
- d) 1 h 8 min, do dia 9 de agosto.
- e) 4 h 8 min, do dia 9 de agosto.

68. (Cesgranrio-RJ) Alguns experimentos realizados por virologistas demonstram que um bacteriófago (vírus que parasita e se multiplica no interior de uma bactéria) é capaz de formar 100 novos vírus em apenas 30 minutos. Se introduzirmos 1 000 bacteriófagos em uma colônia suficientemente grande de bactérias, qual será a ordem de grandeza do número de vírus existentes após 2 horas?

- a) 10^7
- b) 10^8
- c) 10^9
- d) 10^{10}
- e) 10^{11}

69. A distância média entre o centro da Terra e o do Sol é uma unidade astronômica (1 UA). Depois do Sol, a estrela mais próxima da Terra é **Próxima Centauro**, que está a uma distância da Terra de cerca de 270 000 UA. Para lidar com essas enormes distâncias, os astrônomos criaram a unidade de comprimento denominada **parsec**. Ela foi definida de modo que a distância entre o centro da Terra e o centro da Próxima Centauro tenha a **ordem de grandeza** de 1 parsec.

Na figura a seguir temos um esquema do processo usado pelos astrônomos para medir as distâncias até as estrelas. São feitas fotografias da estrela com um intervalo de seis meses. Com essas fotos é construído o triângulo da figura. Conhecida a base (2 UA) e os ângulos, é possível determinar a distância D . O parsec foi definido como o valor da distância D quando θ é igual a um segundo de grau: $\theta = 1''$.



Calcule o valor do parsec em metros e compare com o valor dado na tabela 5. (Use uma calculadora eletrônica.)

70. (PUC-MG) Uma caixa cúbica tem aresta medindo um metro e está totalmente cheia de água. Retirando-se dez litros, o nível da água baixará:

a) 0,01 dm c) 1,00 dm
b) 0,10 dm d) 10,0 dm

71. (UF-GO)

*Pois há menos peixinhos a nadar no mar
Do que os beijinhos que eu darei na sua boca*

Vinicius de Moraes

Supondo que o volume total de água nos oceanos seja de cerca de um bilhão de quilômetros cúbicos e que haja em média um peixe em cada cubo de água de 100 m de aresta, o número de beijos que o poeta beijoqueiro teria que dar em sua namorada, para não faltar com a verdade, seria da ordem de:

a) 10^{10} b) 10^{12} c) 10^{14} d) 10^{16} e) 10^{18}

72. (UF-AL) Um reservatório tem a forma de um cubo e a água em seu interior ocupa $\frac{2}{3}$ de sua capacidade.

Um objeto, cujo volume é de 7200 cm^3 , é jogado em seu interior, fazendo com que o nível da água suba 2 cm. Determine, em litros, a capacidade desse reservatório.

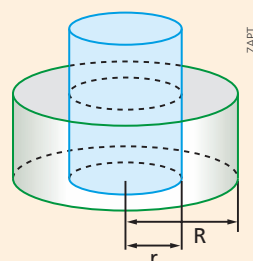
73. (UF-GO) Um produtor de suco armazena seu produto em caixas, em forma de paralelepípedo, com altura de 20 cm, tendo capacidade de 1 litro. Ele deseja trocar a caixa por uma embalagem em forma de cilindro, de mesma altura e mesma capacidade. Para que isso ocorra, o raio da base dessa embalagem cilíndrica, em centímetros, deve ser igual a:

a) $5\sqrt{2\pi}$ c) $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ e) $\sqrt{\frac{50}{\pi}}$
b) $\frac{\sqrt{50}}{\pi}$ d) $\frac{25}{\sqrt{\pi}}$

74. (Enem-MEC) Já são comercializados no Brasil veículos com motores que podem funcionar com o chamado combustível flexível, ou seja, com gasolina ou álcool em qualquer proporção. Uma orientação prática para o abastecimento mais econômico é que o motorista multiplique o preço do litro da gasolina por 0,7 e compare o resultado com o preço do litro de álcool. Se for maior, deve optar pelo álcool. A razão dessa orientação deve-se ao fato de que, em média, se com um certo volume de álcool o veículo roda dez quilômetros, com igual volume de gasolina rodaria cerca de:

a) 7 km d) 17 km
b) 10 km e) 20 km
c) 14 km

75. (Enem-MEC) Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1 , e o outro de raio R e altura h_2 . O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro.



Se $R = r\sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$ e, para encher o cilindro do meio, foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários

a) 20 minutos. d) 50 minutos.
b) 30 minutos. e) 60 minutos.
c) 40 minutos.

76. (Unicamp-SP) Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos: ao fim desse tempo, fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em $(x + 3)$ minutos. Calcule o tempo gasto para encher o tanque.

77. (Fuvest-SP) No leite tipo C vendido no comércio, o conteúdo de gordura corresponde a 3% da massa. Isso significa que, em 1 litro de leite, a massa da gordura, medida em **grama**, é, aproximadamente:

a) 0,003 c) 3 e) 300
b) 0,03 d) 30

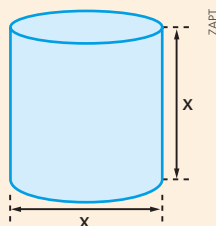
78. (Enem-MEC) O capim-elefante é uma designação genérica que reúne mais de 200 variedades de capim e se destaca porque tem produtividade de aproximadamente 40 toneladas de massa seca por hectare por ano, no mínimo, sendo, por exemplo, quatro vezes maior que a da madeira de eucalipto. Além disso, seu ciclo de produção é de seis meses, enquanto o primeiro corte da madeira de eucalipto é feito a partir do sexto ano.

[Disponível em: www.rts.org.br/noticias/destaque-2/i-seminario-madeira-energetica-discute-producao-de-carvaovegetal-a-partir-de-capim. Acesso em: 18 dez. 2008. Com adaptações.]

Considere uma região R plantada com capim-elefante que mantém produtividade constante com o passar do tempo. Para se obter a mesma quantidade, em toneladas, de massa seca de eucalipto, após o primeiro ciclo de produção dessa planta, é necessário plantar uma área S que satisfaça à relação

a) $S = 4R$ c) $S = 12R$ e) $S = 48R$
b) $S = 6R$ d) $S = 36R$

79. Vimos que o quilograma-padrão é um cilindro feito de uma liga de platina com um pouco de irídio. Sabe-se ainda que o diâmetro da base do cilindro é igual a sua altura, como indica a figura.



Consultando a tabela 7, dada no texto teórico, calcule o valor aproximado de x em centímetros.

80. (FGV-SP) Uma peça maciça é formada de ouro (densidade = 20 g/cm^3) e prata (densidade = 10 g/cm^3). O volume e a massa da peça são, respectivamente, 625 cm^3 e 10 kg . Podemos então afirmar que a massa de ouro contida na peça é igual a:

a) 5 000 g d) 7 250 g
b) 6 250 g e) 7 500 g
c) 6 900 g

81. (U. E. Londrina-PR) Dois líquidos miscíveis têm, respectivamente, densidades $d = 3,0 \text{ g/cm}^3$ e $d = 2,0 \text{ g/cm}^3$. Qual é a densidade, em g/cm^3 , de uma mistura homogênea dos dois líquidos composta, em volume, de 40% do primeiro e 60% do segundo?

a) 1,5 b) 2,2 c) 2,4 d) 2,8 e) 3,4

82. (PUC-SP) A densidade de determinada substância no estado líquido é $6,90 \text{ g/cm}^3$. Ao solidificar-se, sua densidade passa para $7,25 \text{ g/cm}^3$. A porcentagem de contração de seu volume tem valor aproximado:

a) 4,4% d) 5,6%
b) 4,8% e) 6,0%
c) 5,2%

83. (Enem-MEC) Pelas normas vigentes, o litro do álcool hidratado que abastece os veículos deve ser constituído de 96% de álcool puro e 4% de água (em volume).

As densidades desses componentes são dadas na tabela.

Substância	Densidade (g/L)
água	1000
álcool	800

Um técnico de um órgão de defesa do consumidor inspecionou cinco postos suspeitos de venderem álcool hidratado fora das normas. Colheu uma amostra do produto em cada posto e mediu a densidade de cada uma obtendo:

Posto	Densidade do combustível (g/L)
I	822
II	820
III	815
IV	808
V	805

A partir desses dados, o técnico pôde concluir que estavam com o combustível adequado somente os postos:

a) I e II d) III e V
b) I e III e) IV e V
c) II e IV

Introdução à Mecânica

Neste volume estudaremos a primeira parte da Física: a Mecânica. Conforme já vimos no capítulo anterior, a Mecânica é o estudo do movimento.

Esse estudo é muito importante do ponto de vista prático: é utilizado por médicos para mapear o fluxo sanguíneo; por engenheiros das equipes de Fórmula 1 para verificar o desempenho dos carros; por um aluno para medir o tempo gasto entre sua casa e a escola. Exemplos é o que não falta.

Galileu Galilei (1564-1642) foi um dos primeiros físicos a introduzir a experimentação e a Matemática na Física. Com ele nasceram as equações de alguns movimentos. Contemporaneamente Johannes Kepler (1571-1630) apresentou seus estudos sobre o movimento dos planetas em torno do Sol. No entanto, foi o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) o primeiro a apresentar uma teoria que explicava satisfatoriamente os movimentos. Seu trabalho estava baseado nos trabalhos de Galileu e de Kepler e foi intitulado *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicado em 1687.

O sucesso da Mecânica Newtoniana foi imediato e duradouro, dada a consistência da obra. Por mais de duzentos anos ela reinou. Houve, é verdade, necessidade de certos aperfeiçoamentos, feitos mais tarde por alguns físicos; no entanto, a sua base permaneceu inalterada até o início do século XX, quando surgiram duas novas teorias — a Mecânica Relativística e a Mecânica Quântica — para explicar alguns fenômenos que a Mecânica Newtoniana não conseguia explicar.

Com o surgimento dessas duas novas teorias, a Mecânica Newtoniana passou a ser chamada **Mecânica Clássica**, a qual abordaremos neste volume. A Mecânica Quântica e a Relativística serão abordadas no volume 3 desta coleção.

A Mecânica Clássica estuda os movimentos de baixa velocidade e a Mecânica Relativística só terá interesse para movimentos de altíssima velocidade ($v > 3\,000\text{ km/s}$). A Mecânica Quântica somente será necessária para o estudo dos fenômenos atômicos e nucleares.

Veremos em nosso curso que as leis da Mecânica Clássica são dadas por equações que envolvem duas grandezas: velocidade e aceleração. Para estudar as leis da Mecânica, precisamos conhecer com profundidade esses dois conceitos e por isso costumamos dividir a Mecânica em duas partes: a Cinemática e a Dinâmica.

Na Cinemática estudamos a trajetória, a posição do móvel, a velocidade e a aceleração. Na Dinâmica relacionamos essas grandezas com a massa, a força, a energia e a quantidade de movimento. O nosso estudo começará com a Cinemática.

1. Movimento e repouso
2. Sistemas de referência
3. Trajetória
4. Translação e rotação
5. Ponto material
6. Grandezas escalares e vetoriais

1. Movimento e repouso

O conceito de **movimento** e de **repouso** é **relativo**. Dizer que um determinado objeto está em movimento ou em repouso depende de onde ele está sendo observado. Esse local é chamado **referencial**. Se alguém observa o objeto, esse alguém será chamado **observador**.

Vejamos um exemplo inicial: um caminhão passa numa rua carregando uma enorme pedra na sua carroceria. Sentado numa cadeira, sobre a carroceria, está um garoto (G) e na rua, encostado a um poste, está um rapaz (R).

Adotaremos dois referenciais distintos: o poste e a cadeira. Junto ao poste temos o observador R (rapaz) e, na cadeira, o observado G (garoto). Estudemos o estado de movimento da pedra em relação a cada um dos referenciais.

- Para o observador R, o caminhão está em **movimento**; logo, a pedra que ele carrega está em **movimento**.
- Para o observado G, a pedra está em **repouso**.

Assim, concluímos que a pedra pode estar em movimento ou em repouso, dependendo do referencial escolhido para a observação.

Mais uma pergunta: o poste está em movimento ou em repouso? A resposta depende do referencial: para o observador R, o poste está em repouso, mas para o observador G, no caminhão, o poste está em movimento.

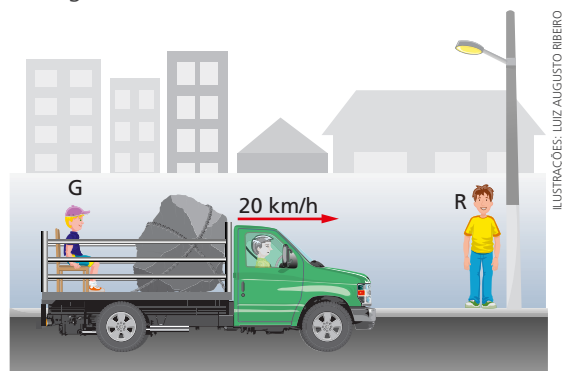


Figura 1.

Um caso particular interessante

Dois automóveis percorrem uma mesma estrada retilínea, com velocidades idênticas e no mesmo sentido.

Um passageiro do carro de trás, fixando seu olhar exclusivamente no carro da frente, sem sequer olhar para a estrada, tem a sensação de que este está em repouso à sua frente.

Do mesmo modo, um passageiro sentado no banco de trás do carro da frente, fixando seu olhar exclusivamente no carro de trás, tem a sensação de que este está parado.

Desse modo, podemos afirmar que o carro da frente está em repouso em relação ao carro de trás e vice-versa (o de trás está em repouso em relação ao carro da frente).

Dois aviões de caça, em pleno voo, podem realizar operações de abastecimento. Basta que não haja movimento relativo entre eles por determinado intervalo de tempo.



Figura 2. Dois automóveis estão em movimento em relação à estrada, porém um está em repouso em relação ao outro.

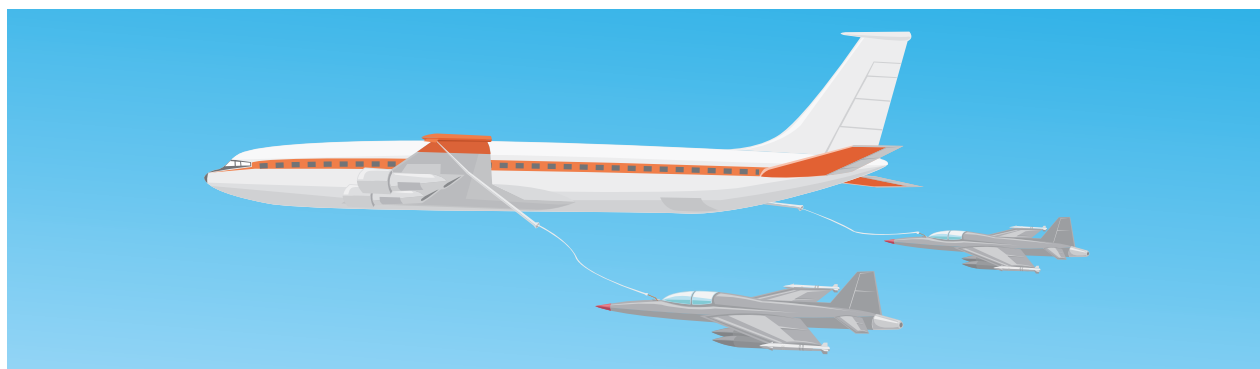


Figura 3. Operação de abastecimento de aviões de caça em pleno voo. Embora os aviões estejam em movimento em relação à Terra, não há movimento relativo entre eles.

2. Sistemas de referência

Em alguns estudos é comum colocarmos um sistema de coordenadas cartesianas para determinarmos com precisão a posição de um determinado ponto ou mesmo de um corpo de pequenas dimensões. Esse sistema de eixos também nos é útil no estudo do movimento do ponto. Assim, escolhido o referencial, fixamos nele os eixos cartesianos.

Em alguns casos a posição do ponto é determinada com apenas dois eixos: abscissa e ordenada, x e y (fig. 4). Em outros casos somos obrigados a lançar mão de um sistema de três eixos triortogonais (x , y , z) (fig. 5) dando-nos uma ideia espacial da posição do ponto.

Quando um ponto estiver se movimentando sobre um dos eixos do sistema, dizemos que o seu movimento é unidimensional. Quando o movimento se der sobre um plano cartesiano (x , y), dizemos que o movimento é bidimensional. Finalmente, quando o movimento for espacial, isto é, estiver ocupando o espaço do sistema (x , y , z), dizemos que ele é um movimento tridimensional.

Quando trabalhamos com um sistema de eixos cartesianos, definimos: um ponto está em repouso se, e somente se, as três coordenadas (x , y , z) se mantiverem invariáveis com o tempo. Se qualquer uma das três sofrer uma variação com o tempo, por definição, o ponto se movimentou.

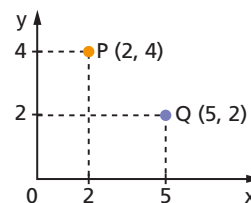


Figura 4.

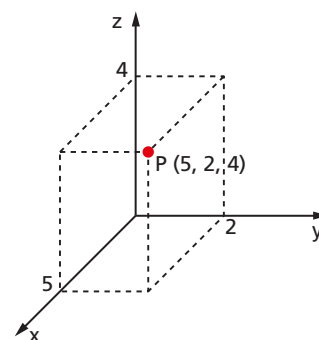


Figura 5.

3. Trajetória

Imaginemos um corpo de dimensões muito pequenas, praticamente um ponto, em movimento em relação a um referencial R , previamente escolhido. Em cada instante, esse ponto deverá ocupar uma posição no espaço, a qual será definida por um ponto geométrico. Passado um determinado intervalo de tempo, o conjunto dos pontos geométricos ocupados pelo corpo formará uma linha denominada **trajetória**.

Apenas para visualizarmos, vamos imaginar uma pequena bola de borracha sendo lançada da pessoa A para a pessoa B (fig. 6). A trajetória será o conjunto dos sucessivos pontos ocupados pela bola no seu movimento. Na figura 6 ela está representada pela linha pontilhada.

A definição de trajetória, no entanto, pode ser estendida para o caso de um corpo permanecer em repouso em relação ao referencial R : dizemos, nesse caso, que a trajetória é apenas um ponto geométrico.

Consideremos agora outro experimento: uma carreta se desloca sobre trilhos retos e horizontais com velocidade constante. Sobre a carreta uma pessoa A, parada, deixa cair uma bolinha de vidro e observa que sua trajetória é retilínea e vertical (fig. 7). Certamente, a resistência do ar é desprezível.

No entanto, um segundo observador B, parado na plataforma, vendo a carreta passar, assiste ao experimento e verifica que a trajetória da bolinha é uma curva (fig. 8).

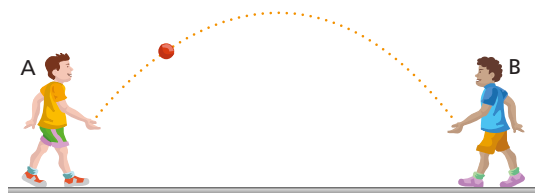


Figura 6.

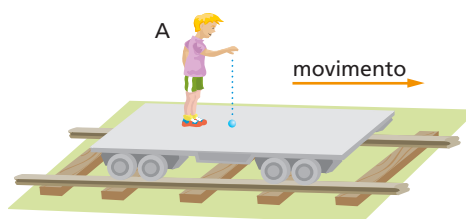


Figura 7. Trajetória vista pelo observador A.

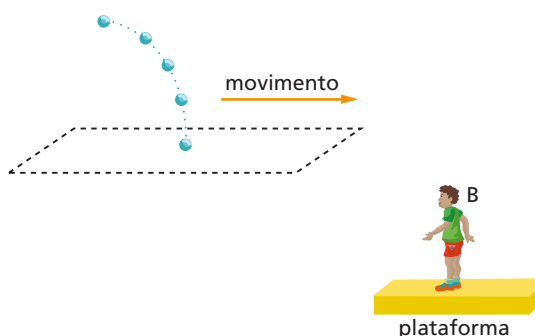


Figura 8. Trajetória vista pelo observador B.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

O observador B assistiu a uma superposição de dois movimentos: ao mesmo tempo em que a bola vai caindo, ela se desloca para a frente, acompanhando o movimento da carreta. O resultado é uma curva denominada **parábola**. Observemos a figura 9, uma simulação de uma fotografia estroboscópica mostrando a bolinha em diversos instantes.

É interessante notar que, em todos os instantes (t_0 , t_1 , t_2 , t_3), a bolinha se manteve na mesma vertical que passa pelo ponto M onde ela tocou o chão da carreta.

4. Translação e rotação

Dizemos que um segmento de reta AB executa um movimento de translação em relação a um determinado referencial R se durante o movimento ele se mantiver paralelo à sua posição original. Na figura 10, ilustramos um movimento de translação executado por uma haste AB . Observemos que, em todos os instantes em que está sendo mostrada, ela se manteve paralela à sua posição inicial (instante $t = 0$).

Essa definição pode ser estendida para um corpo qualquer, bastando tomar sobre esse corpo um segmento de reta e verificar se este se mantém paralelo à sua posição original durante o movimento.

A Terra em sua órbita em torno do Sol executa um movimento de translação, pois seu eixo se mantém sempre paralelo à posição inicial (estamos desprezando os pequenos movimentos de precessão).

Durante um trecho da viagem, numa rodovia retilínea, um automóvel executa um movimento de translação.

Quando o professor desliza o apagador de uma ponta à outra da lousa, mantendo-o sempre paralelo à posição inicial, ele executa um movimento de translação (fig. 11).

O movimento de **rotação** pode ser entendido facilmente se observarmos um CD girando num toca-CD (fig. 12). Num determinado intervalo de tempo seus pontos executam simultaneamente o movimento de rotação em torno de um ponto central. Qualquer corpo poderá executar um movimento de rotação, desde que todos os seus pontos girem em torno de um ponto central.

Os ponteiros de um relógio executam um movimento de rotação em torno de uma de suas extremidades. A hélice de um ventilador realiza um movimento de rotação em torno de seu eixo central. A Terra realiza um movimento de rotação em torno de seu eixo.

Um jogador de futebol bate uma falta e a bola toma um "efeito", popularmente conhecido como "bola de rosca", ou seja, a sua trajetória torna-se sinuosa. Isso significa que a bola executou dois movimentos simultâneos: translação e rotação.

A Terra executa pelo menos dois movimentos simultâneos: translação em torno do Sol e rotação em torno de seu próprio eixo. Uma bailarina dançando num palco pode executar simultaneamente dois movimentos: um de translação e outro de rotação em torno de seu eixo vertical.

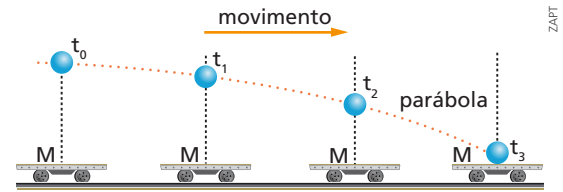


Figura 9. Flashes sucessivos da queda da bolinha vista pelo observador B em repouso na plataforma. Ele vê a parábola.

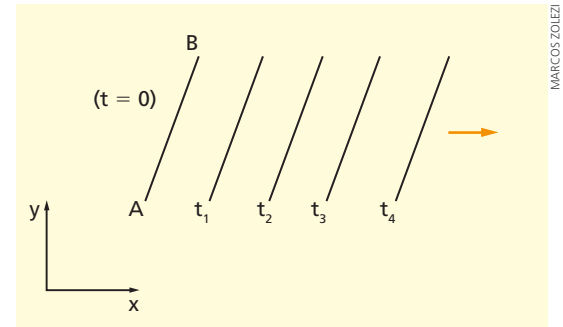


Figura 10. Uma haste AB em movimento de translação.



Figura 11. Apagador executando um movimento de translação sobre a lousa.

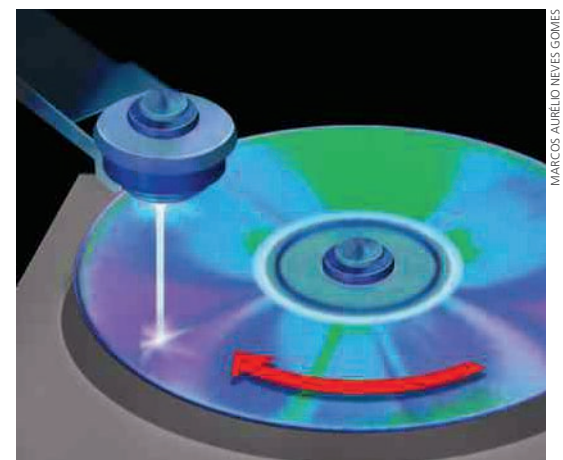


Figura 12. Um toca-CD.

5. Ponto material

Quando analisamos um corpo em repouso ou em movimento de translação, cujas dimensões possam ser desprezadas, chamamos esse corpo de **ponto material**.

As dimensões de um corpo podem ser desprezadas por terem sido comparadas com as de outro corpo bem maior ou então porque na análise do fenômeno elas não têm nenhuma interferência. Observamos ainda que na definição de ponto material o que será desprezível é o tamanho do corpo e não sua massa. Mais adiante vamos estudar as leis da Mecânica e veremos que muitas delas serão válidas apenas para o ponto material, porém envolvendo a sua massa.

Vejam um exemplo simples: um carrinho de supermercado está carregado de seis melancias cuja massa total é de 40 kg. Estando ele em repouso, ao analisarmos as forças externas que o mantêm em equilíbrio, podemos considerá-lo um ponto material, de massa 40 kg.

Em alguns casos usamos também o termo **partícula** para o ponto material. Por exemplo, estamos analisando um saco cheio de bolinhas de vidro e nos interessamos apenas pela massa dessas bolinhas, sem nos importarmos com o volume. Poderíamos chamar as bolinhas de partículas.

A definição de ponto material implica, portanto, que o corpo em estudo não esteja em movimento de rotação, nem de oscilação, não sofra deformações e, ainda, que as suas dimensões não interfiram nos resultados do experimento realizado.

Um carro realizando uma viagem poderá ser considerado um ponto material, pois suas dimensões serão desprezíveis em relação ao comprimento da estrada. Por outro lado, são irrelevantes as dimensões do carro quando estudamos a sua velocidade e o tempo de viagem.

Ao estudarmos o movimento de translação da Terra em sua órbita em torno do Sol, consideramos que ela seja uma simples partícula.

Quando o corpo em estudo não puder ter desprezadas as suas dimensões, ou mesmo estiver realizando um movimento de rotação, ele será chamado **corpo extenso**.

Um automóvel, quando é manobrado no interior de uma garagem, deve ser considerado corpo extenso, pois não poderíamos desprezar suas dimensões para entrar numa vaga entre dois carros. Um peão girando será também um corpo extenso, pois possui movimento de rotação. O CD da figura 12 deve ser considerado corpo extenso, pois tem rotação. Quando estudamos o movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo, ela não pode ser chamada de ponto material, mas sim de corpo extenso.

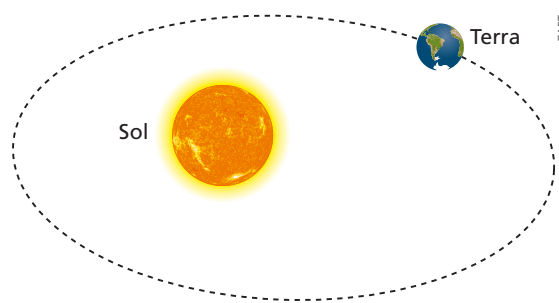


Figura 13. Movimento de translação da Terra.

6. Grandezas escalares e vetoriais

No estudo da Física faremos uso de várias quantidades de grandezas. Na introdução de Mecânica (capítulo 1), você já foi apresentado a algumas delas: massa, comprimento, tempo, área, etc.

Cada uma das grandezas físicas pode ser classificada em uma das duas modalidades: **escalar** ou **vetorial**.

Uma grandeza física **escalar** é aquela que fica perfeitamente definida por um número, positivo ou negativo, seguido de uma unidade apropriada.

Se você for à feira e pedir que lhe vendam 2 kg de feijão, certamente será compreendido, pois a massa é uma grandeza escalar e basta citar o valor e a unidade para defini-la.

Quando dizemos informalmente: está fazendo muito frio e a temperatura deve estar por volta de $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$, expressamos corretamente essa grandeza, pois ela é escalar.

São exemplos de grandezas escalares: o comprimento, a área, o volume, a massa, o tempo, a densidade, a temperatura, etc.

Uma grandeza física **vetorial**, para ficar completamente definida, necessita, além do valor numérico e unidade, de uma informação geométrica que nos dê a orientação espacial da grandeza.

Consideremos, por exemplo, o caso ilustrado na figura 14, em que uma partícula tenha partido do ponto A e percorrido a distância de 5 cm. É necessária a informação complementar: para onde ela se deslocou. Isso pode ser feito por um segmento orientado AB, como está na figura.

O valor da grandeza é denominado **módulo** ou **intensidade** e se trata, portanto, de um número seguido de uma unidade física. No exemplo da figura 14, o módulo do deslocamento vale 5 cm.

Direção e **sentido** são conceitos distintos. Dizemos que duas retas paralelas têm a mesma **direção**. Na figura 15 os segmentos AB e CD, bem como as retas *r* e *s* têm a mesma direção, pois são todos paralelos entre si.

Sentido é a orientação imposta ao segmento ou à reta. Na figura 16 foram acrescentadas orientações às retas e aos segmentos. As duas retas orientadas *r* e *s* têm o mesmo sentido. Os segmentos AB e CD da figura 16 têm sentidos opostos.

Para indicar a direção e o sentido de uma grandeza vetorial usamos uma seta denominada **vetor**. Mais adiante, no capítulo 8, estudaremos rigorosamente as operações que envolvem vetores. Em resumo, as grandezas vetoriais apresentam sempre três características: **módulo**, **direção** e **sentido**.

São exemplos de grandezas vetoriais: o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força, etc. No decorrer do nosso curso, tomaremos conhecimento de outras grandezas vetoriais. Antes, vejamos dois exemplos.

A **força** é uma grandeza vetorial. Para caracterizar uma força damos o seu módulo, a sua direção e o seu sentido. Na figura 17, representamos um carrinho sendo empurrado da esquerda para a direita, num plano horizontal, por uma força de intensidade de 5,0 N. Para representar a força usamos um vetor, representado na figura por uma seta.

A **velocidade** é uma grandeza vetorial, pois a simples indicação de seu módulo não é suficiente para caracterizar o movimento. Precisamos indicar a direção e o sentido. Observemos a figura 18, em que, com uma simples seta (vetor velocidade), estamos indicando a direção e o sentido do movimento de cada carro. Os valores 60 km/h e 40 km/h são os módulos das duas velocidades.

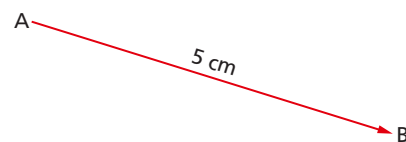


Figura 14. Deslocamento de um ponto A para B.

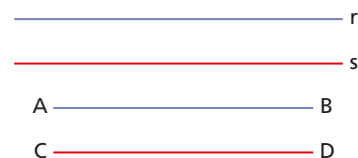


Figura 15. Retas e segmentos de mesma direção.

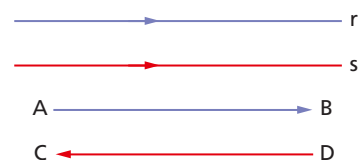


Figura 16. Retas e segmentos orientados.

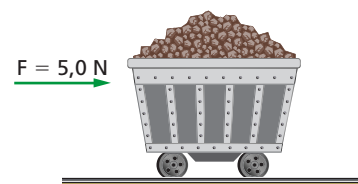


Figura 17.

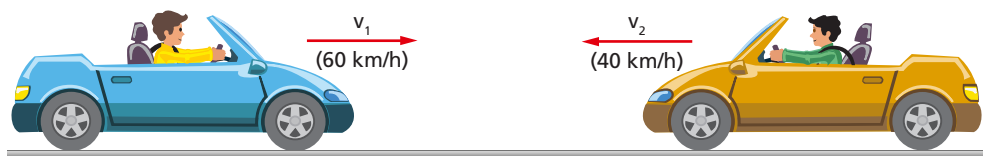


Figura 18. Carros em sentidos opostos.

Resumindo, para sabermos se uma grandeza é vetorial ou escalar basta saber se ela necessita de uma direção e de um sentido. No caso afirmativo, será vetorial e, no caso negativo, será escalar.

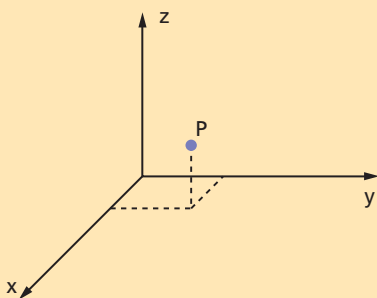
Cinemática vetorial e escalar

Em algumas situações simples podemos, por conveniência, dar a algumas grandezas vetoriais um tratamento apenas escalar. Mais adiante, quando iniciarmos a Cinemática, vamos tratar a velocidade como uma grandeza escalar. Vejamos um exemplo simples: você está dirigindo um carro e verifica que há radares de velocidade naquele trecho por onde está passando. Por precaução, olha para o velocímetro para saber se está dentro do limite permitido. Nesse caso, a velocidade é um simples escalar, pois basta o seu módulo. Não interessam a direção e o sentido. Do mesmo modo, a aceleração terá um tratamento escalar nesse início de curso.

A **Cinemática Escalar** é o estudo dos movimentos em que a velocidade e a aceleração serão tratadas como escalares. Mais adiante, quando já tivermos nos acostumado com essas duas grandezas, vamos passar a tratá-las como vetoriais, ou seja, estudaremos a **Cinemática Vetorial**.

Exercícios de Aplicação

1. Considere uma partícula P e um sistema de eixos cartesianos triortogonal (x , y , z). A partícula pode estar em movimento ou em repouso em relação a esse sistema de referência.



Analise cada uma das afirmativas e responda verdadeiro ou falso.

- I. Se as coordenadas y e z não variarem com o tempo, mas apenas a abscissa x , então o movimento de P é unidimensional e a sua trajetória terá a direção do eixo x .
- II. Se o plano determinado por xy for horizontal e as coordenadas x e y não variarem com o tempo, mas apenas a ordenada z variar, então a trajetória de P é vertical.
- III. Se e somente se as três coordenadas, x , y e z , permanecerem constantes com o tempo, a partícula P estará em repouso em relação ao sistema.
- IV. Para que a partícula P permaneça em repouso, é suficiente que uma de suas coordenadas permaneça constante com o tempo.

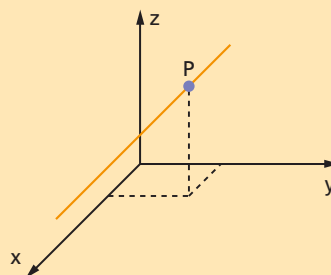
São verdadeiras:

- a) todas.
- b) somente I, II e III.

- c) somente II e IV.
- d) somente II, III e IV.
- e) somente I e III.

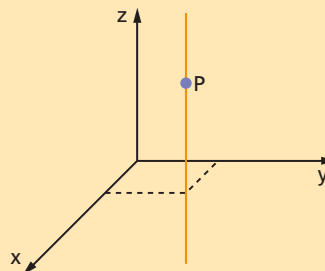
Resolução:

- I. Verdadeira. O movimento de P terá uma trajetória retilínea, paralela ao eixo das abscissas x . Esse movimento é dito unidimensional, pois se passa sobre uma reta.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

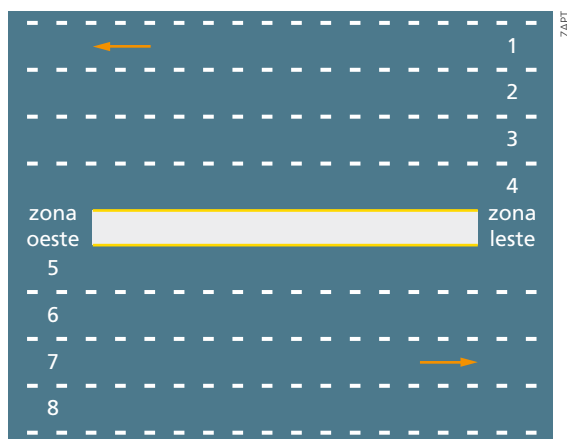
- II. Verdadeira. O movimento de P terá uma trajetória retilínea paralela ao eixo z . Como z é perpendicular ao plano xy , então a trajetória também o será. Sendo o plano xy horizontal, então as retas que são perpendiculares serão retas verticais.



III. Verdadeira. Por definição, o ponto material está em repouso em relação a um sistema de eixos cartesianos triortogonal, quando todas as três coordenadas, x , y e z , não variam com o tempo.

IV. Falsa. Basta que uma das coordenadas de P varie com o tempo para que ele saia do repouso e fique em movimento.

2. Uma grande avenida apresenta oito pistas de rolamento para o tráfego de veículos, havendo um canteiro de separação no meio delas. Em quatro pistas os carros andam da zona leste para a zona oeste e, nas outras quatro, da zona oeste para leste.



Com base na figura, podemos afirmar que:

- I. as oito pistas têm a mesma direção.
- II. as pistas 2 e 4 têm o mesmo sentido.
- III. as pistas 3 e 7 têm direções opostas.
- IV. as pistas 4 e 5 têm a mesma direção e sentidos opostos.

Estão corretas as afirmativas:

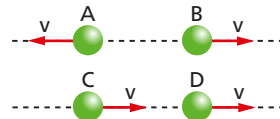
- a) I, II, III e IV.
- b) I e II, apenas.
- c) I, II e IV, apenas.
- d) II e IV, apenas.
- e) II, III e IV, apenas.

3. Imaginemo-nos fazendo uma viagem numa aeronave que voa a 10 km de altura em movimento retilíneo e horizontal, a uma velocidade de 864 km/h em relação ao solo (Terra).

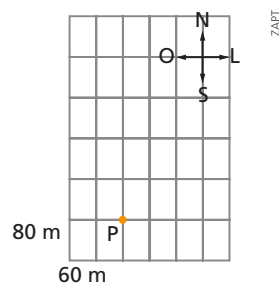
- a) Fixe um referencial no avião e responda: Qual é o estado cinemático dos demais passageiros sentados em suas poltronas?
- b) Para um referencial fixo no solo (na Terra), qual é a velocidade dos demais passageiros?
- c) Se a aeromoça, parada ao seu lado, deixar cair uma laranja, qual é a trajetória para um referencial fixo no avião?

4. Na figura temos quatro pontos materiais, A , B , C e D , que se movimentam em relação ao solo com velocidade de módulo v e sentido indicado por uma seta. Responda em cada caso qual é o estado cinemático do ponto material.

- a) A em relação a C .
- b) C em relação a D .
- c) B em relação a C .



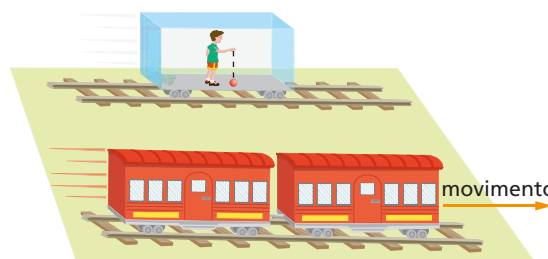
5. No mapa de uma cidade observamos que seus quarteirões são retangulares e idênticos, medindo $60\text{ m} \times 80\text{ m}$ cada um. Um carteiro precisa entregar algumas correspondências e vai partir da posição P seguindo o seguinte roteiro: 60 m para oeste; 160 m para o norte; 120 m para o leste; 80 m para o sul; 120 m para o leste e, finalmente, 160 m para o norte.



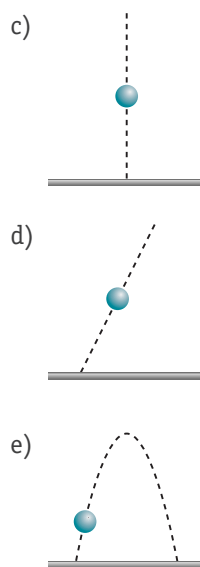
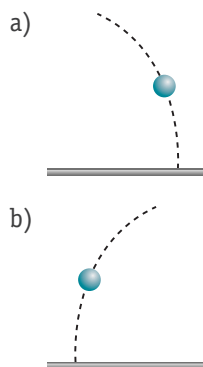
Traçando no mapa um segmento retilíneo de sua posição final até a posição inicial P , encontramos a distância:

- a) 360 m
- b) 300 m
- c) 280 m
- d) 240 m
- e) 180 m

6. Um vagão de trem, todo construído em acrílico transparente, estava parado numa estação. No interior desse vagão, um estudante estava realizando um experimento com uma bolinha de chumbo que consistia em abandoná-la em queda livre e fotografá-la com *flash* estroboscópico obtendo fotos sucessivas de sua trajetória. Nesse mesmo intervalo de tempo, passou ao lado desse vagão um trem com velocidade constante e na janelinha de um dos vagões havia um físico que observava o experimento do estudante no interior do vagão de acrílico.



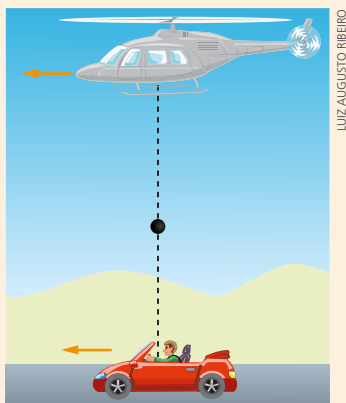
Como o experimento foi feito com uma bolinha de chumbo, no interior do vagão, a resistência do ar em nada interferiu. A figura que indica a trajetória da bolinha, como foi observada pelo físico do trem em movimento, é:



ILUSTRAÇÕES ZAPIT

Exercícios de Aprofundamento

7. Um helicóptero em movimento retilíneo encontra-se sobre um carro conversível que viaja à mesma velocidade que aquele. Num dado instante, uma bolinha de aço despenca do trem de pouso do helicóptero, caindo na direção do banco de passageiros do carro, que se encontra vazio. Desprezando a resistência do ar, analise cada afirmativa e responda verdadeiro ou falso.



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

- I. Durante a queda, a bolinha permaneceu em repouso em relação ao carro.
- II. A trajetória da bolinha, relativamente ao helicóptero, é uma reta vertical.
- III. A trajetória da bolinha, relativamente ao helicóptero, é um arco de parábola.
- IV. O helicóptero está em repouso relativamente ao carro.

São verdadeiras:

- a) todas as quatro alternativas.
- b) I e III apenas.
- c) II e IV apenas.

d) I, II e III.

e) II, III e IV.

8. Numa rodovia retilínea, com duas pistas paralelas, viajam dois carros com a mesma velocidade, estando um ao lado do outro. Os carros são conversíveis e um passageiro do carro da esquerda e um do carro da direita resolvem trocar entre si latinhas de refrigerante, fechadas e cheias. Como a velocidade dos carros é pequena, a resistência do ar pode ser desprezada. Muitas latinhas são lançadas com sucesso de um carro para o outro. Assinale a alternativa correta.

- a) O sucesso da troca se deu pelo fato de que os carros estavam em repouso absoluto e as latinhas foram lançadas facilmente de um carro para o outro.
- b) O sucesso da troca se deu pelo fato de que os carros estavam em repouso relativo, isto é, um em relação ao outro e as latinhas foram lançadas em movimento uniforme, adquirindo trajetórias retilíneas.
- c) O carro da esquerda estava em movimento relativo ao da direita, mas a perícia dos lançadores colaborou para o sucesso do evento.
- d) O carro da esquerda estava em repouso em relação ao da direita e vice-versa e isso facilitou a troca de latinhas, que foram lançadas como se o carro vizinho estivesse parado ao seu lado.
- e) Para compensar o movimento dos carros, o lançador atirava um pouco mais à frente do outro veículo para que as latinhas caíssem exatamente no banco do outro carro.

Velocidade escalar

1. Velocidade escalar média

Na grande maioria dos casos do cotidiano, os movimentos ocorrem num único sentido. Desse modo, vamos apresentar uma definição particular de velocidade escalar média que atenda a esses casos.

Consideremos uma partícula percorrendo uma trajetória que pode ser retilínea ou cheia de curvas. Durante o seu movimento, a partícula poderá percorrer alguns trechos com maior rapidez e outros com menor rapidez (intuitivamente, diríamos: “com alta ou com baixa velocidade”). Poderá, inclusive, dar uma paradinha temporária em algum ponto da trajetória.

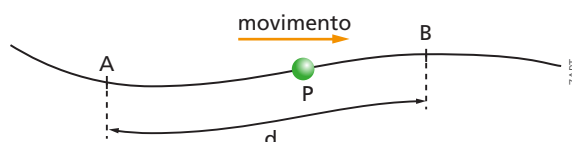


Figura 1.

Consideremos o trecho compreendido entre A e B (fig. 1) e tomemos as seguintes medidas:

- Δt : intervalo de tempo decorrido para que a partícula (P) vá de A até B. Esse tempo é contado a partir do instante em que ela passa por A até o instante em que ela chega a B.
- d : distância percorrida pela partícula desde A até B. Devem-se levar em conta as possíveis curvas existentes na trajetória. Trata-se, portanto, da medida efetiva da distância percorrida pela partícula móvel. Em resumo, é a medida do comprimento da curva AB.

Definimos velocidade escalar média como o quociente entre a distância percorrida d e o intervalo de tempo Δt .

$$v_m = \frac{d}{\Delta t}$$

A velocidade escalar média corresponde à velocidade escalar a ser mantida constante durante todo o trajeto AB para que o móvel o percorra no mesmo intervalo de tempo Δt .

1. Velocidade escalar média
2. Velocidade escalar instantânea
3. Movimentos simultâneos
4. O eco
5. Vazão e velocidade de um líquido numa tubulação
6. A abscissa na trajetória
7. Generalizando a definição de velocidade escalar média
8. Equação horária de um movimento [posição \times tempo]
9. Velocidade escalar instantânea – uma definição rigorosa
10. Movimento progressivo e retrógrado

Exemplo:

Vamos supor que o percurso AB da figura 1 tivesse comprimento de 120 km e que um carro o tivesse percorrido em 2 horas. Durante a viagem houve trechos de alta e trechos de baixa velocidade. Por definição, a velocidade escalar média é:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{120 \text{ km}}{2 \text{ h}} \Rightarrow v_m = 60 \text{ km/h (lê-se: quilômetro por hora)}$$

Interpretação do resultado: Se o carro tivesse feito todo o percurso AB com uma velocidade escalar constante de 60 km/h, teria percorrido todo o trecho nas mesmas 2 horas.

Equação dimensional da velocidade e unidades

A distância percorrida tem a dimensão de um comprimento: L .

O intervalo de tempo e o tempo têm a mesma dimensão: T .

Usando-se a definição de velocidade, a equação dimensional fica:

$$[v] = \frac{L}{T} \Leftrightarrow [v] = L \cdot T^{-1}$$

Assim, no SI a unidade de velocidade é:

$$(\text{unid}) v = \frac{\text{m}}{\text{s}} \Leftrightarrow (\text{unid}) v = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

No cotidiano, no entanto, o uso do **m/s** não é tão comum, mas sim o do **km/h**. Vamos deduzir um modo de conversão entre ambas as unidades:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$$

Concluindo: para se converter (km/h) em (m/s) basta dividir o valor original por 3,6; para fazer a conversão inversa, basta multiplicar o valor original em (m/s) por 3,6.

Exemplos:

$$\frac{72 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{72}{3,6} (\text{m/s}) = 20 \text{ m/s}$$

Do mesmo modo:

$$50 \text{ m/s} = 3,6 \cdot 50 (\text{km/h}) = 180 \text{ km/h}$$

Existem outras unidades de velocidade: km/s, cm/s, milhas/hora, etc. Elas também não pertencem ao SI, no entanto podem ser convertidas em m/s. Para cada caso deduz-se um processo de conversão.

2. Velocidade escalar instantânea

A velocidade escalar instantânea, como o nome indica, é a velocidade escalar do móvel num dado instante. No caso de um automóvel, por exemplo, a velocidade instantânea é lida diretamente no velocímetro, em um dado instante.

Imaginemos que estamos trafegando por uma rodovia, de carro, passando ao lado de uma placa. Nesse instante olhamos para o velocímetro do carro, que registra 94 km/h. Esse valor representa a velocidade instantânea do veículo.

No final deste capítulo, daremos uma definição mais rigorosa para velocidade escalar instantânea, usando o conceito de limite. No entanto, neste momento, precisamos aprender a usar a velocidade, cujo conceito é bastante intuitivo.

Diferença entre velocidade média e velocidade instantânea

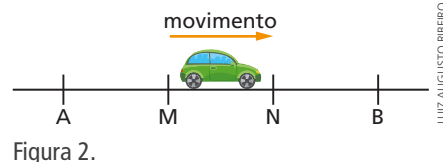
A velocidade escalar média é calculada para um intervalo de tempo Δt , ao passo que a velocidade escalar instantânea é medida num dado instante t .

Vejam os seguintes exemplos:

O carrinho da figura 2 percorreu o trecho de A até B, de 40 m, em 10 s, obtendo uma velocidade escalar média de 4,0 m/s. No entanto, quando passou pelo ponto M o seu velocímetro indicava uma velocidade escalar instantânea de 4,8 m/s e ao passar pelo ponto N a velocidade escalar era de 3,4 m/s.

Resumindo, temos:

- no intervalo de tempo de 10 s, ou seja, no trecho AB, a velocidade escalar média foi 4,0 m/s;
- no instante em que o carrinho passou por M, a velocidade escalar instantânea era 4,8 m/s;
- no instante em que ele passou por N, a velocidade escalar instantânea era 3,4 m/s.



Não existe nenhuma regra que relacione as velocidades instantâneas com a velocidade média. Resista à tentação de somar as velocidades instantâneas e depois tirar uma média entre elas. O resultado não será a velocidade escalar média, a não ser em algum caso particular.

Movimento uniforme

Quando um móvel mantém constante a velocidade escalar instantânea durante um determinado intervalo de tempo, dizemos que o seu movimento foi uniforme nesse intervalo de tempo.

Neste capítulo vamos usar bastante esse conceito, mas o seu estudo completo será feito apenas no capítulo 4.

Velocidade da luz no vácuo

No vácuo a luz tem uma velocidade constante e seu movimento é uniforme. Indica-se a velocidade da luz no vácuo pela letra c e o seu valor é:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

ou

$$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Veremos no estudo da Física Moderna que esta é a maior velocidade que se pode atingir. Por mais que se acelere uma partícula num acelerador especial, jamais será ultrapassado esse limite.

Exercícios de Aplicação

1. Uma estrada de 500 km de extensão nos leva de uma cidade A para outra cidade B. Uma família saiu de carro da cidade A exatamente às 10 h da manhã. Pelo caminho, pararam duas vezes: 15 minutos para abastecer e depois 45 minutos para um lanchinho. Finalmente, às 18 h, chegaram à cidade B. Determine a velocidade escalar média.

Resolução:

Independentemente de terem parado pelo caminho, o intervalo de tempo que interessa é:

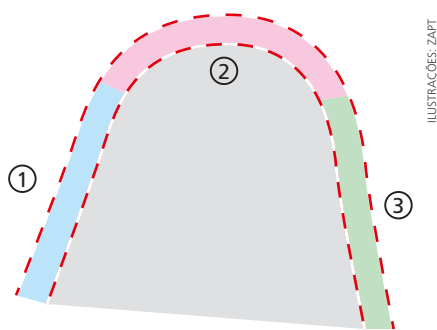
$$\Delta t = 18 \text{ h} - 10 \text{ h} = 8 \text{ h}$$

A velocidade escalar média vale:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{500 \text{ km}}{8 \text{ h}} \Rightarrow v = 62,5 \text{ km/h}$$

No cálculo da velocidade escalar média leva-se em conta apenas a duração total do evento, sem preocupação com o tempo perdido em paradas eventuais do móvel.

2. Na Fórmula 1 costuma-se cronometrar trechos da corrida, dividindo-se a pista em setores. A figura a seguir simula três setores de uma famosa pista, e na tabela temos seus respectivos comprimentos e o tempo de um carro em cada setor.

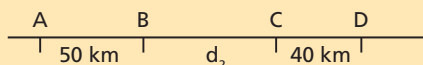


Sector	Comprimento (m)	Tempo (s)
1	600	7,2
2	400	7,2
3	850	10,6

Determine:

- a distância total percorrida pelo carro, bem como o tempo total decorrido na passagem pelos três setores;
 - a velocidade escalar média do carro ao percorrer totalmente os três setores.
3. A distância, por estrada de rodagem, entre Cuiabá e Salvador é de 3 400,8 km. Um ônibus demora dois dias e quatro horas desde sua saída de Cuiabá até sua chegada a Salvador, incluindo dez horas de paradas para refeições, abastecimentos, etc. Qual a velocidade escalar média desse ônibus, durante os dois dias e quatro horas de viagem?

4. Um móvel percorreu o trajeto ABCD da figura abaixo, no sentido de A para D. No primeiro trecho, AB, ele demorou 30 min; no segundo trecho, BC, demorou 1 h e sua velocidade escalar média foi de 60 km/h; finalmente, no terceiro trecho, CD, a velocidade média foi de 80 km/h. Determine a velocidade escalar média de todo o percurso, desde A até D.



Resolução:

Não tem nenhum sentido calcularmos as velocidades escalares médias de cada trecho e fazermos uma média aritmética delas.

- 1º) Temos que calcular cada intervalo de tempo e somar os três, obtendo-se o tempo total de A até D.

- 2º) Temos também que calcular cada uma das distâncias percorridas e somar as três, obtendo a distância total de A a D.

Trecho AB:

$$d_1 = 50 \text{ km}$$

$$\Delta t_1 = 30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h} = 0,5 \text{ h}$$

Trecho BC:

$$\Delta t_2 = 1 \text{ h}; v_2 = 60 \text{ km/h}$$

$$d_2 = v_2 \cdot \Delta t_2$$

$$d_2 = \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \cdot (1,0 \text{ h}) \Rightarrow d_2 = 60 \text{ km}$$

Trecho CD:

$$d_3 = 40 \text{ km}; v_3 = 80 \text{ km/h}$$

$$d_3 = v_3 \cdot \Delta t_3 \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{d_3}{v_3}$$

$$\Delta t_3 = \frac{40 \text{ km}}{80 \text{ km/h}} = 0,5 \frac{\text{km}}{\text{km}} \cdot \frac{\text{h}}{\text{km}} \Rightarrow \Delta t_3 = 0,5 \text{ h}$$

Assim, teremos:

$$\Delta t_{\text{TOT}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

$$\Delta t_{\text{TOT}} = 0,5 \text{ h} + 1,0 \text{ h} + 0,5 \text{ h} = 2,0 \text{ h}$$

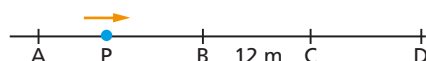
$$d_{\text{TOT}} = d_1 + d_2 + d_3$$

$$d_{\text{TOT}} = 50 \text{ km} + 60 \text{ km} + 40 \text{ km} = 150 \text{ km}$$

A velocidade escalar média, no percurso AD, é dada por:

$$v_m = \frac{d_{\text{TOT}}}{\Delta t_{\text{TOT}}} = \frac{150 \text{ km}}{2,0 \text{ h}} \Rightarrow v_m = 75 \text{ km/h}$$

5. Um automóvel percorre a distância entre São Paulo e Jundiaí (60 km) com velocidade escalar média de 40 km/h; entre Jundiaí e Campinas (30 km) com velocidade escalar média de 60 km/h. Qual a velocidade escalar média do automóvel entre São Paulo e Campinas?
6. Um móvel percorre metade de um percurso com velocidade escalar média de 60 km/h e, imediatamente a seguir, a outra metade com velocidade escalar média de 40 km/h. Calcule a velocidade escalar média no percurso todo.
7. O segmento de reta \overline{AD} da figura mede 36 m. Um ponto material P o percorre, sem inversão de sentido, desde A até D. No trecho \overline{BC} sua velocidade escalar média foi 2,0 m/s e, em cada um dos outros trechos, de 4,0 m/s. Determine a velocidade escalar média no percurso \overline{AD} .



8. Um carro percorre uma estrada dividida em três setores de mesmo comprimento 3,6 km. No setor (1) sua velocidade escalar média foi de 28 m/s; no setor (2), de 72 km/h; e o setor (3) foi percorrido em 5,0 minutos.

- a) Determine a velocidade escalar média no setor (3).
b) Em qual dos três setores ele foi mais rápido?

Resolução:

a) $d = 3,6 \text{ km} = 3600 \text{ m}$

$\Delta t = 5,0 \text{ min} = 300 \text{ s}$

$v_3 = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v_3 = \frac{3600 \text{ m}}{300 \text{ s}} \Rightarrow v_3 = 12 \text{ m/s}$

- b) Para compararmos as três velocidades médias, vamos deixar as unidades no SI.

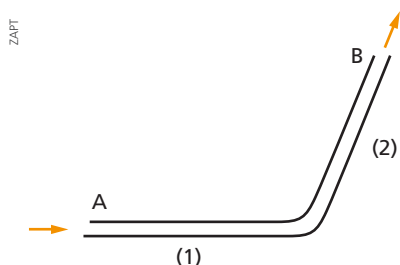
$v_1 = 28 \text{ m/s}$

$v_2 = 72 \text{ km/h} = \frac{72 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \Rightarrow v_2 = 20 \text{ m/s}$

$v_3 = 12 \text{ m/s}$

Logo, o carro foi mais rápido no **setor (1)**.

9. Uma estrada de rodagem tem o formato da figura. Cada setor foi percorrido por um mesmo automóvel com velocidades diferentes.



No setor (1) a velocidade escalar foi constante e igual a 108 km/h e a duração da viagem foi de 15 min. No setor (2), a velocidade escalar também foi constante e igual a 25 m/s, tendo a viagem durado 1,0 h.

Determine:

- a) as distâncias percorridas em cada trecho;
b) a velocidade escalar média da viagem toda, de A até B.

10. A **milha marítima** é uma unidade muito usada na Marinha e corresponde a uma distância de 1852 metros. Outra unidade também muito usada é o **nó**, que corresponde a 1 milha marítima por hora. Determine:

- a) em km/h, a velocidade escalar de um barco que navega a 20 nós;
b) a distância percorrida durante uma viagem de 2,0 h de navio com a velocidade de 20 nós. Dê a resposta em quilômetros.

11. Os primeiros carros americanos que chegaram ao Brasil tinham os seus velocímetros aferidos em milhas/hora. Nos Estados Unidos e em alguns países usa-se a milha terrestre, que equivale a 1609 metros. Um desses carros, trafegando na Rodovia Castelo Branco, cujo limite de velocidade é 120 km/h, foi multado por estar a 90 milhas/hora.

Análise e verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

- I. Para se converter, aproximadamente, milha/hora em km/h basta multiplicar a primeira pelo fator 1,6.
II. O veículo foi injustamente multado, pois sua velocidade escalar era de, aproximadamente, 56 km/h.
III. O limite da Rodovia Castelo Branco, para o carro americano, é de 75 milhas/hora, aproximadamente.

São verdadeiras:

- a) todas. d) apenas II e III.
b) apenas I e III. e) nenhuma delas.
c) apenas I e II.

12. O ano-luz (AL) é uma unidade de comprimento muito usada na Astronomia. Corresponde à distância percorrida pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de um ano. Determine, em metros e também em quilômetros, o comprimento de 1 ano-luz. Adote, para a velocidade da luz no vácuo, $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Resolução:

$\Delta t = 1 \text{ ano} = 365 \text{ dias} = 365 \cdot 24 \text{ h} =$

$= 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$

$\Delta t = 31\,536\,000 \text{ s} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$

$v = c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$d = v \cdot \Delta t$

$d = 3,0 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7 \text{ m}$

$d = 9,45 \cdot 10^{15} \text{ m}$

Usando apenas dois algarismos significativos:

$1 \text{ ano-luz} = 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}$

$1 \text{ AL} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$

13. Uma estrela encontra-se a 30 anos-luz da Terra. Quanto tempo demoraria uma sonda espacial lançada da Terra para chegar a ela, sendo sua velocidade de $3,6 \cdot 10^4$ km/h. Admita que a trajetória seja retilínea e que o movimento seja uniforme e use: 1 ano-luz = $9,0 \cdot 10^{15}$ m e ainda 1 ano = $3 \cdot 10^7$ s.

Resolução:

$$v = 3,6 \cdot 10^4 \text{ km/h} = \frac{3,6}{3,6} \cdot 10^4 \text{ m/s} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$d = 30 \text{ anos-luz} = 30 \cdot 9,0 \cdot 10^{15} \text{ m} =$$

$$= 2,7 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

$$d = v \cdot \Delta t$$

$$2,7 \cdot 10^{17} = 1,0 \cdot 10^4 \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = 2,7 \cdot 10^{13} \text{ s}$$

Como sabemos do enunciado: 1 ano = $3,0 \cdot 10^7$ s:

$$\Delta t = \frac{2,7 \cdot 10^{13}}{3,0 \cdot 10^7} = 0,90 \cdot 10^6 \text{ anos}$$

$$\Delta t = 9,0 \cdot 10^5 \text{ anos}$$

Comentário: A velocidade da sonda é de 36 000 km/h, grande para os valores normais de uma aeronave, porém muito pequena se comparada com a da luz ($3,0 \cdot 10^5$ km/s). Assim, essa nave levará um tempo muito grande, portanto impraticável, para atingir a estrela: cerca de 900 mil anos.

14. A luz que hoje recebemos da estrela citada no exercício anterior, a 30 anos-luz da Terra, em que data partiu da estrela?
15. Queremos enviar um feixe de prótons para a estrela do exercício 13, a 30 anos-luz da Terra. Determine a velocidade escalar do feixe para que eles atinjam a estrela em apenas 45 anos. Compare com a velocidade da luz no vácuo, $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s. Para a resolução do problema, adote um referencial fixo na Terra.
16. O Sol encontra-se a 150 milhões de quilômetros da Terra. Usando $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s, determine em quanto tempo a luz do Sol chega até a Terra.
17. A velocidade do som no ar varia com diversos fatores do clima, mas seu valor aproximado fica em torno de 340 m/s. Imagine um caso hipoté-

tico em que uma pessoa (A) viaja num veículo supersônico (sua velocidade é superior à do som) e outra pessoa (B) tenta chamá-la, como mostra a figura:



- a) A pessoa A jamais ouvirá a B chamando-a, pois o som não vai alcançá-la.
- b) A pessoa A vai receber o chamado, pois o som vai alcançá-la, com uma velocidade de 10 m/s.
- c) Embora o carro seja supersônico, a pessoa A ouvirá o chamado de B, pois o fato de o carro estar a 350 m/s em nada influenciará.
- d) A pessoa A receberá o som a uma velocidade de 690 m/s.

18. Percorrendo uma rodovia de extensão 900 km e fazendo apenas algumas paradas de 15 minutos, no máximo, um ônibus rodoviário realiza semanalmente uma viagem de ida e volta entre duas cidades.

- a) Estime a ordem de grandeza de sua velocidade escalar média, em km/h.
- b) Determine a ordem de grandeza da distância percorrida pelo ônibus durante um ano.
- c) Determine a ordem de grandeza da duração de uma viagem de ida.

Resolução:

- a) Podemos estimar a ordem de grandeza da velocidade escalar média em 10^2 km/h.

- b) Uma viagem de ida e volta:

$$d = 900 \text{ km} + 900 \text{ km} = 1800 \text{ km}$$

$$1 \text{ ano} \cong 50 \text{ semanas}$$

A distância percorrida é:

$$D = 50 \cdot (1800 \text{ km})$$

$$D = 90\,000 \text{ km} = 9 \cdot 10^4 \text{ km}$$

A ordem de grandeza é 10^5 km.

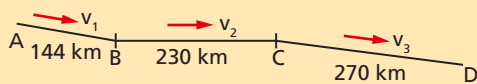
c) $v_m = \frac{d}{\Delta t}$

$$\Delta t = \frac{d}{v_m}$$

$$\Delta t = \frac{900 \text{ km}}{100 \text{ km/h}} = 9 \text{ h}$$

A ordem de grandeza é 10^1 h.

19. Um carro percorre os trechos AB, BC e CD de uma rodovia com velocidade escalar constante em cada uma delas: $v_1 = 80 \text{ km/h}$; $v_2 = 100 \text{ km/h}$; $v_3 = 90 \text{ km/h}$.



Determine a ordem de grandeza:

- do tempo de percurso total, de A a D;
- da velocidade escalar média no percurso total.

Resolução:

$$a) d = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v}$$

$$\text{Trecho AB: } \Delta t_1 = \frac{144}{80} (\text{h}) = 1,8 \text{ h}$$

$$\text{Trecho BC: } \Delta t_2 = \frac{230}{100} (\text{h}) = 2,3 \text{ h}$$

$$\text{Trecho CD: } \Delta t_3 = \frac{270}{90} (\text{h}) = 3,0 \text{ h}$$

$$\text{Duração total: } \Delta t = 1,8 \text{ h} + 2,3 \text{ h} + 3,0 \text{ h} = 7,1 \text{ h}$$

A ordem de grandeza é 10^1 h .

$$b) v_m = \frac{d}{\Delta t}$$

$$d = 144 \text{ km} + 230 \text{ km} + 270 \text{ km} = 644 \text{ km}$$

$$\Delta t = 7,1 \text{ h}$$

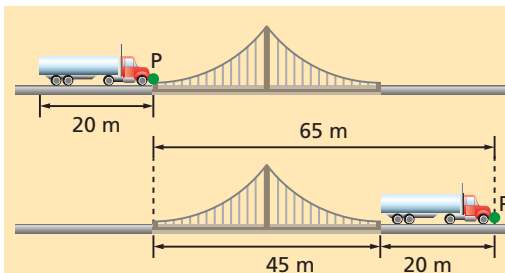
$$v_m = \frac{644 \text{ km}}{7,1 \text{ h}} \approx 90 \text{ km/h}$$

A ordem de grandeza é 10^2 km/h .

20. Um caminhão com 20 m de comprimento e velocidade escalar constante de 54 km/h inicia a travessia de uma ponte de 45 m de extensão. Determine o tempo de travessia e adote apenas dois algarismos significativos em suas contas.

Resolução:

Para atravessar a ponte o caminhão deverá percorrer uma distância equivalente à soma do seu comprimento mais o da ponte; basta acompanhar o percurso do ponto P fixado no para-choque do caminhão.



$$d = 45 \text{ m} + 20 \text{ m} \Rightarrow d = 65 \text{ m}$$

$$v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{54 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \Rightarrow v = 15 \text{ m/s}$$

Sendo:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v}$$

$$\Delta t = \frac{65 \text{ m}}{15 \text{ m/s}} = 4,33 \text{ s}$$

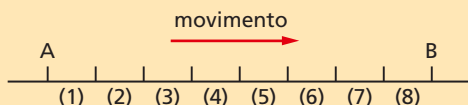
Como podemos usar apenas dois algarismos significativos:

$$\Delta t = 4,3 \text{ s}$$

21. Um trem, constituído por 20 unidades de mesmo comprimento (uma máquina e mais 19 vagões), penetrou num túnel de 2,0 km de extensão às 13 h 14 min e, mantendo sua velocidade escalar constante de 72 km/h, saiu completamente dele às 13 h 16 min. Determine o comprimento de cada vagão.
22. Uma das estações do metrô de São Paulo tem uma plataforma cuja extensão é igual ao comprimento total do trem. Certo dia, o trem não parou nessa estação e um passageiro que o aguardava cronometrou a sua passagem: 20 s. Sabendo que o trem passou em baixa velocidade, 36 km/h, determine:
- o comprimento da plataforma;
 - o tempo total que o trem demora para atravessar toda a extensão da plataforma.

Exercícios de Reforço

23. Um móvel de tamanho desprezível (ponto material) percorre o trecho retilíneo AB da figura, dividido em 8 segmentos idênticos, de comprimentos iguais a d , numerados de 1 a 8.



Nos trechos ímpares, sua velocidade escalar é v e, nos pares, $2v$. Determine a velocidade escalar

média de A até B. Admita que não houve inversão do sentido do movimento.

Resolução:

1. Para os trechos ímpares:

$$d_1 = 4d; v_1 = v$$

$$v_1 = \frac{d_1}{\Delta t_1} \Rightarrow v = \frac{4d}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{4d}{v} \quad (1)$$

2. Para os trechos pares:

$$d_2 = 4d; v_2 = 2v$$

$$v_2 = \frac{d_2}{\Delta t_2} \Rightarrow 2v = \frac{4d}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2d}{v} \quad (2)$$

O intervalo de tempo total é:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

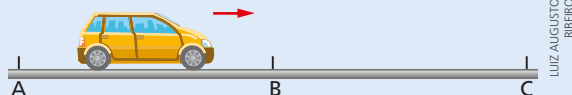
$$\Delta t = \frac{4d}{v} + \frac{2d}{v} = \frac{6d}{v}$$

Finalmente, a velocidade escalar média de A a B é:

$$v_m = \frac{d_{AB}}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{8d}{6d/v}$$

$$v_m = \frac{4v}{3}$$

24. Um automóvel percorre o segmento \overline{AB} com velocidade constante de módulo v e o segmento \overline{BC} , de mesmo comprimento, com velocidade constante de módulo $2v$.



Assim, a velocidade escalar média no percurso ABC foi de:

- a) $3v$ b) $\frac{3v}{2}$ c) $\frac{v}{3}$ d) $\frac{4v}{3}$ e) $\frac{3v}{4}$
25. (UE-RJ) Ao se deslocar do Rio de Janeiro a Porto Alegre, um avião percorre essa distância com velocidade escalar média v no primeiro $\frac{1}{9}$ do trajeto e $2v$ no trecho restante. A velocidade escalar média do avião no percurso total foi igual a:
- a) $\frac{9}{5}v$ b) $\frac{8}{5}v$ c) $\frac{5}{3}v$ d) $\frac{5}{4}v$
26. (Fatec-SP) Um carro se desloca entre duas cidades em duas etapas. Na primeira etapa, desloca-se com velocidade escalar média de 80 km/h durante 3,5 h. Após permanecer parado por 2,0 horas, o carro percorre os 180 km restantes com velocidade escalar média de 40 km/h. A velocidade escalar média do carro no percurso entre as cidades foi, em km/h:
- a) 40 b) 46 c) 64 d) 70 e) 86
27. (UF-RJ) Numa competição, Fernanda nadou 6,0 km e, em seguida, correu outros 6,0 km. Na etapa de natação, conseguiu uma velocidade escalar média de 4,0 km/h; na corrida, sua velocidade escalar média foi de 12,0 km/h.
- a) Calcule o tempo gasto por Fernanda para nadar os 6,0 km.
- b) Calcule a velocidade escalar média de Fernanda no percurso total da prova.

28. (Fuvest-SP) Dirigindo-se a uma cidade próxima, por uma autoestrada plana, um motorista estima seu tempo de viagem, considerando que consiga manter uma velocidade escalar média de 90 km/h. Ao ser surpreendido pela chuva, decide reduzir sua velocidade escalar média para 60 km/h, permanecendo assim até a chuva parar, quinze minutos mais tarde, quando retoma sua velocidade escalar média inicial. Essa redução temporária aumenta seu tempo de viagem, com relação à estimativa inicial, em:

- a) 5 minutos. d) 15 minutos.
b) 7,5 minutos. e) 30 minutos.
c) 10 minutos.

29. (Fuvest-SP) Um passageiro, viajando de metrô, fez o registro de tempo entre duas estações e obteve os valores indicados na tabela.

	Chegada	Partida
Vila Maria	0:00 min	1:00 min
Felicidade	5:00 min	6:00 min



Supondo-se que a velocidade escalar média entre duas estações consecutivas seja sempre a mesma e que o trem pare o mesmo tempo em qualquer estação da linha, de 15 km de extensão, é possível estimar que um trem, desde a partida da Estação Bosque até a chegada à Estação Terminal, leva, aproximadamente:

- a) 20 min c) 30 min e) 40 min
b) 25 min d) 35 min

30. No LHC, prótons são acelerados até atingirem a velocidade $v = 2,97 \cdot 10^8$ m/s, muito próxima da velocidade da luz. Vamos imaginar que um feixe de prótons, nessa velocidade, fosse lançado em direção ao planeta Netuno, a 5 bilhões de quilômetros da Terra. O tempo, aproximado, para atingi-lo seria: (*Observação:* fixar o observador na Terra.)

- a) 1 h b) 2 h c) 4 h d) 5 h e) 10 h

Resolução:

$$d = 5\,000\,000\,000 \text{ km} = 5 \cdot 10^9 \text{ km} = 5 \cdot 10^9 \cdot 10^3 \text{ m} = 5 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

$$v = 2,97 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$d = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v}$$

$$\Delta t = \frac{5 \cdot 10^{12} \text{ m}}{2,97 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \Rightarrow \Delta t \cong 1,68 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Vamos converter em horas, lembrando que:

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$\Delta t = \frac{1,68 \cdot 10^4}{3,6 \cdot 10^3} (\text{h}) \Rightarrow \Delta t = 4,66 \text{ h}$$

$$\Delta t \cong 5 \text{ h}$$

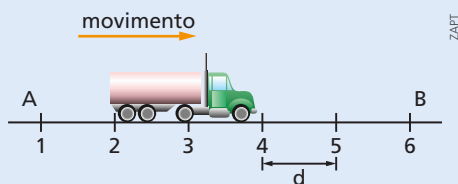
31. (UF-PE) Um automóvel se desloca numa estrada retilínea sempre no mesmo sentido. Inicialmente, ele percorre um trecho de comprimento 400 km em 8 horas. O motorista para durante uma hora e, em seguida, percorre mais 200 km em 6 horas. A velocidade média em todo o percurso, em km/h, é igual a:

- a) 100 c) 60 e) 40
b) 80 d) 50

32. Um trem inglês de alta velocidade viaja com velocidade escalar constante de 200 milhas/hora. Seu comprimento é 200 m e ele vai atravessar um túnel de 4600 m de extensão. Sabendo que 1 milha vale, aproximadamente, 1600 m, podemos estimar que o tempo total de travessia é de:

- a) 36 s c) 108 s e) 300 s
b) 54 s d) 250 s

33. Um veículo longo de comprimento 2d atravessa o trecho retilíneo AB com velocidade escalar constante. Esse trecho está dividido em pedaços iguais de comprimento d e o veículo atravessa completamente um deles num intervalo de tempo T.



Pode-se afirmar que ele atravessará completamente o trecho AB num intervalo de tempo de:

- a) 2T b) 3T c) $\frac{7T}{3}$ d) 5T e) $\frac{8T}{3}$

34. Num hipotético país, onde não se adotavam as convencionais unidades de medida, usava-se para o comprimento a unidade **ped**, que mais tarde foi mudada por outra unidade denominada **fox**. No entanto, o fox não foi muito bem aceito pela população e mudou-se a unidade de comprimento para o **estense** (de símbolo **est**). Nos últimos anos finalmente adotou-se o **metro**. As relações entre as unidades foram as seguintes:

$$1 \text{ fox} = 4 \text{ ped} \quad 1 \text{ ped} = 12 \text{ est} \quad 1 \text{ est} = 2,5 \text{ m}$$

Numa corrida de biga, nesse hipotético país, o vencedor desenvolveu uma velocidade de 36 fox/h. Quanto vale essa velocidade no SI?

Resolução:

Vamos mostrar um método denominado resolução em cadeia, que elimina sucessivamente as unidades indesejáveis.

Escrevem-se os fatores de conversão sob a forma de razões e os vamos multiplicando sucessivamente.

$$36 \frac{\text{fox}}{\text{h}} = \left(36 \frac{\cancel{\text{fox}}}{\cancel{\text{h}}} \right) \cdot \left(\frac{4 \cancel{\text{ped}}}{1 \cancel{\text{fox}}} \right) \cdot \left(\frac{12 \cancel{\text{est}}}{1 \cancel{\text{ped}}} \right) \cdot \left(\frac{2,5 \text{ m}}{1 \cancel{\text{est}}} \right) \cdot \left(\frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} \right)$$

Finalmente, temos:

$$36 \frac{\text{fox}}{\text{h}} = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 1,2 \text{ m/s}$$

Observação: devemos dar a resposta com apenas dois algarismos significativos, respeitando-se a quantidade de algarismos do dado principal, a velocidade: 36 fox/h.

35. Um inseto rasteiro desenvolve, em movimento retilíneo, uma velocidade escalar média de 7,2 polegadas/minuto. A polegada é uma unidade inglesa equivalente a 25 mm. Sabemos que 1 cm equivale a 10 mm e que 1 m equivale a 100 cm. Determine a velocidade do inseto em:
- a) m/s (Sistema Internacional) b) m/h

3. Movimentos simultâneos

Em algumas aplicações de Cinemática deparamos com situações-problema em que dois eventos ocorrem simultaneamente, de forma independente um do outro, mas cujos tempos estão amarrados um no outro.

Vejam os exemplos: dois carros vão colidir numa esquina. Seus movimentos são independentes um do outro, no entanto, para que ocorra a colisão, eles deverão chegar juntos àquela esquina. Ou seja, os tempos estão inter-relacionados.

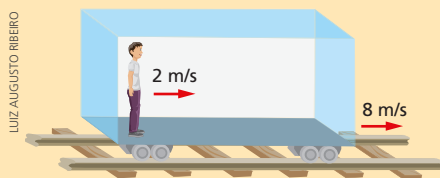
Outro exemplo: no interior de um trem, que trafega a uma velocidade escalar de 10 m/s, em movimento retilíneo, uma pessoa deixa cair uma laranja, a qual demora 0,8 s para chegar ao solo. Durante a queda da laranja, o trem percorreu uma distância d igual a:

$$d = v \cdot \Delta t \Rightarrow d = 10 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot 0,8 \text{ (s)} \Rightarrow d = 8,0 \text{ m}$$

A queda da laranja e o movimento do trem são eventos simultâneos e independentes. O evento 1 não interfere no evento 2.

Exercícios de Aplicação

- 36.** Um trem se movimenta sobre trilhos retilíneos com uma velocidade escalar de 8 m/s. No seu interior, um homem percorre toda a extensão do corredor do vagão, que é de 10 m, mantendo constante a sua velocidade escalar em 2 m/s, em relação ao piso do trem.



Determine:

- em quanto tempo o homem percorrerá todo o vagão;
- a distância percorrida pelo trem nesse intervalo de tempo.

Resolução:

Os eventos homem em movimento e trem em movimento são independentes um do outro, porém ocorrem simultaneamente.

- a) Para o homem em movimento, temos:

$$d = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v}$$

$$\Delta t = \frac{10}{2} \text{ (s)} \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ s}$$

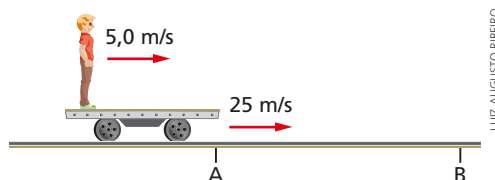
- b) A distância percorrida pelo trem é:

$$d = v \cdot \Delta t$$

$$d = 8 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot 5 \text{ (s)} \Rightarrow d = 40 \text{ m}$$

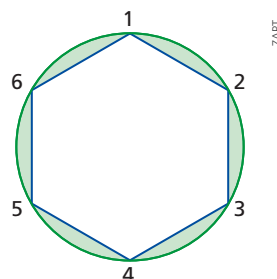
- 37.** Um carrinho de 20 m de comprimento percorre um trilho retilíneo com velocidade escalar constante de 25 m/s. No exato instante em que o carrinho penetra no trecho AB, um homem na ponta esquerda se põe em movimento sobre ele, como mostra a figura a seguir. O movimento do homem tem o mesmo sentido do movimento do carrinho e sua velocidade escalar é constante

e igual a 5,0 m/s. No instante em que o carrinho deixou completamente o trecho AB, o homem atingiu a outra extremidade do carrinho.



- Quanto tempo durou a caminhada do homem?
- Determine o comprimento AB.
- Determine a distância total percorrida pelo homem, medida em relação ao solo, enquanto o carrinho atravessava completamente o trecho AB.

- 38.** Na figura, temos dois circuitos para caminhada a pé: o externo é uma circunferência e o interno é um hexágono regular de lado L , inscrito na circunferência. Duas pessoas iniciam simultaneamente uma caminhada, partindo da posição 1. No entanto, a pessoa A preferiu o circuito externo, e a pessoa B, o interno. Após algum tempo, as duas pessoas se encontram novamente na posição 1, tendo cada uma delas percorrido o seu circuito uma única vez.



Sendo v_A e v_B as respectivas velocidades escalares médias de A e B, pode-se afirmar que a razão $\frac{v_A}{v_B}$

vale:

- a) 1 b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{3}{\pi}$

4. O eco

O eco é um fenômeno que ocorre devido à reflexão do som emitido contra um obstáculo, o qual é refletido e volta para o local de emissão.

Uma pessoa pode produzir um eco, soltando um grito na direção de uma montanha. Ela ouve o primeiro som emitido e depois de algum tempo ouvirá o segundo som refletido. Somente será possível distinguir os dois sons se houver uma defasagem de tempo entre eles de pelo menos 0,10 s.

O sonar é um aparelho utilizado no casco do navio para medir a profundidade das águas em determinado local. Ele emite um som e através de um receptor captura o som refletido. Com o tempo medido entre a emissão e a recepção do som, será possível calcular a profundidade local.

Uma tática para resolver esse tipo de problema é dividir o tempo total por dois, pois metade dele refere-se à emissão e a outra metade à reflexão. Por exemplo, se no sonar da figura 3, entre o som emitido e o som retornado tiverem passado 6,0 s, então metade (3,0 s) é o tempo de ida, e os outros 3,0 s correspondem ao tempo de retorno.



Figura 3.

Exercícios de Aplicação

39. Próximo de uma montanha uma pessoa dá um grito e quer ouvir o seu eco. Sabe-se que no local o som tem uma velocidade constante de 340 m/s. O menor intervalo de tempo para que ela distinga os dois sons é de 0,10 s. Determine a menor distância entre a pessoa e a montanha.

Resolução:

Devemos usar apenas metade do tempo dado, pois 0,05 s será o tempo de ida e 0,05 s será o tempo de volta:

$$d = v_{\text{som}} \cdot \Delta t \Rightarrow d = 340 \cdot 0,05 \text{ (m)} \Rightarrow d = 17 \text{ m}$$

Assim, a menor distância do obstáculo para ouvirmos o nosso próprio eco é de 17 m.

40. Próximo de uma montanha, uma pessoa solta uma bombinha de festa junina. Decorridos

6,0 s, ela ouve o eco do estampido. Sendo de 340 m/s a velocidade do som no ar, a distância entre a pessoa e o respectivo obstáculo de reflexão é de:

- a) 4 080 m d) 680 m
b) 2 040 m e) 510 m
c) 1 020 m

41. Com o objetivo de medir a profundidade no local onde estava ancorado um navio, instalou-se um sonar no seu casco. A velocidade do som na água é de 1 500 m/s. Entre o som emitido e o som refletido (eco), decorreu um intervalo de tempo de 0,80 s. Podemos afirmar que a profundidade local é de:

- a) 300 m c) 900 m e) 1 500 m
b) 600 m d) 1 200 m

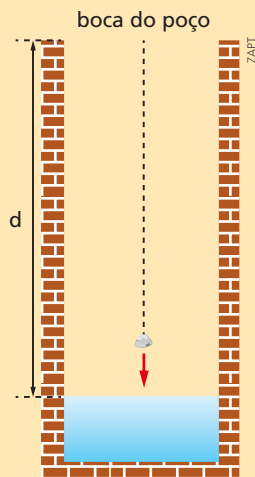
Exercícios de Reforço

42. Uma pedrinha é abandonada na boca de um poço. Decorridos 2,6 s ouve-se o barulho de seu impacto contra as águas do fundo do poço. Sabe-se que, no local, o som tem uma velocidade de 320 m/s e que a pedra, em sua queda, obtém uma velocidade escalar média de 12,8 m/s.

Determine a profundidade do poço e o tempo T gasto pela pedrinha em sua queda.

Resolução:

Há dois modos de resolver o problema.



1ª modo:

$\Delta t_1 = T$ = intervalo de tempo da queda da pedrinha

Δt_2 = intervalo de tempo do retorno do som até a boca do poço

$$d = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v}$$

- Para a pedrinha:

$$T = \Delta t_1 = \frac{d}{v_m} = \frac{d}{12,8} \quad (1)$$

- Para o som:

$$\Delta t_2 = \frac{d}{v_{\text{som}}} = \frac{d}{320} \quad (2)$$

O tempo total dos dois eventos é $\Delta t_{\text{TOT}} = 2,6$ s. Portanto:

$$\Delta t_{\text{TOT}} = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

$$2,6 = \frac{d}{12,8} + \frac{d}{320}$$

$$2,6 = \frac{25d}{320} + \frac{d}{320} \Rightarrow 2,6 = \frac{26d}{320}$$

Resolvendo, temos: $d = 32$ m

Para obtermos o tempo de queda da pedrinha, vamos à equação (1).

$$T = \frac{d}{12,8} = \frac{32}{12,8} \Rightarrow T = 2,5 \text{ s}$$

2ª modo:

Lembrando que:

$$\Delta t_{\text{TOT}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \Delta t_{\text{TOT}} - \Delta t_1$$

$$\Delta t_2 = 2,6 - T \quad (1)$$

vamos usar: $d = v \cdot \Delta t$

- Para a pedrinha: $d = v_m \cdot T \quad (2)$

- Para o som: $d = v_{\text{som}} \cdot \Delta t_2 \quad (3)$

Igualando as equações (2) e (3):

$$v_m \cdot T = v_{\text{som}} \cdot \Delta t_2$$

$$12,8T = 320 \cdot (2,6 - T)$$

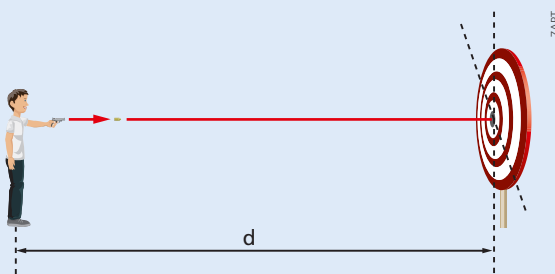
Resolvendo, obtemos: $T = 2,5$ s

Para calcular d , vamos usar a equação (2):

$$d = v_m \cdot T \Rightarrow d = 12,8 \cdot 2,5$$

$$d = 32 \text{ m}$$

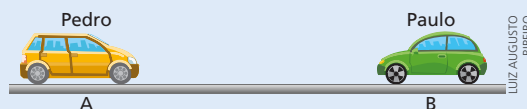
43. Usando um disparador silencioso, um atirador esportista atira contra um alvo e ouve o barulho do impacto apenas 0,30 s após o disparo. São dados: velocidade do projétil: $v_p = 640$ m/s; velocidade do som no ar: $v_{\text{som}} = 320$ m/s.



Determine:

- o tempo decorrido para que o projétil atinja o alvo;
- a distância entre o atirador e o alvo.

44. Uma autoestrada retilínea liga dois locais A e B. Dois amigos Pedro e Paulo combinaram, por telefone, o seguinte: Pedro, no instante t_1 , partiria com o seu carro da localidade A e, assim que chegasse a B, Paulo, que lá se encontrava, partiria imediatamente com o seu carro para a localidade A, ou seja, inverteriam as suas posições. Assim foi feito e Paulo partiu no instante t_2 e chegou ao seu destino no instante t_3 .



São conhecidas as duas velocidades médias:

- do carro de Pedro: 72 km/h;
- do carro de Paulo: 108 km/h.

Tendo o evento durado 1 min 40 s, determine:

- o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$;
- a distância AB.

5. Vazão e velocidade de um líquido numa tubulação

Na figura 4 temos um tubo cilíndrico por onde escoar um líquido com velocidade constante de módulo v . Por exemplo, o respectivo tubo pode ser um cano de água. Como definimos no capítulo 1, a vazão do líquido através da seção S é dada por:

$$\phi = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

Podemos relacionar a vazão com a velocidade do fluido e com a área da seção transversal S . Para tanto, vamos considerar a figura 5, em que demarcamos duas seções transversais: S_1 e S_2 . Uma partícula do líquido passa pela seção S_1 no instante t_1 e passa por S_2 no instante t_2 .

Nesse intervalo de tempo ela percorreu a distância d , dada por:

$$d = v \cdot \Delta t$$

Sendo A a área da seção transversal S , o volume é dado por:

$$\Delta v = A \cdot d \Rightarrow \Delta v = A \cdot v \cdot \Delta t \quad (2)$$

Se substituirmos a equação (2) na equação (1), teremos:

$$\phi = \frac{A \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \phi = A \cdot v \quad (3)$$

A equação (3) será muito importante para calcularmos a velocidade de escoamento de um líquido em uma tubulação de vazão conhecida.

Equação da continuidade

Consideremos uma tubulação onde a seção reta não tem área constante (fig. 6). Inicialmente o tubo era fino e depois ficou mais grosso. O diâmetro aumentou. Vamos admitir que o escoamento do líquido se dê em regime não turbulento. Desse modo, podemos admitir que os tubos se mantêm cheios e a vazão permanece constante.

Sendo:

ϕ_1 = vazão na seção S_1 ; ϕ_2 = vazão na seção S_2 ,
temos:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (4)$$

Sendo, ainda:

A_1 = área de S_1 ; A_2 = área de S_2 ; v_1 = velocidade do líquido ao atravessar S_1 ;
 v_2 = velocidade do líquido ao atravessar S_2 ,
podemos escrever:

$$\phi_1 = A_1 \cdot v_1 \quad \text{e também} \quad \phi_2 = A_2 \cdot v_2$$

Igualando as duas equações:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \quad (5)$$

A equação acima é conhecida por **equação da continuidade** para um fluido ideal. Ela vale, portanto, para qualquer fluido ideal que escoe por uma tubulação.

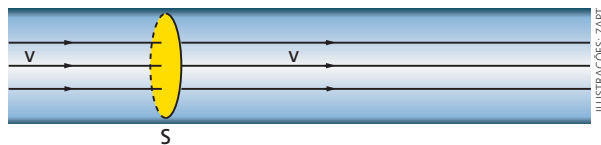


Figura 4.

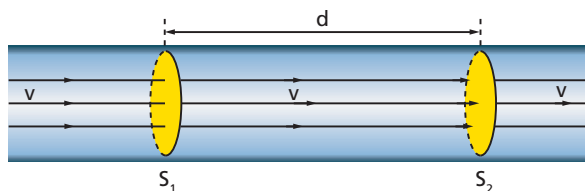


Figura 5.

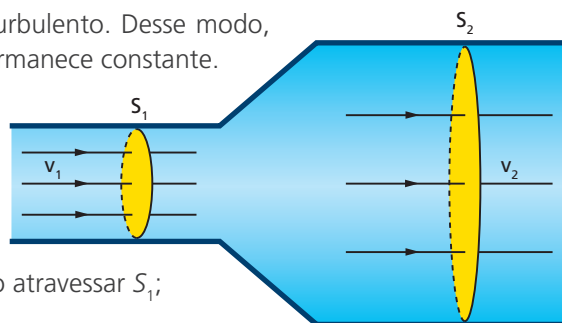
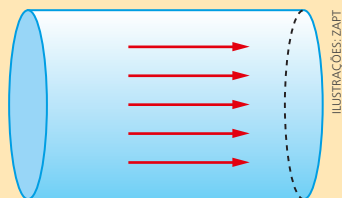


Figura 6.

Exercícios de Aplicação

45. Por um cano cuja área de seção reta é $A = 4,0 \text{ cm}^2$ escoo um líquido com vazão de 6,0 litros por segundo. Determine a velocidade do líquido.



Resolução:

Lembremos que $6,0 \text{ L} = 6,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$.

$$\phi = \frac{6,0 \text{ L}}{1 \text{ s}} = \frac{6,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}{1 \text{ s}} \Rightarrow \phi = 6,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$A = 4,0 \text{ cm}^2$$

$$\phi = A \cdot v \Rightarrow v = \frac{\phi}{A}$$

$$v = \frac{6,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^3/\text{s}}{4,0 \text{ cm}^2} \Rightarrow v = 1,5 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$$

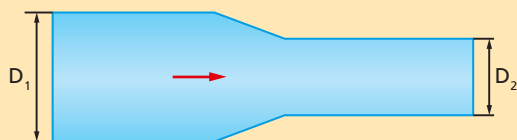
46. (Unicamp-SP) Uma caixa-d'água com volume de 150 litros coleta água da chuva à razão de 10 litros por hora.

- Por quanto tempo deverá chover para encher completamente essa caixa-d'água?
- Admitindo-se que a área da base da caixa é $0,50 \text{ m}^2$, com que velocidade subirá o nível de água na caixa, enquanto durar a chuva?

47. (U. F. Santa Maria-RS) Em uma cultura irrigada por um cano que tem área de seção reta de 100 cm^2 , passa água com uma vazão de 7 200 litros por hora. A velocidade de escoamento da água nesse cano, em m/s, é:

- 0,02
- 0,2
- 2
- 20
- 200

48. Em uma tubulação de água foi instalado um redutor, como mostra a figura. O diâmetro maior é $D_1 = 6,0 \text{ cm}$ e o menor, $D_2 = 3,0 \text{ cm}$. À esquerda, no cano mais largo, a velocidade da água é de 12 m/s. Admitindo que a vazão seja constante, determine a velocidade escalar da água no cano mais estreito.



Resolução:

Para aplicarmos a equação da continuidade, precisamos das áreas das seções transversais dos dois canos.

$$A = \pi \cdot R^2 \Rightarrow A = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 6,0^2}{4} = \frac{36 \pi}{4} \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 3,0^2}{4} = \frac{9,0 \pi}{4} \text{ cm}^2$$

Usando a equação da continuidade:

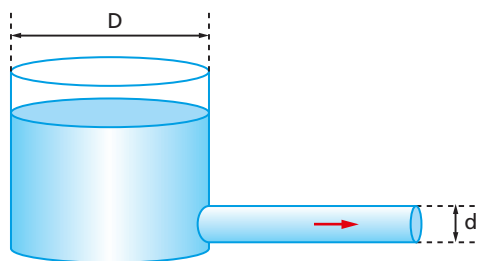
$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$\frac{36 \pi}{4} \cdot 12 = \frac{9,0 \pi}{4} v_2$$

$$v_2 = 48 \text{ m/s}$$

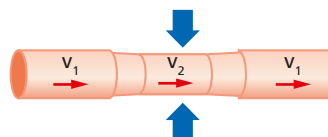
Observemos que o diâmetro da tubulação foi reduzido à metade (de 6,0 cm para 3,0 cm), o que fez com que a água tivesse quadruplicado a sua velocidade (de 12 m/s para 48 m/s).

49. Um reservatório de água alimenta um determinado bairro da cidade através de uma tubulação de diâmetro $d = 10 \text{ cm}$, no qual a água escoo a uma velocidade média de 40 m/s. O reservatório apresenta uma seção transversal de diâmetro $D = 2,0 \text{ m}$.



Determine:

- a velocidade média com que abaixa o nível de água no reservatório;
 - a vazão de água na tubulação.
50. A velocidade média do sangue capilar é de $0,05 \text{ cm/s}$ e a área da seção transversal é de $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2$. Uma pequena região do capilar sofreu um estrangulamento, o que diminuiu a área da seção transversal em 20%. Determine a velocidade de escoamento nessa região.



Exercícios de Reforço

51. (UF-PA) Não era novidade para ninguém que a velocidade de escoamento do rio mudava ao longo de seu curso. Para projetar uma ponte sobre determinado trecho do rio Tuandeu, uma equipe de técnicos fez algumas medidas e João ficou sabendo que a área transversal ao rio, naquele trecho, media 500 m^2 e a velocidade média da água na vazante era de 1 m/s . Como já sabia que em frente a sua casa a velocidade média da vazante era 2 m/s , fazendo aproximações para uma situação ideal, conclui-se que a área transversal do rio, em frente à casa de João, é igual a:

- a) 250 m^2 c) 500 m^2 e) 1000 m^2
b) 300 m^2 d) 750 m^2

52. (Unama-PA) Uma piscina, cujas dimensões são $18 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 2 \text{ m}$, está vazia. O tempo necessário para enchê-la é 10 h , através de um cano de seção reta 25 cm^2 . A velocidade da água no cano tem módulo igual a:

- a) $1,0 \text{ m/s}$ d) $2,0 \text{ km/s}$
b) $3,0 \text{ cm/min}$ e) $4,0 \text{ m/s}$
c) $5,0 \text{ km/s}$

6. A abscissa na trajetória

Para localizarmos um ponto material em sua trajetória, atribuímos a ela um sentido positivo e demarcamos as abscissas, do mesmo modo que se procede com os eixos cartesianos. Assim, a posição do ponto ficará determinada pela sua abscissa.

Estando um ponto P em movimento nessa trajetória conhecida, para cada instante haverá uma nova posição e, portanto, uma nova abscissa. Na figura 7 o ponto P , nesse instante, tem a sua posição dada pela abscissa $+3 \text{ m}$.

Nas estradas de rodagem, a posição do veículo é determinada por uma abscissa, lida na respectiva placa de quilometragem (fig. 8). Evidentemente, não se usam abscissas negativas numa estrada, pois não seriam nada práticas.

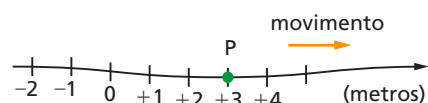


Figura 7.



Figura 8.

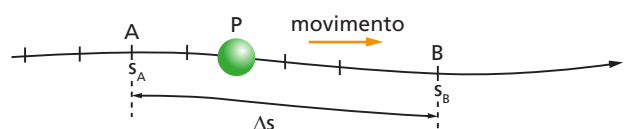


Figura 9.

Deslocamento escalar

A variação de abscissas, Δs , denomina-se deslocamento escalar. Por definição, ela é a diferença entre a abscissa final e a inicial.

Na figura 9, em que o ponto P percorre o trecho AB, temos:

$$\Delta s = s_{\text{final}} - s_{\text{inicial}} \Rightarrow \Delta s = s_B - s_A$$

Distância percorrida entre dois pontos na trajetória

Podemos usar as abscissas para medir a distância percorrida por um móvel, desde que ele esteja percorrendo a trajetória num único sentido. Desse modo, se o ponto P da figura 9 não inverter o sentido de movimento, a distância percorrida d será igual ao módulo do deslocamento escalar:

$$d = |\Delta s| = |s_B - s_A|$$

Havendo inversão de sentido no movimento do ponto P , ele percorrerá uma distância maior que o deslocamento escalar. Nesse caso, escrevemos: $d > |\Delta s|$.

Exemplifiquemos:

Na figura 10, o ponto material P vai realizar um movimento com inversão de sentido ao atingir a posição C . Partindo de A , no instante t_0 , vai até C , para instantaneamente e inverte o sentido, voltando para a posição B , onde chegou no instante t_1 .

- O deslocamento escalar é:

$$\Delta s = 6 \text{ m} - 2 \text{ m} \Rightarrow \Delta s = 4 \text{ m}$$

- A distância total percorrida é:

$$d = (9 \text{ m} - 2 \text{ m}) + (9 \text{ m} - 6 \text{ m}) \Rightarrow d = 7 \text{ m} + 3 \text{ m} \Rightarrow d = 10 \text{ m}$$



Figura 10.

Exemplos como esse da figura 10 servem para nos alertar contra um erro muito comum que se pode cometer nos exercícios de Cinemática. No capítulo 5, essa situação-problema será abordada com maior profundidade.

7. Generalizando a definição de velocidade escalar média

Uma partícula P realiza um movimento numa trajetória conhecida, passando por uma posição A , no instante t_1 , e por uma posição B , no instante t_2 (fig. 11).

Sejam:

- deslocamento escalar: $\Delta s = s_B - s_A$
- intervalo de tempo: $\Delta t = t_2 - t_1$

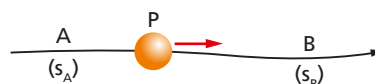


Figura 11.

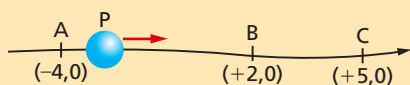
Então, por definição, sua velocidade escalar média é:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A definição acima é geral, isto é, vale para qualquer tipo de movimento, com ou sem inversão de sentido. Vale também para qualquer trajetória, independentemente de seu formato.

Exercícios de Aplicação

53. Uma partícula P realiza um movimento cuja trajetória está representada na figura. Partindo da posição A no instante $t_1 = 0$, passando por B , no instante $t_2 = 3,0 \text{ s}$, atingiu a posição C no instante $t_3 = 18 \text{ s}$. As abscissas de cada posição estão indicadas na figura e são dadas no SI.



As abscissas estão em metros.

Determine a velocidade escalar média nos intervalos de tempo:

- a) $[t_1; t_2]$ b) $[t_1; t_3]$

Resolução:

- a) No intervalo de tempo $[t_1; t_2]$ a partícula P foi de A para B .

- Deslocamento escalar:

$$\Delta s = s_B - s_A = (+2,0 \text{ m}) - (-4,0 \text{ m}) \Rightarrow \Delta s = +6,0 \text{ m}$$

- Intervalo de tempo:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3,0 \text{ s} - 0 \Rightarrow \Delta t = 3,0 \text{ s}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{6,0 \text{ m}}{3,0 \text{ s}} \Rightarrow v_m = 2,0 \text{ m/s}$$

b) No intervalo de tempo $[t_1; t_3]$ a partícula P foi de A para C .

- Deslocamento escalar:

$$\Delta s = s_c - s_a = (+5,0 \text{ m}) - (-4,0 \text{ m}) \Rightarrow \Rightarrow \Delta s = +9,0 \text{ m}$$

- Intervalo de tempo:

$$\Delta t = t_3 - t_1 = 18 \text{ s} - 0 \Rightarrow \Delta t = 18 \text{ s}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{+9,0 \text{ m}}{18 \text{ s}} \Rightarrow v_m = 0,50 \text{ m/s}$$

54. Um carro percorre uma estrada como nos mostra a figura. Entre a placa km 10 e a placa km 40, ele demorou 30 minutos. Entre a placa km 40 e a placa km 60, 45 minutos.



Determine a velocidade escalar média:

- entre as placas km 10 e km 40;
- entre as placas km 10 e km 60.

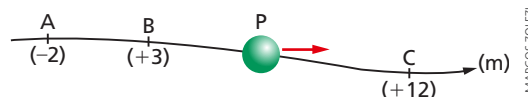
55. Duas pessoas combinaram de se encontrar num determinado ponto de uma estrada exatamente às

16 h. A primeira saiu do quilômetro 20 às 14 h e, com velocidade escalar média de 80 km/h, chegou ao local do encontro no horário combinado. A segunda, como morava mais próximo do local, saiu de casa às 15 h e, com velocidade escalar média de 100 km/h, também chegou ao local do encontro às 16 h. Ambas percorreram a estrada no sentido crescente das abscissas.

Determine:

- a abscissa do local do encontro;
- a abscissa da posição de onde partiu a segunda pessoa.

56. Demarcamos as abscissas na trajetória do ponto P , que está em movimento de vai e vem: ora num sentido, ora em sentido contrário. No instante $t_1 = 2,0 \text{ s}$, ele estava na posição A ; no instante $t_2 = 7,0 \text{ s}$, na posição B ; no instante $t_3 = 11,5 \text{ s}$, na posição C ; no instante $t_4 = 15 \text{ s}$, ele havia retornado para a posição A .



Determine:

- o deslocamento escalar nos intervalos de tempo $[t_1; t_2]$ e $[t_3; t_4]$;
- a velocidade escalar média nos intervalos de tempo $[t_1; t_2]$ e $[t_3; t_4]$;
- o deslocamento escalar e a velocidade escalar média no intervalo de tempo $[t_1; t_4]$.

Exercícios de Reforço

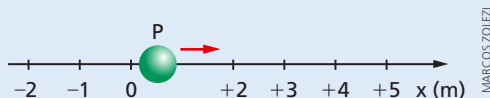
57. Cada andar de um edifício têm 3,0 m, e ele possui 20 andares. Um elevador faz o transporte dos moradores com uma velocidade praticamente constante de módulo 1,5 m/s. Imagine que a trajetória esteja orientada para cima e despreze o tempo de parada em cada andar. Podemos afirmar que:

- se o elevador levar um morador do 2º andar até o 18º e retornar para o 2º andar, nesse evento a sua velocidade escalar média é zero.
- se o elevador levar um passageiro do 5º andar para o 10º andar, demorará aproximadamente 2,0 minutos.
- para subir do andar térreo ao 20º andar, o elevador desloca-se 63 m.
- o deslocamento escalar do elevador no percurso: 9º andar – 18º andar – 12º andar é igual a 27 m.

- a velocidade escalar média do elevador no percurso: 9º andar – 18º andar – 12º andar é igual a 1,5 m/s, pois o elevador possui velocidade constante.

58. Um ponto material P está em movimento num eixo de abscissas x , como mostra a figura da próxima página. A sua posição é variável com o tempo e alguns valores foram anotados na tabela:

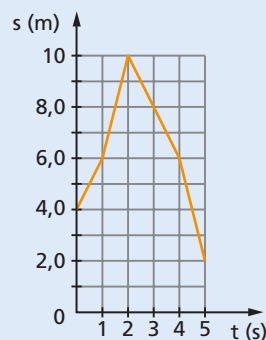
$t \text{ (s)}$	$x \text{ (m)}$
1	-1
2	+2
3	+5
4	+4



Determine:

- o deslocamento escalar entre os instantes 1 s e 2 s;
- a velocidade escalar média no intervalo de tempo anterior;
- a velocidade escalar média entre os instantes 3 s e 4 s.

59. Um ponto material em movimento sobre um eixo de abscissas teve suas posições registradas num gráfico de posição \times tempo, como mostra a figura a seguir.



Determine:

- o deslocamento do ponto entre os instantes $t_0 = 0$ e $t_4 = 4,0$ s;
- a velocidade escalar média no intervalo de tempo anterior;
- a distância efetivamente percorrida pelo móvel entre os instantes $t_1 = 1,0$ s e $t_5 = 5,0$ s.

8. Equação horária de um movimento (posição \times tempo)

A posição de um ponto material (P) em movimento numa trajetória varia com o tempo, ou seja, para cada valor de t haverá uma abscissa indicativa s da posição de P . Essa correspondência entre a abscissa (s) e o tempo (t) pode ser registrada numa tabela ou num gráfico posição \times tempo, como nos exercícios anteriores.

No entanto, existem alguns casos particulares de movimento em que é possível estabelecer uma lei matemática para a relação entre o tempo e a posição e até mesmo escrever uma equação de $s = f(t)$. Essa equação se chama **equação horária das posições** ou **equação posição \times tempo** ou simplesmente **equação horária**.

Vamos mostrar um exemplo bem elementar, em que foram anotadas as abscissas de cada posição ocupada pelo ponto P e os seus respectivos instantes.

Com um pouco de bom-senso conseguimos enxergar uma equação matemática que relaciona o tempo e o espaço:

$$s = 2 + 3t \text{ (com } s \text{ e } t \text{ em unidades do SI)}$$

t (s)	s (m)
0	+2
1	+5
2	+8
3	+11

Nesse momento não vamos nos preocupar com a origem da equação horária, e tampouco é a ocasião de aprender a olhar para o movimento e determinar a equação. Isso será feito nos capítulos 4 e 5.

Durante os estudos de Mecânica, vamos deparar com situações-problema em que a equação horária será do 1º grau, do 2º grau e até do 3º grau, esta última muito raramente. Vejamos alguns exemplos de equações horárias:

- do 1º grau em $t \rightarrow s = 5t - 7$ (unidades SI)
- do 2º grau em $t \rightarrow s = 4 - 2t - 5t^2$ (unidades SI)
- do 3º grau em $t \rightarrow s = 2 + 3t - 8t^3$ (unidades SI)

Observe que ao lado da equação sempre mencionamos o sistema de unidades ou, então, devemos definir as unidades de cada variável.

9. Velocidade escalar instantânea – uma definição rigorosa

A definição de velocidade escalar média indica a rapidez do movimento de um móvel durante um determinado intervalo de tempo Δt em que seu deslocamento escalar foi Δs . Assim, numa viagem iniciada às 16 h e terminada às 17 h, dividimos o deslocamento pelo intervalo de tempo $\Delta t = 1$ h e obtemos a velocidade escalar média. No entanto, esse raciocínio não nos dá a velocidade instantânea do móvel às 16 h 15 min. Não há nenhuma equação matemática que vai calcular essa velocidade instantânea às 16 h 15 min. No entanto, partindo-se de um gráfico posição \times tempo ou de uma equação horária de abscissas, será possível chegar ao valor da velocidade instantânea.

A velocidade instantânea é obtida a partir da velocidade média, $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$, calculando-a diversas vezes, apenas reduzindo-se gradativamente os intervalos de tempo, tornando-os muitos próximos de zero, mas nunca iguais a zero.

À medida que Δt vai se aproximando de zero, a variação de posição Δs também vai se aproximando de zero, porém o quociente $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ não tende a zero, mas sim a um valor constante, que denominaremos **limite**.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{leia-se: limite de } \Delta s \text{ sobre } \Delta t, \text{ para } \Delta t \text{ tendendo a zero})$$

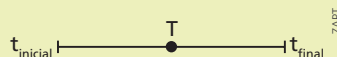
O limite de $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ quando Δt tende a zero recebe o nome de **derivada da abscissa s em função do tempo t** . A derivada é um método descoberto por Newton que calcula o limite a partir de uma equação horária.

Leitura

Interpretando o limite da definição de velocidade instantânea

A fim de evitarmos discussões desnecessárias de sinal, vamos supor que a partícula tenha movimento progressivo e esteja na parte positiva do eixo de abscissas.

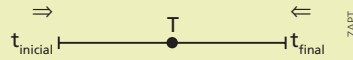
Para calcular a velocidade escalar em um dado instante $t = T$, usando o conceito de limite, devemos tomar inicialmente um pequeno intervalo de tempo Δt no entorno de T :



Quando dizemos que Δt está tendendo a zero, significa que vamos calcular o quociente $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ diversas vezes usando diversos intervalos de tempo Δt na busca do valor limite do quociente.

Os diversos intervalos de tempo obedecem, no entanto, a uma regra: a cada novo intervalo de tempo devemos reduzir gradativamente o valor Δt e realizar o quociente $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$.

O intervalo de tempo pode ser reduzido pelo extremo esquerdo ou direito, ou ambos, sempre mantendo o valor de T no seu interior.



Assim, usaremos:

$$\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3 > \dots > \Delta t_i$$

Para cada um dos intervalos de tempo Δt corresponde uma variação de abscissa Δs :

$$\Delta t_1 \Rightarrow \Delta s_1$$

$$\Delta t_2 \Rightarrow \Delta s_2$$

$$\Delta t_3 \Rightarrow \Delta s_3$$

.

.

.

$$\Delta t_i \Rightarrow \Delta s_i$$

Como os intervalos de tempo são pequenos e estão no entorno de um mesmo tempo T , podemos supor que, ao reduzi-los, o deslocamento escalar também seja reduzido.

Na sequência acima, os intervalos de tempo diminuíram de cima para baixo e, portanto, os respectivos deslocamentos escalares também diminuíram nessa ordem. Em resumo, temos:

$$\Delta t_1; \Delta t_2; \Delta t_3; \dots; \Delta t_i \text{ (sequência decrescente)}$$

$$\Delta s_1; \Delta s_2; \Delta s_3; \dots; \Delta s_i \text{ (sequência decrescente)}$$

No entanto, os quocientes $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ não formam necessariamente uma sequência nessa ordem. Por exemplo, se compararmos $\left(\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}\right)$ com $\left(\frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}\right)$ poderemos ter três possibilidades: o primeiro maior que o segundo, ou vice-versa ou ainda poderão ser iguais.

Ao analisarmos a sequência dos quocientes, entretanto, verificamos que ela é uma sequência convergente, isto é, tende para um valor final definido. Esse valor é o limite que estamos procurando.

$$\left(\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}\right); \left(\frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}\right); \left(\frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}\right); \dots \left(\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right) \text{ (sequência convergente)}$$

O valor limite encontrado é a velocidade escalar no instante $t = T$. Foi por esse motivo que mantivemos sempre o instante T no interior do intervalo de tempo. Costuma-se dizer que o tempo T tem como vizinhos os dois extremos do intervalo de tempo.

Agora podemos compreender melhor o que significa dizer que Δt está “tendendo a zero”: foi apenas um estreitamento gradativo do intervalo de tempo.

Visualizando o limite

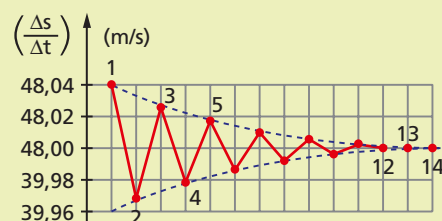
Apenas a título de exemplo, vamos supor que estivéssemos realizando um cálculo de limite para encontrar a velocidade escalar instantânea para $T = 2,00$ s acompanhando um movimento de um ponto material.

Elaborados todos os cálculos, deparamos com uma sequência $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$, alternante e convergente, como mostramos no gráfico ao lado.

Observemos nesse gráfico que, a partir do 12º evento, os valores de velocidade média se repetem, sendo sempre iguais a 48,00 m/s. Esse é o limite procurado. Podemos, pois, escrever que:

$$T = 2,00 \text{ s} \Rightarrow v = 48,00 \text{ m/s}$$

Imaginemos o trabalho que teríamos para calcular uma velocidade instantânea usando o limite. Mas aí temos a genialidade de Isaac Newton, que descobriu uma forma mais simples, a qual denominou **derivada**.



PROCURE NO CD

Leia o texto **O cálculo diferencial e integral**, que pode ser encontrado no capítulo 5 do CD.

10. Movimento progressivo e retrógrado

Consideremos um móvel percorrendo uma trajetória orientada e na qual foram inseridas abscissas. Vamos impor também que não haja inversão de sentido no seu movimento.

Movimento progressivo

Quando o móvel percorre a trajetória no sentido positivo de sua orientação, o seu movimento é denominado **progressivo** (fig. 12). À medida que ele a percorre, as abscissas são crescentes e o deslocamento escalar Δs é positivo para qualquer intervalo de tempo, pois:

$$\Delta s = s_{\text{final}} - s_{\text{inicial}}$$

$$s_{\text{final}} > s_{\text{inicial}} \Leftrightarrow \Delta s > 0$$

Resulta que a velocidade escalar média é positiva, pois:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} > 0$$

Como impusemos que não haveria inversão de sentido, podemos estender a propriedade para a velocidade escalar instantânea:

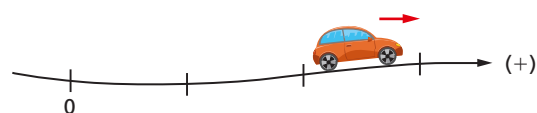


Figura 12. Carro em movimento progressivo.

No movimento progressivo a velocidade escalar é positiva.

Movimento retrógrado

Quando o móvel percorre a trajetória no sentido negativo de sua orientação, o seu movimento é denominado **retrógrado** (fig. 13). À medida que ele a percorre, as abscissas são decrescentes e o deslocamento escalar Δs é negativo, pois:

$$s_{\text{final}} < s_{\text{inicial}} \Leftrightarrow \Delta s < 0$$



Figura 13. Carro em movimento retrógrado.

ILUSTRAÇÕES ZAPT

Resulta que a velocidade escalar média é negativa, pois:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} < 0$$

Do mesmo modo, podemos estender a propriedade para a velocidade escalar instantânea:

No movimento retrógrado a velocidade escalar é negativa.

Exercícios de Aplicação

60. Dois carros percorrem a mesma trajetória orientada, como mostra a figura. Suas velocidades são dadas em módulo: para o carro (1) é 12 m/s e para o carro (2) é 16 m/s. O carro (1) se desloca para a direita e o carro (2) para a esquerda.



- Classifique os seus movimentos em progressivo ou retrógrado.
- Escreva os valores de suas velocidades escalares, levando em conta o sentido positivo adotado na trajetória.

Resolução:

- O carro (1) desloca-se no sentido positivo da trajetória e, portanto, tem movimento progressivo. O carro (2) desloca-se no sentido negativo da trajetória e, portanto, tem movimento retrógrado.

- A velocidade escalar do carro (1) é positiva e, portanto, devemos escrever $v_1 = +12$ m/s. A velocidade escalar do carro (2) é negativa e, portanto, devemos escrever: $v_2 = -16$ m/s.

61. Dois pontos materiais A e B percorrem, em sentidos contrários, uma mesma trajetória retilínea orientada. Sabemos que os módulos de suas velocidades escalares valem, respectivamente, 4,0 m/s e 8,3 m/s e que o ponto A está em movimento retrógrado. Podemos afirmar que:

- o movimento de B é retrógrado e sua velocidade escalar é +8,3 m/s;
- o movimento de B é progressivo, sua velocidade escalar é -8,3 m/s e a de A é +4,0 m/s;
- o movimento de B é retrógrado e sua velocidade escalar é +8,3 m/s e a de A é +4,0 m/s;
- o movimento de B é progressivo, sua velocidade escalar é +8,3 m/s e a velocidade escalar de A é -4,0 m/s;
- ambos têm velocidades escalares positivas, pois se trata de módulo, e B está em movimento progressivo.

Exercícios de Reforço

62. Dois carros A e B movimentaram-se sobre uma trajetória retilínea. Durante o movimento suas velocidades escalares foram lidas ao longo da trajetória e traduzidas num gráfico velocidade \times posição.

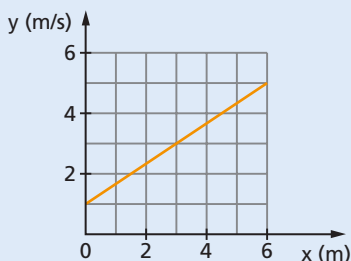


Figura a. Velocidade do carro A.

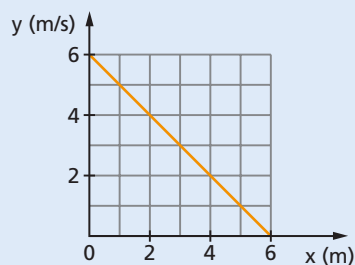


Figura b. Velocidade do carro B.

- Classifique o movimento de cada um deles, em progressivo ou retrógrado.

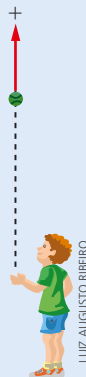
- b) Qual é a velocidade escalar do carro A na posição $x = 3$ m?
- c) Qual é a posição do carro B quando sua velocidade escalar foi 3 m/s?
- d) Em que posição (abscissa) o carro B parou?

63. Um garoto lança uma bolinha de tênis verticalmente para cima. A bolinha sobe até certo ponto, para instantaneamente e retorna para as mãos do garoto. Oriente-se a trajetória no sentido ascendente. Analise cada afirmativa e indique se ela está correta ou incorreta:

- I. Enquanto a bolinha estiver subindo, o movimento é progressivo.
- II. Enquanto a bolinha estiver descendo, o movimento é retrógrado.
- III. Na subida, a velocidade é negativa e na descida é positiva.
- IV. Após a inversão de sentido, a velocidade escalar mudou de sinal.

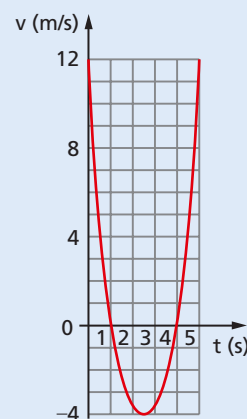
Estão corretas:

- a) todas.
- b) apenas I e IV.
- c) apenas I, II e IV.
- d) apenas I e II.
- e) apenas I, II e III.



LUIS AUGUSTO RIBEIRO

64. Um ponto material P deslocou-se sobre uma trajetória retilínea e orientada por 5 s. Durante o seu movimento foram anotados valores de sua velocidade escalar em cada instante e estes foram representados num diagrama cartesiano, tendo o eixo de abscissas os valores de tempo e o das ordenadas os valores da velocidade escalar. Analise o gráfico e depois responda se cada uma das afirmativas é falsa ou verdadeira.

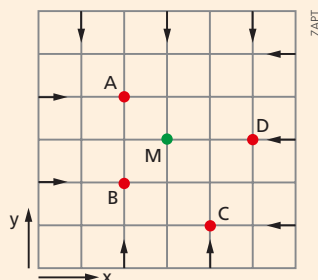


- I. No primeiro segundo, o movimento é retrógrado, pois a velocidade escalar é decrescente.
 - II. No intervalo de tempo 1 s a 4 s, o movimento é retrógrado, pois a velocidade escalar é negativa.
 - III. No quinto segundo, o movimento é progressivo, pois a velocidade escalar é positiva.
 - IV. Houve duas inversões no sentido do movimento.
- São verdadeiras:

- a) todas.
- b) apenas I e II.
- c) apenas III e IV.
- d) apenas I, II e III.
- e) apenas II, III e IV.

Exercícios de Aprofundamento

65. A logística é um planejamento que se faz para minimizar um deslocamento ou mesmo para se ganhar certo tempo, otimizando-se o percurso. Na figura temos o mapa de uma cidade em que os quarteirões são quadrados e cada quadra tem uma extensão de 120 m. O sentido de percurso das ruas está indicado no mapa e a velocidade máxima permitida é regulamentada com o seguinte critério: ruas na direção x , com 12 m/s e na direção y , com 10 m/s. Um motoboy muito eficiente consegue andar nessas ruas dentro do limite de velocidade fazendo rapidamente suas entregas. Ele deverá partir da posição M , entregar encomendas em A , B , C e D e voltar para M . Despreze o tempo de entrega em cada local e determine o menor



tempo possível para que ele cumpra a sua tarefa. Não existe nenhuma sequência prévia de entrega, apenas logística.

- 66.** No interior de uma aeronave, a uma altitude de 9 km, em movimento retilíneo e uniforme a uma velocidade $v = 720$ km/h, a aeromoça deixa cair de certa altura uma lata de refrigerante, a qual chega ao chão em aproximadamente 0,5 s.
- a) Qual a trajetória da latinha:
 - observada por um passageiro sentado num dos bancos?
 - em relação à Terra?
 - b) Estime, em metros, a ordem de grandeza da distância horizontal percorrida em relação à Terra.
- 67.** (Fuvest-SP) Marta e Pedro combinaram encontrar-se em um certo ponto de uma autoestrada plana, para seguirem viagem juntos. Marta, ao passar pelo marco zero da estrada, constatou que, mantendo uma velocidade média de 80 km/h,

chegaria na hora certa ao ponto de encontro combinado. No entanto, quando ela já estava no marco do quilômetro 10, ficou sabendo que Pedro tinha se atrasado e, só então, estava passando pelo marco zero, pretendendo continuar sua viagem a uma velocidade média de 100 km/h.



LUIZ FERNANDO RUBIO

Mantendo essas velocidades, seria previsível que os dois amigos se encontrassem próximos a um marco da estrada com a indicação de:

- a) km 20 c) km 40 e) km 60
b) km 30 d) km 50

68. Um carro percorre uma estrada de rodagem tendo mantido, do quilômetro 10 até o quilômetro 40, uma velocidade escalar média de 90 km/h. Os próximos 10 km ele o fez com velocidade escalar média de 60 km/h, parando no quilômetro 50 e imediatamente retornou para o quilômetro 40, pois havia passado a entrada da cidade para onde se dirigia. Nesse retorno, ele tornou a fazer uma velocidade escalar média igual à anterior, 60 km/h.



LUIZ FERNANDO RUBIO

Determine a velocidade escalar média do carro desde o quilômetro 10 até o quilômetro 40, quando retornou. Despreze a perda de tempo no retorno do quilômetro 50.

69. Um garoto encontra-se entre dois paredões P_1 e P_2 , estando a mais de 20 m de distância de cada um deles. Num dado instante, ele estoura o balão de borracha que segurava pelo barbante. Decorrido um intervalo de tempo T_1 , ele ouve o eco vindo do paredão P_1 e decorrido um intervalo de tempo T_2 , ouve o segundo eco vindo do paredão P_2 . Entre os dois ecos decorreu um intervalo de tempo $(T_2 - T_1) = 0,4$ s.



ALBERTO DE STEFANO

Sabendo que a distância D é o dobro da distância d e que a velocidade do som é igual a 340 m/s, determine:

- a) a distância entre os dois paredões;
b) os intervalos de tempo T_1 e T_2 .

70. Um turista, passeando por uma das praias de Fortaleza, decidiu estimar a sua extensão. Como não tinha relógio e muito menos uma trena, fez as seguintes suposições:

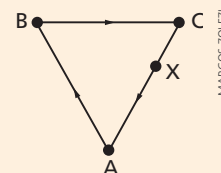
- velocidade média de percurso: 6 km/h;
- comprimento médio de cada passo: 80 cm.

Assim, passou a percorrer a praia de uma ponta à outra e contou 3 000 passos.

Determine:

- a) o comprimento da praia;
b) o tempo de percurso.

71. (Fuvest-SP) Tem-se uma fonte sonora no vértice A de uma pista triangular equilátera e horizontal, de 340 m de lado. A fonte emite um sinal que após ser refletido sucessivamente em B e C retorna ao ponto A . No mesmo instante em que a fonte é acionada, um corredor parte do ponto X , situado entre C e A , em direção a A , com velocidade constante de 10 m/s. Se o corredor e o sinal refletido atingem A no mesmo instante, a distância AX é de:



MARCOS ZOLEZI

- a) 10 m c) 30 m e) 1020 m
b) 20 m d) 340 m

(Dado: velocidade do som no ar = 340 m/s.)

72. Um indivíduo bate as mãos ritmicamente em frente de uma parede e ouve o eco das palmadas. Quando a frequência for de 100 palmadas por minuto, ele deixará de ouvir o eco das palmadas, pois este chegará aos seus ouvidos no mesmo instante em que ele bate as mãos. Sendo a velocidade do som igual a 300 m/s, a distância do indivíduo à parede é de aproximadamente:

- a) 45 m c) 180 m e) 500 m
b) 90 m d) 250 m

73. (UFRS) Um projétil, com velocidade escalar constante de 300 m/s, é disparado em direção ao centro de um navio que se move a uma velocidade escalar constante de 10 m/s em direção perpendicular à trajetória do projétil. Se o impacto ocorrer a 20 m do centro do navio, a que distância deste foi feito o disparo?

- a) 150 m c) 600 m e) 6 000 m
b) 300 m d) 3 000 m

Movimento uniforme (MU)

1. Definição de movimento uniforme

Movimento uniforme (MU) é aquele que possui **velocidade escalar instantânea constante e diferente de zero**.

Decorre imediatamente da definição que a velocidade escalar média é também constante, para qualquer intervalo de tempo, e seu valor coincide com o da velocidade escalar instantânea.

Assim, podemos escrever:

$$v_m = v \Rightarrow v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (constante } \neq 0 \text{)}$$

Então: $\Delta s = v \cdot \Delta t$.

Essa última igualdade nos mostra que, no movimento uniforme, a variação de posição (Δs) é diretamente proporcional ao intervalo de tempo correspondente (Δt). Assim, para iguais intervalos de tempo, teremos iguais variações de posição (fig. 1).

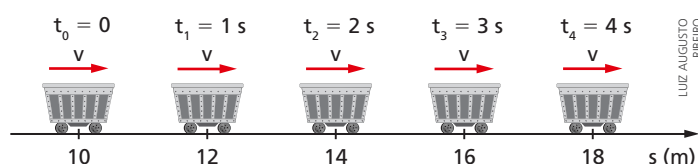


Figura 1. A ilustração representa um carrinho em movimento uniforme. A cada intervalo de tempo 1 s, o carrinho percorre 2 m.

2. Equação horária do movimento uniforme

Sendo s_0 a posição inicial correspondente ao instante $t = 0$, e sendo s a posição num instante t , vem: $\Delta t = t - 0$ e $\Delta s = s - s_0$.

De $\Delta s = v \cdot \Delta t$, resulta:

$$s - s_0 = v(t - 0)$$

$$s - s_0 = v \cdot t$$

$$s = s_0 + v \cdot t$$

Concluimos, portanto, que a **equação horária** de um **movimento uniforme** é do **1º grau em t** .

1. Definição de movimento uniforme
2. Equação horária do movimento uniforme
3. Diagramas horários do movimento uniforme
4. Velocidade relativa
5. Cálculo do deslocamento escalar a partir do diagrama horário da velocidade

Exemplos:

s_0	v	$s = s_0 + vt$	unidade
3 m	2 m/s	$s = 3 + 2t$	(SI)
6 m	-3 m/s	$s = 6 - 3t$	(SI)
-4 m	-5 m/s	$s = -4 - 5t$	(SI)
0	4 m/s	$s = 4t$	(SI)
0	3 m/s	$s = 3t$	(SI)

3. Diagramas horários do movimento uniforme

Diagrama posição \times tempo

Como concluímos anteriormente, no movimento uniforme, a equação horária é do 1º grau em t . Desse modo, num diagrama cartesiano, o gráfico de s em função de t é uma **reta oblíqua** aos eixos. No movimento progressivo ($v > 0$), a posição cresce com o tempo (fig. 2) e, no movimento retrógrado ($v < 0$), a posição decresce com o tempo (fig. 3). A ordenada do ponto onde a reta corta o eixo dos s é a coordenada da posição inicial s_0 .

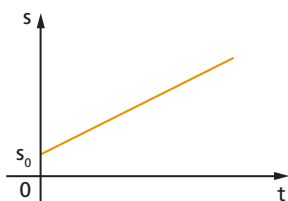


Figura 2. Movimento uniforme progressivo ($v > 0$).

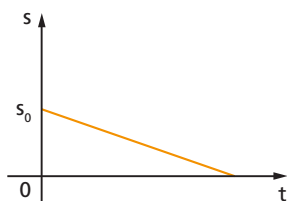


Figura 3. Movimento uniforme retrógrado ($v < 0$).

Diagrama da velocidade escalar ($v \times t$)

Sendo a velocidade escalar constante, isto é, a mesma em qualquer instante, concluímos que o gráfico de v em função de t é uma **reta paralela ao eixo dos t** . Esta pode estar acima do eixo dos t ($v > 0$) (fig. 4) ou abaixo desse eixo ($v < 0$) (fig. 5).

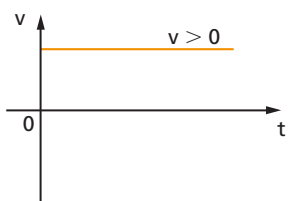


Figura 4. Movimento uniforme progressivo.

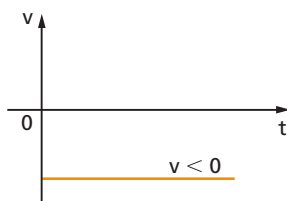


Figura 5. Movimento uniforme retrógrado.

Exercícios de Aplicação

1. A equação horária de um móvel é $s = 8 - 2t$, para s e t em unidades do SI.
 - a) Determine a posição inicial s_0 e a velocidade escalar v do movimento.
 - b) Classifique o movimento em progressivo ou retrógrado.
 - c) Determine a posição do móvel no instante $t = 3$ s.
 - d) Em que instante o móvel passa pela origem da trajetória?
 - e) O que se pode dizer a respeito da trajetória do móvel?

Resolução:

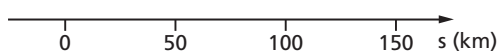
- a) Comparando $s = 8 - 2t$ com $s = s_0 + v \cdot t$, concluímos que:

$$s_0 = 8 \text{ m} \quad \text{e} \quad v = -2 \text{ m/s}$$

Observe que a velocidade escalar instantânea é constante e igual à velocidade escalar média em qualquer intervalo de tempo.

- b) O movimento é **retrógrado**, pois $v < 0$.
- c) Para $t = 3$ s, vem:
 $s = 8 - 2 \cdot 3$
 $s = 2 \text{ m}$
- d) No instante em que o móvel passa pela origem da trajetória, temos $s = 0$:
 $0 = 8 - 2t$
 $2t = 8 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$
- e) Como a equação horária é do 1º grau em t , concluímos que o movimento é uniforme. Quanto à forma da trajetória, nada podemos dizer.

2. Um carro desenvolve, em uma trajetória retilínea, um movimento uniforme de equação horária $s = 200 - 50t$ (para s em km e t em h).



- a) Determine a abscissa da posição do móvel para $t = 1,0$ h.
- b) Determine o instante em que o móvel passa pela origem da trajetória ($s = 0$).
- c) O movimento é progressivo ou retrógrado?

3. Um móvel realiza movimento uniforme. Sabe-se que no instante $t = 0$ a abscissa do móvel é -10 m. Escreva a equação horária, sabendo que a velocidade escalar tem valor absoluto 15 m/s. Considere os casos em que:

- a) o movimento é progressivo;
- b) o movimento é retrógrado.

Resolução:

A abscissa do móvel no instante $t = 0$ é $s_0 = -10$ m. Se o movimento for progressivo, $v = +15$ m/s e, se for retrógrado, $v = -15$ m/s.

Assim, temos:

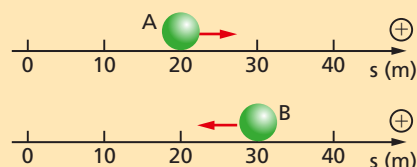
$$\text{a) } s = s_0 + v \cdot t$$

$$s = -10 + 15t \quad (\text{SI})$$

$$\text{b) } s = s_0 + v \cdot t$$

$$s = -10 - 15t \quad (\text{SI})$$

4. As figuras representam as posições, no instante $t = 0$, de duas partículas, A e B , em movimento uniforme. Os sentidos dos movimentos também estão indicados na figura. As partículas A e B possuem velocidades escalares de valor absoluto 10 m/s e 20 m/s, respectivamente. Determine suas equações horárias, referidas à trajetória orientada.



Resolução:

Partícula A: da figura, tiramos: $s_0 = 20$ m.

Sendo o movimento de A progressivo, vem:
 $v = +10$ m/s.

Portanto:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

$$s = 20 + 10t \quad (\text{SI})$$

Partícula B: da figura, tiramos: $s_0 = 30$ m.

Sendo o movimento de B retrógrado, vem:
 $v = -20$ m/s.

Portanto:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

$$s = 30 - 20t \quad (\text{SI})$$

5. Um móvel em movimento uniforme possui abscissa $s_1 = 12$ m no instante $t_1 = 2,0$ s e abscissa $s_2 = 21$ m no instante $t_2 = 5,0$ s. Qual a equação horária do móvel?

Resolução:

Sendo o movimento uniforme, a equação horária é: $s = s_0 + v \cdot t$.

Devemos então determinar s_0 e v . Para isso, vamos obter um sistema de duas equações:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 2,0 \text{ s} \\ s_1 = 12 \text{ m} \end{array} \right\} \quad 12 = s_0 + v \cdot 2,0 \quad (1)$$

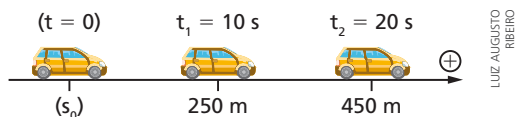
$$\left. \begin{array}{l} t_2 = 5,0 \text{ s} \\ s_2 = 21 \text{ m} \end{array} \right\} \quad 21 = s_0 + v \cdot 5,0 \quad (2)$$

De (1) e (2) resulta: $s_0 = 6,0$ m e $v = 3,0$ m/s.

Assim:

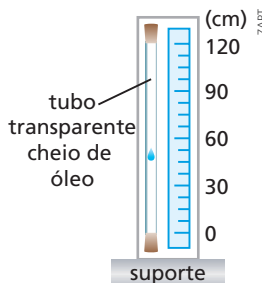
$$s = s_0 + v \cdot t \Rightarrow s = 6,0 + 3,0t \quad (\text{SI})$$

6. Um carro descreve uma trajetória retilínea em movimento uniforme. A figura nos mostra algumas posições ocupadas e os respectivos instantes.



- a) Determine a sua velocidade escalar.
b) Determine a posição inicial (s_0).
c) O movimento é progressivo ou retrógrado? Justifique.
7. (Unesp-SP) Um estudante realizou uma experiência de cinemática utilizando um tubo comprido, transparente e cheio de óleo, dentro do qual uma gota de água descia verticalmente, como indica a figura. A tabela relaciona os dados de posição em função do tempo, obtidos quando a gota passou a descrever um movimento retilíneo uniforme. A partir desses dados, determine a velocidade, em cm/s, e escreva a função horária da posição da gota.

Posição (cm)	Tempo (s)
120	0
90	2
60	4
30	6



8. A tabela a seguir apresenta valores de abscissa e do tempo para um móvel em movimento uniforme.

Tempo (s)	1,0	2,0	4,0	t_2
Abscissa (m)	2,0	s_1	11,0	17,0

Determine:

- a) a velocidade escalar do móvel;
b) a abscissa inicial s_0 e a equação horária;
c) o valor da abscissa s_1 ;
d) o valor do tempo t_2 .

9. Dois móveis, A e B, percorrem a mesma trajetória, e suas abscissas são medidas a partir da mesma origem escolhida na trajetória. Suas equações horárias são: $s_A = 10 + 60t$ e $s_B = 80 - 10t$, para t em horas e s_A e s_B em quilômetros. Determine o instante e a posição do encontro.

Resolução:

No instante do encontro, as abscissas dos móveis devem ser iguais:

$$s_A = s_B$$

$$10 + 60t = 80 - 10t$$

$$70t = 70$$

$$t = 1,0 \text{ h} \quad (\text{instante do encontro})$$

Para determinarmos a posição do encontro, basta substituímos $t = 1,0$ h nas equações horárias de A ou de B:

$$s_A = 10 + 60 \cdot t$$

$$s_A = 10 + 60 \cdot 1,0$$

$$s_A = 70 \text{ km} \quad (\text{posição do encontro})$$

Confirmando:

$$s_B = 80 - 10 \cdot t$$

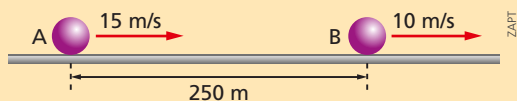
$$s_B = 80 - 10 \cdot 1,0$$

$$s_B = 70 \text{ km}$$

10. Dois móveis, A e B, percorrem a mesma trajetória, e suas posições são medidas a partir da mesma origem escolhida na trajetória. Suas equações horárias são: $s_A = 15 + 50t$ e $s_B = 35 + 30t$, para t em horas e s_A e s_B em quilômetros. Determine:

- a) o instante do encontro;
b) a posição do encontro.

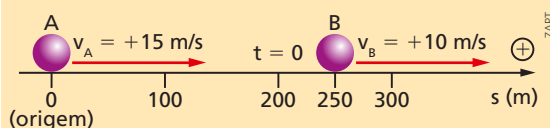
11. A figura representa a distância entre dois móveis, A e B, no instante $t = 0$. Os móveis A e B possuem movimentos uniformes cujas velocidades escalares têm valores absolutos 15 m/s e 10 m/s, respectivamente. Depois de quanto tempo A alcança B?



Resolução:

Vamos, inicialmente, determinar as equações horárias de A e de B. Para isso devemos **adotar uma origem e orientar a trajetória**.

Vamos adotar como origem das abscissas a posição inicial de A e orientar a trajetória de A para B.



Desse modo: $s_{0A} = 0$, $s_{0B} = 250$ m; $v_A = +15$ m/s; e $v_B = +10$ m/s.

Equações horárias:

$$\begin{cases} s_A = s_{0A} + v_A \cdot t \\ s_A = 0 + 15t \quad (\text{SI}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_B = s_{0B} + v_B \cdot t \\ s_B = 250 + 10t \quad (\text{SI}) \end{cases}$$

No encontro, temos: $s_A = s_B$

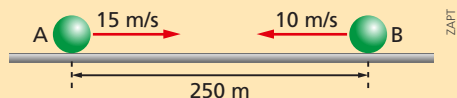
$$15t = 250 + 10t$$

$$(15 - 10)t = 250$$

$$5,0t = 250$$

$$t = 50 \text{ s}$$

12. A figura representa as posições de dois móveis, A e B, no instante $t = 0$. Os móveis A e B possuem movimentos uniformes cujas velocidades escalares têm valores absolutos 15 m/s e 10 m/s, respectivamente. Depois de quanto tempo A e B vão se encontrar?

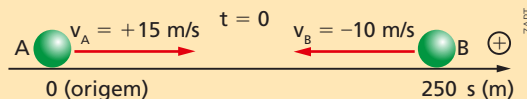


Resolução:

Vamos adotar como origem das abscissas a posição inicial de A e orientar a trajetória de A para B.

Desse modo: $s_{0A} = 0$ e $s_{0B} = 250$ m.

A velocidade escalar de A é positiva, mas a de B é negativa, pois seu movimento é retrógrado: $v_A = +15$ m/s e $v_B = -10$ m/s.



Equações horárias:

$$\begin{cases} s_A = s_{0A} + v_A \cdot t \\ s_A = 0 + 15t \quad (\text{SI}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_B = s_{0B} + v_B \cdot t \\ s_B = 250 - 10t \quad (\text{SI}) \end{cases}$$

No encontro, temos:

$$s_A = s_B$$

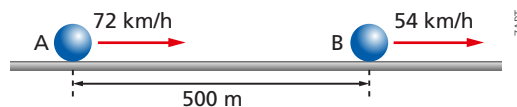
$$15t = 250 - 10t$$

$$(15 + 10)t = 250$$

$$25t = 250$$

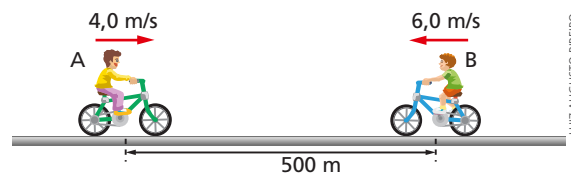
$$t = 10 \text{ s}$$

13. A figura representa as posições de dois móveis, A e B, no instante $t = 0$. Suas velocidades escalares têm valores absolutos 72 km/h e 54 km/h, respectivamente.



- Determine depois de quanto tempo A alcança B.
- A que distância da posição inicial de A ocorrerá o encontro?

14. Duas bicicletas, A e B, descrevem uma mesma trajetória retilínea com movimentos uniformes. A distância inicial entre as bicicletas é de 500 m e suas velocidades escalares têm módulos $|v_A| = 4,0$ m/s e $|v_B| = 6,0$ m/s. Oriente a trajetória de A para B e adote a posição inicial de A como origem dos espaços.



Pede-se:

- as equações horárias dos movimentos A e B;
- o instante do encontro: t_E ;
- a posição do ponto de encontro: s_E .

Exercícios de Reforço

15. Se num movimento acontecer que a velocidade escalar instantânea seja igual à velocidade escalar média, em qualquer intervalo de tempo, teremos então que o movimento é:

- uniforme.
- retilíneo e uniforme.
- acelerado.
- retardado.
- necessariamente progressivo.

16. (PUC-RS) A velocidade escalar no movimento uniforme é:

- constante.
- variável.
- constante em módulo, mas de sinal variável.
- sempre positiva.
- sempre negativa.

17. A equação horária do movimento de um ponto material, em unidades do SI, é: $s = 20 - 4,0t$. Determine:

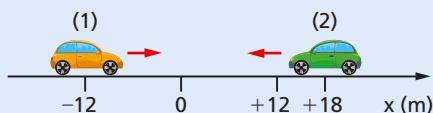
- o instante em que ele passou pela origem das abscissas;
- o instante em que ele alcançou a posição $s = -180$ m;
- se o movimento é progressivo ou retrógrado e também a sua velocidade escalar.

18. (Fuvest-SP) Um automóvel que se desloca com uma velocidade escalar constante de 72 km/h ultrapassa outro que se desloca com uma velocidade escalar constante de 54 km/h numa mesma estrada reta. O primeiro encontra-se 200 m atrás do segundo no instante $t = 0$. O primeiro estará ao lado do segundo no instante:

- $t = 10$ s
- $t = 20$ s
- $t = 30$ s
- $t = 40$ s
- $t = 50$ s

(Sugestão dos autores: escreva as equações horárias dos dois movimentos.)

19. Dois automóveis percorrem uma mesma estrada retilínea em sentidos opostos. Num dado instante suas abscissas são -12 m e $+18$ m, como indica a figura. Os módulos de suas velocidades permanecem constantes, sendo: $|v_1| = 1,0$ m/s e $|v_2| = 5,0$ m/s.



ILUSTRAÇÕES:
LUIZ
AUGUSTO RIBEIRO

- Escreva as respectivas equações horárias de seus movimentos.
- Determine o instante e a posição do encontro.
- Em que instante eles estarão a 60 m um do outro?

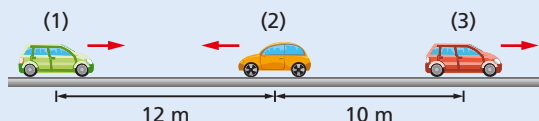
20. (U. F. São Carlos-SP) O movimento de três corpos sobre a mesma trajetória reta tem as seguintes características:

- Corpo X: realiza um movimento progressivo, sendo que sua posição inicial era positiva.
- Corpo Y: realiza um movimento retrógrado, sendo que sua posição inicial tinha abscissa negativa.
- Corpo Z: realiza um movimento progressivo, tendo como posição inicial a origem da trajetória.

De acordo com as características apresentadas, é correto afirmar que:

- X e Y certamente se encontrarão, independentemente dos módulos das suas velocidades.
- Y e Z certamente se encontrarão, independentemente dos módulos das suas velocidades.
- X e Z certamente se encontrarão, independentemente dos módulos das suas velocidades.
- X somente encontrará Z se o módulo da sua velocidade for menor que o módulo da velocidade de Z.
- Y somente encontrará Z se o módulo da sua velocidade for maior que o módulo da velocidade de Z.

21. Três automóveis percorrem uma mesma estrada retilínea. Os módulos de suas velocidades são: $|v_1| = 4,0$ m/s, $|v_2| = 8,0$ m/s e $|v_3| = 20,0$ m/s, e elas permanecem constantes. Num dado instante ($t_0 = 0$) suas posições estão determinadas pela figura que se segue:



No instante em que o carro (1) cruzar na estrada com o carro (2), a que distância deles estará o carro (3)?

(Sugestão dos autores: oriente a trajetória e escreva as equações horárias para o movimento de cada carro.)

4. Velocidade relativa

Até aqui estudamos o movimento dos corpos cuja velocidade tinha como referencial o solo. Vamos aprender agora como determinar a velocidade de um corpo em relação a outro corpo, mesmo que ele esteja também em movimento em relação ao solo.

Inicialmente, vamos citar um exemplo mostrando a importância do estudo. Em uma estrada retilínea, um carro pretende ultrapassar o carro da frente. Estando o carro da frente a 90 km/h e o de trás a 120 km/h, a diferença de velocidade é de 30 km/h. Essa diferença de 30 km/h é que se deve levar em conta numa ultrapassagem. Ela é a velocidade relativa do carro de trás em relação ao da frente. Podemos até chamá-la de velocidade relativa de ultrapassagem (fig. 6).

No exemplo, tudo se passa como se o carro da frente estivesse em repouso e o de trás com velocidade de 30 km/h.

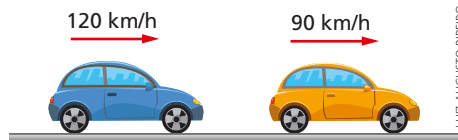


Figura 6. A velocidade relativa de ultrapassagem é de 30 km/h.

LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

Definição de velocidade relativa

Estando os móveis A e B numa mesma trajetória retilínea, com velocidades escalares respectivamente iguais a v_A e v_B , relativas a um dado referencial, define-se velocidade relativa de A em relação a B por:

$$v_{\text{rel}} = v_A - v_B$$

Neste cálculo, devemos levar em conta os respectivos sinais de cada uma das velocidades escalares.

Vamos exemplificar, usando as figuras 7 e 8:

1º) Na figura 7, os dois móveis têm o mesmo sentido e percorrem a trajetória no sentido de sua orientação positiva. Assim a velocidade relativa de A em relação a B será:

$$\begin{aligned} v_{\text{rel}} &= v_A - v_B \\ v_{\text{rel}} &= (8 \text{ m/s}) - (2 \text{ m/s}) = 6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2º) Na figura 8, os dois móveis apresentam sentidos opostos, tendo A o sentido positivo e B o negativo da orientação da trajetória.

$$\begin{aligned} v_{\text{rel}} &= v_A - v_B \\ v_{\text{rel}} &= (8 \text{ m/s}) - (-2 \text{ m/s}) \\ v_{\text{rel}} &= (8 \text{ m/s}) + (2 \text{ m/s}) = 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$



Figura 7. Os dois móveis deslocam-se no mesmo sentido.



Figura 8. Os dois móveis deslocam-se em sentidos opostos.

Uma regra prática para calcular a velocidade relativa

De modo geral, não necessitamos do sinal da velocidade relativa. Podemos apenas calcular o seu valor absoluto (módulo). A ultrapassagem mostrada na introdução deste item é um exemplo disso.

Observemos nos exemplos anteriores que essa velocidade relativa poderia ter sido calculada por uma simples diferença de módulos (caso da fig. 7) ou soma deles (caso da fig. 8). Então, podemos enunciar:

1º) Estando os dois móveis no mesmo sentido (fig. 9), o módulo da velocidade relativa será dado pela diferença dos módulos de suas velocidades escalares, tomando-se o maior menos o menor, independentemente do sentido de orientação da trajetória.



Figura 9.

ILUSTRAÇÕES: ZAPPT

Com $v_A > v_B$, fazemos: $|v_{rel}| = |v_A| - |v_B|$

Com $v_B > v_A$, fazemos: $|v_{rel}| = |v_B| - |v_A|$

2º) Estando os dois móveis em sentidos opostos (figs. 10 e 11), o módulo da velocidade relativa será dado pela soma dos módulos de suas velocidades escalares, independentemente do sentido de orientação da trajetória.

$$|v_{rel}| = |v_A| + |v_B|$$



Figura 10. Aproximando-se.



Figura 11. Afastando-se.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Exercícios de Aplicação

22. Determine, em cada caso, o módulo da velocidade relativa e interprete o resultado.

- a) Dois carros, na mesma estrada retilínea, estão em sentidos opostos.

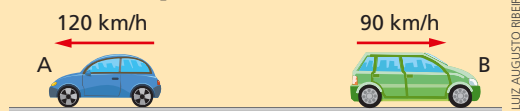


Figura a.

- b) Dois carros, na mesma estrada retilínea, estão no mesmo sentido.

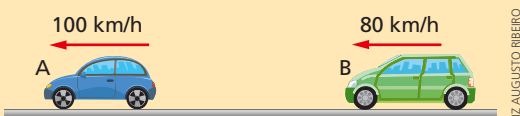


Figura b.

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{a) } |v_{rel}| &= |v_A| + |v_B| \\ |v_{rel}| &= 120 \text{ km/h} + 90 \text{ km/h} \\ |v_{rel}| &= 210 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Interpretação: Tudo se passa como se um dos carros estivesse em repouso e o outro se afastasse dele a 210 km/h.

$$\begin{aligned} \text{b) } |v_{rel}| &= |v_A| - |v_B| \\ |v_{rel}| &= 100 \text{ km/h} - 80 \text{ km/h} \\ |v_{rel}| &= 20 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Interpretação: Tudo se passa como se o carro B estivesse em repouso e o carro A se afastasse dele com velocidade de módulo 20 km/h.

23. Determine o módulo da velocidade relativa dos móveis A e B, em cada figura.



Figura a.

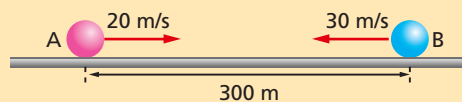


Figura b.



Figura c.

24. A figura representa dois móveis, A e B, numa mesma trajetória retilínea, sendo que nesse instante ($t = 0$) eles estão a 300 m um do outro. Os valores absolutos de suas velocidades são, respectivamente, 20 m/s e 30 m/s. Determine o instante do encontro.



Resolução:

Este problema pode ser resolvido de dois modos: pelas equações horárias, como fizemos nos exercícios 11 e 12, ou então pela velocidade relativa, como segue.

Estando os dois móveis em sentidos opostos, o módulo de sua velocidade relativa é dado pela soma dos módulos das velocidades escalares indicadas.

$$\begin{aligned} |v_{rel}| &= |v_A| + |v_B| \\ |v_{rel}| &= 20 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{rel}| = 50 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Interpretação: Tudo se passa como se um dos móveis permanecesse em repouso e o outro percorresse sozinho os 300 m que os separam, porém com velocidade igual à velocidade relativa de 50 m/s.

Lembrando que no movimento uniforme podemos escrever:

$$\Delta s_{\text{rel}} = v_{\text{rel}} \cdot \Delta t$$

$$300 = 50 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{300}{50} \Rightarrow \Delta t = 6,0 \text{ s}$$

25. Um guincho estava puxando um carro quando o carretel em que se prendia o cabo de aço perdeu a sua trava e começou a desenrolar pelo caminho, permanecendo esticado. O caminhão guincho se manteve com velocidade escalar de 12 m/s, e o carro passou a se deslocar com velocidade escalar de 10 m/s.

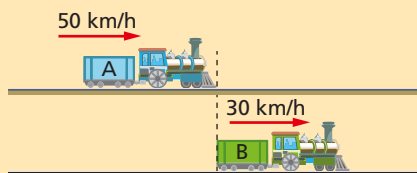


LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

No momento em que a trava se perdeu, o carro se encontrava a 4,0 m do caminhão guincho. Desprezando a inclinação do cabo de aço, responda:

- Em relação ao caminhão guincho, com que velocidade o cabo se desenrolou do carretel?
 - Decorrido 1,0 min do acidente, qual era a distância do carro em relação ao caminhão guincho?
26. Uma moto de tamanho desprezível está com velocidade escalar de 116 km/h e vai ultrapassar um caminhão com 30 m de comprimento e velocidade de 80 km/h, trafegando no mesmo sentido que ela. Quanto tempo dura a ultrapassagem?

27. Dois trens, A e B, de 200 m de comprimento cada um, correm em linhas paralelas com velocidades escalares de valores absolutos 50 km/h e 30 km/h, no mesmo sentido. A figura mostra o instante em que o trem A começa a ultrapassar o trem B. Depois de quanto tempo terminará a ultrapassagem?



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

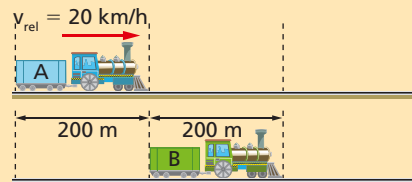
Resolução:

Vamos resolver este exercício pela velocidade relativa. A velocidade escalar de A em relação a B tem valor absoluto:

$$v_{\text{rel}} = 50 \text{ km/h} - 30 \text{ km/h}$$

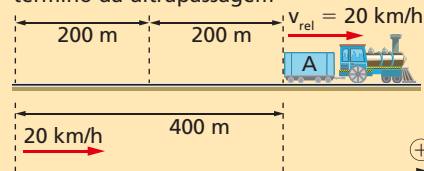
$$v_{\text{rel}} = 20 \text{ km/h}$$

início da ultrapassagem



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

término da ultrapassagem



Assim, cada ponto do trem A percorre: 200 m + 200 m = 400 m = 0,400 km com velocidade relativa 20 km/h.

$$\Delta s_{\text{rel}} = v_{\text{rel}} \cdot \Delta t$$

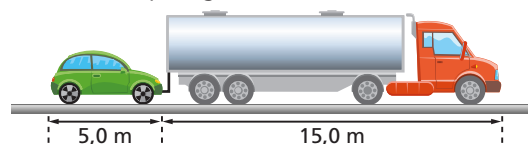
$$0,40 = 20 \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{0,40}{20} \Rightarrow \Delta t = 0,02 \text{ h} \Rightarrow \Delta t = 1,2 \text{ min}$$

28. Dois trens, A e B, de 200 m de comprimento cada um, correm em linhas paralelas com velocidades escalares de valores absolutos 50 km/h e 30 km/h, em sentidos opostos. Quanto tempo decorre desde o instante em que começam a se cruzar até o instante em que terminam o cruzamento? (*Sugestão:* Calcule o módulo da velocidade relativa.)

29. Determine o intervalo de tempo para um automóvel, de 5,0 m de comprimento, ultrapassar um caminhão de 15,0 m de comprimento. O automóvel e o caminhão estão em movimento, no mesmo sentido, com velocidades escalares constantes de 72,0 km/h e 36,0 km/h, respectivamente.

início da ultrapassagem



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

Figura a.

fim da ultrapassagem

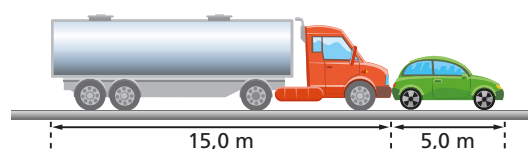


Figura b.

30. Dois trens, A e B , de comprimentos 100 m e 200 m, respectivamente, correm em linhas paralelas com velocidades escalares de valores absolutos 30 km/h e 20 km/h. Qual o intervalo de tempo que um trem demora para passar pelo outro? Considere os casos em que:

- os trens deslocam-se no mesmo sentido;
- os trens deslocam-se em sentidos opostos.

31. Dois trens de comprimentos L , iguais, percorrem linhas paralelas e retilíneas em movimento uniforme e sentidos opostos. Num dado instante passam um ao lado do outro. Sendo v o valor absoluto de suas velocidades, determine quanto tempo dura o cruzamento.

32. Dois pontos materiais, A e B , percorrem a mesma trajetória, no mesmo sentido, com movimentos uniformes. O móvel A parte no instante $t = 0$ com velocidade escalar 6,0 m/s; o móvel B parte do mesmo ponto, 2,0 s depois, com velocidade escalar 10 m/s. Depois de quanto tempo, após a partida de A , os móveis se encontrarão?

Resolução:

Vamos adotar o ponto de partida dos móveis como origem das posições e orientar a trajetória no sentido dos movimentos.

Assim, temos: $s_{0A} = 0$; $s_{0B} = 0$; $v_A = +6,0$ m/s; e $v_B = +10,0$ m/s.

Equação horária de A:

$$s_A = s_{0A} + v_A \cdot t$$

$$s_A = 0 + 6,0t \quad (\text{SI})$$

Equação horária de B:

$$s_B = s_{0B} + v_B \cdot (t - 2,0)$$

$$s_B = 0 + 10(t - 2,0) \quad (\text{SI}), \text{ com } t \geq 2,0 \text{ s}$$

A origem dos tempos ($t = 0$) foi adotada no instante em que o móvel A parte. Assim, como o móvel B partiu 2,0 s depois, em sua equação horária comparece a variável $(t - 2,0)$ e na equação horária de A comparece a variável t .

No encontro, temos:

$$s_A = s_B$$

$$6,0t = 10(t - 2,0)$$

$$6,0t = 10t - 20$$

$$t = 5,0 \text{ s}$$

Portanto, o encontro ocorre 5,0 s após a partida de A e 3,0 s após a partida de B .

Exercícios de Reforço

33. De duas localidades, A e B , ligadas por trilhos retos de 5,0 km de comprimento, partem simultaneamente dois trens, um ao encontro do outro, com velocidades escalares de valor absoluto igual a 5,0 km/h. No instante da partida, uma vespa, que estava pousada na parte dianteira de um dos trens, parte voando em linha reta, ao encontro do outro trem, com velocidade escalar de valor absoluto 8,0 km/h. Ao encontrar o outro trem, a vespa volta imediatamente, encontrando o primeiro trem, e rapidamente retorna, mantendo constante o valor absoluto de sua velocidade escalar. E assim prossegue nesse vaivém até que os dois trens se encontram e esmagam a vespa. Que distância a vespa percorreu?

Resolução:

Vamos determinar, inicialmente, o intervalo de tempo que os trens demoram para se encontrar. A velocidade escalar de um trem em relação ao outro tem valor absoluto:

$$v_{\text{rel}} = 5,0 \text{ km/h} + 5,0 \text{ km/h}$$

$$v_{\text{rel}} = 10 \text{ km/h}$$

$$\Delta s_{\text{rel}} = v_{\text{rel}} \cdot \Delta t$$

$$5,0 = 10 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0,50 \text{ h}$$

Durante 0,50 h a vespa se moveu com velocidade escalar de valor absoluto constante $v = 8,0$ km/h percorrendo a distância total d tal que:

$$d = v \cdot \Delta t$$

$$d = 8,0 \cdot 0,50$$

$$d = 4,0 \text{ km}$$

34. (UERJ) Dois automóveis, M e N , inicialmente a 50 km de distância um do outro, deslocam-se com velocidades constantes na mesma direção e em sentidos opostos. O valor da velocidade de M , em relação a um ponto fixo da estrada, é igual a

60 km/h. Após 30 minutos, os automóveis cruzam uma mesma linha da estrada. Em relação a um ponto fixo da estrada, a velocidade de N tem o seguinte valor, em quilômetros por hora:

- a) 40 c) 60
b) 50 d) 70

35. (AFA-SP) Considere dois veículos deslocando-se em sentidos opostos, numa mesma rodovia. Um tem velocidade escalar de 60 km/h e o outro de 90 km/h, em valor absoluto. Um passageiro, viajando no veículo mais lento, resolve cronometrar o tempo decorrido até que os veículos se cruzem e encontra o intervalo de 30 segundos. A distância, em km, de separação dos veículos, no início da cronometragem, era de:

- a) 0,25 c) 2,0
b) 1,25 d) 2,5

36. (Fuvest-SP) Dois carros, A e B , movem-se no mesmo sentido, em uma estrada reta, com velocidades escalares constantes $v_A = 100$ km/h e $v_B = 80$ km/h, respectivamente.

- a) Qual é, em módulo, a velocidade do carro B em relação a um observador no carro A ?
b) Em um dado instante, o carro B está 600 m à frente do carro A . Quanto tempo, em horas, decorre até que A alcance B ?

37. A distância que separa dois automóveis, num dado instante (t_0), é 50 km. Ambos percorrem a mesma estrada retilínea, no mesmo sentido, com movimentos uniformes. O automóvel da frente tem velocidade escalar de 60 km/h e o de trás, 70 km/h.

- a) Determine após quanto tempo o de trás alcançará o da frente.
b) Quantos quilômetros deverá andar o de trás até alcançar o da frente?

38. Um caminhão de comprimento L_1 desloca-se em movimento retilíneo e uniforme (MRU) com velocidade escalar v , estando prestes a ser ultrapassado por um automóvel de comprimento L_2 , também em MRU, com velocidade $3v$, no mesmo sentido do caminhão. Sabendo que $L_1 = 2L_2$, determine o tempo decorrido na ultrapassagem. Dê sua resposta em função de v e L_1 .

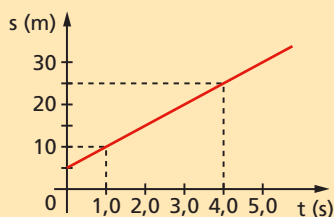
Exercícios de Aplicação

39. Um móvel realiza movimento uniforme. Sabe-se que no instante $t_1 = 1,0$ s a abscissa do móvel é $s_1 = 10$ m e, no instante $t_2 = 4,0$ s, é $s_2 = 25$ m.

- a) Construa o gráfico da posição s em função do tempo t .
b) Determine a velocidade escalar e a abscissa inicial.
c) Escreva a equação horária da abscissa em função do tempo.

Resolução:

- a) O gráfico de s em função de t no movimento uniforme é uma reta oblíqua aos eixos. Portanto, basta usar os dois pontos: ($t_1 = 1,0$ s; $s_1 = 10$ m) e ($t_2 = 4,0$ s; $s_2 = 25$ m).



- b) Sendo o movimento uniforme, a velocidade escalar instantânea coincide com a velocidade escalar média:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{25 - 10}{4,0 - 1,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 5,0 \text{ m/s}$$

Do gráfico obtido no item a , notamos que no instante $t = 0$ a posição do móvel é 5,0 m, isto é, $s_0 = 5,0$ m.

Outra maneira de se calcular s_0 é através de $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ou $v = \frac{s - s_0}{t - 0}$.

Sendo $v = 5,0$ m/s e fazendo $t = 1,0$ s e $s = 10$ m (ver gráfico), vem:

$$5,0 = \frac{10 - s_0}{1,0 - 0} \Rightarrow s_0 = 5,0 \text{ m}$$

- c) $s = s_0 + v \cdot t$

$$s = 5,0 + 5,0t \quad (\text{SI})$$

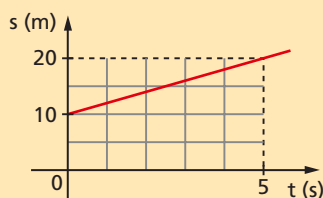
40. Um móvel realiza movimento uniforme. Sabe-se que no instante $t_1 = 2,0$ s a posição do móvel é $s_1 = 3,0$ m e, no instante $t_2 = 5,0$ s, a posição é $s_2 = 9,0$ m.

- Construa o gráfico posição \times tempo.
- Determine a velocidade escalar do móvel.
- Escreva a equação horária do movimento.

41. Construa os gráficos: posição \times tempo e velocidade \times tempo, nos casos:

- $s = -6 + 2t$ (SI)
- $s = 8 - 4t$ (SI)

42. Dado o gráfico posição \times tempo de um móvel, determine a equação horária.



Resolução:

Trata-se de um movimento uniforme. Portanto, a função horária é $s = s_0 + v \cdot t$.

Do gráfico, tiramos a ordenada $s_0 = 10$ m.

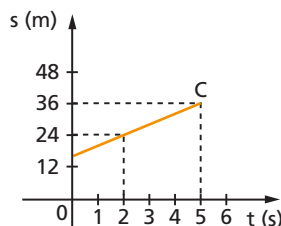
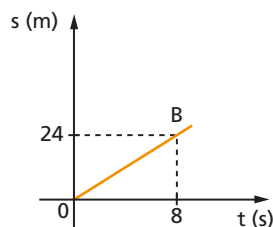
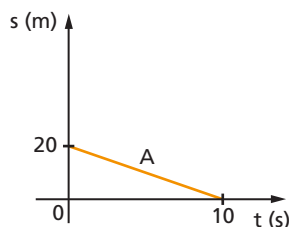
De $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, vem:

$$v = \frac{20 - 10}{5,0 - 0} \Rightarrow v = 2,0 \text{ m/s}$$

Logo, temos:

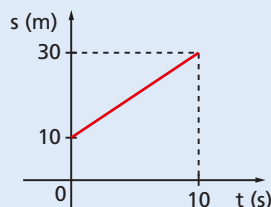
$$s = 10 + 2,0t \quad (\text{SI})$$

43. Determine a equação horária das posições dos móveis A, B e C cujos gráficos posição \times tempo são dados a seguir.



Exercícios de Reforço

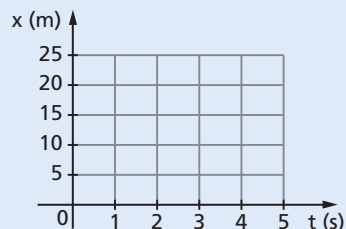
44. O gráfico representa a posição (s) de um atleta em função do tempo (t) de trajeto.



Assinale a opção correta:

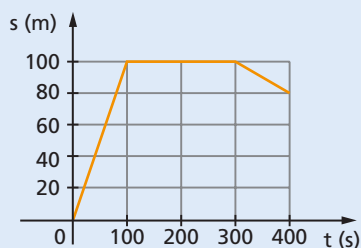
- A trajetória descrita pelo atleta é retilínea.
- A velocidade escalar do atleta é crescente.
- O atleta partiu da origem das ordenadas.
- A velocidade escalar do atleta, no instante $t = 5$ s, vale 2 m/s.
- A distância percorrida pelo atleta, no intervalo de 0 a 10 s, vale 30 m.

45. (Vunesp-SP) O movimento de uma partícula efetua-se ao longo do eixo x . Num gráfico (x , t) desse movimento, podemos localizar os pontos $P_0(25; 0)$, $P_1(20; 1)$, $P_2(15; 2)$, $P_3(10; 3)$ e $P_4(5; 4)$, com x em metros e t em segundos.



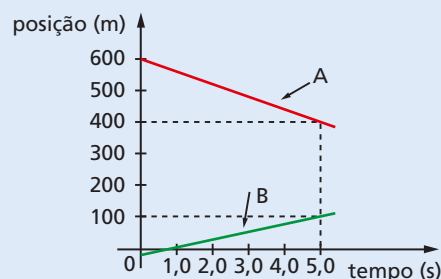
- Represente no gráfico (x , t) os pontos dados.
- Identifique o tipo de movimento.
- Deduza a equação horária do movimento.
- Qual a distância percorrida entre os instantes 0 e 5 s?

46. (Fuvest-SP) O gráfico ilustra a posição s , em função do tempo t , de uma pessoa caminhando em linha reta durante 400 segundos. Assinale a alternativa correta.



- a) A velocidade escalar no instante $t = 200$ s vale $0,50$ m/s.
 b) Em nenhum instante a pessoa parou.
 c) A distância total percorrida durante os 400 segundos foi 120 m.
 d) O deslocamento escalar durante os 400 segundos foi 180 m.
 e) O módulo de sua velocidade escalar no instante $t = 50$ s é menor do que no instante $t = 350$ s.

47. (F. M. Triângulo Mineiro-MG) Na figura, estão representados, num plano cartesiano, os gráficos posição \times tempo do movimento de dois carros, A e B, que percorrem uma mesma reta.



Se esses carros se mantiverem em movimento com as mesmas características, durante o tempo suficiente, eles deverão cruzar-se no instante e na posição respectivamente iguais a:

- a) 10 s; 200 m d) 25 s; 400 m
 b) 10 s; 300 m e) 20 s; 200 m
 c) 20 s; 400 m

5. Cálculo do deslocamento escalar a partir do diagrama horário da velocidade

Consideremos um ponto material percorrendo uma trajetória em movimento uniforme. O diagrama horário de sua velocidade está representado na figura 12. No caso usamos um movimento progressivo, mas o que vamos deduzir também será válido para um movimento retrógrado.

Supondo que no instante t_1 o ponto material ocupe a posição s_1 e no instante t_2 a posição s_2 , teremos, então:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta s = s_2 - s_1$$

No movimento uniforme, o deslocamento escalar Δs é calculado pelo produto da velocidade pelo intervalo de tempo:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

Por outro lado, na figura 12, o retângulo sombreado tem uma base igual a Δt e uma altura igual a v . Lembrando que:

$$\text{área do retângulo} = b \cdot h$$

temos:

$$\text{área do retângulo} = (\Delta t) \cdot (v) = v \cdot \Delta t = \Delta s$$

Conclusão: o deslocamento escalar pode ser calculado pela área do retângulo e se escreve:

$$\Delta s \Big|_{t_1}^{t_2} \stackrel{N}{=} \text{área do retângulo} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Observação: o símbolo $\stackrel{N}{=}$ deve ser lido como “numericamente igual”.

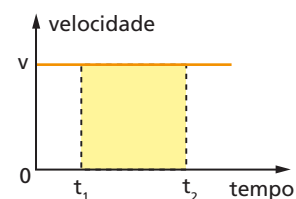
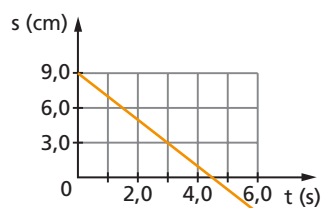


Figura 12. A área sombreada é numericamente igual ao deslocamento escalar Δs .

Exercícios de Aplicação

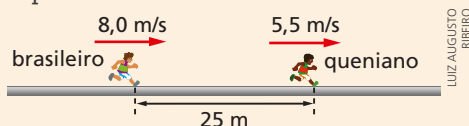
48. Uma partícula, dotada de velocidade escalar constante igual a $5,0 \text{ m/s}$, percorre uma trajetória retilínea em que foram definidas duas posições, A e B . Ela passou pela posição A no instante $t_1 = 3,0 \text{ s}$ e por B no instante $t_2 = 9,0 \text{ s}$.
- Faça o diagrama horário da velocidade, anotando no eixo do tempo os valores citados.
 - Usando a propriedade gráfica, determine a distância entre A e B .
49. Um ponto material tem movimento uniforme e o diagrama horário das posições é dado na figura a seguir.



- Calcule a velocidade escalar e esboce o gráfico velocidade \times tempo.
- Usando a propriedade gráfica, determine o deslocamento escalar entre os instantes $2,0 \text{ s}$ e $5,0 \text{ s}$.
- Classifique o movimento em retrógrado ou progressivo.

Exercícios de Aprofundamento

50. (OBF-Brasil) Numa corrida internacional de atletismo, o atleta brasileiro estava 25 m atrás do favorito, o queniano Paul Tergat, quando, no fim da corrida, o brasileiro reage, imprimindo uma velocidade escalar constante de $8,0 \text{ m/s}$, ultrapassando Tergat e vencendo a prova com uma vantagem de 75 m . Admitindo-se que a velocidade escalar de Tergat se manteve constante e igual a $5,5 \text{ m/s}$, calcule qual o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que o brasileiro reagiu até o instante em que cruzou a linha de chegada. Admita que ambos descrevem trajetórias retilíneas e paralelas.



51. (UE-RJ) Um foguete persegue um avião, ambos com velocidades constantes e mesma direção. Enquanto o foguete percorre $4,0 \text{ km}$, o avião percorre apenas $1,0 \text{ km}$. Admita que, em um instante t_1 , a distância entre eles é de $4,0 \text{ km}$ e que, no instante t_2 , o foguete alcança o avião. No intervalo de tempo $t_2 - t_1$, a distância percorrida pelo foguete, em quilômetros, corresponde aproximadamente a:
- 4,7
 - 5,3
 - 6,2
 - 8,6
52. (Fuvest-SP) Dois carros percorrem uma pista circular, de raio R , no mesmo sentido, com velocidades de módulos constantes e iguais a V e $3V$. O tempo decorrido entre encontros sucessivos vale:
- $\frac{\pi R}{3V}$
 - $\frac{2\pi R}{3V}$
 - $\frac{\pi R}{V}$
 - $\frac{2\pi R}{V}$
 - $\frac{3\pi R}{V}$

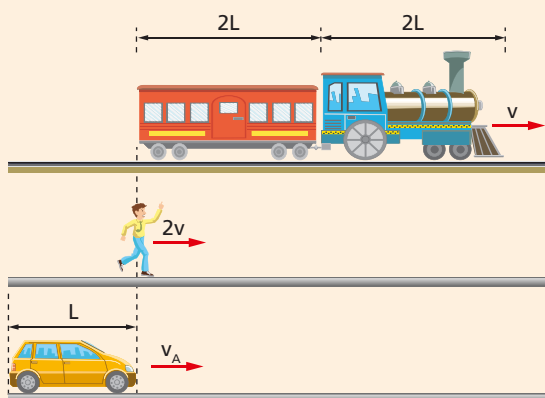
53. No Pão de Açúcar, Rio de Janeiro, temos o famoso bondinho suspenso que leva os turistas para o pico do morro. Dois cabos de aço paralelos correm em sentidos contrários, com uma mesma velocidade de módulo 36 km/h . A foto mostra os bondinhos quando vão se cruzar no meio do caminho.



CASSIO VASCONCELOS/SAMBA PHOTO

Tendo cada bondinho uma largura de $6,0 \text{ m}$ e um comprimento de $8,0 \text{ m}$, pergunta-se:

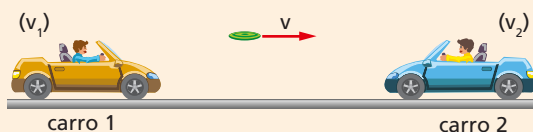
- Por quanto tempo um passageiro que está na janela de um dos bondinhos vê o outro à sua frente, durante o cruzamento?
 - Um turista, no pico do Pão de Açúcar, assiste ao cruzamento dos dois bondinhos. Quanto tempo dura o cruzamento?
54. Um viajante perdeu o trem e correu atrás dele para tentar pegá-lo. Felizmente, a velocidade do trem era baixa. A figura mostra o instante em que o homem alcançou o trem. Nesse mesmo instante um carro também o alcançou. Todos os três vão seguir suas trajetórias retilíneas e paralelas em movimento uniforme.



A velocidade escalar do trem é v , a do homem $2v$ e a do carro v_A . No instante em que o homem ultrapassa o trem, o carro também o ultrapassa. Determine, para um referencial no solo:

- A distância percorrida pelo viajante desde o instante em que alcançou o trem até ultrapassá-lo.
- A velocidade escalar do automóvel.

- 55.** Dois carros, em movimento uniforme, trafegam numa estrada retilínea horizontal em sentidos opostos. Quando estão próximos de se cruzarem, um objeto estranho, em forma de disco, voando numa altitude muito baixa, numa direção paralela à estrada, passa sobre eles.



O motorista do carro 1 rapidamente avalia a velocidade escalar do objeto em $6,0 \text{ m/s}$. No carro 2, o outro motorista também faz a avaliação da velocidade e conclui que é 20 m/s . Admitindo que ambos tenham acertado, podemos concluir que o módulo da velocidade relativa do carro 1 em relação ao carro 2 é, aproximadamente:

- 26 m/s
- 20 m/s
- 14 m/s
- 13 m/s
- $7,0 \text{ m/s}$

- 56.** Os diagramas de posição \times tempo abaixo referem-se aos movimentos dos móveis A e B sobre uma mesma trajetória retilínea.

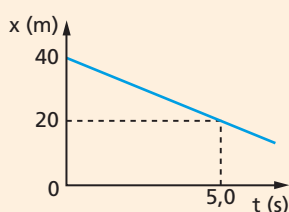


Figura a. Móvel A.

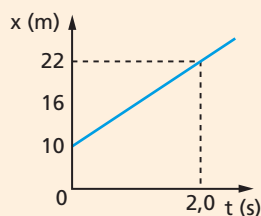


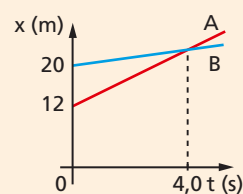
Figura b. Móvel B.

Analisando os diagramas horários, podemos concluir que os móveis se deslocam:

- no mesmo sentido, sendo que o móvel A deverá alcançar o móvel B.
- no mesmo sentido, sendo que o móvel B deverá alcançar o móvel A.
- em sentidos opostos, mas, devido à posição inicial, eles não deverão se cruzar.
- em sentidos opostos e deverão se encontrar no instante $t = 3,0 \text{ s}$ na posição $x = 28 \text{ m}$.
- em sentidos opostos e deverão se encontrar no instante $t = 4,0 \text{ s}$ na posição $x = 24 \text{ m}$.

- 57.** Dois móveis, A e B, deslocam-se sobre uma mesma trajetória retilínea. Suas posições são dadas pelo gráfico que se segue. O instante de encontro dos dois ocorreu em $t = 4,0 \text{ s}$. A velocidade de A em relação a B tem módulo igual a:

- $1,0 \text{ m/s}$
- $2,0 \text{ m/s}$
- $3,0 \text{ m/s}$
- $4,0 \text{ m/s}$
- $5,0 \text{ m/s}$

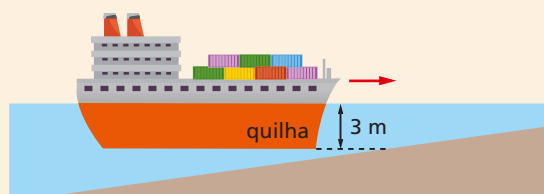


- 58.** (U. F. São Carlos-SP) Um navio é responsável por verificar a energia mareomotriz de determinada região da costa. Na coleta de informações, o timoneiro traça uma rota rumo ao continente. Algum tempo depois, na cabine do capitão, um alarme alerta para as leituras feitas automaticamente pelo sonar, que mostram a rápida diminuição da profundidade do leito oceânico.

Profundidade (m)	17	15	13	11
Instante (s)	0	15	30	45

Supondo que a inclinação do leito oceânico seja constante e sabendo que a quilha da embarcação está 3 m abaixo da linha-d'água, se nenhuma atitude for imediatamente tomada, o encalhe irá ocorrer entre os instantes:

- $1,0 \text{ minuto}$ e $1,5 \text{ minuto}$.
- $1,5 \text{ minuto}$ e $2,0 \text{ minutos}$.
- $2,0 \text{ minutos}$ e $2,5 \text{ minutos}$.
- $2,5 \text{ minutos}$ e $3,0 \text{ minutos}$.
- $3,0 \text{ minutos}$ e $3,5 \text{ minutos}$.



Movimento uniformemente variado (MUV)

Estudamos até aqui o movimento uniforme, aquele em que a velocidade escalar permanece constante e diferente de zero. No entanto, em nosso cotidiano, a velocidade escalar de uma grande quantidade de movimentos varia com o tempo. Neste capítulo, vamos estudar esses movimentos, que denominaremos **movimentos variados**.

Toda vez que um movimento apresentar variação de velocidade, diremos que houve **aceleração**.

Nos movimentos variados temos, portanto, uma **aceleração escalar**. Esta poderá ser medida num dado intervalo de tempo, a **aceleração escalar média**, ou num dado instante, a **aceleração escalar instantânea**.

1. Aceleração escalar média

Consideremos uma partícula em movimento (fig. 1), que apresenta as seguintes velocidades escalares:

- no instante t_1 , velocidade escalar v_1 ;
- no instante t_2 , velocidade escalar v_2 .



Figura 1.

A **aceleração escalar média** (α_m) dessa partícula, entre os dois instantes considerados, é definida por:

$$\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

2. Equação dimensional da aceleração

Lembrando que: $[v] = \frac{L}{T}$

podemos escrever:

$$[\alpha] = \frac{\frac{L}{T}}{T} = \frac{L}{T^2} = L \cdot T^{-2}$$

Unidades de aceleração

A unidade de aceleração será a unidade de comprimento dividida pela unidade de tempo ao quadrado.

No SI, a unidade de aceleração é **m/s²** ou, então, **m · s⁻²**, mas podemos citar ainda outras, tais como: $\frac{cm}{s^2}$; $\frac{km}{h^2}$; $\frac{mm}{s^2}$; $\frac{m}{min^2}$, etc.

1. Aceleração escalar média
2. Equação dimensional da aceleração
3. Aceleração escalar instantânea
4. Movimento acelerado e movimento retardado
5. Os sinais algébricos da aceleração escalar e da velocidade escalar
6. Movimento uniformemente variado (MUV)
7. A velocidade escalar no MUV
8. Posição do móvel em função do tempo
9. Inversão de sentido do movimento
10. Equação de Torricelli
11. Cálculo do deslocamento escalar a partir do diagrama horário da velocidade
12. A equação horária da posição (demonstração)
13. A velocidade escalar média no MUV

Para fazer uma conversão entre duas unidades, devemos inicialmente obter uma relação entre elas, antes de elevar o tempo ao quadrado. Como exemplo, vamos converter km/h^2 em m/s^2 :

- $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$
- $1 \text{ h} = 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}$
- $1 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} = \frac{10^3 \text{ m}}{(3,6)^2 \cdot (10^3)^2 \text{ s}^2} = \left(\frac{1}{3,6^2 \cdot 10^3} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Um segundo modo é o do cancelamento em cascata, em que multiplicamos sequencialmente os fatores, cancelando as unidades a serem substituídas:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} = \left(\frac{1 \cancel{\text{km}}}{1 \cancel{\text{h}^2}} \right) \left(\frac{10^3 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \right) \left(\frac{1 \cancel{\text{h}^2}}{(3,6 \cdot 10^3)^2 \text{ s}^2} \right) = \frac{10^3 \text{ m}}{(3,6)^2 \cdot (10^3)^2 \text{ s}^2} = \left(\frac{1}{3,6^2 \cdot 10^3} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3. Aceleração escalar instantânea

A **aceleração escalar instantânea** é a aceleração do móvel num dado instante. No entanto, para a sua definição rigorosa, precisamos novamente recorrer ao cálculo de Newton, usando o limite.

Seja T um dado instante para o qual se deseja calcular a aceleração escalar instantânea. Como sabemos calcular apenas a aceleração escalar num dado intervalo de tempo, façamos o seguinte:

- $[t_1; t_2]$ será um intervalo de tempo tal que $t_1 \leq T \leq t_2$, ou seja, o instante T está contido no intervalo de tempo. Seja também $\Delta t = t_2 - t_1$.
- v_1 e v_2 são as respectivas velocidades escalares nos instantes considerados. A variação de velocidade escalar é: $\Delta v = v_2 - v_1$.

Definimos aceleração escalar instantânea como o limite a que tende o valor do quociente $\left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)$ quando diminuirmos sucessivas vezes o intervalo de tempo Δt , fazendo-o tender a zero. Escreve-se:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_m \Leftrightarrow \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \right)$$

O conceito aqui empregado no uso do limite é bastante análogo àquele que usamos no capítulo 4, quando definimos a velocidade escalar instantânea. Apenas vamos acrescentar que a aceleração escalar instantânea também poderá ser obtida com a derivada da função $v = f(t)$, como veremos no texto *O cálculo diferencial e integral* (capítulo 5 do CD).

PROCURE NO CD

Veja, no capítulo 5 do CD, o texto *O cálculo diferencial e integral*.

Exercícios de Aplicação

1. Um ponto material possui um movimento variado e a sua velocidade escalar foi medida em alguns instantes, como nos mostra a tabela.

t (s)	v (m/s)
1,0	2,2
2,0	3,0
4,0	8,5
5,0	4,5
7,0	5,5

Determine a aceleração escalar média nos intervalos de tempo:

- a) entre 1,0 s e 2,0 s;
- b) entre 2,0 s e 5,0 s;
- c) entre 4,0 s e 7,0 s.

Resolução:

A aceleração escalar média deve ser entendida apenas como a razão entre a variação da velocidade escalar (Δv) e o intervalo de tempo (Δt).

- a) Para o intervalo de tempo [1,0 s; 2,0 s]

$$\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_m = \frac{3,0 - 2,2}{2,0 - 1,0} = \frac{0,8}{1,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_m = 0,8 \text{ m/s}^2$$

- b) Para o intervalo de tempo [2,0 s; 5,0 s]

$$\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_m = \frac{4,5 - 3,0}{5,0 - 2,0} = \frac{1,5}{3,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_m = 0,5 \text{ m/s}^2$$

- c) Para o intervalo de tempo [4,0 s; 7,0 s]

$$\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_m = \frac{5,5 - 8,5}{7,0 - 4,0} = \frac{-3,0}{3,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_m = -1,0 \text{ m/s}^2$$

CUIDADO!

Resista à tentação de dividir o valor da velocidade instantânea pelo tempo. Isso não pode ser feito. Use sempre uma variação de velocidade (Δv) e divida-a pelo respectivo intervalo de tempo (Δt).

Observamos pelos cálculos que a aceleração escalar média pode ser positiva ou negativa. Nos casos em que a velocidade escalar aumentou

($\Delta v > 0$), ela resultou positiva e, nos casos em que a velocidade escalar diminuiu ($\Delta v < 0$), ela resultou negativa.

2. Um carro numa estrada estava com uma velocidade escalar de 72 km/h e necessitava ultrapassar um caminhão. Pisando no acelerador, o motorista alcançou, num intervalo de tempo de 2,5 s, a velocidade escalar de 90 km/h. Podemos afirmar que a aceleração escalar média nesse intervalo de tempo foi de:

- a) 0,5 m/s² d) 7,2 m/s²
b) 1,5 m/s² e) 7,2 km/h²
c) 2,0 m/s²

3. O manual de um carro afirma que o veículo pode ser acelerado de zero a 129,6 km/h em apenas 3,6 s. Determine a aceleração escalar média do veículo:

- a) em m/s²
b) em km/s²
c) em km/h²

4. A velocidade escalar de uma partícula era de 12 m/s e ela foi acelerada durante um intervalo de tempo de 4,0 s, tendo obtido uma aceleração escalar média de 1,5 m/s². Sua velocidade escalar final foi de:

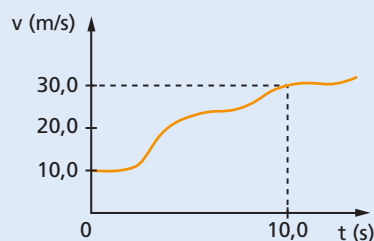
- a) 6,0 m/s d) 22 m/s
b) 18 m/s e) 24 m/s
c) 20 m/s

Exercícios de Reforço

5. (PUC-RJ) Um objeto em movimento uniforme variado tem sua velocidade inicial $v_0 = 0,0$ m/s e sua velocidade final $v_f = 2,0$ m/s, em um intervalo de tempo igual a 4,0 s. A aceleração do objeto, em m/s², é:

- a) $\frac{1}{4}$ d) 2
b) $\frac{1}{2}$ e) 4
c) 1

6. (U. E. Londrina-PR) A velocidade escalar de um carro está representada em função do tempo na figura.



Podemos concluir que a aceleração escalar média entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 10,0$ s é:

- a) nula d) 2,0 m/s²
b) 1,0 m/s² e) 3,0 m/s²
c) 1,5 m/s²

4. Movimento acelerado e movimento retardado

Ao dirigirmos um carro, o velocímetro indica o módulo da velocidade. Em nosso cotidiano, isso é muito prático; não interessa o sinal da velocidade escalar.

Para aumentar a velocidade de um carro, basta pisar no acelerador. Dizemos que o estamos **acelerando**. Para diminuir a velocidade, basta pisar no freio. Dizemos que o estamos **freando**.

Quando o carro está acelerando, seu movimento é chamado **acelerado** e, quando está freando, seu movimento é chamado **retardado**.

Essa variação de velocidade é sempre causada por uma força que atua no carro. No movimento acelerado, a força atua no mesmo sentido do movimento (fig. 2), ao passo que no retardado ela atua em sentido oposto ao do movimento (fig. 3).

Na Dinâmica vamos aprender que a força que atua num corpo causa uma aceleração na sua direção e sentido. Na Cinemática, não trabalhamos com força, mas apenas com aceleração. Então, vamos repetir as figuras 2 e 3 trocando força por aceleração.

Podemos, portanto, concluir que:

- no movimento **acelerado**, a aceleração tem o mesmo sentido da velocidade e o módulo desta aumenta com o tempo (fig. 4);
- no movimento **retardado**, a aceleração tem o sentido oposto ao da velocidade e o módulo desta diminui com o tempo (fig. 5).



Figura 2. Carro em movimento acelerado.



Figura 3. Carro em movimento retardado.



Figura 4. Carro em movimento acelerado.



Figura 5. Carro em movimento retardado.

O conceito de movimento acelerado e de movimento retardado não requer uma orientação da trajetória, pois trabalhamos apenas com o módulo da velocidade. Portanto, ele não depende do sentido em que ela estiver orientada.

5. Os sinais algébricos da aceleração escalar e da velocidade escalar

Na Cinemática escalar não se trabalha com vetores, mas apenas com os sinais das grandezas: da velocidade escalar e da aceleração escalar.

Assim, quando se diz que a aceleração atua no mesmo sentido da velocidade, significa que ambas têm o mesmo sinal. Quando se diz que a aceleração atua em sentido oposto ao da velocidade, significa que elas têm sinais contrários.

Notemos que o sinal algébrico da aceleração escalar não é suficiente para dizer se o movimento é acelerado ou retardado. Precisamos comparar o sinal da velocidade com o da aceleração.

Podemos, portanto, concluir que:

No **movimento acelerado**, a velocidade e a aceleração escalar atuam no mesmo sentido e, portanto, têm o mesmo sinal.
($v > 0$) e ($\alpha > 0$) ou, então, ($v < 0$) e ($\alpha < 0$)

No **movimento retardado**, a velocidade e a aceleração escalar atuam em sentidos opostos e, portanto, têm sinais contrários.
($v > 0$) e ($\alpha < 0$) ou, então, ($v < 0$) e ($\alpha > 0$)

Exercícios de Aplicação

7. Um corpo em movimento apresenta, num dado instante, aceleração escalar $\alpha = +2,0 \text{ m/s}^2$. Podemos afirmar que o seu movimento é acelerado?

Resolução:

Não. Apenas o sinal positivo da aceleração escalar não é suficiente para classificar o movimento. Ele pode ser acelerado ou retardado. Observemos:

1º caso:

Se o corpo tiver velocidade escalar positiva ($v > 0$) e $\alpha > 0$, ou seja, movimento **acelerado**.

2º caso:

Se o corpo tiver velocidade escalar negativa ($v < 0$) e $\alpha > 0$, ou seja, movimento **retardado**.

8. Um móvel está, num dado instante, em movimento progressivo e retardado.

- Quais são os sinais algébricos da velocidade escalar e da aceleração escalar?
- Se invertermos a orientação da trajetória, o movimento tornar-se-á acelerado?

Resolução:

- a) No movimento progressivo: $v > 0$.

No movimento retardado: α e v têm sinais contrários. Logo, $\alpha < 0$.

- b) A classificação do movimento como retardado não depende da orientação da trajetória e, assim, o movimento continua retardado. Invertendo a trajetória, a velocidade e a aceleração mudam de sinais, mas continuam com sinais contrários: $v < 0$ e $\alpha > 0$.

9. Classifique os movimentos representados nas figuras a, b e c. Apenas indique se é acelerado ou retardado. Nas figuras, v é a velocidade e α é a aceleração.

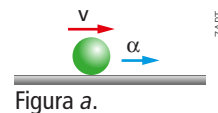


Figura a.

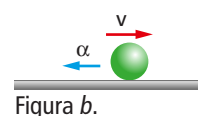


Figura b.

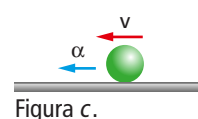
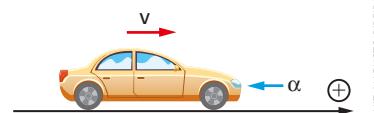


Figura c.

10. Um móvel percorre uma trajetória com velocidade escalar positiva e aceleração escalar negativa, fazendo com que ele venha a parar no instante $t = 5,0 \text{ s}$. Imediatamente, o móvel retoma o seu movimento, no mesmo sentido, aumentando gradativamente a velocidade escalar.



LUIS AUGUSTO RIBEIRO

Classifique o movimento, usando os conceitos de progressivo-retrógrado e de acelerado-retardado:

- para um instante $t < 5,0 \text{ s}$, antes de o móvel parar;
- para um instante $t > 5,0 \text{ s}$, na retomada do movimento.

Exercícios de Reforço

11. Classifique os movimentos das figuras a e b, usando os conceitos de movimento acelerado e retardado. Nas figuras, v representa a velocidade e a representa a aceleração.

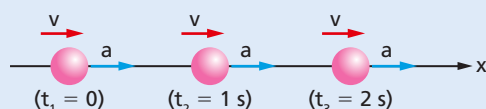


Figura a.

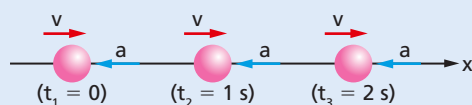
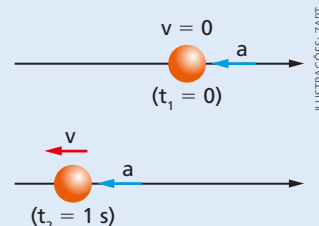


Figura b.

12. Na figura, a partícula está, no instante $t = 0$, prestes a se mover. Ela está sob a ação de uma aceleração a que será mantida constante por alguns segundos. Descreva, no instante $t = 1,0 \text{ s}$, qual é a classificação do movimento relativamente à sua velocidade, bem como se ele é acelerado ou retardado.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

6. Movimento uniformemente variado (MUV)

Quando a aceleração escalar de uma partícula é diferente de zero e não varia com o tempo, o seu movimento é denominado **uniformemente variado**.

Existem muitos exemplos em que é possível se manter constante a aceleração escalar.

Um carro está parado num semáforo e, ao sinal verde, começa a movimentar-se; ainda que por um curto intervalo de tempo, o movimento pode ser realizado sob aceleração escalar praticamente constante.

Um carro que, na estrada, está em baixa velocidade, poderá aumentá-la, acelerando de modo constante, ou seja, fazendo a velocidade variar uniformemente.

Quando deixamos cair uma borracha escolar no chão e esta percorre uma trajetória retilínea vertical, seu movimento pode ser considerado uniformemente variado.

Esses e muitos outros exemplos de nosso cotidiano nos levaram a fazer um estudo em separado do movimento uniformemente variado (MUV) e a elaborar para ele um grupo especial de equações e respectivos gráficos.

7. A velocidade escalar no MUV

Como a aceleração escalar é constante, a aceleração média é igual à instantânea e podemos escrever:

$$\alpha = \alpha_m = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

- v_0 é a velocidade escalar para $t_0 = 0$, denominada de velocidade escalar inicial.
- v é a velocidade escalar para um instante genérico t .

Da equação acima se escreve:

$$v = v_0 + \alpha t \quad (1)$$

Essa equação nos informa o valor da velocidade escalar instantânea para um dado valor de t . Vamos denominá-la **equação horária da velocidade**.

Diagramas horários da velocidade e da aceleração

Como a equação horária da velocidade é do 1º grau em t , podemos concluir também que o gráfico da função que ela representa é uma reta oblíqua ao eixo do tempo. A função será crescente se a aceleração escalar for positiva ($\alpha > 0$), como na figura 6. A função será decrescente se a aceleração escalar for negativa ($\alpha < 0$), como na figura 8.

Por outro lado, se a aceleração escalar for constante, o seu gráfico será uma reta paralela ao eixo do tempo. Temos duas possibilidades, devido ao sinal da aceleração, como nos mostram as figuras 7 e 9.

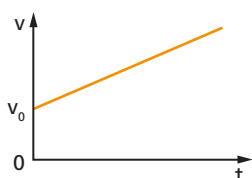


Figura 6. Gráfico da velocidade no MUV para $\alpha > 0$.



Figura 7. Gráfico da aceleração escalar no MUV para $\alpha > 0$.

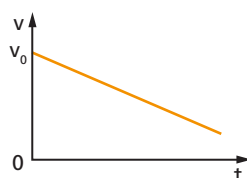


Figura 8. Gráfico da velocidade no MUV para $\alpha < 0$.

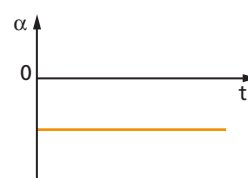


Figura 9. Gráfico da aceleração escalar no MUV para $\alpha < 0$.

Os gráficos retilíneos das figuras 6 e 8 mostram que a velocidade escalar varia uniformemente com o tempo, daí o nome dado ao movimento: **uniformemente variado**.

8. Posição do móvel em função do tempo

Consideremos uma partícula que ocupa, no instante $t = 0$, a posição de abscissa s_0 , com velocidade escalar instantânea v_0 , cujo movimento tenha uma aceleração escalar constante α (fig. 10).

Sua nova posição s em qualquer instante t é dada pela equação do 2º grau:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \quad (2)$$

Mais adiante, neste mesmo capítulo, na página 103, faremos a demonstração dessa equação. Agora vamos nos limitar ao seu estudo e ao da função que ela representa.

Os termos s_0 , v_0 e α são conhecidos como parâmetros do movimento, enquanto s e t são as variáveis.

Apenas para ilustrar como se monta uma equação horária de um MUV, vamos considerar os casos ilustrados nas figuras 11, 12 e 13, que representam um carro e seus parâmetros no instante $t = 0$.

a) Na figura 11, a equação horária de posições é dada por:

$$s = 3 + 5t + \frac{6}{2} t^2$$

$$s = 3 + 5t + 3t^2 \text{ (unidades do SI)}$$

b) Na figura 12, a equação horária é dada por:

$$s = 8 - 3t + \frac{8}{2} t^2 \Rightarrow s = 8 - 3t + 4t^2 \text{ (unidades do SI)}$$

c) Finalmente, na figura 13, a equação horária é dada por:

$$s = 0 + 2t - \frac{4}{2} t^2 \Rightarrow s = 2t - 2t^2 \text{ (unidades do SI)}$$



Figura 10. A partícula no instante inicial $t = 0$.

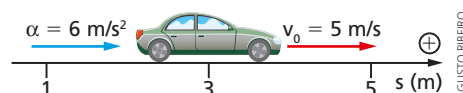


Figura 11.

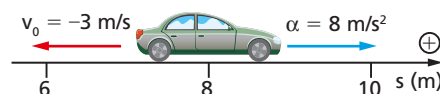


Figura 12.

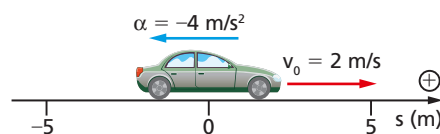


Figura 13.

Análise dimensional dos termos da equação

$$[s] = L \quad [s_0] = L \quad [v_0] = \frac{L}{T} \quad [\alpha] = \frac{L}{T^2}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ L & L & \frac{L}{T} \cdot T & & \frac{L}{T^2} \cdot T^2 \end{array}$$

Pela análise dimensional de cada termo, verificamos que a equação é homogênea e todos os seus termos têm a mesma dimensão: L.

Diagrama horário posição X tempo

Como a equação horária das posições é do 2º grau em t , o gráfico da função que ela representa é uma parábola. A concavidade dessa parábola depende do sinal do termo do 2º grau, ou seja, da aceleração escalar α . As figuras 14 e 15 apresentam as duas possibilidades desse gráfico: com a concavidade para cima ou com a concavidade para baixo.

Os diagramas horários das posições serão discutidos no decorrer deste capítulo.

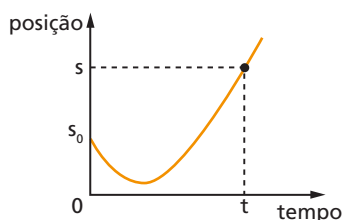


Figura 14. Válido para $\alpha > 0$.

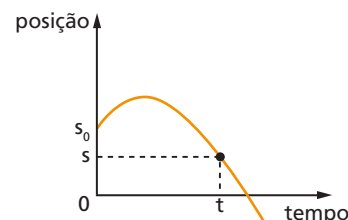


Figura 15. Válido para $\alpha < 0$.

Exercícios de Aplicação

13. Uma partícula tem movimento que obedece à seguinte equação horária de velocidade: $v = 6 - 3t$ (em unidades do SI). Determine:

- a velocidade escalar inicial (para $t = 0$) e a aceleração escalar instantânea;
- o valor da velocidade escalar nos instantes $t_1 = 1 \text{ s}$ e $t_2 = 3 \text{ s}$;
- o instante de inversão de sentido do movimento.

Resolução:

- a) O movimento proposto é um MUV, pois a equação horária da velocidade é do 1º grau em t e do tipo: $v = v_0 + \alpha t$.

Comparemos:

$$\left. \begin{array}{l} v = 6 - 3t \\ v = v_0 + \alpha t \end{array} \right\} \quad v_0 = 6 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \alpha = -3 \text{ m/s}^2$$

Observemos, mais uma vez, que a aceleração escalar instantânea é constante e não nula (definição do MUV) e vale -3 m/s^2 .

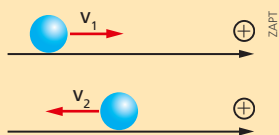
- b) Temos: $v = 6 - 3t$ (SI)

$$t_1 = 1 \text{ s} \rightarrow v_1 = 6 - 3 \cdot 1$$

$$v_1 = 3 \text{ m/s}$$

$$t_2 = 3 \text{ s} \rightarrow v_2 = 6 - 3 \cdot 3$$

$$v_2 = -3 \text{ m/s}$$



Observemos que no instante $t_1 = 1 \text{ s}$ o movimento era **progressivo** e que no instante $t_2 = 3 \text{ s}$ ele tornou-se **retrógrado**, o que mostra que houve inversão de sentido do movimento.

- c) A inversão de sentido ocorre para $v = 0$.

$$\text{Sendo } v = 6 - 3t$$

$$0 = 6 - 3t \Rightarrow 3t = 6 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

A inversão de sentido ocorreu no instante $t = 2 \text{ s}$.

14. Uma partícula em movimento uniformemente variado tem por equação da velocidade: $v = 2,5t - 15$ (em unidades do SI). Determine:

- a velocidade escalar inicial e a aceleração escalar;
- o instante em que a velocidade escalar se anula.

15. Sabendo que a velocidade escalar inicial de um móvel era de $4,0 \text{ m/s}$ e que sua aceleração escalar permaneceu constante e igual a $2,0 \text{ m/s}^2$, determine:

- a equação horária da velocidade;
- o instante em que a velocidade atinge o valor de 22 m/s .

16. Um ciclista, partindo da origem das abscissas de uma ciclovia, onde estava em repouso, segue em movimento acelerado pela pista. Sua aceleração escalar tem módulo de $1,0 \text{ m/s}^2$ (constante).



LUIS AUGUSTO RIBEIRO

Determine:

- a sua posição em $5,0 \text{ s}$ de movimento;
- a velocidade escalar atingida em $4,0 \text{ s}$ de movimento e a sua posição na trajetória neste instante.

Resolução:

- a) Como a aceleração escalar é constante, o movimento é uniformemente variado.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Tendo partido da origem das abscissas no instante $t = 0$, temos: $s_0 = 0$.

Como ele saiu do repouso, temos ainda: $v_0 = 0$.

$$\text{A equação fica: } s = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Substituindo $\alpha = 1,0 \text{ m/s}^2$ e $t = 5,0 \text{ s}$, vem:

$$s = \frac{1,0}{2} \cdot (5,0)^2 \Rightarrow s = 12,5 \text{ m}$$

- b) Cálculo da velocidade escalar para $t = 4,0 \text{ s}$:

$$v = v_0 + \alpha t$$

$$v = 0 + 1,0 \cdot 4,0$$

$$v = 4,0 \text{ m/s}$$

ou

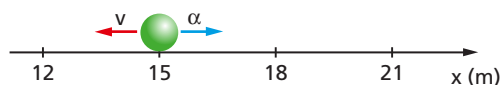
$$v = 14,4 \text{ km/h}$$

Determinação da posição para $t = 4,0 \text{ s}$:

$$s = \frac{1,0}{2} \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1,0}{2} \cdot (4,0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 8,0 \text{ m}$$

17. Um ponto material, no instante $t = 0$, encontra-se na posição indicada pela figura. Nesse instante sua velocidade escalar vale -12 m/s e a aceleração escalar é constante e vale $+6,0 \text{ m/s}^2$.



ZAPT

Determine:

- a equação horária das posições;
- a posição no instante $t = 4,0 \text{ s}$;
- o instante em que a velocidade escalar se anula.

18. Uma partícula partiu do repouso de uma posição de ordenada 8,0 m, com aceleração escalar constante. Decorridos 2,0 s de movimento, sua velocidade escalar era de 10 m/s. Determine, após 6,0 s de movimento:

- a velocidade escalar;
- a posição da partícula.

19. Um movimento uniformemente variado obedece à equação horária de velocidade escalar: $v = 12 + 3,0t$ (em unidades do SI).

- Determine a velocidade escalar inicial e a aceleração escalar do movimento.
- Determine a velocidade escalar no instante $t = 3,0$ s.
- Construa o gráfico da velocidade em função do tempo, indicando: a velocidade escalar inicial e a velocidade no instante anterior.

Resolução:

- a) Vamos comparar a equação dada com a equação da velocidade:

$$\left. \begin{array}{l} v = 12 + 3,0t \\ v = v_0 + \alpha t \end{array} \right\} \text{Devemos comparar termo a termo.}$$

Então, conclui-se que:

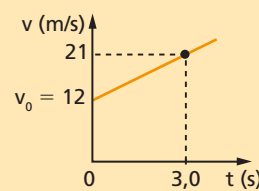
$$v_0 = 12 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \alpha = 3,0 \text{ m/s}^2$$

- b) Para o tempo $t = 3,0$ s, temos:

$$v = 12 + 3,0 \cdot 3,0 \Rightarrow v = 12 + 9,0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 21 \text{ m/s}$$

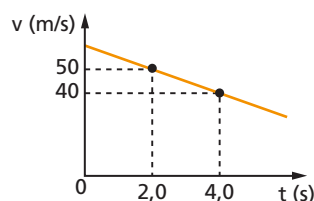
- c) O gráfico da velocidade é uma reta oblíqua ao eixo do tempo, obedecendo à equação de velocidade: $v = 12 + 3,0t$.



20. O movimento de uma partícula apresenta uma aceleração escalar constante e igual a $3,2 \text{ m/s}^2$. Tendo ela partido do repouso:

- determine a velocidade escalar para os instantes $t_1 = 2,0$ s e $t_2 = 5,0$ s;
- construa o gráfico velocidade \times tempo mostrando os dois pontos anteriores.

21. Uma partícula em movimento retilíneo apresenta velocidades variando com o tempo segundo o gráfico dado.

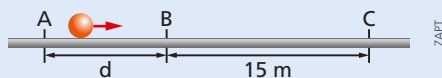


Determine:

- a aceleração escalar;
- a velocidade escalar inicial;
- o instante em que a partícula fica em repouso;
- o tipo de movimento no instante $t_1 = 2,0$ s.

Exercícios de Reforço

22. Uma partícula sai do repouso, no ponto A, no instante $t = 0$, percorre em movimento uniformemente acelerado, com aceleração $\alpha = 1,0 \text{ m/s}^2$, a trajetória retilínea da figura, passando por B no instante $t_1 = 10$ s.



Determine:

- a distância percorrida d entre os pontos A e B;
- a velocidade escalar ao passar pelo ponto C.

23. (Fuvest-SP) Um veículo parte do repouso em trajetória retilínea com aceleração escalar constante e igual a $2,0 \text{ m/s}^2$. Decorridos 3,0 s de movimento, calcule:

- a distância percorrida;
- a velocidade escalar adquirida.

24. (Unifor-CE) A partir do repouso, um corpo inicia movimento com aceleração escalar constante de $1,0 \text{ m/s}^2$, na direção de um eixo x . Entre os instantes 3,0 s e 5,0 s, o corpo terá percorrido, em metros:

- 10,0
- 8,0
- 6,0
- 4,0
- 2,0

25. O gráfico mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento uniformemente variado sobre o eixo cartesiano das ordenadas.



Análise as afirmativas a seguir e indique se são verdadeiras ou falsas.

- Nos primeiros 2 s de movimento, as posições são crescentes com o tempo.
- Nos primeiros 4 s de movimento, a partícula sempre esteve no semieixo positivo das ordenadas.

III. A aceleração escalar sempre se manteve positiva.

IV. No instante $t_2 = 4,0$ s, a partícula encontra-se na mesma posição da partida (instante $t_0 = 0$).

São verdadeiras:

- a) todas. d) apenas I e III.
b) apenas I, II e IV. e) apenas I e IV.
c) apenas I, II e III.

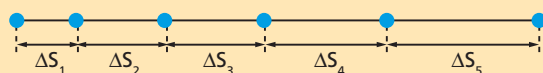
26. Uma partícula, inicialmente em repouso, é acelerada a $4,0 \text{ m/s}^2$ e adquire um movimento retilíneo e uniformemente acelerado. Verifique a seguinte propriedade:

A cada segundo de movimento, os sucessivos deslocamentos escalares aumentam em progressão aritmética (PA).

Determine a razão entre os sucessivos termos dessa PA.

Resolução:

A figura a seguir mostra as sucessivas posições nos instantes 0; 1,0 s; 2,0 s; 3,0 s; etc., ou seja, a nossa tese a ser demonstrada: Δs cresce em progressão aritmética. A figura é apenas ilustrativa.



Vamos partir da origem das abscissas, tomando $s_0 = 0$. A partícula partiu do repouso: $v_0 = 0$.

Usando a equação horária das posições:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \Rightarrow s = \frac{\alpha}{2} t^2 \Rightarrow s = \frac{4,0}{2} t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 2,0 t^2 \quad (\text{em unidades do SI})$$

Substituindo os sucessivos valores de t na equação, obtemos as respectivas abscissas:

$$t_1 = 1,0 \text{ s} \Rightarrow s_1 = 2,0 \cdot (1,0)^2 \Rightarrow s_1 = 2,0 \text{ m}$$

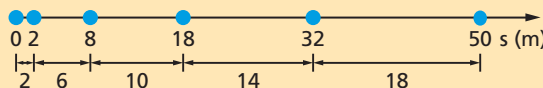
$$t_2 = 2,0 \text{ s} \Rightarrow s_2 = 2,0 \cdot (2,0)^2 \Rightarrow s_2 = 8,0 \text{ m}$$

$$t_3 = 3,0 \text{ s} \Rightarrow s_3 = 2,0 \cdot (3,0)^2 \Rightarrow s_3 = 18 \text{ m}$$

$$t_4 = 4,0 \text{ s} \Rightarrow s_4 = 2,0 \cdot (4,0)^2 \Rightarrow s_4 = 32 \text{ m}$$

$$t_5 = 5,0 \text{ s} \Rightarrow s_5 = 2,0 \cdot (5,0)^2 \Rightarrow s_5 = 50 \text{ m}$$

Agora, vamos posicionar a partícula em cada uma das posições e determinar os sucessivos deslocamentos escalares Δs , conforme mostramos na figura a seguir.



Os deslocamentos Δs estão grafados na figura e formam a seguinte sequência: (2; 6; 10; 14; 18; ...). Observemos que esta sequência é uma progressão aritmética, pois a diferença entre dois termos consecutivos é constante:

$$\left. \begin{array}{l} 6 - 2 = 4 \\ 10 - 6 = 4 \\ 14 - 10 = 4 \\ 18 - 14 = 4 \end{array} \right\} \text{O valor 4 é denominado razão da PA.}$$

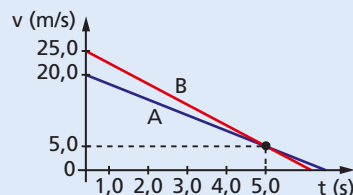
CUIDADO!

Não caia na tentação de calcular o Δs diretamente pela equação horária reduzida: $\Delta s = \left(\frac{\alpha t^2}{2} \right)$, pois ela nos dá o deslocamento a partir da origem, e não entre duas posições sucessivas.

27. (Udesc-SC) Algumas empresas de transporte utilizam computadores de bordo instalados nos veículos e ligados a vários sensores já existentes, e que registram todas as informações da operação diária do veículo, como excesso de velocidade, rotação do motor, freadas bruscas etc. Um *software* instalado em um PC na empresa transforma as informações registradas em relatórios simples e práticos, para um eficaz gerenciamento da frota. Um veículo movimenta-se em uma rodovia a $54,0 \text{ km/h}$. Em um determinado instante, o motorista acelera e, depois de 5,0 segundos, o carro atinge uma velocidade de módulo $90,0 \text{ km/h}$. Admite-se que a aceleração escalar tenha sido constante durante os 5,0 segundos.

- a) Esboce o gráfico da velocidade escalar para o intervalo de tempo dado.
b) Determine o valor da aceleração escalar do movimento.
c) Escreva a função da posição em relação ao tempo, considerando-se que o espaço inicial do veículo é de 10,0 metros.

28. (UF-CE) O gráfico da figura representa a variação da velocidade escalar com o tempo para dois carros, A e B, que viajam em uma estrada retilínea e no mesmo sentido. No instante $t = 0$ s, o carro B ultrapassa o carro A. Nesse mesmo instante, os dois motoristas percebem um perigo à frente e acionam os freios simultaneamente.



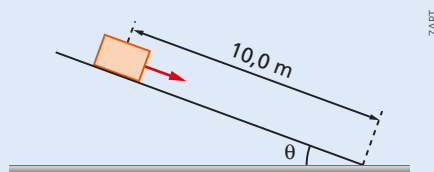
Tomando como base o gráfico, determine:

- a aceleração escalar dos dois carros;
- a função horária da posição para os dois carros;
- a função horária da velocidade escalar para os dois carros;
- a distância entre os dois carros no instante em que suas velocidades escalares são iguais.

(Sugestão: Admita que os carros A e B, no instante $t = 0$, estivessem na origem da trajetória.)

29. (OBF-Brasil) Considere um plano inclinado de 10,0 m de comprimento, como mostra a figura.

De seu extremo superior abandona-se, a partir do repouso, um corpo que adquire uma aceleração escalar de $5,0 \text{ m/s}^2$.



- Quanto tempo o corpo gasta para chegar ao extremo inferior do plano?
- Qual a sua velocidade escalar nesse instante?

9. Inversão de sentido do movimento

No movimento uniformemente variado pode ocorrer inversão de sentido no movimento da partícula. Para tanto, a partícula deverá estar em movimento retardado, isto é, **freando**, diminuindo o módulo de sua velocidade. No instante em que esta se anular, ocorrerá a inversão do sentido, desde que seja mantida a mesma aceleração.

No exemplo ao lado (figs. 16a a 16c), a partícula se desloca em movimento uniformemente variado, inicialmente indo de A para B. Observemos os três eventos.

- No instante t_1 (fig. 16a), a partícula possui movimento retardado e está **freando**.
- No instante t_2 (fig. 16b), a partícula **para**: a velocidade escalar é **zero**. No entanto, como a aceleração é constante, ela continua a atuar mesmo com a partícula parada e vai tirá-la do repouso.
- No instante t_3 (fig. 16c), a partícula está retornando para a posição A e seu movimento torna-se **acelerado**.

Dizemos que a inversão de sentido ocorreu no instante t_2 , em que a velocidade escalar se **anulou**.

Uma outra propriedade importante que se pode deduzir do exemplo anterior é a seguinte: **sempre que houver uma inversão no sentido do movimento da partícula, a sua velocidade escalar muda de sinal.**

Podemos também verificar a inversão de sentido nos gráficos da velocidade e das posições (figs. 17 e 18).

Na figura 17, fica clara a mudança de sinal da velocidade no instante t_2 . Logo, este é o instante da inversão de sentido.

$$t = t_2 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \text{inversão de sentido}$$

Na figura 18, as posições iniciais são crescentes até o instante $t = t_2$, quando ocorre a inversão de sentido e as posições passam a ser decrescentes. Logo, no instante t_2 , a velocidade escalar vale zero. Assim, o vértice V da parábola é o ponto correspondente à inversão de sentido do movimento.

$$\text{No vértice V} \Rightarrow \text{inversão de sentido} \Rightarrow v_2 = 0$$

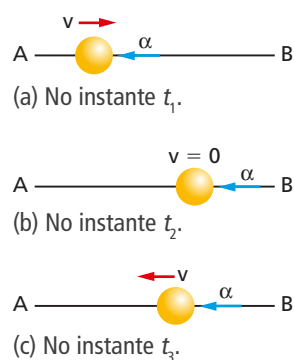


Figura 16.

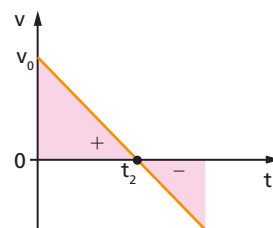


Figura 17. Inversão de sentido no instante t_2 .

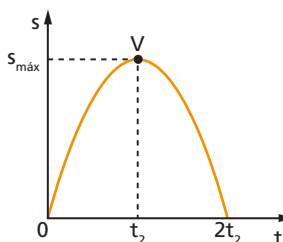


Figura 18. A inversão de sentido ocorre no instante t_2 .

Exercícios de Aplicação

30. A equação de velocidade – tempo de uma partícula em movimento retilíneo uniformemente variado é $v = 45 - 5,0t$ (unidades do SI). Determine:
- o instante da inversão de sentido do movimento;
 - no instante anterior, qual é o valor da aceleração escalar;
 - no instante $t = 10$ s, o valor da velocidade escalar.

Resolução:

- a) A inversão de sentido ocorre no instante em que a velocidade escalar se anula:

$$v = 0$$

$$0 = 45 - 5,0t$$

$$5,0t = 45 \Rightarrow t_{\text{inv}} = \frac{45}{5,0} \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\text{inv}} = 9,0 \text{ s}^2$$

DICA

As equações horárias usadas antes da inversão de sentido são as mesmas que se usam após a inversão. É erro conceitual usar uma equação de ida e outra de volta. O movimento é um só.

- b) A aceleração escalar é constante e se obtém facilmente por comparação:

$$\left. \begin{array}{l} v = 45 - 5,0t \\ v = v_0 + at \end{array} \right\} \alpha = -5,0 \text{ m/s}^2$$

Essa aceleração continua a atuar na partícula mesmo quando $v = 0$. Por esse motivo, a partícula entra novamente em movimento acelerado a partir de $t = 9,0$ s.

- c) Sendo: $v = 45 - 5,0t$, basta substituímos o valor de tempo dado, mesmo que ele seja superior ao instante de inversão:

$$v = 45 - 5,0 \cdot 10$$

$$v = 45 - 50$$

$$v = -5 \text{ m/s}$$

31. Num dado instante ($t = 0$) uma partícula possui velocidade escalar 60 m/s, sua abscissa na trajetória é 20 m e a aceleração escalar é constante e tem módulo 15 m/s². Determine:

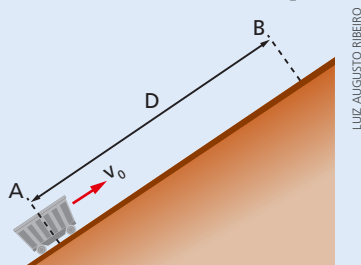
- o instante t em que a partícula para e inverte o sentido de seu movimento;
- a posição no instante t ;
- a posição da partícula no instante $(t + 1,0)$ s.

32. A velocidade escalar inicial de uma partícula era -18 m/s e sua aceleração escalar se manteve constante durante todo o movimento. No instante $t_2 = 4,5$ s houve inversão de sentido do movimento.

- Construa o gráfico da velocidade escalar em função do tempo.
- Determine a aceleração escalar.
- Determine a velocidade escalar no instante $t_3 = 9,0$ s.

Exercícios de Reforço

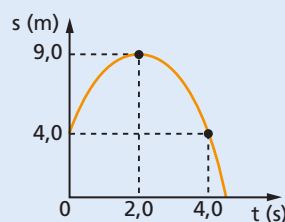
33. Na rampa da figura, um carrinho foi lançado, a partir do ponto A, com velocidade escalar inicial de módulo 12 m/s. Adquiriu movimento retilíneo uniformemente variado cuja aceleração escalar tinha módulo igual a 6,0 m/s². Ao atingir o ponto B, inverteu o sentido, retornando para o ponto A.



Despreze qualquer tempo perdido na inversão de sentido e determine:

- o tempo de subida e o tempo de descida.
- o módulo da velocidade quando o carrinho retornou para o ponto A.
- a distância D entre os pontos A e B.
- se o movimento de subida e o de descida são acelerados ou retardados. Faça classificações independentes.

34. Considere uma partícula em MUV, cujo gráfico da posição pelo tempo está mostrado na figura.



Determine:

- o instante em que a partícula inverte o sentido de movimento, bem como a velocidade escalar e a posição nesse instante;
- o deslocamento escalar Δs entre o instante inicial ($t = 0$) e o instante em que a partícula inverte o sentido de movimento;
- a velocidade escalar média no intervalo de tempo mencionado no item b.

35. (Fund. Carlos Chagas-SP) Uma partícula executa um movimento, em trajetória retilínea, obedecendo à função horária $s = 16,0 - 40,0t + 25,0t^2$, em que s é o espaço medido em metros e t é o tempo medido em segundos.

- Qual a velocidade escalar média entre os instantes $t_1 = 2,0$ s e $t_2 = 6,0$ s?
- A partir de que instante a partícula inverte o sentido de seu movimento?

10. Equação de Torricelli

Existem alguns problemas em que o tempo não é dado e a resolução, através das equações horárias da posição e da velocidade já vistas até aqui, se torna muito trabalhosa. Vamos desenvolver, então, uma nova equação em que será possível relacionar velocidade, aceleração e deslocamento escalares, sem passar pelo tempo.

Consideremos a seguinte situação-problema: um móvel dotado de aceleração escalar constante α passa pelo ponto A com velocidade escalar v_0 e depois pelo ponto B com velocidade escalar v . Seja, ainda, Δs a diferença de abscissas entre os dois pontos, A e B (fig. 19).

A equação horária da velocidade nos dá:

$$v = v_0 + \alpha \cdot t \Rightarrow t = \left(\frac{v - v_0}{\alpha} \right) \quad (1)$$

A equação da posição em função do tempo é:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

$$\Delta s = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \quad (2)$$

Substituindo-se a equação (1) na (2), vem:

$$\Delta s = v_0 \left(\frac{v - v_0}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{v - v_0}{\alpha} \right)^2$$

Desenvolvendo essa equação, temos:

$$\Delta s = \left(\frac{v \cdot v_0 - v_0^2}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2}{\alpha^2} \right)$$

$$\Delta s = \left(\frac{v \cdot v_0 - v_0^2}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2}{\alpha} \right)$$

$$\Delta s = \left(\frac{\cancel{2v \cdot v_0} - 2v_0^2 + v^2 - \cancel{2v \cdot v_0} + v_0^2}{2\alpha} \right)$$

Simplificando, vem:

$$\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\alpha}$$

Finalmente, chegamos a:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\Delta s$$



Figura 19. Móvel em MUV.

LUIS AUGUSTO RIBEIRO

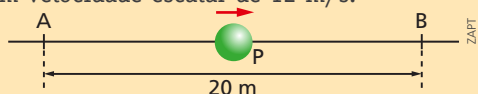
DICA

Ao usar a equação de Torricelli, é conveniente orientar a trajetória no sentido da velocidade escalar inicial, para que o sinal algébrico de v_0 não seja mascarado ao elevá-lo ao quadrado.

Essa equação é conhecida como **equação de Torricelli** e será usada nos problemas que se enquadrarem no modelo descrito anteriormente, nos quais não haverá necessidade do uso do tempo.

Exercícios de Aplicação

36. Uma partícula em movimento retilíneo uniformemente acelerado passou pela posição A com velocidade escalar de 8,0 m/s e pela posição B com velocidade escalar de 12 m/s.



Sendo de 20 m a distância entre as duas posições, determine:

- a aceleração escalar;
- o intervalo de tempo decorrido para ir de A até B.

Resolução:

- Orientemos a trajetória de A para B e teremos ambas as velocidades positivas:

$$v_0 = v_A = 8,0 \text{ m/s}; v = v_B = 12 \text{ m/s}$$

$$12^2 = 8,0^2 + 2\alpha \cdot 20$$

$$144 = 64 + 40\alpha$$

$$80 = 40\alpha \Rightarrow \alpha = 2,0 \text{ m/s}^2$$

- Adotando $t = 0$ como o instante em que a partícula passou por A, temos:

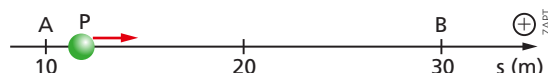
$$v = v_0 + \alpha t$$

$$12 = 8,0 + 2,0t$$

$$4,0 = 2,0t$$

$$t = 2,0 \text{ s}$$

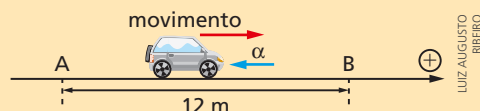
37. A partícula da figura partiu do repouso da posição A e atingiu a posição B com velocidade escalar de 20 m/s. Durante o seu movimento retilíneo, a aceleração escalar permaneceu constante.



Determine:

- a aceleração escalar da partícula;
- a velocidade escalar média entre A e B;
- o intervalo de tempo decorrido para a partícula ir de A até B.

38. O carrinho da figura é assimilável a um ponto material. Ele passou pelo ponto A com velocidade escalar de 8,0 m/s em movimento retardado, com uma aceleração constante de módulo 2,0 m/s². Após ter parado, inverteu instantaneamente o sentido do movimento, tendo retornado ao ponto A sempre mantendo constante a sua aceleração escalar. Adote $t = 0$ no instante em que o carrinho passou por A pela primeira vez.



Determine:

- o instante da inversão de sentido do movimento;
- a velocidade escalar ao passar pela posição B. Explique as duas soluções obtidas.

Resolução:

- Determinação do instante de inversão:

Observemos que o movimento inicial do carrinho é **retardado**, o que implica que sua velocidade escalar vai se anular, ocorrendo a inversão do sentido do movimento:

$$v = v_0 + \alpha t$$

Em A, temos $v_0 = 8,0 \text{ m/s}$. Sendo $\alpha = -2,0 \text{ m/s}^2$, vem:

$$v = 8,0 - 2,0t$$

$$v = 0 \Rightarrow 0 = 8,0 - 2,0t$$

$$t = 4,0 \text{ s}$$

Este é o instante da inversão.

- Determinação da velocidade escalar ao passar por B:

Usemos a equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta s$$

em que $v_0 = v_A = 8,0 \text{ m/s}$; $\alpha = -2,0 \text{ m/s}^2$; e

$$\Delta s = 12 \text{ m}$$

$$v^2 = (8,0)^2 + 2 \cdot (-2,0) \cdot 12$$

$$v^2 = 64 - 48$$

$$v^2 = 16 \Rightarrow v = \pm\sqrt{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \pm 4,0 \text{ m/s}$$

DICA

Se o móvel passar pelo segmento AB em movimento retardado, mais adiante ele inverterá o sentido. Retornará, em movimento acelerado, passando novamente por B. Na ida, o movimento é progressivo ($v > 0$) e, na volta, retrógrado ($v < 0$).

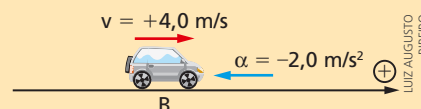


Figura a. Movimento de ida: progressivo e retardado.

A velocidade positiva refere-se à passagem do carrinho pelo ponto B, na ida, no sentido positivo da trajetória. O movimento é progressivo e retardado.

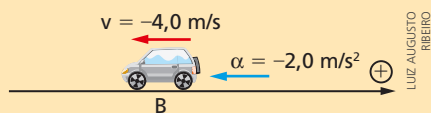


Figura b. Movimento da volta: retrógrado e acelerado.

A velocidade negativa refere-se à segunda passagem pelo ponto B, na volta, após inverter o sentido. O movimento de volta é retrógrado e acelerado.

39. Uma partícula passou, no instante $t_1 = 0$, pela posição $x_1 = 2$ m com velocidade escalar $v_1 = 40$ m/s e a seguir passou pela posição $x_2 = 22$ m com velocidade escalar $v_2 = 30$ m/s. Determine:

- a aceleração escalar;
- o instante da inversão de sentido do movimento da partícula;
- o instante em que a partícula passou pela posição $x_3 = 12$ m no seu movimento de retorno.

Exercícios de Reforço

40. (Fuvest-SP) A velocidade máxima permitida em uma autoestrada é de 110 km/h (aproximadamente 30 m/s) e um carro, nessa velocidade, leva 6 s para parar completamente. Diante de um posto rodoviário, os veículos devem trafegar no máximo a 36 km/h (10 m/s). Assim, para que os carros em velocidade máxima consigam obedecer o limite permitido, ao passar em frente ao posto, a placa referente à redução de velocidade deverá ser colocada antes do posto, a uma distância, pelo menos de:
- 40 m
 - 60 m
 - 80 m
 - 90 m
 - 100 m

41. (UE-PI) Um motorista cruza um sinal verde a 54 km/h e avista um outro sinal a 200 m a sua frente que também fica verde. Neste mesmo instante, ele imprime uma aceleração escalar constante de $1,0$ m/s² com o objetivo de cruzar o outro sinal. Admitindo-se que o sinal permanece verde durante 11 segundos, podemos afirmar que:
- o motorista passa pelo sinal no instante em que ele fica vermelho.
 - o motorista passa no sinal vermelho com uma velocidade escalar de 25 m/s.

- durante 10 segundos o motorista percorreu 250 m.
- durante 10 segundos o motorista percorreu 198 m.
- o motorista ultrapassou o sinal quando ele ainda estava verde, com velocidade escalar de 25 m/s.

42. (Vunesp-SP) Uma norma de segurança sugerida pela concessionária de uma autoestrada recomenda que os motoristas que nela trafegam mantenham seus veículos separados por uma "distância" de 2,0 segundos.

- Qual é essa distância, expressa adequadamente em metros, para veículos que percorrem a estrada com a velocidade constante de 90 km/h?
- Suponha que, nessas condições, um motorista freie bruscamente seu veículo até parar, com aceleração constante de módulo $5,0$ m/s², e o motorista de trás só reaja, freando seu veículo, depois de 0,50 s. Qual deve ser a aceleração mínima do veículo de trás para não colidir com o da frente?

11. Cálculo do deslocamento escalar a partir do diagrama horário da velocidade

No movimento uniforme, vimos que o deslocamento escalar pode ser calculado pela área do gráfico da velocidade. Essa propriedade pode ser estendida para o movimento uniformemente variado, bem como para qualquer outro tipo de movimento.

Consideremos o diagrama horário da figura 20. Aplicando-se a propriedade, pode-se escrever que: no intervalo de tempo compreendido entre os instantes t_1 e t_2 , o deslocamento escalar Δs é numericamente igual à área (A) sombreada.

Como se trata de um trapézio, essa área se calcula do seguinte modo:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

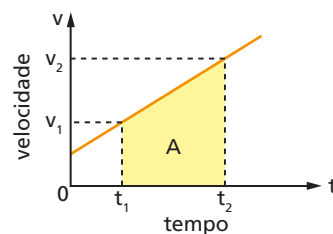


Figura 20. Área sob o gráfico da velocidade.

12. A equação horária da posição (demonstração)

Consideremos uma partícula em movimento com aceleração escalar constante e não nula. Sua velocidade varia com o tempo, como mostra o gráfico da figura 21.

- Ao instante $t_0 = 0$ corresponde a velocidade escalar v_0 (velocidade inicial, indicada no gráfico).
- Para um instante genérico t corresponde uma velocidade v .

A área sombreada do trapézio é numericamente igual ao deslocamento escalar Δs .

$$\Delta s \stackrel{N}{=} \text{área do trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$\Delta s \stackrel{N}{=} \text{área (A)} = \frac{(v + v_0) \cdot \Delta t}{2}$$

$$\text{Mas: } \Delta t = (t - t_0) = (t - 0) = t$$

Então:

$$\Delta s = \frac{1}{2} (v + v_0) \cdot t \quad (1)$$

Lembrando que:

$$v = v_0 + \alpha t \quad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1), vem:

$$\Delta s = \frac{1}{2} (v_0 + \alpha t + v_0) t$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} (2v_0 + \alpha t) \cdot (t)$$

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} (\alpha t^2)$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Lembramos que a equação foi deduzida exclusivamente para o MUV, isto é, para o caso em que a aceleração escalar permanece constante.

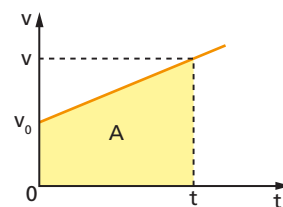
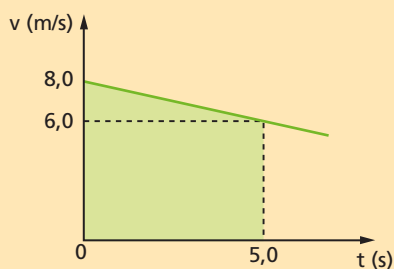


Figura 21. Área sombreada sob o gráfico velocidade \times tempo.

Exercícios de Aplicação

43. Para o diagrama horário da velocidade escalar a seguir, vamos determinar o deslocamento escalar desde o instante inicial do movimento até o instante $t = 5,0$ s.



Resolução:

O deslocamento escalar é calculado pela área sombreada do trapézio:

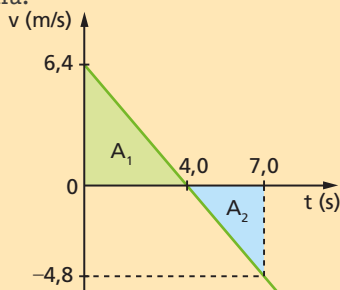
$$\text{área do trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Da figura, tiramos os valores de: $B \stackrel{N}{=} 8,0$ m/s; $b \stackrel{N}{=} 6,0$ m/s; $h \stackrel{N}{=} 5,0$ s

$$\Delta s = \frac{(8,0 + 6,0) \cdot 5,0}{2} = \frac{14,0 \cdot 5,0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 35,0 \text{ m}$$

44. Consideremos um diagrama horário de velocidade em que ocorre mudança de sinal da velocidade escalar num dado instante, como nos mostra a figura.



Determine:

- a velocidade escalar inicial;
- o deslocamento nos primeiros 4,0 s de movimento;
- o deslocamento escalar entre 4,0 s e 7,0 s;
- o instante em que o móvel inverteu o sentido de seu movimento.

Resolução:

- A velocidade escalar inicial é lida diretamente no gráfico e corresponde ao instante $t = 0$. Assim, obtemos:

$$v_0 = 6,4 \text{ m/s}$$

- O deslocamento escalar é numericamente igual à respectiva área sob o gráfico. No caso, cada uma das figuras formadas é um triângulo retângulo e a área se calcula por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Nos primeiros 4,0 s de movimento:

$$\Delta s_1 = \frac{4,0 \cdot 6,4}{2} = \frac{25,6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s_1 = +12,8 \text{ m}$$

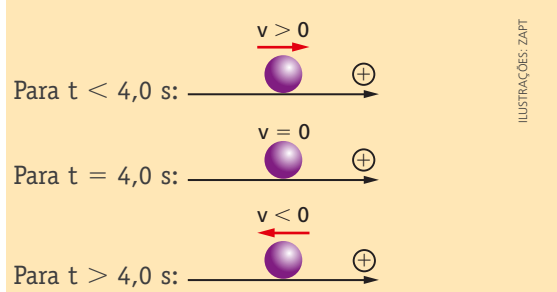
- Entre 4,0 s e 7,0 s:

$$\Delta s_2 = \frac{4,0 \cdot (-4,8)}{2} \Rightarrow \Delta s_2 = \frac{-19,2}{2} \Rightarrow$$

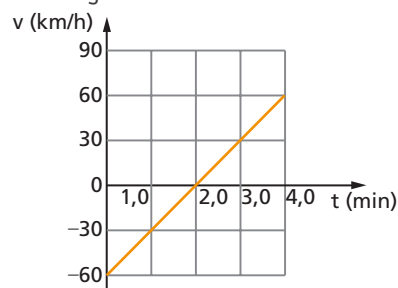
$$\Rightarrow \Delta s_2 = -9,6 \text{ m}$$

Observação: O deslocamento escalar Δs pode ser positivo ou negativo, como vimos no capítulo 4, e o seu sinal está relacionado com o sentido do movimento em relação ao eixo adotado.

- Notemos que até o instante $t = 4,0$ s o móvel possuía velocidade escalar positiva e, a partir desse instante, sua velocidade escalar tornou-se negativa. Logo, concluímos que no instante $t = 4,0$ s ele parou instantaneamente e inverteu o sentido do movimento.



45. Um carro em movimento uniformemente variado percorre um trecho retilíneo de uma estrada, e o diagrama horário de sua velocidade escalar está esboçado na figura.



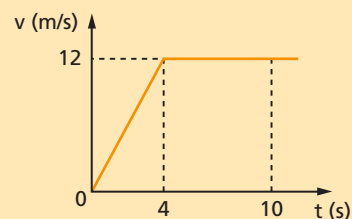
Determine:

- a velocidade escalar inicial;
- o deslocamento escalar para o intervalo de tempo [2,0 min; 4,0 min];
- o deslocamento escalar entre os instantes 1,0 min e 3,0 min;
- o instante de inversão do sentido do movimento.

46. Um móvel percorria uma trajetória retilínea, apresentando uma aceleração escalar de valor absoluto $2,0 \text{ m/s}^2$. Num determinado instante ($t = 0$), seu movimento era progressivo e retardado e sua velocidade escalar tinha módulo $8,0 \text{ m/s}$. Determine os sinais algébricos da velocidade escalar e da aceleração escalar e execute o que se pede.

- Determine o instante em que houve inversão de sentido do movimento.
- Esboce o gráfico da velocidade escalar pelo tempo.

47. Uma partícula partiu do repouso com uma determinada aceleração constante até atingir a velocidade escalar de 12 m/s . A partir desse instante manteve constante a velocidade, como mostra o gráfico. Determine a distância total percorrida até o instante $t = 10 \text{ s}$.



Resolução:

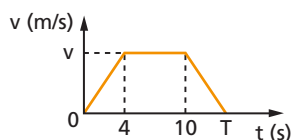
Podemos estender a propriedade da área do gráfico da velocidade vista no MU e no MUV para este caso, em que se combinam os dois tipos de movimentos. Portanto:

$\Delta s = \overset{N}{\text{área sob o gráfico}}$

$$\Delta s = \frac{(b + B) \cdot h}{2} \Rightarrow \Delta s = \frac{(6 + 10) \cdot 12}{2} \text{ (m)}$$

$$\Delta s = \frac{16 \cdot 12}{2} \text{ (m)} \Rightarrow \Delta s = 96 \text{ m}$$

48. Um carro partiu do repouso no instante $t = 0$ e da origem do eixo de abscissas, com aceleração escalar de $4,0 \text{ m/s}^2$. Ao fim de $4,0 \text{ s}$, quando sua velocidade escalar era igual a v , passou a andar em movimento uniforme, até o instante $t_2 = 10 \text{ s}$. A partir desse instante entrou em movimento uniformemente retardado, com aceleração de módulo igual ao da inicial, até parar no instante T . O gráfico velocidade \times tempo ao lado indica o que ocorreu.



Determine:

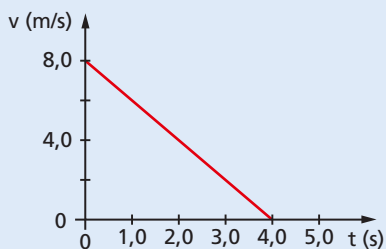
- a) o tempo T ;
- b) a velocidade escalar v ;
- c) a distância total percorrida.

49. Uma partícula, percorrendo o eixo das abscissas, realizou um movimento que pode ser dividido em três eventos: 1- movimento acelerado, 2- movimento uniforme e 3- movimento retardado. No primeiro evento, partiu do repouso no instante $t = 0$, com aceleração constante, atingindo uma velocidade escalar v . No segundo evento, manteve constante a velocidade escalar v durante $8,0 \text{ s}$. No terceiro evento desacelerou de modo uniforme até o repouso, atingindo-o no instante $T = 12 \text{ s}$. Sabe-se que a distância total percorrida foi 50 m .

- a) Construa o gráfico da velocidade escalar pelo tempo e indique os valores dados.
- b) Determine, a partir do gráfico, o valor da velocidade escalar v .
- c) Determine o módulo da aceleração da partícula, sabendo que ele foi o mesmo nos eventos 1 e 3.

Exercícios de Reforço

50. (Vunesp-SP) O gráfico na figura mostra a velocidade escalar de um automóvel em função do tempo, ao se aproximar de um semáforo que passou para o vermelho.



Determine, a partir desse gráfico,

- a) a aceleração escalar do automóvel;
 - b) a distância percorrida pelo automóvel desde $t = 0 \text{ s}$ até $t = 4 \text{ s}$.
51. (FEI-SP) Um automóvel está parado em um semáforo. Quando a luz fica verde o motorista acelera o automóvel a uma taxa constante de $5,0 \text{ m/s}^2$ durante $4,0 \text{ s}$. Em seguida, permanece com velocidade escalar constante durante $40,0 \text{ s}$. Ao avistar outro semáforo vermelho, ele freia

o carro àquela mesma taxa até parar. Qual é a distância total percorrida pelo automóvel? (Sugestão dos autores: construa o gráfico da velocidade pelo tempo.)

52. (UF-RS) Em uma manhã de março de 2001, a plataforma petrolífera P-36, da Petrobrás, foi a pique. Em apenas três minutos, ela percorreu os 1320 metros de profundidade que a separavam do fundo do mar. Suponha que a plataforma, partindo do repouso, acelerou uniformemente durante os primeiros 30 segundos, ao final dos quais sua velocidade escalar atingiu um valor v com relação ao fundo, e que, no restante do tempo, continuou a cair verticalmente, mas com velocidade escalar constante de valor igual a v . Nessa hipótese, qual foi o valor v ? (Sugestão dos autores: construa o gráfico da velocidade pelo tempo.)

- a) $4,0 \text{ m/s}$
- b) $7,3 \text{ m/s}$
- c) $8,0 \text{ m/s}$
- d) $14,6 \text{ m/s}$
- e) $30,0 \text{ m/s}$

13. A velocidade escalar média no MUV

Consideremos uma partícula em MUV: sua aceleração escalar é constante. A velocidade varia conforme o gráfico (fig. 22), ou seja, é uma reta oblíqua. Pode-se deduzir que a velocidade escalar média no intervalo de tempo $[t_1; t_2]$ é simplesmente a média aritmética das duas velocidades, v_1 e v_2 :

$$v_m = \frac{(v_1 + v_2)}{2}$$

Uma maneira simples de se deduzir essa equação é através da área do gráfico da velocidade. Nas figuras 22 e 23 representamos, para o mesmo intervalo de tempo $[t_1; t_2]$, a velocidade escalar instantânea e a velocidade escalar média. As áreas sombreadas de ambos os diagramas horários são iguais ao deslocamento escalar Δs e podem ser igualadas.

Na figura 22:

$$\Delta s = \text{área do trapézio} = \frac{(b + B) \cdot h}{2} = \frac{(v_1 + v_2) \cdot \Delta t}{2}$$

Na figura 23:

$$\Delta s = \text{área do retângulo} = b \cdot h = v_m \cdot \Delta t$$

Igualando as duas áreas:

$$\frac{(v_1 + v_2) \cdot \Delta t}{2} = v_m \cdot \Delta t$$

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

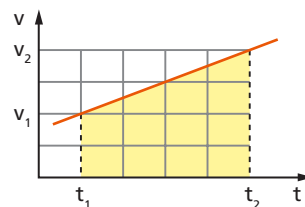


Figura 22. Velocidade escalar instantânea no MUV.

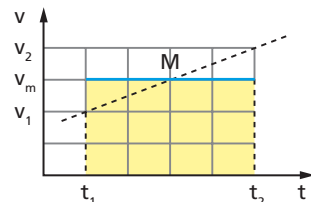


Figura 23. Velocidade escalar média.

IMPORTANTE!

Essa equação da velocidade escalar média é válida somente para o caso em que a aceleração escalar é constante, isto é, no MUV.

Exercícios de Aplicação

53. Uma partícula desloca-se em movimento retilíneo e uniformemente acelerado, de um ponto A para um ponto B, num intervalo de tempo de 8,0 s. Sabemos que ela passou por A com velocidade escalar 40 m/s e por B com 44 m/s. Determine:

- a distância entre A e B;
- a aceleração escalar da partícula.

Resolução:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad v_m &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ v_m &= \frac{v_A + v_B}{2} \end{aligned} \right\} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_A + v_B}{2} \Rightarrow$$

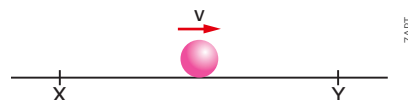
$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{8,0} = \frac{40 + 44}{2} \Rightarrow \Delta s = 336 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} b) \quad v &= v_0 + \alpha t \\ 44 &= 40 + \alpha \cdot 8,0 \\ 4,0 &= 8,0\alpha \\ \alpha &= 0,5 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

54. Uma partícula percorre uma trajetória retilínea com aceleração escalar constante. Tendo partido da posição A com velocidade escalar inicial v_0 , chegou à posição B com velocidade nula. O percurso AB tem 200 m de comprimento e o intervalo de tempo decorrido foi de 20 s. Determine:

- a velocidade escalar inicial;
- o valor da aceleração escalar.

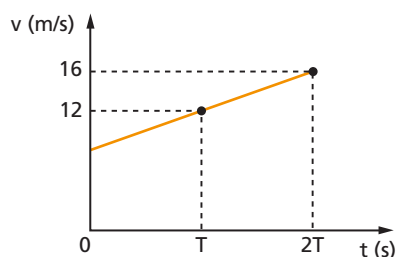
55. Uma partícula saiu do ponto X, onde estava em repouso, e atingiu um ponto Y com velocidade escalar v , mantendo constante a sua aceleração escalar α .



Determine:

- a velocidade escalar média entre X e Y;
 - a distância percorrida entre X e Y;
 - o tempo de percurso entre X e Y.
- Dê suas respostas em função de v e α .

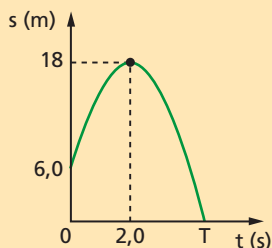
56. O deslocamento escalar de uma partícula entre os instantes T e $2T$ foi de 140 m.



Determine:

- o valor de T ;
- a velocidade escalar inicial.

57. Uma partícula partiu da posição $s_0 = 6,0$ m no instante inicial $t = 0$, com aceleração escalar constante. No instante $t_1 = 2,0$ s, sua posição era $s_1 = 18$ m.



Determine:

- a velocidade escalar inicial;
- a aceleração escalar do movimento.

Resolução:

- Observemos o lado esquerdo da parábola: o movimento é retardado e a velocidade escalar no instante $t_1 = 2,0$ s vale zero. O ponto de inversão de sentido do movimento é o vértice da parábola. Temos, então:

$$t = 0 \Rightarrow s_0 = 6,0 \text{ m} \Rightarrow v_0 \text{ (desconhecida)}$$

$$t_1 = 2,0 \text{ s} \Rightarrow s_1 = 18 \text{ m} \Rightarrow v_1 = 0 \text{ (vértice)}$$

$$\Delta t = 2,0 - 0 = 2,0 \text{ s e } \Delta s = 18 - 6,0 = 12 \text{ m}$$

Sendo a velocidade escalar média calculada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_0 + v_1}{2} \Rightarrow \frac{12}{2,0} = \frac{v_0 + 0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = 12 \text{ m/s}$$

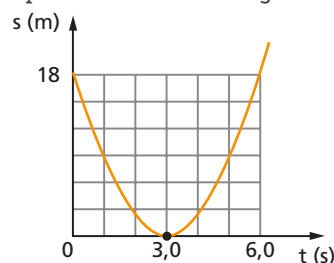
- Usemos a equação da velocidade para determinar a aceleração escalar:

$$v = v_0 + \alpha t$$

$$0 = 12 + \alpha \cdot 2,0$$

$$2,0\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -6,0 \text{ m/s}^2$$

58. Uma partícula, em movimento uniformemente variado, é freada até o repouso, quando então se inverte o sentido do movimento. O gráfico de sua velocidade com o tempo está mostrado na figura.



Determine:

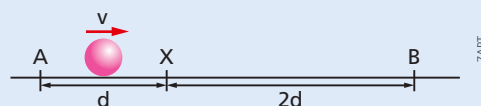
- o instante da inversão de sentido;
- a velocidade escalar inicial;
- a aceleração escalar do movimento.

59. Um móvel está em movimento uniformemente retardado. A respeito de seu movimento podemos afirmar:

- A velocidade escalar média entre dois instantes quaisquer pode ser calculada pela média aritmética entre as duas velocidades escalares instantâneas correspondentes aos dois instantes.
- A sua trajetória é uma parábola.
- No instante da inversão de sentido do movimento, a aceleração escalar é nula.
- A sua velocidade é negativa.
- A sua aceleração é negativa.

Exercícios de Reforço

60. Uma partícula partiu do repouso da posição A e adquiriu um movimento retilíneo de aceleração escalar constante desde A até X, aonde chegou com velocidade escalar v . Da posição X até B, modificou a sua aceleração, mas se manteve em movimento uniformemente retardado, parando na posição B.



Determine:

- o tempo de percurso entre A e X;
 - o tempo de percurso entre X e B;
 - a velocidade escalar média entre A e B.
- Dê suas respostas em função de v e d .

61. (OBF-Brasil) Um automóvel esportivo parte do repouso e atinge a velocidade escalar de 30 m/s após acelerar uniformemente durante um intervalo de tempo de 10 s.

- Qual a distância percorrida pelo automóvel durante este intervalo de tempo?
- Qual é a velocidade escalar média do carro durante este intervalo de tempo?

62. (Unesp-SP) Um veículo de corrida parte do repouso e, mantendo aceleração constante, percorre 400 m em linha reta num tempo de 5 s. Determine:

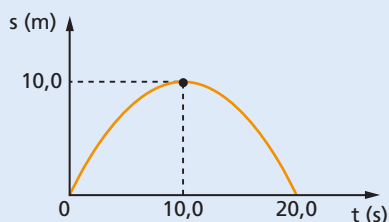
- a velocidade ao final dos 400 m;
- o tempo que o carro levou para percorrer os primeiros 200 m.

63. Um carro parte do repouso e atinge a velocidade escalar de 108 km/h, após percorrer 150 m com aceleração escalar constante.

Calcule:

- o valor da aceleração escalar;
- o tempo gasto para percorrer os 150 m.

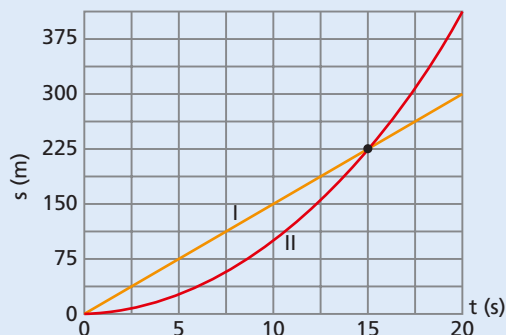
64. Um móvel descreve uma trajetória retilínea com aceleração escalar constante. O gráfico representa a posição do móvel em função do tempo durante um intervalo de tempo de 20,0 s.



Determine:

- o instante da inversão de sentido;
- a velocidade escalar inicial;
- a velocidade escalar final, para $t = 20,0$ s.

65. (Unesp-SP) Os movimentos de dois veículos, I e II, estão registrados nos gráficos da figura.



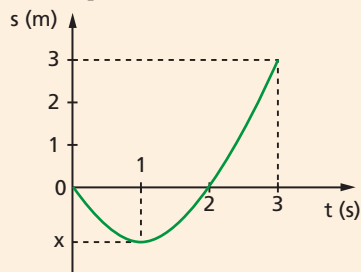
Sendo os movimentos retilíneos, a velocidade do veículo II no instante em que alcança I é:

- 15 m/s
- 20 m/s
- 25 m/s
- 30 m/s
- 35 m/s

(Sugestão dos autores: admita que o gráfico II seja um arco de parábola com o vértice na origem.)

Exercícios de Aprofundamento

66. O diagrama horário das posições de um ponto material que se movimenta numa trajetória retilínea está representado na figura abaixo e o gráfico é uma parábola.

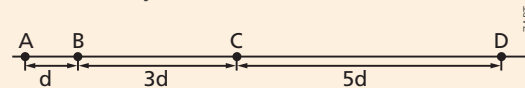


Determine:

- as velocidades escalares nos instantes $t_0 = 0$ e $t_2 = 2$ s;

- a distância total percorrida entre os instantes $t_0 = 0$ e $t_2 = 2$ s;
- a equação horária das posições.

67. Uma partícula percorreu a trajetória da figura com aceleração escalar constante.



Tendo passado pela posição B com velocidade escalar v e pela posição D com velocidade $3v$, determine:

- a aceleração escalar;
- a velocidade escalar em A;
- a velocidade escalar em C.

68. (Vunesp-SP) Uma composição de metrô deslocava-se com a velocidade máxima permitida de 72 km/h, para que fosse cumprido o horário estabelecido para a chegada à estação A. Por questão de conforto e segurança dos passageiros, a aceleração (e desaceleração) máxima permitida, em módulo, é $0,8 \text{ m/s}^2$. Experiente, o condutor começou a desaceleração constante no momento exato e conseguiu parar a composição corretamente na estação A, no horário esperado. Depois de esperar o desembarque e o embarque dos passageiros, partiu em direção à estação B, a próxima parada, distante 800 m da estação A. Para percorrer esse trecho em tempo mínimo, impôs à composição a aceleração e desaceleração máximas permitidas, mas obedeceu à velocidade máxima permitida. Utilizando as informações apresentadas, e considerando que a aceleração e a desaceleração em todos os casos foram constantes, calcule:

- a distância que separava o trem da estação A, no momento em que o condutor começou a desacelerar a composição;
- o tempo gasto para ir da estação A até a B.

69. (Fuvest-SP) Um carro viaja com velocidade de 90 km/h (ou seja, 25 m/s) num trecho retilíneo de uma rodovia quando, subitamente, o motorista vê um animal parado na sua pista. Entre o instante em que o motorista avista o animal e aquele em que começa a frear, o carro percorre 15 m. Se o motorista frear o carro à taxa constante de $5,0 \text{ m/s}^2$, mantendo-o em sua trajetória retilínea, ele só evitará atingir o animal, que permanece imóvel durante todo o tempo, se o tiver percebido a uma distância de, no mínimo,

- 15 m
- 31,25 m
- 52,5 m
- 77,5 m
- 125 m

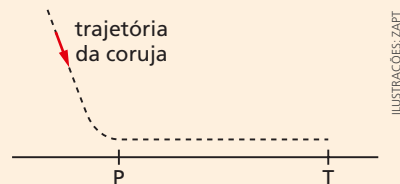
70. (ITA-SP) Um móvel A parte da origem O, com velocidade inicial nula, no instante $t_0 = 0$ e percorre o eixo Ox com aceleração escalar constante a . Após um intervalo de tempo Δt , contado a partir da saída de A, um segundo móvel B, parte de O, do repouso, com uma aceleração escalar constante igual a $n \cdot a$, sendo $n > 1$. B alcançará A no instante:

- $t = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} + 1 \right) \Delta t$
- $t = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} - 1 \right) \Delta t$
- $t = \left(\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} \right) \Delta t$
- $t = \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}} \right) \Delta t$
- $t = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} \right) \Delta t$

71. (Unicamp-SP) Para se dirigir prudentemente, recomenda-se manter do veículo da frente uma distância mínima de um carro de 4,0 m para cada 16 km/h. Um carro segue um caminhão em uma estrada, ambos a 108 km/h.

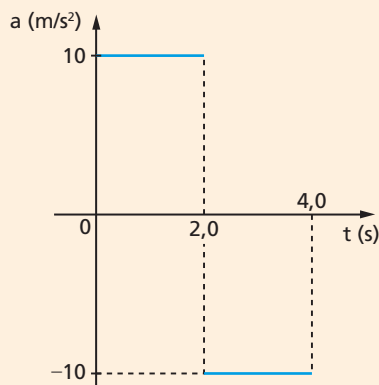
- De acordo com a recomendação acima, qual deveria ser a distância mínima separando os dois veículos?
- O carro mantém uma separação de apenas 10 m quando o motorista do caminhão freia bruscamente. O motorista do carro demora 0,50 segundo para perceber a freada e pisar em seu freio. Ambos os veículos percorreriam a mesma distância até parar, após acionarem os seus freios. Mostre numericamente que a colisão é inevitável.

72. (Vunesp-SP) Um rato, em sua ronda à procura de alimento, está parado em um ponto P, quando vê uma coruja espreitando-o. Instintivamente, ele corre em direção à sua toca T, localizada a 42 m dali, em movimento retilíneo uniforme e com velocidade $v = 7 \text{ m/s}$. Ao ver o rato, a coruja dá início à sua caçada, em um mergulho típico, como o mostrado na figura. Ela passa pelo ponto P, 4 s após a partida do rato e a uma velocidade de 20 m/s.



- Considerando a hipótese de sucesso do rato, em quanto tempo ele atinge a sua toca?
- Qual deve ser a aceleração média da coruja, a partir do ponto P, para que ela consiga capturar o rato no momento em que ele atinge a entrada de sua toca?

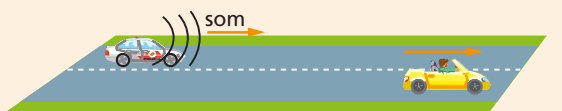
73. (UF-ES) Uma partícula, partindo do repouso, ao longo de uma trajetória retilínea, é submetida a acelerações escalares, conforme mostra o gráfico $a \times t$ da figura.



- Construa o gráfico da velocidade escalar da partícula em função do tempo.
 - Calcule a distância percorrida pela partícula no intervalo de 0 a 4,0 s.
 - Calcule a velocidade escalar média da partícula entre os instantes 0 e 4,0 s.
74. (ITA-SP) Uma partícula, partindo do repouso, percorre, no intervalo de tempo t , uma distância D . Nos intervalos de tempo seguintes, todos iguais a t , as respectivas distâncias percorridas são iguais a $3D$, $5D$, $7D$ etc. A respeito desse movimento pode-se afirmar que:
- A distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento cresce exponencialmente com o tempo.
 - a velocidade da partícula cresce exponencialmente com o tempo.

- A distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.
- A velocidade da partícula é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.
- Nenhuma das opções acima está correta.

75. Um carro conversível, dotado de uma aceleração constante de $4,0 \text{ m/s}^2$ e velocidade acima do limite permitido no local, passa ao lado de um carro de polícia estacionado na lateral da rodovia. Estando o carro conversível a 268 m adiante da polícia, com velocidade instantânea de módulo 180 km/h , o policial aciona a sirene com um breve toque de alerta. Decorridos 2,5 s, o policial emite um segundo sinal de alerta.



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Sabendo que a máxima velocidade do carro é de 216 km/h e que a velocidade do som no local é de 320 m/s , determine:

- o intervalo de tempo decorrido entre a emissão do primeiro toque de sirene e o instante em que o motorista do carro o ouve;
- a posição do carro no instante em que seu motorista ouve o primeiro toque de sirene;
- o intervalo de tempo entre o primeiro e o segundo toque de sirene ouvido pelo motorista do carro.

(Sugestão dos autores: adote um eixo de abscissas sobre a rodovia e escolha a origem das abscissas. Faça também um gráfico da velocidade do carro.)

Movimento vertical no vácuo

1. Queda livre

Um dos exemplos mais comuns de movimento com aceleração (aproximadamente) constante é o da queda de um corpo atraído pela força gravitacional da Terra. A queda de uma xícara na cozinha, de um parafuso na oficina, de uma bolinha de aço no laboratório são exemplos do nosso cotidiano.

Em condições ideais, em que possa ser desprezada a resistência do ar, bem como qualquer outro tipo de resistência, esse movimento é chamado **queda livre**.

O movimento de queda de um corpo sempre despertou a atenção de físicos e filósofos desde o século IV a.C. Várias teorias não consistentes surgiram na tentativa de explicá-lo, mas somente por volta de 1590 o físico Galileu Galilei apresentou, pela primeira vez, uma teoria satisfatória sobre a queda dos corpos. Ele afirmou que um corpo cai com aceleração constante, independentemente de seu peso. Para demonstrar sua teoria, Galileu abandonou dois corpos de pesos diferentes de um mesmo local, e eles chegaram juntos ao solo. Conta a lenda que Galileu teria usado a Torre de Pisa para fazer seus experimentos, aproveitando-se de sua inclinação.

O experimento de Galileu pode ser realizado num laboratório de Física usando-se um tubo cilíndrico oco. Com uma bomba de vácuo, o ar é extraído do tubo, obtendo-se um bom vácuo. Colocando o tubo na posição vertical, deixam-se cair, a partir de sua base superior, simultaneamente, dois objetos, que chegam juntos à base inferior (fig. 1). Eles foram igualmente acelerados pela força gravitacional e adquiriram um movimento de queda livre. O fato de chegarem juntos ao final do tubo comprova que as acelerações adquiridas foram iguais.

A aceleração constante de um corpo em queda livre denomina-se **aceleração da gravidade**, e o seu módulo representa-se pela letra **g** .

O valor de g varia de um local para outro, de acordo com a latitude e com a altitude. No nível do mar, na latitude de 45° , a aceleração da gravidade é: **$g = 9,80665 \text{ m/s}^2$** . Devido a essa variação, usaremos apenas dois Algarismos significativos: **$g = 9,8 \text{ m/s}^2$** . Na resolução de exercícios costuma-se considerar **$g = 10 \text{ m/s}^2$** .

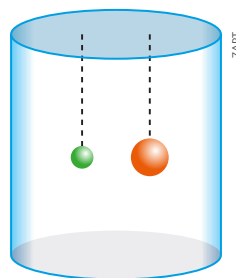


Figura 1. Queda livre de dois objetos no tubo de vácuo.

1. Queda livre
2. Lançamento vertical para cima
3. Gráficos do movimento vertical no vácuo

DICA

Como g é o módulo de uma grandeza vetorial, ele sempre será um número positivo.

Equacionamento da queda livre

Como vimos, o movimento de um corpo em queda livre tem aceleração constante, sua trajetória é retilínea e vertical e ele é uniformemente acelerado. O corpo poderá ser abandonado ou lançado verticalmente para baixo com velocidade inicial v_0 .

Vamos convencionar que, se o corpo foi abandonado, isso já significa que sua velocidade inicial é nula.

Para equacionarmos o movimento de queda livre precisamos orientar a sua trajetória e adotar uma origem. Na figura 2, a trajetória está orientada para baixo e a origem foi tomada junto ao ponto de lançamento. A aceleração escalar será positiva e as velocidades durante a queda serão positivas.

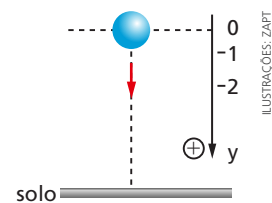


Figura 2. Orientação da trajetória na queda livre.

Equação horária da velocidade

Usaremos a equação do MUV: $v = v_0 + \alpha \cdot t$, sendo que $\alpha = +g$.

A equação da velocidade fica:

$$v = v_0 + g \cdot t$$

Equação horária das ordenadas ou das posições

Usaremos a equação horária do MUV e faremos as seguintes substituições:

$$\left. \begin{array}{l} s_0 = 0 \\ s = y \\ \alpha = +g \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2 \\ y = 0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 \Rightarrow y = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{array}$$

Na maioria dos exercícios, o corpo é **abandonado** em queda livre, isto é, parte do repouso e sua velocidade escalar inicial é nula ($v_0 = 0$). As equações acima se simplificam:

$$v = g \cdot t$$

$$y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Exercícios de Aplicação

1. Um corpo é abandonado em queda livre e em 3,0 s atinge o solo. No local, a aceleração da gravidade é constante e tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine:

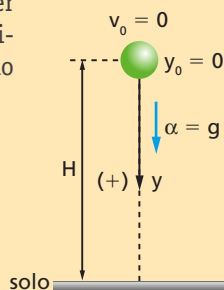
- a altura inicial de onde foi abandonado o corpo;
- a velocidade com que ele atingiu o solo.

Resolução:

- a) Vamos orientar a trajetória para baixo, como na figura a seguir, e teremos:

- $\alpha = +g = +10 \text{ m/s}^2$
- $v_0 = 0$ (o corpo ter sido abandonado significa que ele partiu do repouso)

$$\begin{aligned} y &= \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow H &= \frac{10}{2} (3,0)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow H &= 45 \text{ m} \end{aligned}$$



- b) Para o cálculo da velocidade com que o corpo atinge o solo, faremos:

$$v = g \cdot t \Rightarrow v = 10 \cdot 3,0 \Rightarrow v = 30 \text{ m/s}$$

2. Uma bolinha de ferro foi lançada verticalmente para baixo com velocidade de módulo 4,0 m/s, atingindo o solo em 2,0 s. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e orientando a trajetória para baixo, determine:

- as equações horárias da velocidade e da ordenada (posição);
- o módulo da velocidade da bolinha ao atingir o solo;
- a altura inicial do lançamento.

3. Uma bala de canhão, de forma esférica, foi lançada verticalmente para baixo da sacada de um dos anéis da Torre de Pisa e adquiriu um movimento de queda livre. Sendo de 10 m/s a velocidade escalar inicial e adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a altura do anel em relação ao solo, sabendo que o movimento durou apenas 2,0 s.

Resolução:

Orientando a trajetória para baixo, temos:
 $v_0 = 10 \text{ m/s}$; $\alpha = g = 10 \text{ m/s}^2$

$$y = v_0 t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$$

$$y = 10t + \frac{10}{2} \cdot t^2 \Rightarrow y = 10t + 5,0t^2$$

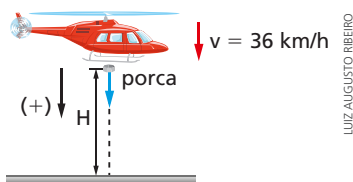
Substituindo o tempo dado, $t = 2,0 \text{ s}$, e fazendo $y = H$ (altura do anel), obtemos:

$$H = 10 \cdot 2,0 + 5,0 \cdot (2,0)^2$$

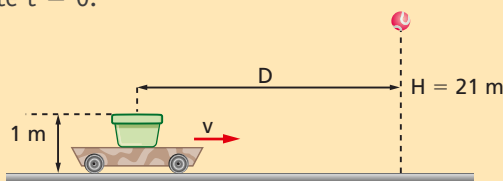
$$H = 20 + 20 \Rightarrow H = 40 \text{ m}$$

O anel da torre está a 40 m do solo. Apenas por curiosidade, a Torre de Pisa tem aproximadamente 52 m de altura.

4. Uma criança deixa cair, a partir do repouso, um pequeno brinquedo pesado da janela de um edifício a 20 m de altura em relação à calçada. O brinquedo adquire um movimento retilíneo vertical de queda livre. Oriente a trajetória para baixo, tome a janela como origem das ordenadas, admita que o brinquedo caiu da janela no instante $t = 0$ e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- a) Escreva as equações horárias do movimento.
 b) Determine o instante em que o brinquedo atingiu a calçada.
 c) Determine a velocidade com que ele chegou ao solo.
5. Um helicóptero desce verticalmente em movimento uniforme com velocidade de módulo 36 km/h. Quando se encontrava a uma altura H do solo, escapou de sua "lataria" uma porca de aço. Em 6,0 s ela chegou ao solo. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e sendo desprezível a resistência do ar, determine a altura H .



6. Abandona-se uma bolinha de tnis em queda livre com a intenção de que ela caia exatamente dentro de um pequeno vaso sobre um carrinho. Este se desloca para a direita em MRU, aproximando-se da reta vertical (trajetória da bolinha) com velocidade escalar $v = 4 \text{ m/s}$. Admita que a figura nos mostre a posição dos corpos no instante $t = 0$.

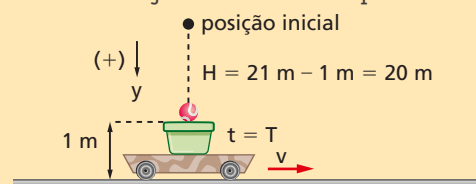


Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a) o instante T em que o vaso deve chegar à reta vertical, que compõe a trajetória da bolinha;
 b) a distância D indicada.

Resolução:

Orientemos a trajetória da bolinha para baixo.



- a) A equação horária das posições da bolinha é dada por:

$$y = v_0 t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$$

$$\text{Temos: } \alpha = g = 10 \text{ m/s}^2; v_0 = 0$$

$$y = 0 + \frac{10}{2} \cdot t^2 \Rightarrow y = 5t^2$$

A bolinha deverá percorrer apenas 20 m para que se tenha sucesso total no evento. Portanto, façamos na equação horária $y = 20 \text{ m}$ e chamaremos o instante final de T :

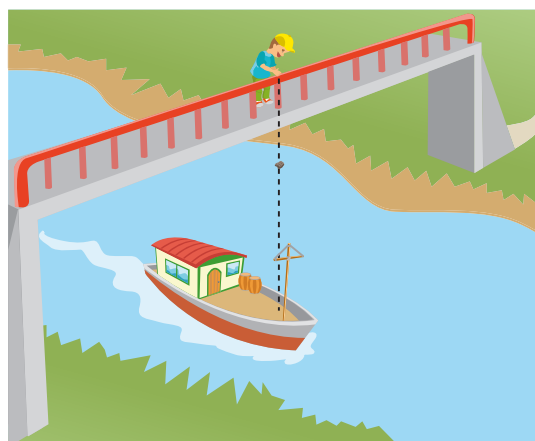
$$20 = 5T^2$$

$$T^2 = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow T = \sqrt{4} \Rightarrow T = 2 \text{ s}$$

- b) O carrinho está em MRU com velocidade escalar $v = 4 \text{ m/s}$:

$$D = v \cdot T \Rightarrow D = 4 \cdot 2 \Rightarrow D = 8 \text{ m}$$

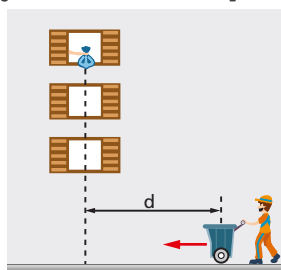
7. Um garoto, de cima de uma ponte, por brincadeira, deixa cair um pedregulho bem no instante em que a proa do barco aponta por baixo da ponte, na vertical que passa pela sua mão. O barco está em movimento retilíneo uniforme, numa trajetória ortogonal ao beiral da ponte. A altura da ponte é de 20 m acima da proa do barco, e o pedregulho caiu dentro do barco a 180 cm do ponto visado. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a velocidade do barco.



8. Um lixeiro empurra o seu carrinho em movimento retilíneo uniforme, de trajetória paralela à parede de um edifício, aproximando-se da vertical que passa pelas janelas dos apartamentos. Pedrinho, morador do terceiro andar, em vez de descer até a calçada e levar o seu saquinho de lixo até o carrinho, resolveu testar os seus conhecimentos de Física e, da sua janela, acertar a boca do carrinho que se aproximava, largando-o em queda livre. O carrinho tem 80 cm de altura e a janela de Pedrinho fica a 17 m do chão. Sabemos que a velocidade escalar do carrinho é 1,5 m/s. Despreze a resistência do ar e também a largura da boca do carrinho. Para que Pedrinho tenha sucesso em seu experimento, a distância d , entre o carrinho e a vertical que passa pelas janelas, deverá ser aproximadamente de:

- a) 3,0 m
b) 2,7 m
c) 2,2 m
d) 1,8 m
e) 1,2 m

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$



LUÍZ AUGUSTO REBEIRO

9. Uma pequena esfera de aço foi lançada verticalmente para baixo, com velocidade de módulo 4,0 m/s, num local onde se pode desprezar a resistência do ar. Tendo percorrido uma distância h , medida a partir do ponto de lançamento, sua velocidade passou a ter módulo de 8,0 m/s. O módulo da aceleração da gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine a distância h .

Resolução:

Como não foi fornecido o tempo, vamos usar a equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta y$$

Sendo $\alpha = g$, a equação fica:

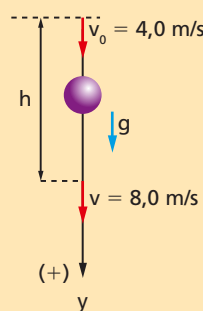
$$v^2 = v_0^2 + 2g \cdot \Delta y$$

$$v_0 = 4,0 \text{ m/s}; v = 8,0 \text{ m/s}; g = 10 \text{ m/s}^2; \Delta y = h$$

$$8,0^2 = 4,0^2 + 2 \cdot 10 \cdot h$$

$$64 = 16 + 20h \Rightarrow 64 - 16 = 20h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{48}{20} \Rightarrow h = 2,4 \text{ m}$$



ZAPT

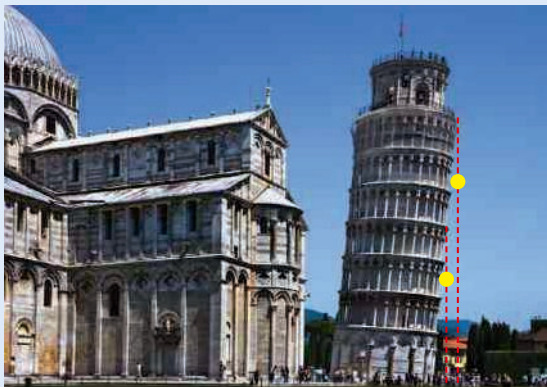
10. Uma partícula está em queda livre vertical. Num dado instante t_1 sua velocidade tem módulo $v_1 = 6,0 \text{ m/s}$ e num instante t_2 o módulo é v_2 , tendo percorrido nesse intervalo de tempo uma distância $\Delta y = 5,4 \text{ m}$. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine v_2 .

Exercícios de Reforço

11. (UF-PE) Uma esfera de aço de 300 g e uma esfera de plástico de 60 g de mesmo diâmetro são abandonadas, simultaneamente, do alto de uma torre de 60 m de altura. Qual a razão entre os tempos que levarão as esferas até atingirem o solo? (Despreze a resistência do ar.)
- a) 5,0 c) 1,0 e) 0,2
b) 3,0 d) 0,5
12. (PUC-RJ) Queremos calcular a altura de um edifício tal que, se uma pedra é deixada cair do seu topo, ela terá a velocidade de módulo 72 km/h ao atingir o solo, desprezados os efeitos da resistência do ar. Se cada andar é aproximadamente equivalente a 2,5 m, o número de andares deste edifício deve ser ($g = 10,0 \text{ m/s}^2$):
- a) 104 c) 26 e) 8
b) 52 d) 13

13. Um estudante de Física queria medir o pé-direito de seu apartamento e, como não possuía uma trena, fez o seguinte experimento: deixou cair, a partir do teto, uma bolinha de borracha maciça, a qual atingiu o solo em aproximadamente 0,8 s (tempo estimado). Em seguida, realizou um segundo experimento para descobrir em que andar ele se encontrava: debruçou-se no parapeito da janela e abandonou a sua bolinha de borracha em queda livre, medindo o tempo de queda até o solo, obtendo aproximadamente 3,2 s. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:
- a) a medida do pé-direito do apartamento;
b) o andar em que se encontrava, sabendo que a contagem se faz assim: térreo, 1º andar, 2º andar, etc. Admita que todos os andares têm o mesmo pé-direito.
- (Observação dos autores: pé-direito é a altura de um cômodo, medida do piso ao teto.)

14. Do alto da Torre de Pisa, Galileu abandonou da sacada de altura H uma bala de canhão B_1 , a qual despencou em queda livre até o solo. Nesse mesmo instante, o seu aluno Adamo também abandonou, de uma segunda sacada da torre, de altura h , uma outra bala de canhão B_2 , a qual também despencou em queda livre. Entre a queda da bala B_1 e a queda da bala B_2 foi constatada uma diferença de tempo de 0,60 s.

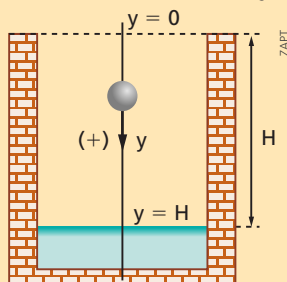


Sabendo que $h = 0,64H$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, podemos afirmar que os tempos de queda das balas B_1 e B_2 são, respectivamente:

- a) 3,0 s e 2,4 s d) 2,4 s e 3,0 s
b) 3,0 s e 0,6 s e) 2,4 s e 2,8 s
c) 2,4 s e 2,0 s
15. Uma bolinha de aço é abandonada em queda livre na boca de um poço por um físico que pretende determinar a sua profundidade. Entre o início do movimento da bolinha e o retorno do som decorreu um intervalo de tempo de 9,0 s. Sendo conhecidos o módulo da aceleração da gravidade ($g = 10 \text{ m/s}^2$) e a velocidade do som no ar (320 m/s), determine a profundidade do poço.

Resolução:

Vamos supor que a bolinha esteja percorrendo um eixo de ordenadas (y) orientado para baixo. A origem do eixo está na boca do poço. A linha-d'água corta o eixo na ordenada $y = H$.



- 1º) Para a queda livre da bolinha, temos:

$$y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Sendo T o instante em que a bolinha atinge a água, temos:

$$t = T \Rightarrow y = H$$

$$H = \frac{g}{2} \cdot T^2$$

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e substituindo-se na equação obtida:

$$H = \frac{10}{2} \cdot T^2 \Rightarrow H = 5,0T^2 \quad (1)$$

- 2º) O retorno do som é um MRU de velocidade $v = 320 \text{ m/s}$. O intervalo de tempo gasto pelo som para retornar à boca do poço é $\Delta t = 9,0 - T$.

$$\Delta y = v_s \cdot \Delta t$$

$$H = 320 \cdot (9,0 - T) \quad (2)$$

Igualando as equações (1) e (2), temos:

$$5,0T^2 = 320 \cdot (9,0 - T)$$

$$5,0T^2 = 2880 - 320T$$

$$5,0T^2 + 320T - 2880 = 0$$

Essa equação admite uma raiz positiva ($T = 8,0 \text{ s}$) e outra negativa.

Substituindo esse valor na equação (2), temos:

$$H = 320 \cdot (9,0 - 8,0) \Rightarrow H = 320 \text{ m}$$

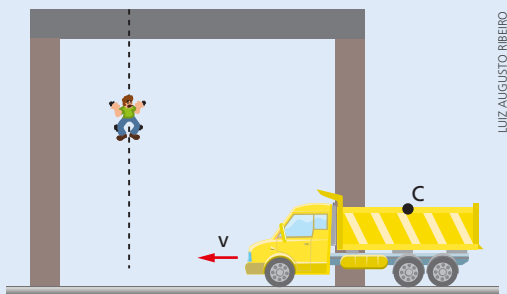
16. Lançamos verticalmente para o fundo de um poço uma pedrinha com velocidade escalar $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Admita que ela tenha queda livre durante o seu movimento e que o som retorne em MU com velocidade de 320 m/s. Tendo o poço uma profundidade de 160 m e sendo conhecido o módulo da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a) o tempo de queda da pedrinha;
b) o intervalo de tempo gasto pelo som para chegar à boca do poço;
c) o intervalo de tempo total decorrido entre o lançamento da pedrinha e o retorno do som.

17. Um corpo é abandonado em queda livre do topo de um edifício de 205 m de altura. Supondo a aceleração da gravidade constante, de módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$, e desprezando a resistência do ar, a distância percorrida pelo corpo durante o quinto segundo é:

- a) 125 m d) 5 m
b) 80 m e) 45 m
c) 205 m

18. (Fuvest-SP) Numa filmagem, no exato instante em que um caminhão passa por uma marca no chão, um dublê se larga de um viaduto para cair dentro de sua caçamba. A velocidade v do caminhão é constante e o dublê inicia sua queda a partir do repouso, de uma altura de 5 m da caçamba, que tem 6 m de comprimento. A velocidade ideal do caminhão é aquela em que o dublê cai bem no centro da caçamba (C), mas a velocidade real v do caminhão poderá ser diferente e ele cairá mais à frente ou mais atrás do centro da caçamba.



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

Para que o dublê caia dentro da caçamba, v pode diferir da velocidade ideal, em módulo, no máximo:

- a) 1 m/s c) 5 m/s e) 9 m/s
b) 3 m/s d) 7 m/s

19. (Udesc-SC) Um programa de computador simula o movimento de corpos em queda livre. Uma bola é solta de uma ponte 80,0 m acima da superfície da água. Um segundo depois, uma segunda bola é lançada verticalmente para baixo, com uma velocidade inicial v_0 . Ambas as bolas tocam a água ao mesmo tempo. Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. Com relação a essa descrição, determine:

- a) o tempo de queda de cada bola;
b) a velocidade escalar da primeira bola, no instante em que toca a água;
c) uma terceira bola é lançada verticalmente para baixo, a partir da mesma ponte, com velocidade escalar inicial v_{3i} e toca a água em 2,0 s. Qual a velocidade escalar inicial v_{3i} da terceira bola?

20. (UF-AL) Uma pequena esfera de aço é abandonada, a partir do repouso, da altura de 180 m, caindo livremente sob a ação da gravidade, com aceleração de módulo 10 m/s^2 . A distância percorrida pela esfera na segunda metade do tempo de queda é, em metros,

- a) 45 d) 135
b) 90 e) 150
c) 120

Leitura

Galileu – A queda livre e a lenda da torre inclinada de Pisa

Relata-nos a história da Física que Aristóteles teria sido o primeiro a enunciar uma lei para a queda livre dos corpos: “os objetos pesados caem mais depressa que os mais leves”. Por mais de dois mil anos prevaleceu a ideia de Aristóteles, ainda que alguns pensadores comessem a discordar dela. Galileu foi um deles.

Nascido na cidade de Pisa, na Itália, em 1564, Galileu Galilei foi um dos mais importantes cientistas do Renascimento. Fez o curso de Medicina na Universidade de Pisa, atendendo à vontade do pai, mas dedicou-se à sua vocação: Matemática e Física.

Entre as suas diversas contribuições às Ciências, destacamos a criação do método científico, segundo o qual toda teoria, para ter validade, precisaria ser testada experimentalmente e acompanhada de uma demonstração. Qualquer contraexemplo invalidaria a teoria. Galileu foi defensor do sistema heliocêntrico, no qual os planetas giram em torno do Sol, e não em torno da Terra. Ficou famoso pela construção de suas lunetas (não foi o inventor, apenas aperfeiçoou-as). Reorganizou e demonstrou o estudo da queda livre e dos movimentos uniformemente acelerados. Escreveu um tratado intitulado *Diálogo sobre duas novas ciências*, no qual apresenta seus estudos sobre movimento. Esse livro de Galileu é considerado o marco zero para o estudo da Dinâmica, que veremos a partir do capítulo 12. Todo o acervo de Galileu está guardado no Museu de História da Ciência, na cidade de Florença, na Itália.

No entanto, o que tornou Galileu bastante conhecido foi a associação de seu nome à Torre de Pisa. Conta-se que Galileu teria se valido da inclinação da Torre (fig. a) para realizar alguns experimentos de queda livre. O local era um verdadeiro laboratório a céu aberto. Galileu teria usado balas de canhão (bolas de ferro), deixando-as

cair do alto da torre, praticamente em queda livre, para estudar o seu movimento. Ao comparar os seus tempos de queda, verificou que eles eram iguais. Como Galileu não tinha meios de medir o tempo com precisão, soltava duas bolas de cada vez, as quais chegavam sempre juntas ao solo, o que demonstrava essa propriedade.

Provavelmente, a história da Torre de Pisa não passe de uma lenda, pois não temos nenhum documento oficial que a comprove.

Por que Galileu usava bolas de ferro? Na época de Galileu não havia meios de realizar os experimentos no vácuo, então ele contornou esse problema usando objetos pesados (balas de canhão, esféricas, de ferro), de tal modo que a resistência do ar praticamente não interferia na aceleração do movimento. Podemos considerar o movimento vertical de uma dessas bolas como sendo uma queda livre.

Como a medição de tempo na queda livre era muito complicada, devido à velocidade do corpo, ele construiu um plano inclinado no qual a bola descia com menor velocidade, facilitando então a medida do tempo.

Através de seus experimentos com o plano inclinado, Galileu descobriu que, em movimentos de aceleração constante, tendo o móvel partido do repouso, as distâncias percorridas em intervalos de tempo iguais e consecutivos eram proporcionais aos números ímpares: (1), (3), (5), (7), ..., etc. Isso é uma progressão aritmética (PA) de números ímpares e razão 2.

Por outro lado, medindo essas distâncias a partir da posição inicial, verificou que elas eram proporcionais a (1), (4), (9), (16), ... (veja na fig. b):

$$(1) = 1$$

$$(1 + 3) = 4$$

$$(1 + 3 + 5) = 9$$

$$(1 + 3 + 5 + 7) = 16$$

A sequência (1), (4), (9), (16)... é equivalente a $(1)^2$, $(2)^2$, $(3)^2$, $(4)^2$...

Por outro lado, (1), (2), (3), (4)... representa o tempo naquela posição.

Com isso, Galileu concluiu que, no movimento de aceleração escalar constante, partindo do repouso, a distância percorrida pelo móvel é proporcional ao quadrado do tempo: $d = k \cdot t^2$.

Embora Galileu tivesse usado o plano inclinado para chegar a essa conclusão, ela também foi estendida para a queda livre.



Figura a. Torre de Pisa.

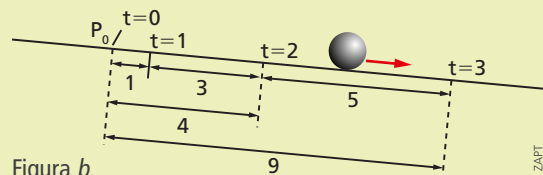


Figura b.



Figura c. O plano inclinado de Galileu.



Figura d. Galileu Galilei.

2. Lançamento vertical para cima

Lançando-se verticalmente para cima um corpo, num local onde se possa desprezar a resistência do ar, próximo da superfície terrestre, ele adquirirá um movimento retilíneo e uniformemente variado. Sua aceleração terá módulo g (aceleração da gravidade). O meio ideal para se fazer esse lançamento é o vácuo.

Verifica-se que, independentemente de qualquer orientação que se dê à trajetória:

1º) durante a subida o movimento é **retardado** devido à ação da gravidade (fig. 3). Ao atingir o pico da trajetória, o corpo vai parar instantaneamente; no entanto, a força gravitacional continuará atuando sobre ele, o que o faz retornar ao seu ponto de partida. Portanto, no pico da trajetória, temos: $v = 0$ e $|\alpha| = g$.

2º) na descida, ajudado pela força gravitacional, o movimento é **acelerado**, e o corpo cai em queda livre (fig. 4).

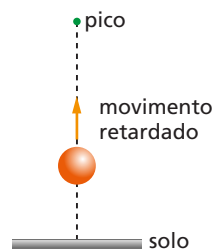


Figura 3. Movimento de subida.

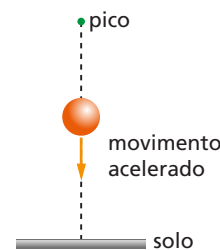


Figura 4. Movimento de descida.

Equacionamento e discussão dos sinais algébricos da velocidade e da aceleração

Para entender melhor estes sinais, vamos recorrer ao capítulo 9 e pedir emprestados os vetores velocidade e aceleração. Vamos usá-los apenas para mostrar os seus respectivos sentidos em cada um dos movimentos. Isso vai simplificar bastante a compreensão do texto.

Vamos orientar a trajetória para cima (fig. 5) e essa orientação será mantida na subida e na descida. Não podemos mais alterar a orientação do eixo y .

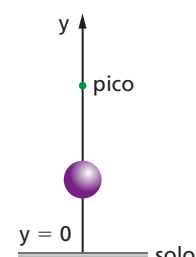


Figura 5. Orientação da trajetória.

Sinais algébricos da velocidade escalar

Nas figuras 6 e 7 mostramos o vetor velocidade acompanhando o sentido do movimento. Na subida o sentido do movimento concorda com o do eixo y e, portanto, ele é progressivo; a velocidade escalar é **positiva**. Na descida o movimento tem sentido oposto ao do eixo y e, portanto, ele é retrógrado; a velocidade escalar é **negativa**. Assim, temos:

- na subida $\Rightarrow v > 0$
- na descida $\Rightarrow v < 0$

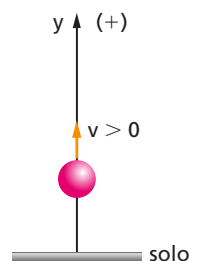


Figura 6. Movimento de subida.

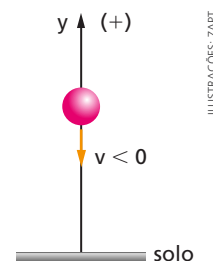


Figura 7. Movimento de descida.

Sinais algébricos da aceleração escalar

O sinal da aceleração é dado em relação ao eixo y adotado, e não em relação ao movimento de subida ou de descida. A força gravitacional que atua no corpo é sempre dirigida para baixo, ou seja, a aceleração é dirigida sempre para baixo, no sentido oposto ao do eixo y e, portanto, o movimento tem aceleração **negativa**, tanto na subida como na descida (fig. 8):

$$\alpha < 0$$

Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, temos:

$$|\alpha| = g \Rightarrow \alpha = -g$$

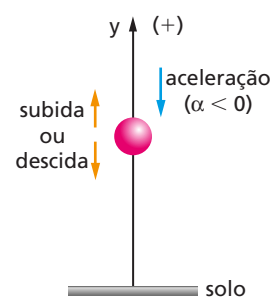


Figura 8. Aceleração.

No movimento de subida o sinal negativo da aceleração escalar é bastante intuitivo, no entanto, no de descida, à primeira vista ele não é tão óbvio, pois erroneamente estamos presos ao sentido do movimento. Para melhor entendê-lo, vale lembrar que

esse movimento de descida é acelerado, mas tem velocidade escalar negativa. No movimento acelerado, v e α têm o mesmo sentido e, portanto, o mesmo sinal. Logo, a aceleração é **negativa**.

Equações do lançamento vertical

Vamos supor que o corpo seja apenas um ponto material e que sua posição seja definida, em cada instante, pelo valor da ordenada y .

A ordenada inicial é denominada **altura inicial do lançamento**. Assim, $y_0 = h_0$.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

Substituindo também $\alpha = -g$, a equação horária das posições fica:

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

A equação horária da velocidade é:

$$v = v_0 + \alpha t$$

Fazendo $\alpha = -g$, obtemos:

$$v = v_0 - gt$$

Temos também a equação de Torricelli, que assim se escreve:

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot \Delta y$$

DICA

Não substitua g por -10 m/s^2 , pois ele é um valor absoluto. Quem tem sinal negativo é a aceleração escalar α . Se você cometer esse erro, acabará anulando o sinal da aceleração.

Propriedades do lançamento vertical livre

1ª) No pico da trajetória (fig. 9) temos:

- Máxima altura atingida pelo móvel, a qual denominaremos H . Assim, a ordenada máxima é: $y_{\text{máx}} = H$
- Velocidade instantânea nula: $v = 0$
- Aceleração escalar não nula: $\alpha = -g$

2ª) Num ponto qualquer da trajetória, de ordenada $y < H$, o móvel passará na subida com velocidade escalar $(+v)$ e na descida com $(-v)$, sendo v o módulo da velocidade. Ou seja, na subida e na descida, as velocidades são iguais em módulo (fig. 10). Essa propriedade mostra a simetria do movimento e sua demonstração é feita facilmente pela equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot \Delta y \Rightarrow v_{1,2} = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot \Delta y}$$

Temos uma raiz positiva (subida) e outra negativa (descida), ambas de mesmo módulo:

$$v_1 = -v_2$$

3ª) A contar do ponto de lançamento da partícula, os intervalos de tempo de subida e de descida são iguais.

Essa propriedade é uma decorrência da simetria do movimento.

4ª) Denominamos tempo total de voo a soma dos tempos de subida e de descida:

$$\Delta t_{\text{voo}} = \Delta t_{\text{sub}} + \Delta t_{\text{desc}}$$

Tendo em vista a propriedade anterior, também podemos escrever:

$$\Delta t_{\text{voo}} = 2\Delta t_{\text{sub}} = 2\Delta t_{\text{desc}}$$

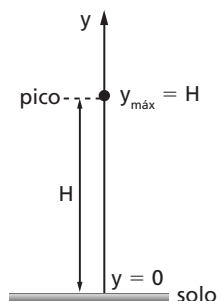


Figura 9. Móvel na altura máxima.

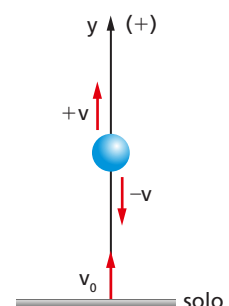


Figura 10. A simetria do movimento.

Exercícios de Aplicação

21. Uma partícula é lançada verticalmente para cima a partir do solo, com velocidade inicial de módulo v_0 . A aceleração da gravidade local tem módulo g e despreza-se o efeito do ar. A trajetória é orientada para cima. Calcule:

- o tempo de subida (t_{sub});
- a altura máxima atingida (H).

Resolução:

Orientemos a trajetória para cima e tomemos a origem das ordenadas no solo.

- a) A equação horária da velocidade escalar é dada por:

$$v = v_0 - gt$$

No pico da trajetória:

$$v = 0$$

$$0 = v_0 - gt_{\text{sub}}$$

$$gt_{\text{sub}} = v_0$$

$$t_{\text{sub}} = \frac{v_0}{g}$$

- b) A equação de Torricelli para o movimento fica:

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot \Delta y$$

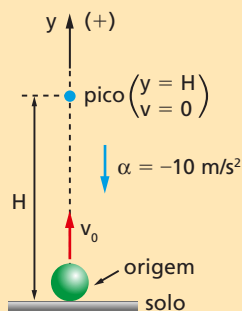
No pico da trajetória:

$$v = 0 \text{ e } \Delta y = H$$

$$0^2 = v_0^2 - 2gH$$

$$2gH = v_0^2$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

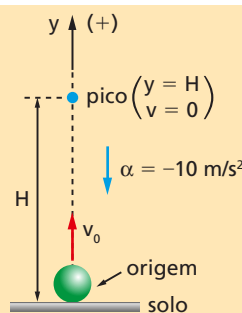


22. Próximo da superfície terrestre e no vácuo, lançamos verticalmente para cima um corpo com velocidade escalar de módulo 30 m/s. A aceleração da gravidade é constante e vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Considerando que o corpo tenha sido lançado do solo, determine:

- o tempo de subida (t_{sub});
- a máxima altura (H).

Resolução:

Orientemos a trajetória para cima e tomemos a origem no solo.



As equações horárias são:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$v = v_0 - gt$$

Temos: $y_0 = 0$; $v_0 = 30 \text{ m/s}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$y = 30t - 5,0t^2 \quad (\text{SI}) \quad (1)$$

$$v = 30 - 10t \quad (\text{SI}) \quad (2)$$

- a) No pico da trajetória a velocidade se anula. Da equação (2), vem:

$$0 = 30 - 10t_{\text{sub}}$$

$$10t_{\text{sub}} = 30 \Rightarrow t_{\text{sub}} = 3,0 \text{ s}$$

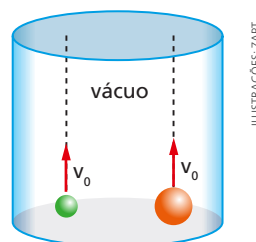
- b) Para se obter a máxima altura (H), substituímos na equação (1) o tempo por 3,0 s e a ordenada por H :

$$H = 30 \cdot 3,0 - 5,0 \cdot (3,0)^2$$

$$H = 45 \text{ m}$$

Observação: Poderíamos ter obtido a altura máxima (H) por meio da equação de Torricelli.

23. No interior de um cilindro oco de vidro, vertical, fez-se vácuo para realizar o seguinte experimento: duas bolinhas de aço de pesos diferentes foram simultaneamente lançadas verticalmente para cima a partir da base do cilindro, com velocidades de mesmo módulo. A altura do cilindro foi suficiente para a realização do experimento com sucesso e nenhuma das bolinhas alcançou a tampa superior.



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

Foi observado que:

- a bolinha mais pesada subiu e desceu mais depressa que a mais leve.
 - a bolinha mais pesada subiu e desceu mais devagar que a mais leve.
 - tal qual aconteceu na experiência de Galileu, o tempo de voo não depende da massa e os dois corpos realizaram o movimento de subida e de descida ao mesmo tempo, como se esperava.
 - a mais pesada subiu mais devagar e logo retornou, chegando antes da mais leve.
 - como não existia gravidade no interior do cilindro devido ao vácuo, as bolinhas subiram em MRU, mas não atingiram a tampa superior do cilindro, pois pararam no meio do caminho, permanecendo em repouso uma ao lado da outra.
24. Uma bolinha de aço é lançada verticalmente para cima no interior de um tubo cilíndrico oco, vertical, de altura ilimitada. No seu inte-

rior se fez o vácuo. O módulo da velocidade inicial de lançamento é v_0 e a aceleração da gravidade no laboratório tem módulo g . A bolinha subiu até uma altura H e retornou ao ponto de lançamento, tendo demorado um tempo T . Um segundo experimento foi realizado, porém dobrando-se o módulo da velocidade inicial de lançamento. Determine:

- o novo tempo total em função de T ;
 - a nova altura máxima em função de H .
25. Um jogador de futebol chuta uma bola verticalmente para cima com velocidade inicial de 36 km/h. Admita que o atrito com o ar seja desprezível e que o movimento tenha sido vertical. Dado $g = 10 \text{ m/s}^2$, considere desprezível a altura inicial e determine:
- o tempo de subida e o tempo total do movimento,
 - a máxima altura atingida.

Exercícios de Reforço

26. (UE-RJ) Em um jogo de vôleibol, denomina-se tempo de voo o intervalo durante o qual um atleta que salta para cortar uma bola está com ambos os pés sem contato com o chão, como ilustra a fotografia.

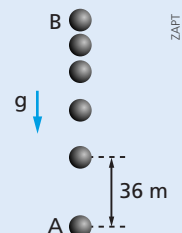


Considere um atleta que consegue elevar verticalmente o seu centro de gravidade a 0,45 m do chão e a aceleração da gravidade com módulo igual a 10 m/s^2 . Despreze o efeito do ar. Determine:

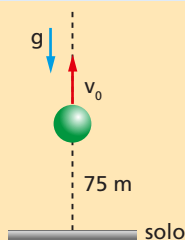
- o módulo da velocidade inicial v_0 do centro de gravidade desse atleta ao saltar;
 - o tempo de voo desse atleta.
27. (UF-CE) Em um circo, um malabarista lança bolas, verticalmente para cima, que atingem uma altura máxima h . No caso de jogá-las para que elas fiquem o dobro do tempo no ar, a nova altura máxima será:
- 2 h
 - 4 h
 - 6 h
 - 8 h

28. (UF-AM) O diagrama abaixo representa uma sequência de fotografias, com intervalo de 1 s, de uma bola lançada verticalmente para cima num local onde a aceleração da gravidade tem módulo g . Sabe-se que a bola é lançada no ponto A, com velocidade inicial de módulo v_A , e atinge sua altura máxima no ponto B (ver figura). Com base neste diagrama, podemos afirmar que v_A e g valem, respectivamente:

- 20 m/s e 7 m/s²
- 40 m/s e 10 m/s²
- 20 m/s e 8 m/s²
- 40 m/s e 8 m/s²
- 40 m/s e 7 m/s²



29. (UF-PE) No instante $t = 0$ um menino lança uma pedra verticalmente para cima. Após 1,0 s, o movimento da pedra ainda é ascendente com uma velocidade que é a metade da velocidade inicial de lançamento. Supondo-se que o efeito do ar possa ser desprezado, calcule a altura máxima atingida pela pedra. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.
30. Uma bolinha de aço é atirada verticalmente para cima com velocidade de módulo 10 m/s, a partir de uma altura inicial de 75 m do solo. A bolinha adquire um movimento retilíneo com aceleração constante e de módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e no seu retorno chega até o solo.

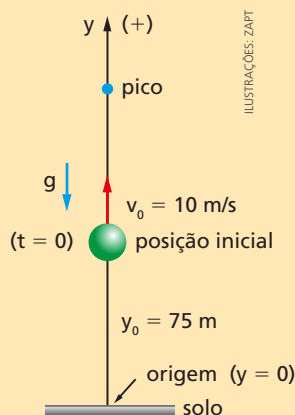


Determine, a contar do instante de lançamento:

- o instante T_1 em que a bolinha passa pelo ponto inicial de lançamento;
- o instante T_2 em que a bolinha atinge o solo;
- a ordenada do pico da trajetória.

Resolução:

Vamos adotar um eixo de ordenadas e colocá-lo sobre a trajetória da bolinha. Sua origem será fixada no solo. Este será o nosso referencial e não poderá mais ser alterado até o final da resolução do exercício. Veja a figura. A bolinha atingirá um pico de sua trajetória e retornará para o solo.



- Vamos começar escrevendo a equação horária das ordenadas das posições ocupadas pela bolinha:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Temos: $y_0 = 75 \text{ m}$; $v_0 = +10 \text{ m/s}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$

A equação fica:

$$y = 75 + 10t - \frac{10}{2} \cdot t^2$$

$$y = 75 + 10t - 5,0t^2 \text{ (unidades do SI)}$$

Quando a bolinha estiver passando pelo ponto inicial de lançamento, ela estará na posição $y = 75 \text{ m}$.

$$75 = 75 + 10t - 5,0t^2$$

$$75 - 75 = 10t - 5,0t^2$$

$$5,0t^2 - 10t = 0$$

$$1,0t^2 - 2,0t = 0$$

$$t(t - 2,0) = 0$$

Uma das soluções é $t = 0$ (denominada solução trivial) e corresponde ao instante do lançamento. A outra solução é $t = 2,0 \text{ s}$, que é o instante procurado. Logo:

$$T_1 = 2,0 \text{ s}$$

- Ao atingir o solo, a ordenada fica $y = 0$:

$$y = 75 + 10t - 5,0t^2$$

$$0 = 75 + 10t - 5,0t^2$$

$$5,0t^2 - 10t - 75 = 0$$

$$1,0t^2 - 2,0t - 15 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-2,0) \pm \sqrt{(-2,0)^2 - 4 \cdot (1,0) \cdot (-15)}}{2 \cdot (1,0)}$$

$$t_{1,2} = \frac{2,0 \pm 8,0}{2,0}$$

Uma das raízes é negativa e não faz parte da solução do problema. A raiz positiva é a solução:

$$T_2 = 5,0 \text{ s}$$

- Para determinar a posição do pico, vamos usar a equação de Torricelli.

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot \Delta y$$

Lembrando que no pico a velocidade é nula: $v = 0$

$$0^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot \Delta y$$

$$20 \cdot \Delta y = 100 \Rightarrow \Delta y = 5,0 \text{ m}$$

A ordenada do pico será:

$$y_{\text{pico}} = 75 \text{ m} + 5,0 \text{ m} = 80 \text{ m}$$

$$y_{\text{pico}} = 80 \text{ m}$$

- Do topo de um edifício, atira-se uma pedra verticalmente para cima com velocidade escalar de 20 m/s . A posição de lançamento está a uma altura de 60 m do solo. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. Despreze os efeitos do ar.

- Determine os instantes em que a pedra passa por um ponto situado a 75 m do solo.
- Determine as respectivas velocidades escalares ao passar pelo ponto anterior.
- Determine o instante em que ela toca o solo.

- (PUC-MG) Uma bolinha de borracha é solta do alto de um prédio de $40,0 \text{ m}$ de altura e choca-se com o solo em uma superfície rígida e lisa.

Observa-se que, quando a bolinha se choca com o solo, ela sempre sobe a uma altura, que é metade da altura anterior. O módulo da velocidade com que a bolinha abandona o solo, imediatamente após o terceiro toque no solo, vale aproximadamente, em m/s: (Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. Despreze os efeitos do ar.)

- a) 5,0 c) 10,0 e) 25,0
b) 7,0 d) 20,0

33. (UF-TO) Uma pessoa atira uma pedra verticalmente para cima, com velocidade inicial de módulo $5,0 \text{ m/s}$, da beira de um penhasco. Considerando-se que o módulo da aceleração da gravidade é de 10 m/s^2 , em quanto tempo a pedra irá passar por um ponto situado a 30 m abaixo do ponto de onde foi lançada? Despreze a resistência do ar.

- a) 0,5 s c) 2,0 s e) 3,5 s
b) 1,0 s d) 3,0 s

3. Gráficos do movimento vertical no vácuo

Queda livre

No movimento de queda livre, com a trajetória orientada para baixo, as equações horárias são:

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_0 + g t$$

$$\alpha = g \text{ (constante positiva)}$$

O diagrama horário das ordenadas (posição \times tempo) é um arco de parábola de concavidade para cima, pois $\alpha = +g$; o da velocidade escalar é uma reta oblíqua ao eixo do tempo; e o da aceleração escalar é uma reta paralela ao eixo do tempo (pois trata-se de uma função constante) (fig. 11).

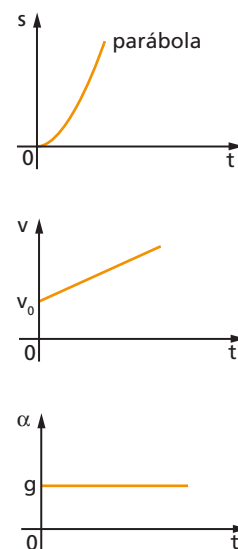


Figura 11. Diagramas horários da queda livre.

Lançamento vertical para cima

No lançamento vertical, com a trajetória orientada positivamente de baixo para cima e com origem no solo, as equações horárias são:

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad v = v_0 - g t \quad \alpha = -g \text{ (constante negativa)}$$

O diagrama posição \times tempo é um arco de parábola, de concavidade para baixo, pois $\alpha = -g$ (fig. 12a), o da velocidade escalar é uma reta oblíqua ao eixo do tempo (fig. 12b), e a função é decrescente pelo mesmo motivo. O da aceleração escalar é uma reta paralela ao eixo do tempo (fig. 12c).

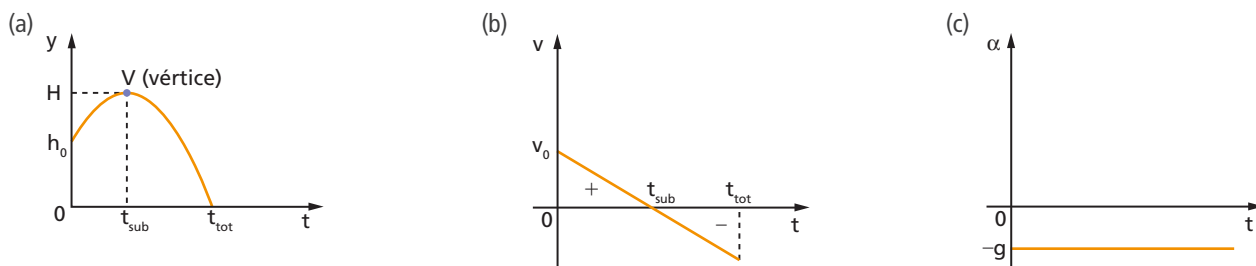
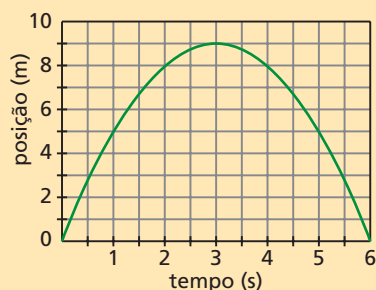


Figura 12. Diagrama horário do lançamento vertical para cima.

No diagrama horário das posições (fig. 12a), o vértice V da parábola corresponde ao pico da trajetória. Observemos pelos diagramas b e c que, nesse ponto, a velocidade escalar é nula ($v = 0$) e a aceleração escalar não é nula ($\alpha = -g$).

Exercícios de Aplicação

34. (Fuvest-SP) A figura representa o gráfico (posição-tempo) do movimento de um corpo lançado verticalmente para cima com velocidade inicial v_0 , na superfície de um planeta.



- Qual o valor da velocidade inicial v_0 ?
- Qual o valor da aceleração da gravidade na superfície do planeta?

Resolução:

- a) A equação horária do movimento do móvel é:

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Do gráfico tiramos os seguintes valores:

$$t = 0 \rightarrow h_0 = 0 \text{ (altura inicial nula)}$$

$$t = 1 \text{ s} \rightarrow y_1 = 5 \text{ m}$$

$$t = 2 \text{ s} \rightarrow y_2 = 8 \text{ m}$$

Substituímos esses valores na equação horária:

$$5 = 0 + v_0 \cdot 1 - \frac{1}{2} g \cdot 1^2$$

$$5 = v_0 - \frac{1}{2} g$$

$$10 = 2v_0 - g \quad (1)$$

$$8 = 0 + v_0 \cdot 2 - \frac{1}{2} g \cdot 2^2$$

$$8 = 2v_0 - 2g$$

$$4 = v_0 - g \quad (2)$$

As duas equações formam um sistema:

$$\begin{cases} 10 = 2v_0 - g & (1) \\ 4 = v_0 - g & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = 2v_0 - g & (1) \\ 4 = v_0 - g & (2) \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro a equação (2) da (1):

$$10 = 2v_0 - g \quad (1)$$

$$- \quad 4 = v_0 - g \quad (2)$$

$$\hline 6 = v_0 + 0$$

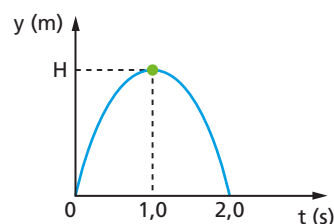
$$v_0 = 6 \text{ m/s}$$

- b) Voltando em (2):

$$4 = 6 - g$$

$$g = 2 \text{ m/s}^2$$

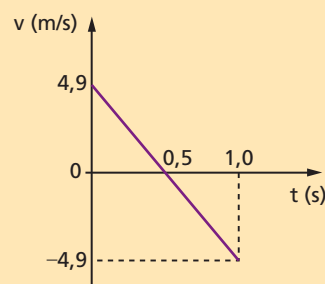
35. Em um local onde a resistência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$, uma pequena pedra é lançada verticalmente para cima por uma pessoa. A pedra adquire um movimento retilíneo vertical e, em seguida, retorna às mãos do lançador. O gráfico ordenadas \times tempo está representado na figura.



Determine:

- o módulo da velocidade escalar inicial;
- a altura máxima (H) atingida pela pedra.

36. Em uma determinada região em que a aceleração da gravidade é constante, um garoto fez um experimento de Física com a finalidade de determinar o módulo da aceleração da gravidade local que consistiu no seguinte: lançou verticalmente para cima uma bolinha de aço e conseguiu obter o gráfico velocidade \times tempo a seguir. A resistência do ar pode ser desprezada no experimento.



Determine:

- o módulo da aceleração da gravidade;
- a altura máxima (H) atingida pela bolinha.

Resolução:

- a) Do gráfico, tiramos:

$$v_0 = 4,9 \text{ m/s}$$

$$v = 0, \text{ quando } t = 0,5 \text{ s}$$

Utilizemos a equação horária das velocidades:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$0 = 4,9 - g \cdot 0,5$$

$$g = \frac{4,9}{0,5} \Rightarrow g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

- b) Para obter a altura máxima vamos usar a equação de Torricelli.

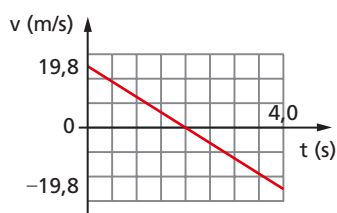
Temos: $v = 0$ no pico da trajetória;
 $g = 9,8 \text{ m/s}^2$; $v_0 = 4,9 \text{ m/s}$

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot \Delta y$$

$$0^2 = (4,9)^2 - 2 \cdot (9,8) \cdot H$$

$$H = 1,2 \text{ m}$$

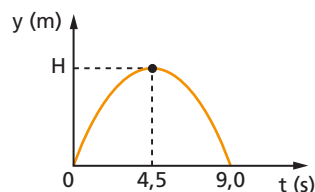
37. Lançamos verticalmente para cima uma esferinha de aço e conseguimos levantar os dados do módulo de sua velocidade. Com esses dados construímos o gráfico a seguir. A resistência do ar é desprezível.



Determine:

- a máxima altura atingida pela esferinha;
 - o módulo da aceleração da gravidade local.
38. Num local onde a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$, lançou-se uma bolinha de gude verticalmente para cima. No experi-

mento verificou-se que a resistência do ar não influenciou o movimento e a bolinha subiu em movimento retilíneo uniformemente variado. O gráfico mostra as posições em função do tempo para uma trajetória orientada de baixo para cima.



Analise as afirmativas a seguir e indique falso ou verdadeiro para cada uma delas.

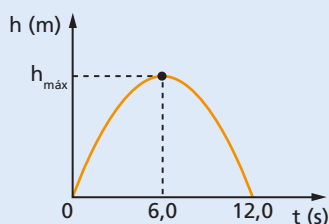
- Para $t < 4,5 \text{ s}$ o movimento foi retardado.
- Entre os instantes $4,5 \text{ s}$ e $9,0 \text{ s}$ o movimento foi acelerado e a bolinha estava em queda livre.
- No instante $t = 4,5 \text{ s}$ a velocidade e a aceleração são nulas.
- A velocidade inicial de lançamento tinha módulo de 45 m/s .

São verdadeiras as afirmativas:

- I, II e IV, apenas.
- II e III, apenas.
- I, III e IV, apenas.
- I, II e III, apenas.
- I, II, III e IV.

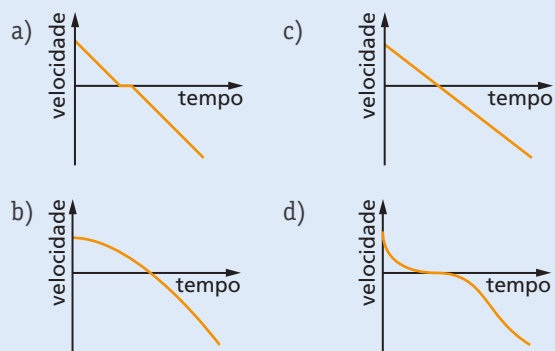
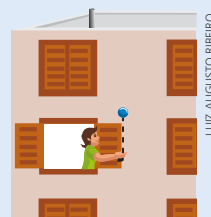
Exercícios de Reforço

39. (AFA-SP) O gráfico mostra a variação, com o tempo, da altura de um objeto lançado verticalmente para cima a partir do solo.



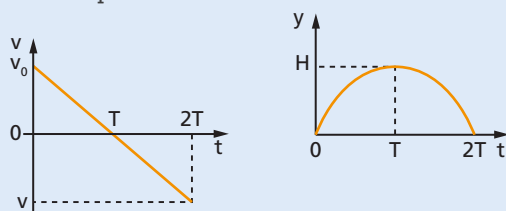
Desprezando-se a resistência do ar e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, a altura máxima atingida pelo objeto vale, em m:

- 300
 - 240
 - 180
 - 60
40. (UF-MG) Da janela de seu apartamento, Marina lança uma bola verticalmente para cima, como mostrado nesta figura. Despreze a resistência do ar. Assinale a alternativa cujo gráfico melhor representa a velocidade escalar da bola em função do tempo, a partir do instante em que ela foi lançada.



41. Os gráficos dados, velocidade \times tempo e posição \times tempo, referem-se ao lançamento vertical para cima de uma partícula, a partir do solo. A acele-

ração da gravidade tem módulo g e a resistência do ar é desprezível.



No instante $t = \frac{T}{2}$ a partícula está a uma altura h dada por:

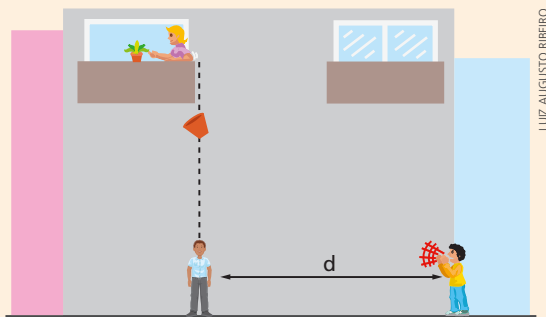
- a) $\frac{3H}{4}$ d) H
 b) $\frac{H}{2}$ e) $\frac{H}{4}$
 c) $\frac{4H}{5}$

Exercícios de Aprofundamento

42. Deixa-se cair, a partir do repouso, cinco esferinhas intercaladas por intervalos de tempo iguais desde o teto de um edifício de altura H . O efeito do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Quando a primeira esferinha atinge o solo, a quinta está prestes a partir e, nesse instante, a distância entre a segunda e a terceira esferinha vale 5 m. O valor de H é:

- a) 5 m c) 16 m e) 24 m
 b) 10 m d) 20 m

43. (U. E. Maringá-PR) Um vaso cai de uma sacada a 20,0 m de altura. Sobre a calçada, na direção da queda do vaso, encontra-se parado um homem de 2,0 m de altura. Uma pessoa distante 34,0 m, que está observando tudo, grita para que o homem saia do lugar, após 1,50 segundo desde o exato instante em que o vaso começa a cair.

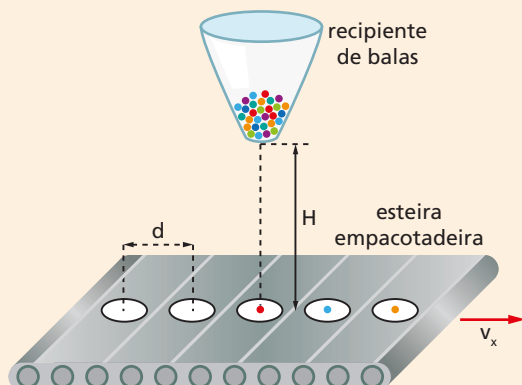


Ao ouvir o alerta, o homem leva 0,05 segundo para reagir e sair do lugar. Nessa situação, considerando-se a velocidade do som no ar com módulo de 340,0 m/s, assinale a alternativa correta. (Use $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.)

- a) O vaso colide com o homem antes mesmo de ele ouvir o alerta.
 b) Ainda sobra 1,6 segundo para o vaso atingir a altura do homem quando este sai do lugar.
 c) Pelo fato de a pessoa ter esperado 1,5 segundo para emitir o alerta, o homem sai no exato momento de o vaso colidir com sua cabeça, a 2,0 m de altura do solo.

- d) O vaso está a aproximadamente 6,4 m do solo quando o homem sai do lugar.
 e) Todas as alternativas estão incorretas.

44. (U. F. Uberlândia-MG) A figura mostra um equipamento para empacotar balas, composto de uma esteira que se move horizontalmente com velocidade de módulo v_x , contendo os pacotes distribuídos de forma equidistante a uma distância $d = 0,20 \text{ m}$ entre eles. Um recipiente contendo as balas é colocado acima da esteira, a uma altura H desta. Deseja-se que cada pacote contenha apenas uma única bala. O sistema está ajustado inicialmente com os valores $v_x = 1,0 \text{ m/s}$ e $H = 0,20 \text{ m}$, para que cada bala caia no centro de cada pacote. Considere que cada bala é abandonada a partir do repouso e que a aceleração gravitacional tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Calcule o intervalo de tempo em que as balas devem ser abandonadas do recipiente.

45. (Unesp-SP) Em um aparelho simulador de queda livre de um parque de diversões, uma pessoa devidamente acomodada e presa a uma poltrona é abandonada a partir do repouso de uma altura h acima do solo. Inicia-se então um movimento de queda livre vertical, com todos os cuidados necessários para a máxima segurança da pessoa. Se g é a aceleração da gravidade, a altura mínima

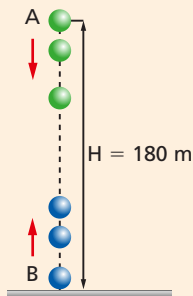
a partir da qual deve-se iniciar o processo de frenagem da pessoa, com desaceleração constante $3g$, até o repouso no solo é:

- a) $\frac{h}{8}$ b) $\frac{h}{6}$ c) $\frac{h}{5}$ d) $\frac{h}{4}$ e) $\frac{h}{2}$

46. (OBF-Brasil) Duas bolas são atiradas verticalmente do alto de um edifício, uma após a outra, com velocidades de mesma magnitude $v_0 = 2,0 \text{ m/s}$. A primeira bola é atirada para cima e, após um intervalo de tempo $\Delta t = 1,0 \text{ s}$, a segunda é atirada para baixo. Despreze os efeitos dissipativos e adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

- a) Determine a distância e a velocidade relativa entre as bolas após o lançamento da 2ª bola.
b) O que acontece com estas grandezas quando Δt tende a zero?

47. A figura é uma representação de uma foto estroboscópica do movimento de duas bolinhas, A e B, em movimento vertical com aceleração constante. Ela mostra as posições ocupadas a cada 1 s . A bolinha A foi abandonada em queda livre, enquanto B foi lançada verticalmente para cima. Admita que a primeira "foto" tenha sido disparada no instante $t = 0$, estando a bolinha A no pico e B no solo. O encontro ocorreu no instante $T = 3,0 \text{ s}$.



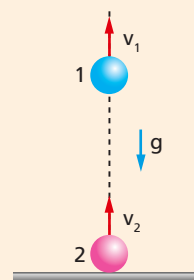
Determine:

- a) o módulo da velocidade relativa entre A e B no instante do encontro;
b) o módulo da velocidade inicial de lançamento da bolinha B.

48. (AFA-SP) Um corpo é abandonado do repouso de uma altura h acima do solo. No mesmo instante, um outro é lançado para cima, a partir do solo, segundo a mesma vertical, com velocidade v . Sabendo que os corpos se encontram na metade da altura da descida do primeiro, pode-se afirmar que h vale:

- a) $\frac{v}{g}$ b) $\left(\frac{v}{g}\right)^2$ c) $\frac{v^2}{g}$ d) $\left(\frac{v}{g}\right)^2$

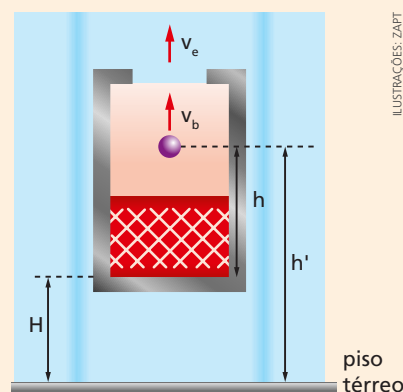
49. (ITA-SP) Uma partícula é lançada no vácuo verticalmente para cima com uma velocidade escalar inicial de 10 m/s . Dois décimos de segundo depois, lança-se do mesmo ponto uma segunda partícula com a mesma velocidade escalar inicial. A aceleração da gravidade local tem módulo igual a 10 m/s^2 .



A colisão entre as duas partículas ocorrerá:

- a) um décimo de segundo após o lançamento da segunda partícula.
b) $1,1 \text{ s}$ após o lançamento da segunda partícula.
c) a uma altura de $4,95 \text{ m}$ acima do ponto de lançamento.
d) a uma altura de $4,85 \text{ m}$ acima do ponto de lançamento.
e) a uma altura de $4,70 \text{ m}$ acima do ponto de lançamento.

50. (Fuvest-SP) Um elevador, aberto em cima, vindo do subsolo de um edifício, sobe mantendo sempre uma velocidade constante $v_e = 5,0 \text{ m/s}$. Quando o piso do elevador passa pelo piso do térreo, um dispositivo colocado no piso do elevador lança verticalmente, para cima, uma bolinha, com velocidade inicial $v_b = 10,0 \text{ m/s}$, em relação ao elevador. Na figura h e h' representam, respectivamente, as alturas da bolinha em relação aos pisos do elevador e do térreo e H representa a altura do piso do elevador em relação ao piso do térreo. No instante $t = 0$ do lançamento da bolinha, $H = h = h' = 0$. (Adote: $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



- a) Construa e identifique três diagramas horários distintos: $H(t)$, $h(t)$ e $h'(t)$, entre o instante $t = 0$ e o instante T em que a bolinha retorna ao piso do elevador. Determine esse instante T em que a bolinha retorna ao piso do elevador e identifique-o nos gráficos de $h(t)$ e de $h'(t)$.
b) Determine o instante $t_{\text{máx}}$ em que a bolinha atinge sua altura máxima, em relação ao piso do térreo.

Diagramas horários

1. Introdução matemática

Revisão de Trigonometria

Tomemos um triângulo retângulo ABC cujos catetos medem b e c , e a hipotenusa mede a .

Em relação ao ângulo θ , o cateto \overline{AB} é adjacente e \overline{AC} é oposto. Definimos:

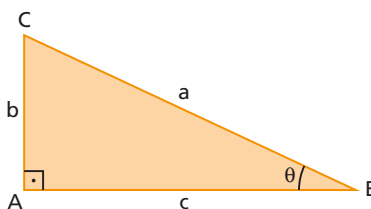


Figura 1.

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{c}$$

Consideremos o ângulo externo β da figura 2. Notemos que β e θ são suplementares, isto é, $\beta + \theta = 180^\circ$.

É possível demonstrar que:

- $\text{tg } \beta < 0$
- $\text{tg } \beta = -\text{tg } \theta$

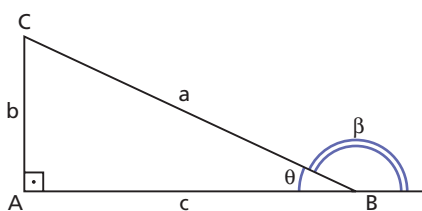


Figura 2.

Coefficiente angular de uma reta

Num diagrama cartesiano xOy representemos uma reta (r) de equação $y = b + mx$, em que b e m são parâmetros e $m \neq 0$ (fig. 3).

O parâmetro m é denominado **coeficiente angular** da reta, enquanto b chama-se **coeficiente linear**.

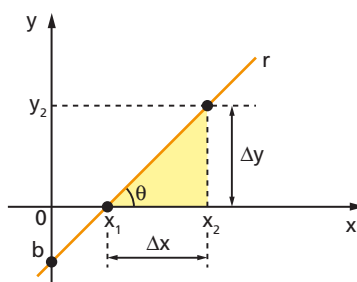


Figura 3.

1. Introdução matemática
2. Determinação gráfica da velocidade escalar média
3. Determinação gráfica da velocidade escalar instantânea
4. Aceleração escalar

Calcula-se o parâmetro m pela tangente trigonométrica do ângulo θ que mede sua declividade em relação ao eixo das abscissas (x).

$$m \stackrel{N}{=} \operatorname{tg} \theta \quad (\text{Leia-se: } m \text{ é numericamente igual a } \operatorname{tg} \theta.)$$

2. Determinação gráfica da velocidade escalar média

Consideremos um diagrama horário de posição de uma partícula (fig. 4) e dois instantes, t_1 e t_2 .

A velocidade escalar média da partícula é definida pelo quociente entre a variação de posição Δs e o intervalo de tempo Δt .

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Observamos o segmento de reta entre P_1 e P_2 , cuja inclinação, em relação ao eixo do tempo, é medida pelo ângulo θ e o triângulo sombreado.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta \stackrel{N}{=} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Comparando com a definição de velocidade escalar média, concluímos:

$$v_m \stackrel{N}{=} \operatorname{tg} \theta$$

A velocidade escalar média é numericamente igual à tangente trigonométrica do ângulo θ , ou seja, igual ao coeficiente angular da reta $\overline{P_1 P_2}$.

3. Determinação gráfica da velocidade escalar instantânea

Consideremos uma partícula em movimento, numa trajetória qualquer, em relação a um dado sistema de referência. A figura 5 é o diagrama horário do espaço dessa partícula.

Tomemos uma sequência de intervalos de tempo ($\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3 \dots$) de tal maneira que cada um deles seja menor que o seu antecedente, isto é, $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3 \dots$ ou $\dots \Delta t_3 < \Delta t_2 < \Delta t_1$.

Como sabemos, o coeficiente angular de cada uma das retas secantes ao gráfico ($\overline{P_0 P_1}, \overline{P_0 P_2}, \overline{P_0 P_3} \dots$) é a medida das velocidades escalares médias ($v_{m1}, v_{m2}, v_{m3} \dots$), nos respectivos intervalos de tempo ($\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3 \dots$).

À medida que esses intervalos de tempo vão diminuindo, os pontos $P_1, P_2, P_3 \dots$ aproximam-se de P_0 e as retas ($\overline{P_0 P_1}, \overline{P_0 P_2}, \overline{P_0 P_3} \dots$) tendem à tangente que passa por ele (P_0).

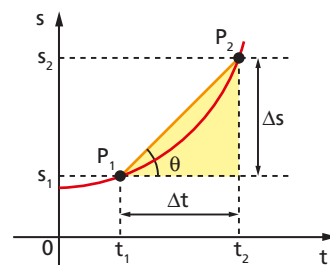


Figura 4. Determinação gráfica da velocidade escalar média.

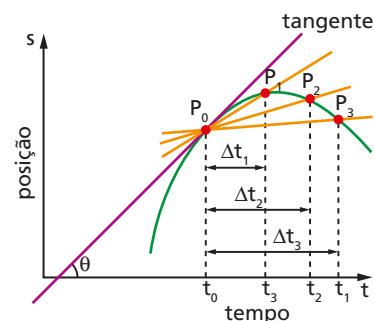


Figura 5. Gráfico posição \times tempo. Determinação da velocidade instantânea.

Por outro lado, a velocidade escalar instantânea é definida pelo limite do quociente entre a variação de espaço Δs e o intervalo de tempo Δt , quando este tende a zero:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Do exposto, podemos concluir que a velocidade escalar instantânea, no instante t_0 , pode ser medida pelo coeficiente angular ($\text{tg } \theta$) da reta tangente no ponto P_0 .

$$v \stackrel{N}{=} \text{tg } \theta \quad (\text{para } t = t_0)$$

Caso particular

No movimento uniforme, o gráfico da posição em função do tempo é retilíneo (fig. 6).

Nesse caso, a velocidade escalar é constante e qualquer reta tangente ao gráfico que fosse traçada coincidiria com o próprio gráfico.

Assim, o processo da determinação da velocidade escalar, nesse caso, torna-se muito simples: basta calcular o coeficiente angular ($\text{tg } \theta$) da reta.

$$v \stackrel{N}{=} \text{tg } \theta$$

Há, no entanto, dois casos a serem discutidos: função crescente e função decrescente.

No primeiro caso, a velocidade escalar é positiva e, no segundo, negativa.

Em cada um deles podemos escrever: $v \stackrel{N}{=} \text{tg } \theta$

Assim, na figura 7, temos:

$$v \stackrel{N}{=} \text{tg } \theta = \frac{a}{b}$$

Na figura 8, o ângulo θ é externo ao triângulo retângulo formado. Usamos então as propriedades vistas no item “Revisão de Trigonometria”.

$$\text{tg } \theta < 0 \quad \text{tg } \theta = -\text{tg } \beta \quad v \stackrel{N}{=} \text{tg } \theta$$

$$v \stackrel{N}{=} -\text{tg } \beta = -\frac{a}{b}$$

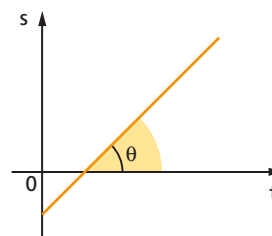


Figura 6. Determinação gráfica da velocidade escalar de um MU.

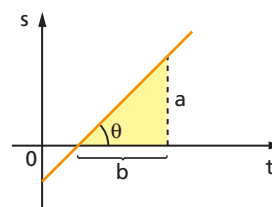


Figura 7. Diagrama horário de posição para $v > 0$.

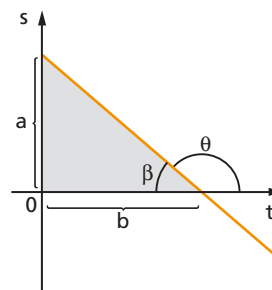


Figura 8. Diagrama horário de posição para $v < 0$.

Exemplo 1

Consideremos o gráfico (fig. 9) representando a posição em função do tempo. Determinemos a velocidade escalar desse movimento uniforme.

No triângulo retângulo ABC, o ângulo θ representa a inclinação da reta relativamente ao eixo do tempo.

$$v \stackrel{N}{=} \text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto } (\overline{BC})}{\text{cateto adjacente } (\overline{AC})} \Rightarrow v = \frac{60}{3,0} \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$

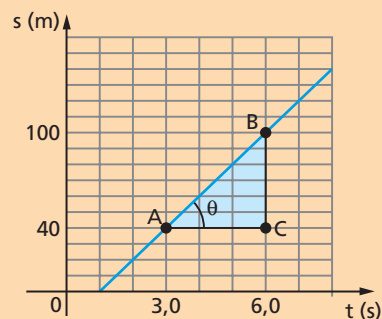


Figura 9.

4. Aceleração escalar

Caso geral

De maneira análoga à anterior, calculamos a aceleração escalar média usando a secante ao gráfico da velocidade escalar em função do tempo (fig. 10). Entre os instantes t_1 e t_2 , temos:

$$\alpha^N = \operatorname{tg} \theta$$

Na figura 11 temos o cálculo da aceleração escalar instantânea, para $t = t_0$. Graficamente, o processo é bem simples. Pelo ponto P_0 , correspondente ao instante t_0 , traçamos a reta tangente à curva. A seguir, marcamos o ângulo θ , medida de sua declividade em relação ao eixo do tempo. Finalmente, determinamos o seu coeficiente angular ($\operatorname{tg} \theta$) e escrevemos:

$$\alpha^N = \operatorname{tg} \theta \quad (\text{para } t = t_0)$$

Caso particular

No movimento uniformemente variado, o diagrama horário da velocidade escalar é retilíneo e o processo da determinação da aceleração escalar torna-se simples. Ela é constante. Basta, então, determinarmos o coeficiente angular da reta.

Na figura 12 a velocidade escalar é **crescente** e a aceleração escalar é **positiva**, e na figura 13 a velocidade escalar é **decrecente** e a aceleração escalar é **negativa**.

O processo descrito para a determinação gráfica da velocidade e da aceleração escalar instantânea é, na realidade, um processo gráfico para a determinação da derivada de uma função num ponto P_0 .

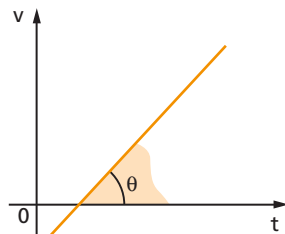


Figura 12.

$$\alpha^N = \operatorname{tg} \theta$$

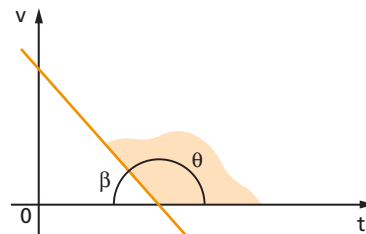


Figura 13.

$$\alpha^N = \operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \beta$$

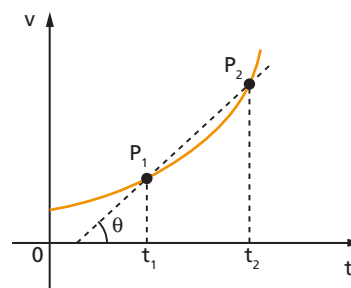


Figura 10. Determinação da aceleração escalar média no gráfico da velocidade.

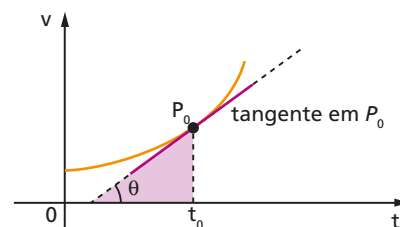


Figura 11. Determinação da aceleração escalar instantânea no gráfico da velocidade.

Exemplo 2

Consideremos o gráfico (fig. 14) representando a velocidade em função do tempo de um MUV. Determinemos a aceleração escalar desse movimento.

Basta calcular a $\operatorname{tg} \theta$ (coeficiente angular da reta), pois:

$$\alpha^N = \operatorname{tg} \theta$$

No triângulo ABC temos:

$$\alpha^N = \operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto } (\overline{BC})}{\text{cateto adjacente } (\overline{AC})} \Rightarrow \alpha = \frac{6}{10}$$

$$\alpha = 0,6 \text{ m/s}^2$$

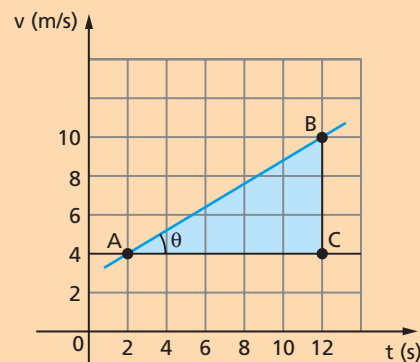


Figura 14.

Exercícios de Aplicação

1. O gráfico posição \times tempo do movimento uniforme de uma partícula está representado na figura a.

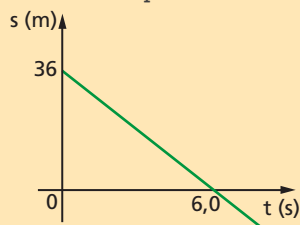


Figura a.

Determine:

- a velocidade escalar do móvel usando o conceito de coeficiente angular;
- a posição no instante $t = 4,0$ s.

Resolução:

- A velocidade escalar é dada pela derivada da posição. Concluímos, portanto, que ela é numericamente igual à tangente trigonométrica do ângulo (θ) formado entre a reta do gráfico e o eixo do tempo (fig. b).

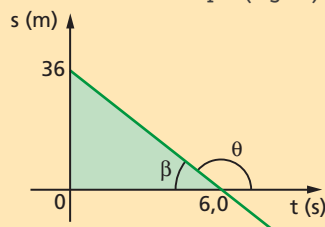


Figura b.

$$v \stackrel{N}{=} \operatorname{tg} \theta$$

Porém, sabemos que:

$$\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \beta$$

Logo:

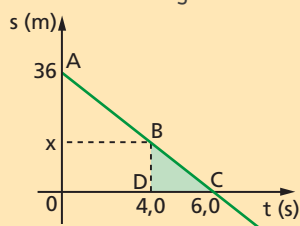
$$v \stackrel{N}{=} -\operatorname{tg} \beta$$

$$v = -\frac{36}{6,0}$$

$$v = -6,0 \text{ m/s}$$

Observemos que as posições são **decrescen-**
tes e que sua velocidade escalar realmente é **negativa**.

- Vamos resolver geometricamente este item. Consideremos os triângulos: $\triangle AOC$ e $\triangle BCD$:



Devido à semelhança entre eles, podemos escrever:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{DC}}$$

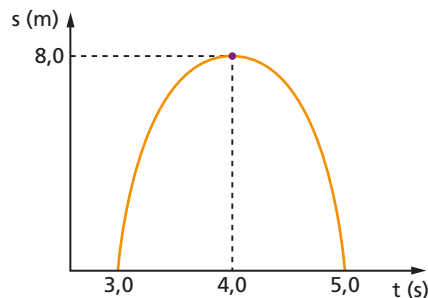
$$\frac{36}{x} = \frac{6,0}{(6,0 - 4,0)}$$

$$6,0x = 36 \cdot 2,0$$

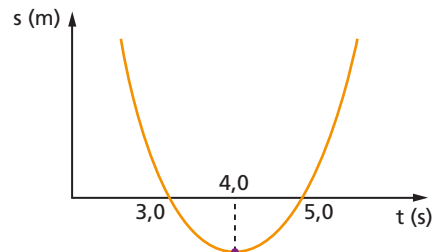
$$x = 12 \text{ m}$$

2. São dados a seguir três diagramas horários de posição \times tempo.

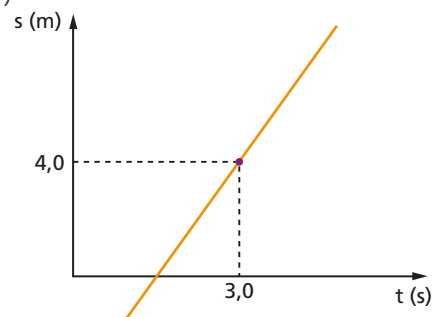
(I)



(II)

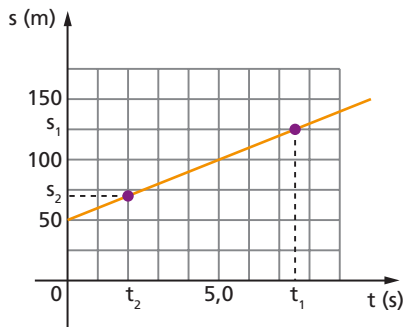


(III)



- Para o instante $t_1 = 3,0$ s, qual é o sinal da velocidade escalar em cada um deles?
- Qual é o valor da velocidade escalar instantânea no instante $t_2 = 4,0$ s para os dois primeiros diagramas?

3. Numa estrada de rodagem, um automóvel se manteve em movimento uniforme. No diagrama está representada sua posição em função do tempo.

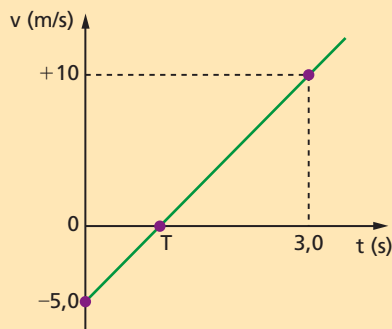


Determine os valores:

- da velocidade escalar, usando o conceito de coeficiente angular;
- do tempo t_1 e da posição s_1 ;
- do tempo t_2 e da posição s_2 .

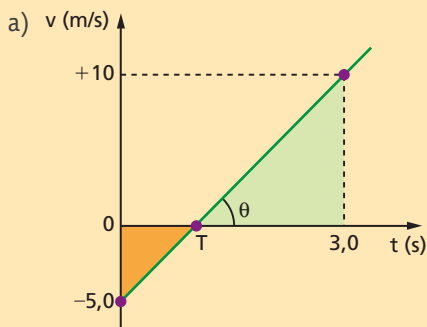
(Sugestão: para os itens *b* e *c* use a equação horária.)

4. Considere o diagrama horário da velocidade de uma partícula em MUV sobre uma trajetória conhecida.



- Determine o instante T de inversão de sentido do movimento.
- Calcule a aceleração escalar.

Resolução:



O triângulo sombreado de verde e o triângulo sombreado de laranja são semelhantes e, portanto, podemos escrever:

$$\frac{10}{5,0} = \frac{(3,0 - T)}{1,0}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{(3,0 - T)}{1,0} \Rightarrow 3,0 - T = 2,0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 1,0 \text{ s}$$

- b) A aceleração pode ser determinada pelo coeficiente angular da reta, ou seja: $\alpha = \text{tg } \theta$. Para isso, vamos usar o triângulo sombreado de verde:

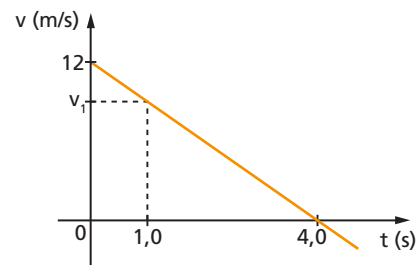
$$\alpha = \text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

A medida do cateto adjacente é:

$$(3,0 - T) = (3,0 - 1,0) = 2,0 \text{ s}$$

$$\alpha = \frac{10 \text{ m/s}}{2,0 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = 5,0 \text{ m/s}^2$$

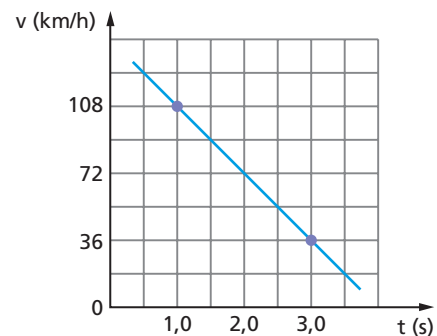
5. Conhecemos o diagrama horário da velocidade escalar de um ponto material.



Determine:

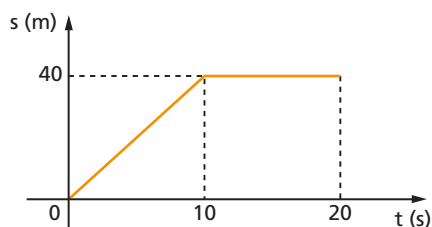
- a aceleração escalar do móvel;
- o valor da velocidade escalar v_1 , indicada no gráfico.

6. Uma partícula percorre uma trajetória retilínea e sua velocidade escalar varia em função do tempo, como mostra o diagrama horário.



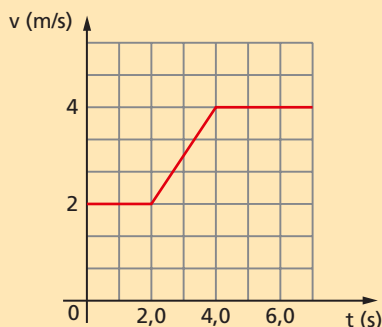
- Classifique o movimento em acelerado ou retardado e, ainda, em progressivo ou retrógrado.
- Determine a aceleração escalar α .
- Determine, graficamente, o instante T de inversão de sentido e a velocidade escalar inicial v_0 .

7. O gráfico representa a posição (s) no movimento de um homem, em função do tempo.



- a) Qual a sua velocidade escalar:
- para $t = 5,0$ s?
 - para $t = 20$ s?
- b) Descreva o que ocorreu entre os instantes $t_1 = 10$ s e $t_2 = 20$ s.

8. Um ponto material movimenta-se sobre uma trajetória retilínea, e sua velocidade varia com o tempo, de acordo com o diagrama.



Determine no intervalo de tempo de 0 a 6,0 s:

- a) a aceleração escalar média;
- b) a velocidade escalar média.

Resolução:

a) $\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Temos, do gráfico:

$$t_2 = 6,0 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 4,0 \text{ m/s}$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow v_0 = 2,0 \text{ m/s}$$

$$\alpha_m = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - t_0} = \frac{4,0 - 2,0}{6,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_m = \frac{1,0}{3} \text{ m/s}^2 \text{ ou } \alpha_m = 0,33 \text{ m/s}^2$$

b) $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

No gráfico da velocidade, o deslocamento escalar se calcula pela área da figura.

Como o diagrama está quadriculado, basta contar os quadradinhos: 27.

$$3 \text{ quadradinhos} \longrightarrow 2,0 \text{ m}$$

$$27 \text{ quadradinhos} \longrightarrow \Delta s$$

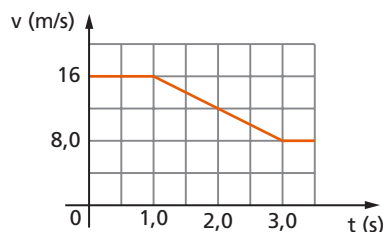
$$\Delta s = \frac{27 \cdot 2,0 \text{ m}}{3} = 18 \text{ m}$$

Logo:

$$v_m = \frac{18 \text{ m}}{6,0 \text{ s}} \Rightarrow v_m = 3,0 \text{ m/s}$$

Observação: prestando-se bastante atenção à simetria do gráfico, o valor de 3,0 m/s poderia ter sido facilmente deduzido.

9. (UF-PI) O gráfico representa a velocidade de um corpo em movimento retilíneo, em função do tempo.

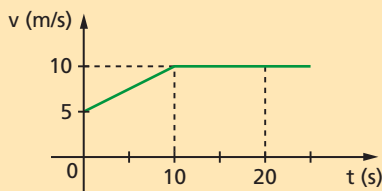


A aceleração média no intervalo de 1,0 s a 3,0 s é, em m/s^2 , de:

- a) -4,0 d) 4,0
- b) -2,7 e) 5,4
- c) 2,7

Exercícios de Reforço

10. (UF-ES) A velocidade de um corpo em movimento retilíneo é dada pelo gráfico.

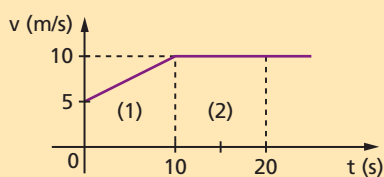


A distância percorrida pelo corpo no intervalo de zero a 20 segundos é de:

- a) 175 m c) 125 m e) 75 m
- b) 150 m d) 100 m

Resolução:

A distância percorrida pode ser calculada pela área do gráfico da velocidade \times tempo. Devemos tomar cuidado para não confundir a figura geométrica; no caso, ela não é um trapézio, pois tem 5 lados, ao passo que o trapézio tem apenas 4 lados. Vamos dividi-la em 2 partes.



área (1): $A_1 = \frac{(b + B) \cdot h}{2}$ (trapézio)

$$A_1 = \frac{(5 + 10) \cdot 10}{2} = 75 \Rightarrow d_1 = 75 \text{ m}$$

área (2): $A_2 = b \cdot h$ (retângulo)

$$A_2 = 10 \cdot 10 = 100 \Rightarrow d_2 = 100 \text{ m}$$

$$d_{\text{TOTAL}} = d_1 + d_2 = 75 \text{ m} + 100 \text{ m}$$

$$d_{\text{TOTAL}} = 175 \text{ m}$$

A resposta correta é a.

11. Retome a questão anterior e responda: quanto vale a velocidade escalar média entre os instantes zero e 20 s?

- a) 8,75 m/s c) 6,25 m/s e) 3,15 m/s
b) 7,5 m/s d) 5,0 m/s

Resolução:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d_{\text{TOTAL}}}{\Delta t}$$

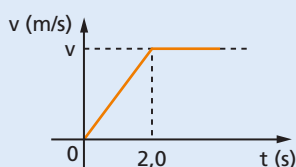
$$v_m = \frac{175 \text{ m}}{20 \text{ s}} \Rightarrow v_m = 8,75 \text{ m/s}$$

A resposta correta é a.

12. Uma partícula, inicialmente em repouso, adquire um movimento uniformemente acelerado e, em 2,0 s, tem velocidade escalar v . Mantém-se em movimento uniforme a partir desse instante, durante 6,0 s. Começa então a frear com uma aceleração constante de mesmo módulo que a inicial, parando no instante $t = 10$ s.

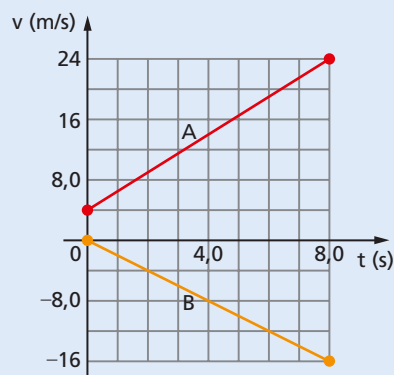
- a) Esboce o gráfico velocidade \times tempo e indique corretamente os valores do tempo no eixo de abscissas. Indique apenas por v a máxima velocidade.
b) Sabendo-se que a distância percorrida foi 80 m, determine v .
c) Determine a velocidade escalar média nos 10 s de movimento.
d) Determine o módulo das acelerações inicial e final.

13. Um atleta, partindo do repouso, corre os 100 m rasos de uma corrida em 11 s, tendo acelerado durante os 2,0 s iniciais, como mostra o gráfico.



Determine a velocidade escalar máxima atingida e a respectiva aceleração escalar nos dois segundos iniciais.

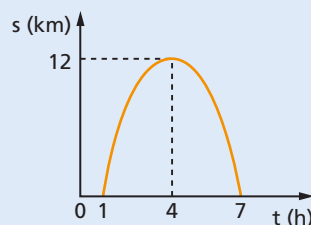
14. (Fuvest-SP) Dois automóveis A e B deslocam-se em um longo trecho retilíneo de uma autoestrada, em sentidos opostos. No gráfico estão representadas as velocidades escalares, em função do tempo, dos dois automóveis.



As acelerações escalares dos automóveis A e B, no instante $t = 4,0$ s, medidas em m/s^2 , são, respectivamente:

- a) 3,5 e -2,0 d) 3,5 e -3,0
b) 2,5 e 2,0 e) 2,5 e -1,5
c) 2,5 e -2,0

15. Na figura a seguir é mostrado o gráfico da posição \times tempo de um carro em movimento uniformemente variado.

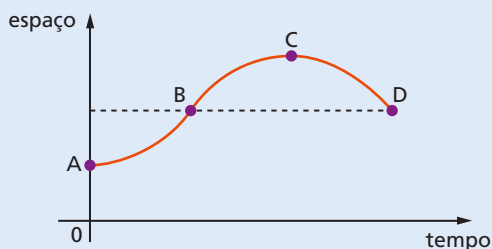


Com base no gráfico, analise cada afirmativa e assinale falso ou verdadeiro:

- I. No instante $t = 4$ h o móvel encontrava-se na posição 12 km, sua velocidade instantânea era nula e ele estava fazendo uma inversão de sentido.
II. Na posição $s = 10$ km, sua velocidade é positiva e o movimento é retardado, antes de se inverter o sentido.
III. Da origem das abscissas até o instante $t = 4$ h, o móvel percorreu 12 km e, portanto, sua velocidade escalar média foi de 3 km/h.
IV. No instante $t = 5$ h a velocidade escalar é negativa e o movimento é acelerado.

- a) Todas são verdadeiras.
 b) Todas são falsas.
 c) São verdadeiras apenas: I, II e IV.
 d) São falsas apenas: II e IV.
 e) Apenas a I é verdadeira.

16. (FCM-MG) O gráfico espaço \times tempo, a seguir, representa o movimento de um carro numa estrada retilínea. As secções AB e BCD são dois arcos de parábola, com eixos de simetria na direção do eixo dos espaços e vértices nos pontos A e C, respectivamente.

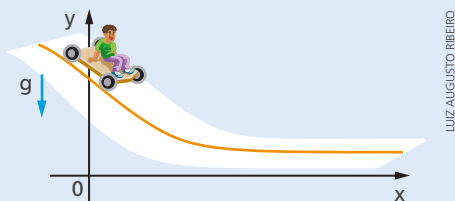


Este gráfico está mostrando que o carro:

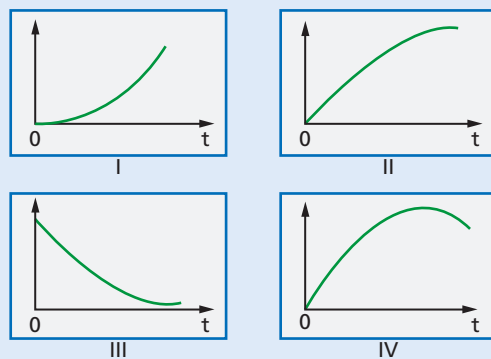
- a) partiu com uma certa velocidade escalar, que foi aumentando, e depois freou sem chegar a parar.
 b) partiu do repouso, aumentou de velocidade escalar, freou até parar e começou a voltar com movimento acelerado.
 c) partiu com uma certa velocidade escalar, mantendo esta por um tempo, e começou a voltar.
 d) partiu do repouso, mantendo uma mesma velocidade escalar, freando logo depois.
 e) partiu do repouso e acelerou no restante do tempo sem frear em nenhum momento.

(Observação dos autores: o termo **espaço** está empregado, neste exercício, como sinônimo de **posição**.)

17. (Fuvest-SP) Na Cidade Universitária (USP), um jovem, em um carrinho de rolimã, desce a rua do Matão, cujo perfil está representado na figura abaixo, em um sistema de coordenadas em que o eixo Ox tem a direção horizontal. No instante $t = 0$, o carrinho passa em movimento pela posição $y = y_0$ e $x = 0$.

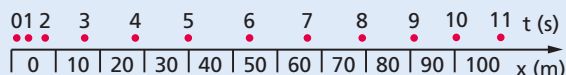


Dentre os gráficos das figuras, os que melhor poderiam descrever a posição x e a velocidade v do carrinho em função do tempo t são, respectivamente,

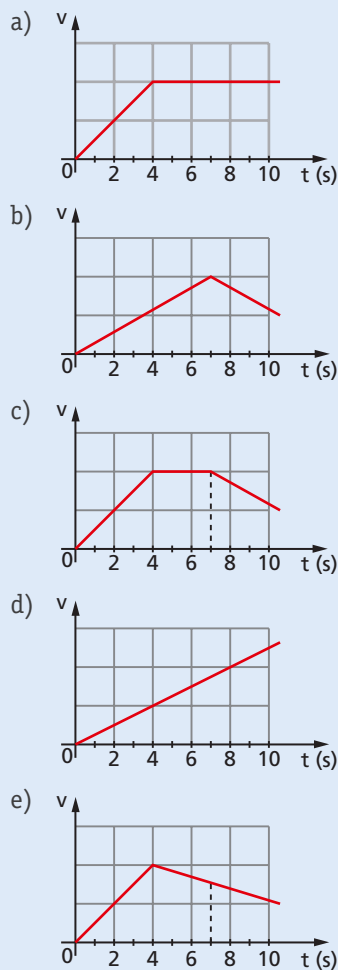


- a) I e II c) II e IV e) IV e III
 b) I e III d) III e II

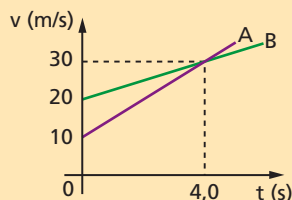
18. (UF-RS) A sequência de pontos na figura marca as posições, em intervalos de 1 segundo, de um corredor de 100 metros rasos, desde a largada até após a chegada.



Assinale o gráfico que melhor representa a evolução da velocidade escalar instantânea do corredor.

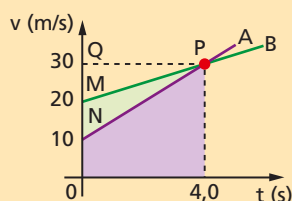


19. O gráfico indica a velocidade em função do tempo de dois móveis movendo-se em trajetória retilínea, no mesmo sentido. Sabe-se que eles partiram, no instante $t = 0$, do mesmo local. Determine a distância entre A e B, no instante $t = 4,0$ s.



Resolução:

No diagrama horário de velocidade escalar pode-se calcular a distância percorrida através da área do gráfico. Assim, a distância percorrida por A corresponderia à área de um trapézio (o menor) e a distância percorrida por B à área do outro trapézio (o maior), até o instante $t = 4,0$ s. A distância (d) que os separa, no instante $t = 4,0$ s, será dada pela diferença entre as duas áreas.



Pela figura notamos que essa diferença corresponde, justamente, à área do triângulo MNP. Dele temos:

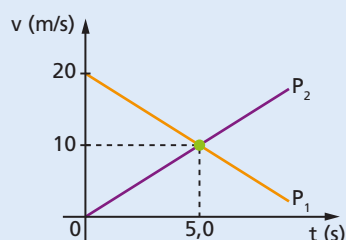
base: $MN = 10$; altura: $QP = 4,0$

$$d \stackrel{N}{=} \text{área} (\triangle MNP) = \frac{b \cdot h}{2}$$

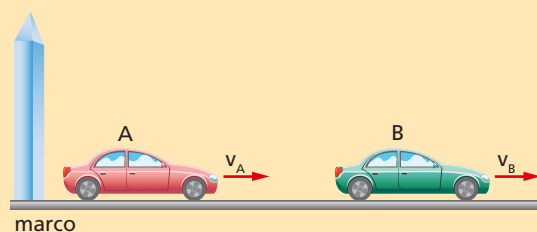
$$d = \frac{10 \cdot 4,0}{2} \text{ (m)}$$

$$d = 20 \text{ m}$$

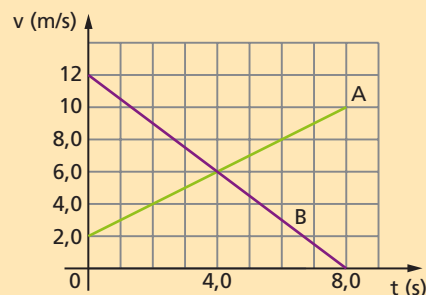
20. Dois móveis, P_1 e P_2 , deslocam-se ao longo de uma mesma reta. Suas velocidades escalares estão representadas, em função do tempo, no gráfico. Que distância os separa no instante $t_1 = 5,0$ s? Sabe-se ainda que no instante $t = 0$ eles estavam na origem dos espaços.



21. Dois automóveis, A e B, passam simultaneamente por um "marco" de uma estrada no instante $t_0 = 0$. Ao passarem por esse marco, o carro A possuía menor velocidade que B. Com isso, este se distanciou de A. No entanto, devido à sua aceleração, o carro A teve sua velocidade aumentada e acabou alcançando B.



O diagrama horário das velocidades dos carros mostra como isso aconteceu.



- Compare as velocidades escalares no instante $t_1 = 4,0$ s.
- Demonstre que o carro A alcançou B no instante $t_2 = 8,0$ s.

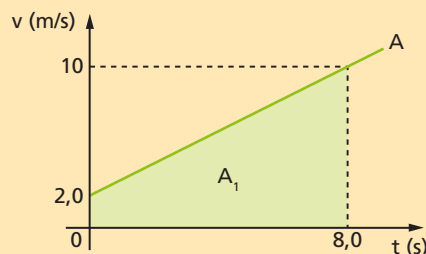
Resolução:

- No instante $t_1 = 4,0$ s as velocidades escalares se igualaram.

$$v_A = v_B = 6,0 \text{ m/s}$$

Isso aconteceu porque B possuía aceleração escalar negativa e sua velocidade escalar decresceu. Com A ocorreu o inverso.

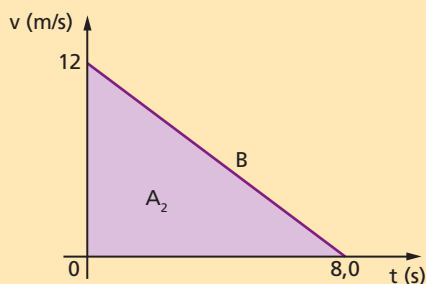
- Para demonstrar que A alcançou B no instante $t_2 = 8,0$ s, basta provar que as distâncias percorridas se igualaram nesse instante.



$$\Delta s_A \stackrel{N}{=} \text{área } A_1 = \frac{(B + b) h}{2}$$

$$\Delta s_A = \frac{(10 + 2,0) \cdot 8,0}{2}$$

$$\Delta s_A = 48 \text{ m}$$



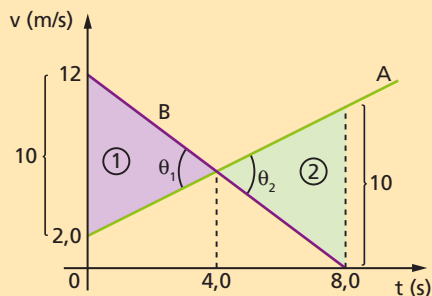
$$\Delta s_B \stackrel{N}{=} \text{área } A_2 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\Delta s_B = \frac{8,0 \cdot 12}{2}$$

$$\Delta s_B = 48 \text{ m}$$

Logo, $\Delta s_A = \Delta s_B$

Outro modo de provar que as áreas se igualam é o da “comparação dos triângulos”.



Conforme vimos no exercício 19, a área do triângulo ① representa a distância que os separa no instante $t_1 = 4,0$ s.

Como A teve sua velocidade escalar aumentada e B diminuída, A começou a recuperar essa diferença de espaço a partir de $t_1 = 4,0$ s, quando $v_A > v_B$.

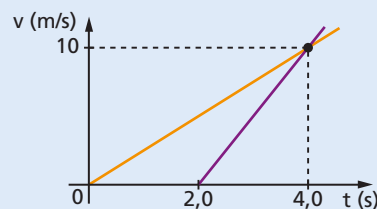
A área do triângulo ② representa a distância recuperada até o instante $t_2 = 8,0$ s.

Porém, os triângulos ① e ② são congruentes, pois têm:

- a mesma base = 10
- a mesma altura = 4,0
- ângulos congruentes: $\theta_1 = \theta_2$

Isso demonstra que as distâncias percorridas se compensaram em $t_2 = 8,0$ s e que o carro A alcançou o B.

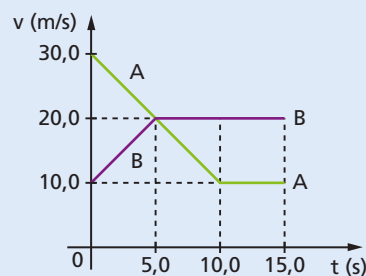
- 22.** Na figura estão representados os diagramas das velocidades escalares de dois pontos materiais, em função do tempo. Suas trajetórias são coincidentes e retilíneas. No instante $t = 0$ eles estavam em repouso, na origem dos espaços.



Determine a distância entre eles:

- no instante $t_1 = 2,0$ s;
- no instante $t_2 = 4,0$ s.

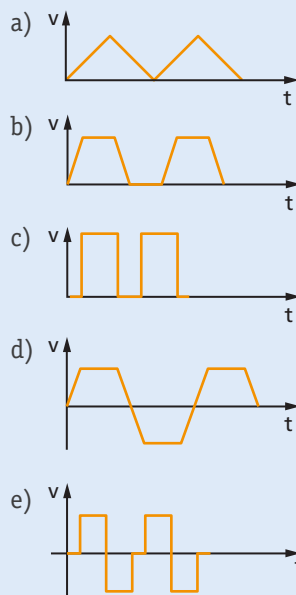
- 23.** (Cefet-CE) Numa pista reta, quando o carro A ultrapassa o carro B, marcamos o instante $t_0 = 0$. O gráfico registra o que aconteceu a partir deste instante, até 15,0 s.



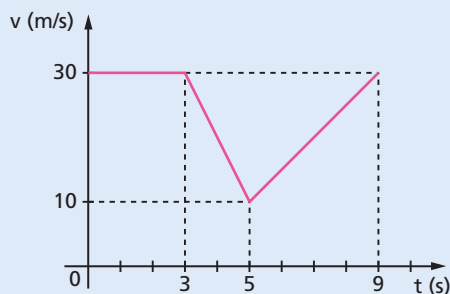
O carro B volta a passar por A depois de um intervalo de tempo, em segundos, igual a:

- 45,5
- 15,5
- 12,5
- 10,5
- 5,5

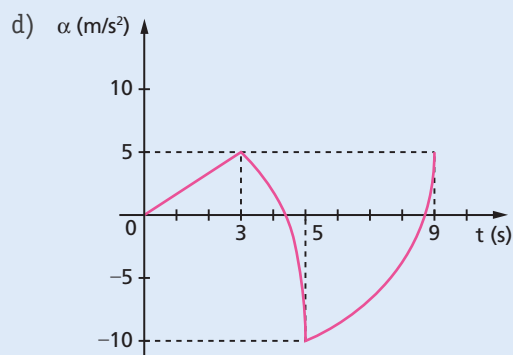
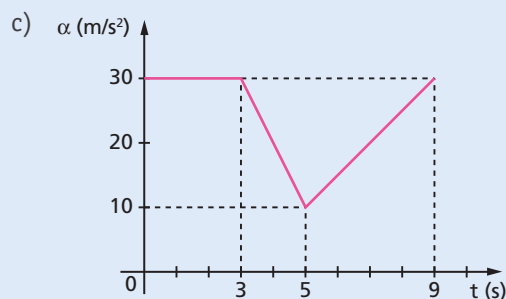
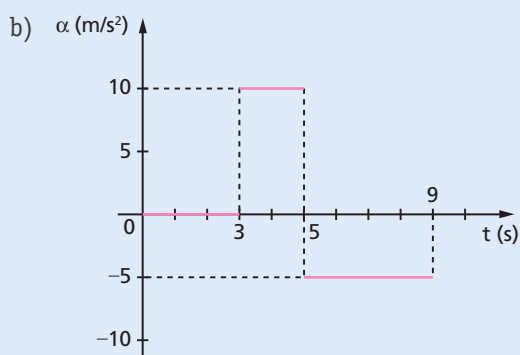
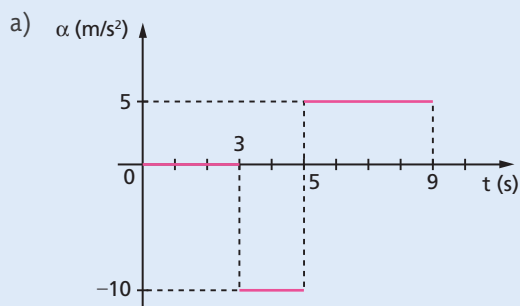
- 24.** (Udesc-SC) Um estudante toma o metrô e desce duas estações depois. Entre os gráficos abaixo, qual é aquele que melhor representa a velocidade v , em função do tempo t , da composição do metrô, nesse trajeto?



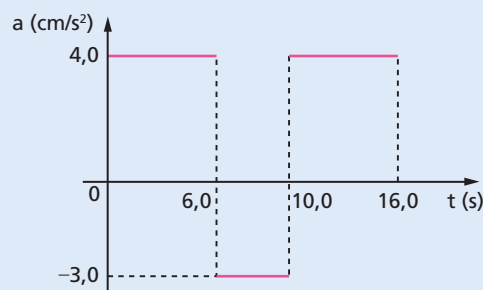
25. (UF-ES) O diagrama da figura representa a velocidade de um objeto em função do tempo.



O gráfico que melhor representa a aceleração em função do tempo é:

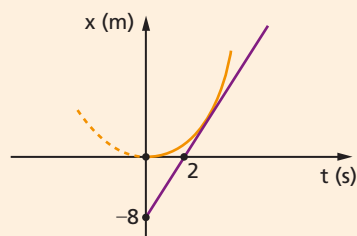


26. (UE-RJ) Um trem de brinquedo, com velocidade escalar inicial de $2,0 \text{ cm/s}$, é acelerado durante 16 s . O comportamento da aceleração escalar nesse intervalo de tempo é mostrado no gráfico. Calcule, em cm/s , a velocidade escalar do corpo imediatamente após esses 16 s .



Exercícios de Aprofundamento

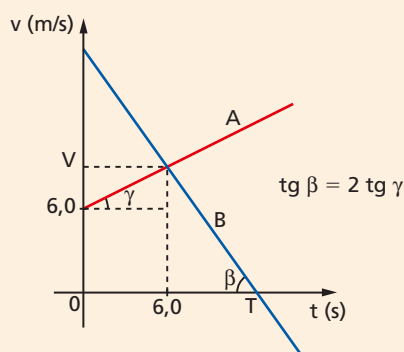
27. Duas partículas se movem sobre um eixo de abscissas x e suas posições são dadas pelo diagrama horário da figura. Uma delas tem aceleração escalar constante e igual a $1,0 \text{ m/s}^2$.



Determine:

- o instante T em que as duas partículas têm a mesma velocidade;
- a posição de cada partícula nesse instante T .

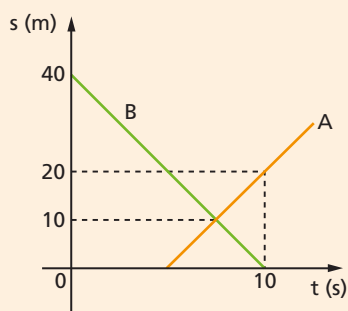
28. Duas partículas, A e B , percorrem uma mesma trajetória retilínea e o diagrama horário de suas velocidades escalares é dado pela figura. No instante $t = 6,0 \text{ s}$, elas ocupam a mesma posição. A partícula B inverte o sentido de seu movimento no instante $T = 12 \text{ s}$.



Determine:

- a razão entre a aceleração escalar de A e a aceleração escalar de B: $\left(\frac{a_A}{a_B}\right)$;
- a velocidade escalar inicial da partícula B;
- a velocidade escalar comum v;
- a distância entre as duas partículas no instante $t = 0$.

29. (AFA-SP) O diagrama representa as posições de dois corpos A e B em função do tempo.



Por este diagrama, afirma-se que o corpo A iniciou o seu movimento, em relação ao corpo B, depois de:

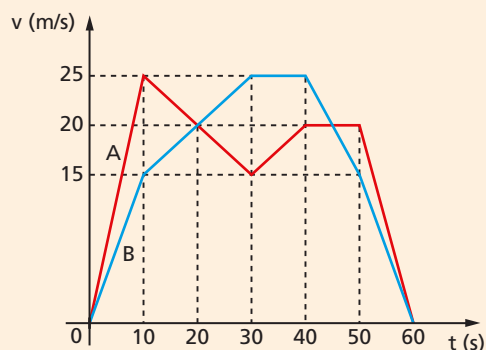
- 2,5 s
 - 7,5 s
 - 5,0 s
 - 10 s
30. (Fuvest-SP) Um carro viaja com velocidade de 90 km/h (ou seja, 25 m/s) num trecho retilíneo de uma rodovia quando, subitamente, o motorista vê um animal parado na sua pista. Entre o instante em que o motorista avista o animal e aquele em que começa a frear, o carro percorre 15 m. Se o motorista frear o carro à taxa constante de $5,0 \text{ m/s}^2$, mantendo-o em sua trajetória retilínea, ele só evitará atingir o animal, que permaneceu imóvel durante todo o tempo, se o tiver percebido a uma distância de, no mínimo:
- 15 m
 - 31,25 m
 - 52,5 m
 - 77,5 m
 - 125 m

(Sugestão dos autores: construa o gráfico da velocidade \times tempo.)

31. (ITA-SP) Um automóvel com velocidade escalar de 90 km/h passa por um guarda num local em que a velocidade escalar máxima é de 60 km/h. O guarda começa a perseguir o infrator com a sua motocicleta, mantendo aceleração escalar constante, até que atinge 108 km/h em 10 s e continua com essa velocidade escalar até alcançá-lo, quando lhe faz sinal para parar. O automóvel e a moto descrevem trajetórias retilíneas paralelas. Pode-se afirmar que:

- o guarda levou 15 s para alcançar o carro.
- o guarda levou 60 s para alcançar o carro.
- a velocidade escalar do guarda, ao alcançar o carro, era de 25 m/s.
- o guarda percorreu 750 m desde que saiu em perseguição até alcançar o motorista infrator.
- o guarda não consegue alcançar o infrator.

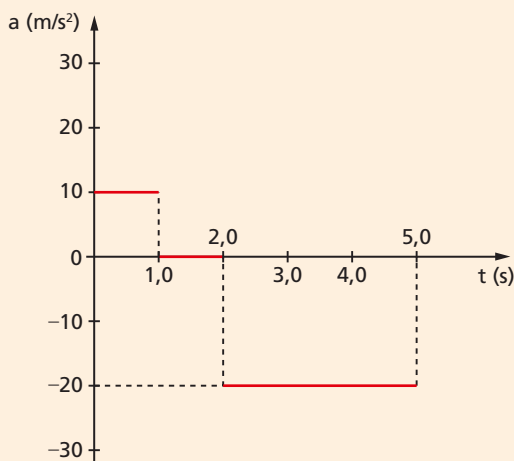
32. (UE-MA) Dois móveis A e B partem simultaneamente de um mesmo ponto, em trajetória retilínea e no mesmo sentido. As velocidades, em função do tempo t , em segundos, dos movimentos de A e de B são representadas no gráfico.



Considerando o exposto, assinale o que for correto.

- No instante $t = 20 \text{ s}$, os móveis têm a mesma velocidade.
- As acelerações $a_A(t)$ e $a_B(t)$, em função do tempo t , dos móveis A e B, respectivamente, satisfazem $a_A(t) > a_B(t)$, em que $0 < t < 10$.
- Entre 30 s e 40 s, o móvel B permaneceu em repouso.
- Até o instante $t = 40 \text{ s}$, o móvel B não havia alcançado o móvel A.
- Entre os instantes $t = 0$ e $t = 60$ segundos, os móveis A e B percorreram a mesma distância.

33. (UF-PE) A figura mostra o gráfico da aceleração escalar em função do tempo para uma partícula que realiza um movimento composto de movimentos retilíneos uniformemente variados. Sabendo-se que em $t_1 = 1,0$ s a posição é $x_1 = +50$ m e a velocidade escalar é $v_1 = +20$ m/s, calcule a posição da partícula no instante $t_2 = 5,0$ s, em metros.



34. (UE-RJ) Os gráficos 1 e 2 representam a posição S de dois corpos em função do tempo t .

gráfico 1

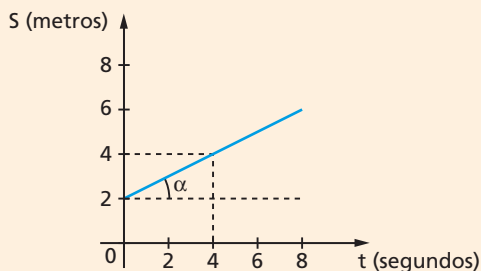
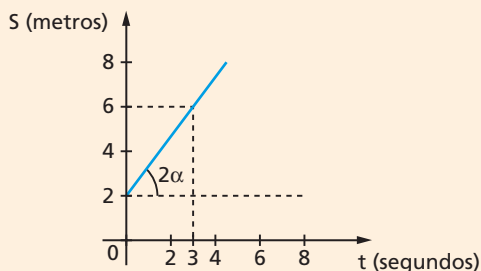


gráfico 2



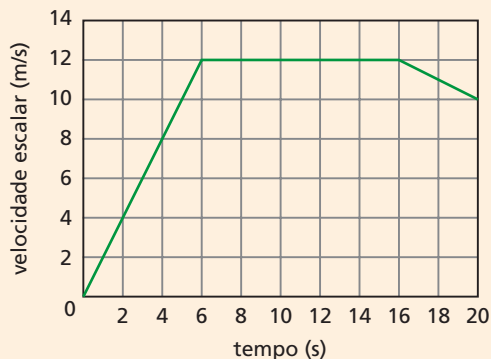
No gráfico 1, a função horária é definida pela equação $S = 2 + \frac{1}{2}t$.

Assim, a equação que define o movimento representado pelo gráfico 2 corresponde a:

- a) $S = 2 + t$ (SI) c) $S = 2 + \frac{4}{3}t$ (SI)
b) $S = 2 + 2t$ (SI) d) $S = 2 + \frac{6}{5}t$ (SI)

(Dado: $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - (\text{tg } \alpha)^2}$)

35. (Unicamp-SP) O gráfico representa, aproximadamente, a velocidade escalar de um atleta em função do tempo, em uma competição olímpica.



- a) Em que intervalo de tempo o módulo da aceleração escalar tem o menor valor?
b) Em que intervalo de tempo o módulo da aceleração escalar é máximo?
c) Qual é a distância percorrida pelo atleta durante os 20 s?
d) Qual a velocidade escalar média do atleta durante a competição?

36. (IJSO) Um objeto com velocidade escalar inicial v_0 e uma aceleração escalar constante a , percorre uma distância L_1 . A partir daí começa a desacelerar com uma aceleração escalar de mesmo módulo a , e para após percorrer uma nova distância L_2 .

Se a razão $\frac{L_2}{L_1} = k$, qual é o máximo valor da velocidade escalar do objeto durante seu deslocamento?

- a) $\frac{k-1}{k+1} v_0$ d) $\sqrt{\frac{k+1}{k}} v_0$
b) $\sqrt{\frac{k}{k-1}} v_0$ e) $\frac{k+1}{k-1} v_0$
c) $\frac{k}{k-1} v_0$

(Sugestão dos autores: construa o gráfico velocidade \times tempo.)

Vetores

1. Grandezas escalares e grandezas vetoriais

No capítulo 2 vimos que as grandezas dividem-se em dois grupos: grandezas escalares e grandezas vetoriais.

As grandezas vetoriais têm um comportamento um pouco diferente do das grandezas escalares e, para estudá-las, foi criado o conceito de **vetor**, que será visto mais adiante. Porém, antes disso, vamos recordar algumas noções da Geometria.

2. Direção e sentido

Dizemos que duas retas têm a **mesma direção** quando elas são **paralelas**. O conceito de direção aplica-se também a **segmentos de reta**. Dizemos que dois segmentos de reta têm a mesma direção quando eles estão sobre a mesma reta ou estão sobre retas paralelas.

Exemplo 1

- a) As retas paralelas r e s da figura 1 têm a mesma direção.

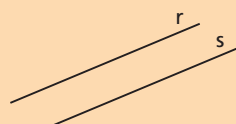


Figura 1.

- b) As retas x e y da figura 2 não têm a mesma direção.

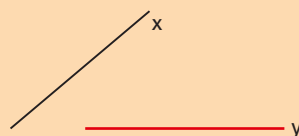


Figura 2.

- c) Na figura 3, os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{CD} , que estão sobre as retas paralelas r e s , têm a mesma direção. Os segmentos \overline{CD} e \overline{EF} têm a mesma direção. Os segmentos \overline{CD} e \overline{GH} têm direções diferentes.

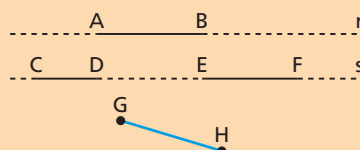


Figura 3.

1. Grandezas escalares e grandezas vetoriais
2. Direção e sentido
3. Vetor
4. Igualdade de vetores
5. Adição de vetores
6. Regra do paralelogramo
7. Lei dos Cossenos e Lei dos Senos
8. Subtração de vetores
9. Multiplicação de um vetor por um número
10. Decomposição de um vetor

Consideremos agora um segmento de reta \overline{AB} (fig. 4a). Sobre esse segmento podemos imaginar dois sentidos de percurso: um de A para B , outro de B para A . Assim, podemos considerar dois segmentos orientados diferentes: o segmento orientado \overrightarrow{AB} (fig. 4b) e o segmento orientado \overrightarrow{BA} (fig. 4c). Os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} têm a **mesma direção**, mas não têm o mesmo sentido: eles têm **sentidos opostos**.

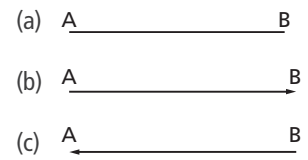


Figura 4.

Exemplo 2

Na figura 5, supondo que as retas r e s sejam paralelas, podemos afirmar que:

- os segmentos orientados \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{EF} têm a mesma direção;
- os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{EF} têm o mesmo sentido;
- os segmentos orientados \overrightarrow{EF} e \overrightarrow{CD} têm sentidos opostos.

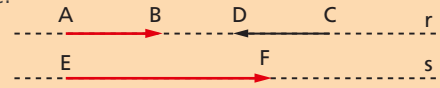


Figura 5.

Dado um segmento orientado \overrightarrow{AB} , A é sua **origem** e B é sua **extremidade**.

Para que a teoria fique completa, admite-se a existência de um segmento orientado \overrightarrow{AB} em que A coincide com B : é o **segmento nulo** (na realidade, é um ponto). Para o segmento nulo não se define direção nem sentido.

O módulo do segmento orientado \overrightarrow{AB} é a medida (ou comprimento) de \overrightarrow{AB} com base numa dada unidade u . O módulo de \overrightarrow{AB} pode ser indicado por:

$$|\overrightarrow{AB}|$$

Se o segmento for nulo, o seu módulo será igual a zero. É óbvio também que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

Exemplo 3

Para o caso da figura 6, se adotarmos o segmento \overline{XY} como unitário (isto é, seu comprimento é igual a uma unidade), teremos: $|\overrightarrow{AB}| = 2$ e $|\overrightarrow{CD}| = 3$.

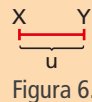


Figura 6.

3. Vetor

Consideremos um segmento orientado \overrightarrow{AB} , não nulo. Consideremos, em seguida, o conjunto de **todos** os segmentos orientados que tenham o **mesmo módulo**, a **mesma direção** e o **mesmo sentido** de \overrightarrow{AB} . Esse conjunto é um **vetor**. Para representar esse vetor, tomamos um segmento orientado qualquer do conjunto. Podemos também indicar um vetor por uma letra com uma flecha "em cima".

Exemplo 4

Para o caso representado na figura 7, supondo que as retas r , s e t sejam paralelas e que os segmentos orientados tenham o mesmo comprimento, podemos afirmar que eles têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Portanto, eles representam um mesmo vetor, que pode ser indicado, por exemplo, por \vec{a} .

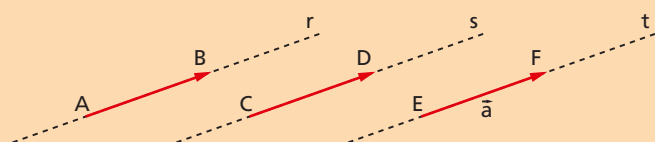


Figura 7.

Dado um vetor \vec{a} , o seu módulo é o de cada um dos segmentos orientados que formam o vetor. Podemos representar o módulo de \vec{a} por $|\vec{a}|$ ou simplesmente por a , quando não houver possibilidade de confusão.

São definidos ainda o **vetor nulo** e o **vetor unitário**. Vetor **nulo** é o conjunto de todos os segmentos nulos, sendo representado por $\vec{0}$. Temos então:

$$|\vec{0}| = 0$$

Um vetor é chamado **unitário** quando o seu módulo é igual a 1. Assim, por exemplo, se

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1 \text{ e } |\vec{x}| = 1$$

podemos dizer que \vec{a} , \vec{b} e \vec{x} são vetores unitários. Um vetor unitário é chamado também **versor**.

Vimos então, pela definição, que um vetor não é a mesma coisa que um segmento orientado. Um vetor é um **conjunto** de segmentos orientados. No entanto, para facilitar a exposição, é comum cometer-se o “abuso de linguagem” que consiste em falar no segmento orientado como se **ele** fosse o vetor, quando na realidade ele apenas representa o vetor. Daqui por diante cometeremos frequentemente esse “abuso”.

4. Igualdade de vetores

Dois vetores não nulos são iguais se, e somente se, tiverem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Para indicar que o vetor \vec{a} é igual ao vetor \vec{b} , escrevemos $\vec{a} = \vec{b}$.

Levando em conta a definição de vetor, ao dizermos que $\vec{a} = \vec{b}$, estamos dizendo que \vec{a} e \vec{b} são o **mesmo vetor**, isto é, são o mesmo conjunto de segmentos orientados.

De acordo com o exposto, concluímos que, para que um vetor \vec{a} seja diferente de um vetor \vec{b} , basta que difira em pelo menos um dos seguintes elementos: módulo, direção ou sentido.

Exemplo 5

- Na figura 8a, os vetores \vec{a} e \vec{b} têm o mesmo módulo e a mesma direção (supondo as retas r e s paralelas); no entanto, têm sentidos opostos. Assim, o vetor \vec{a} não é igual ao vetor \vec{b} : $\vec{a} \neq \vec{b}$.
- Os vetores \vec{x} e \vec{y} , representados na figura 8b, têm o mesmo módulo, mas direções diferentes. Portanto, \vec{x} não é igual a \vec{y} : $\vec{x} \neq \vec{y}$.
- Os vetores \vec{c} e \vec{d} , representados na figura 8c, são diferentes, pois não têm o mesmo módulo, embora tenham a mesma direção e o mesmo sentido (supondo r e s paralelas): $\vec{c} \neq \vec{d}$.
- Os vetores \vec{w} e \vec{k} da figura 8d são iguais, pois têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

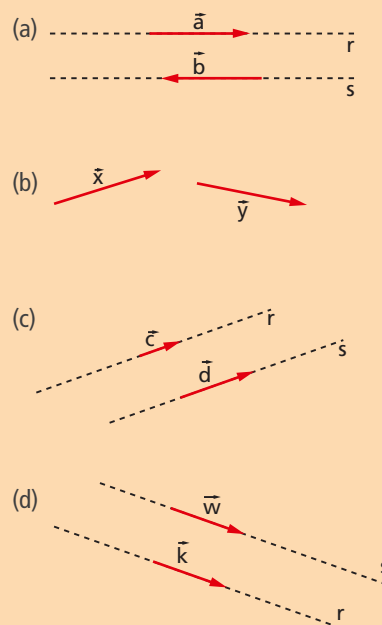


Figura 8.

5. Adição de vetores

Consideremos dois vetores não nulos quaisquer \vec{a} e \vec{b} (fig. 9a). Tomemos um segmento orientado representante de \vec{a} e outro segmento orientado representante de \vec{b} , de modo que eles sejam consecutivos (por exemplo, como na fig. 9b). Ligando a origem do primeiro com a extremidade do segundo, obtemos o vetor \vec{s} , que é chamado **soma** ou **resultante** de \vec{a} e \vec{b} (fig. 9c).

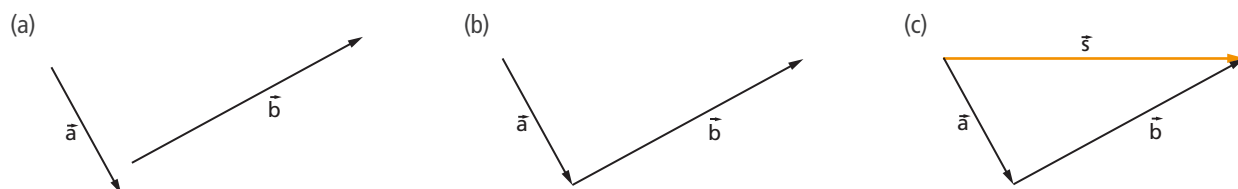


Figura 9.

Poderíamos também proceder como está indicado na figura 10. O resultado seria o mesmo:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{s}$$

É interessante observar que, no caso da figura 10, temos:

$$|\vec{s}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

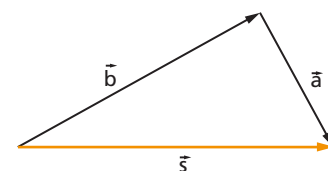


Figura 10.

A operação que determina a soma de dois vetores é denominada **adição de vetores**.

Casos particulares

Vetores de mesma direção e mesmo sentido

Consideremos os vetores \vec{a} e \vec{b} da figura 11a. Para obtermos a soma \vec{s} de \vec{a} e \vec{b} , consideremos segmentos orientados consecutivos que representem \vec{a} e \vec{b} ; a soma \vec{s} é obtida ligando-se a origem do primeiro à extremidade do segundo (fig. 11b).

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

É fácil perceber que, nesse caso, temos: $|\vec{s}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

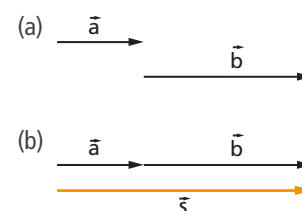


Figura 11.

Vetores de mesma direção e sentidos opostos

Consideremos os vetores da figura 12a. A operação de adição está representada na figura 12b.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Nesse caso, temos: $|\vec{s}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

Adição com o vetor nulo

Para qualquer vetor \vec{a} temos:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

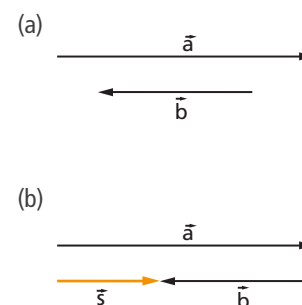


Figura 12.

Adição de mais de dois vetores

Podemos obter a soma de mais de dois vetores pelo mesmo processo visto para a soma de dois. Por exemplo, consideremos os vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} , representados na figura 13.

Tomemos segmentos orientados consecutivos que representem os vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} . A soma \vec{s} é representada pelo segmento orientado que vai da origem do primeiro à extremidade do último (fig. 14).

Poderíamos ter procedido também como na figura 15, isto é:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{d} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$$

O processo que vimos para a obtenção da soma de vetores é chamado de **regra do polígono**. No entanto, podemos obter a soma de vetores usando uma outra regra, conhecida pelo nome de **regra do paralelogramo**, que será apresentada a seguir.

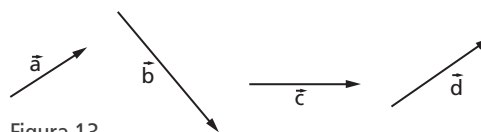


Figura 13.

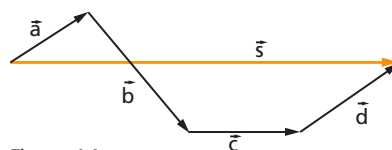


Figura 14.

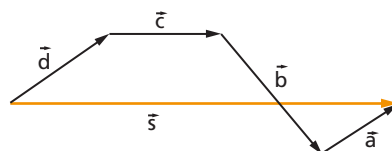


Figura 15.

6. Regra do paralelogramo

Consideremos, por exemplo, os vetores \vec{a} e \vec{b} da figura 16. Para obtermos a soma desses vetores pela regra do paralelogramo, consideremos segmentos orientados de mesma origem que representem \vec{a} e \vec{b} (segmentos orientados \overline{AB} e \overline{AC} da fig. 17). A seguir, tomamos um ponto D de modo que $ABDC$ seja um paralelogramo (fig. 18). O segmento orientado \overline{AD} (o qual tem a direção de uma das diagonais do paralelogramo) representa a soma \vec{s} dos vetores dados (fig. 19). Para mostrarmos que esse processo realmente fornece a soma \vec{s} , basta observar que o segmento orientado \overline{BD} também representa o vetor \vec{b} e aplicar a regra do polígono (fig. 20).

Para obtermos a soma de mais de dois vetores pela regra do paralelogramo, devemos fazer a adição de dois em dois: a soma dos dois primeiros é adicionada ao terceiro, a nova soma é adicionada ao quarto e assim por diante.

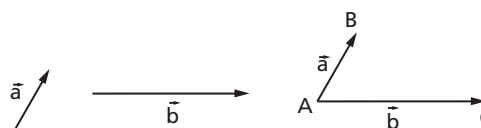


Figura 16.

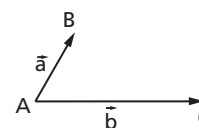


Figura 17.

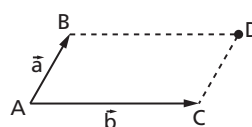


Figura 18.

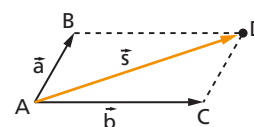


Figura 19.

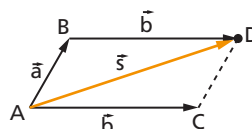


Figura 20.

7. Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Na resolução de exercícios, frequentemente necessitaremos da **Lei dos Cossenos** (fig. 21) e da **Lei dos Senos** (fig. 22), as quais valem para quaisquer triângulos.

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \theta \quad (\text{Lei dos Cossenos})$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{Lei dos Senos})$$

Quando necessário, consultaremos a tabela que se encontra no CD para obter o seno ou cosseno de um ângulo. Ao usarmos essa tabela, poderemos precisar da propriedade:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = -\cos \beta \end{cases}$$

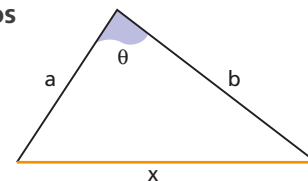


Figura 21.

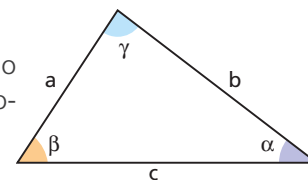


Figura 22.

Há alguns ângulos cujos senos e cossenos devem ser memorizados. Esses ângulos aparecem na tabela ao lado.

Quando $\theta = 90^\circ$, temos $\cos \theta = 0$, e a Lei dos Cossenos transforma-se no Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + b^2$$

Também são úteis as propriedades:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \sin \beta$$

	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Exemplo 6

$$\text{a) } 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Propriedade

Consideremos o caso em que obtemos a resultante de vetores pela regra do paralelogramo (fig. 23).

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo ABC, temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta \quad (1)$$

Mas $\theta + \alpha = 180^\circ$, o que acarreta:

$$\cos \theta = -\cos \alpha \quad (2)$$

Das igualdades (2) e (1) concluímos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-\cos \alpha)$$

ou:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha$$

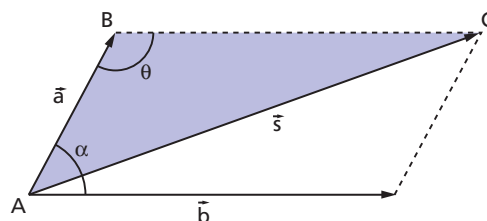
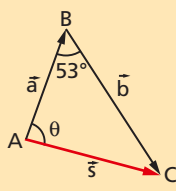
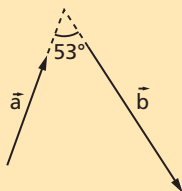


Figura 23.

Exercícios de Aplicação

1. Nas figuras estão representados os vetores \vec{a} e \vec{b} , com $|\vec{a}| = 5$ e $|\vec{b}| = 8$.



- a) Determine o módulo do vetor \vec{s} tal que $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.
b) Determine o ângulo θ entre os vetores \vec{a} e \vec{s} .

Resolução:

- a) Fazemos a adição pela regra do polígono, como indica a figura. Para obtermos $|\vec{s}|$, apliquemos a Lei dos Cossenos ao triângulo ABC. Consultando a tabela que se encontra no CD, obtemos $\cos 53^\circ \approx 0,6$. Assim:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 53^\circ$$

$$s^2 = 5^2 + 8^2 - 2(5) \cdot (8) \cdot (0,6) = 41$$

Portanto, $s = |\vec{s}| = \sqrt{41}$

b) Apliquemos a Lei dos Senos ao triângulo ABC:

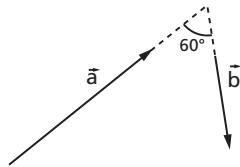
$$\frac{b}{\sin \theta} = \frac{s}{\sin 53^\circ} \quad (1)$$

Consultando a tabela que está no CD ou uma calculadora eletrônica, obtemos $\sin 53^\circ \cong 0,8$. Fazendo as substituições na equação (1), temos:

$$\frac{8}{\sin \theta} \cong \frac{\sqrt{41}}{0,8} \quad \text{ou} \quad \sin \theta = \frac{6,4}{\sqrt{41}} \cong 1$$

Consultando novamente a tabela, observamos que o ângulo cujo seno é igual a 1 é o ângulo de 90° (na realidade, como este é um caso particular conhecido, não era necessário consultar a tabela). Assim, temos que $\theta \cong 90^\circ$.

2. Para os vetores \vec{a} e \vec{b} representados na figura, temos $|\vec{a}| = 10$ e $|\vec{b}| = 4$. Seja \vec{s} o vetor soma de \vec{a} e \vec{b} .



a) Determine $|\vec{s}|$.

b) Determine o ângulo que \vec{s} forma com \vec{a} .
(Consulte a tabela no CD.)

3. Seja \vec{x} a resultante dos vetores \vec{a} e \vec{b} representados na figura a. Determine $|\vec{x}|$. Dados: $|\vec{a}| = 4$ e $|\vec{b}| = 8$.

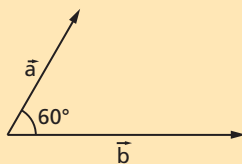


Figura a.

Resolução:

Aplicando a propriedade apresentada no item 7, temos:

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 4^2 + 8^2 + 2(4) \cdot (8) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 112$$

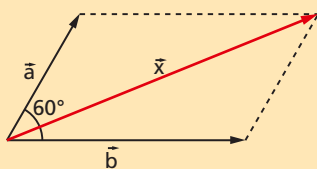


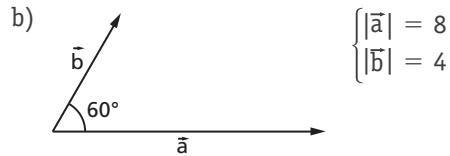
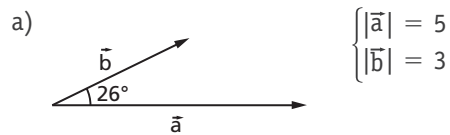
Figura b.

Portanto:

$$x = \sqrt{112} = \sqrt{16(7)} = 4\sqrt{7}$$

$$x = 4\sqrt{7}$$

4. Determine o módulo da resultante dos vetores \vec{a} e \vec{b} em cada caso.



5. Para os vetores \vec{a} e \vec{b} representados na figura a, temos $|\vec{a}| = 5$ e $|\vec{b}| = 3$.

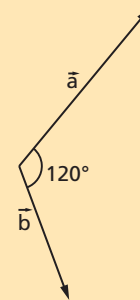


Figura a.

Determine o módulo da resultante desses vetores.

Resolução:

Seja \vec{x} a resultante dos vetores dados. Podemos obter \vec{x} pela regra do paralelogramo, como indicado na figura b.

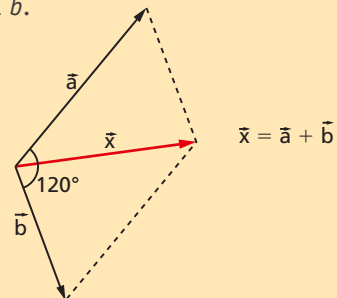


Figura b.

Usando a propriedade vista na página 145, temos:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos 120^\circ \quad (1)$$

Mas:

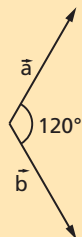
$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Fazendo as substituições na equação (1), vem:

$$x^2 = 5^2 + 3^2 + 2(5) \cdot (3) \cdot (-0,5)$$

donde: $x = \sqrt{19}$

6. Consideremos dois vetores, \vec{a} e \vec{b} , formando ângulo de 120° , tais que $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Sendo \vec{s} a resultante de \vec{a} e \vec{b} , mostre que $|\vec{s}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$.



Resolução:

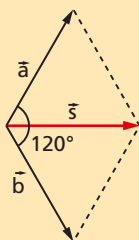
Façamos $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$.

De acordo com a propriedade vista na página 145, temos:

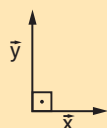
$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos 120^\circ$$

$$s^2 = a^2 + a^2 + 2a(a)\left(-\frac{1}{2}\right) = a^2$$

Portanto, $s = a$, isto é, $|\vec{s}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$

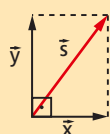


7. Determine o módulo da resultante dos vetores representados na figura, sabendo que $|\vec{x}| = 6$ e $|\vec{y}| = 8$.



Resolução:

Seja \vec{s} a resultante de \vec{x} e \vec{y} .



Como o ângulo entre os vetores dados é reto, podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$$s^2 = x^2 + y^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Portanto, $s = 10$

8. Em cada caso, determine o módulo da resultante dos vetores dados.

a) $\begin{cases} a = 13 \\ b = 7 \end{cases}$

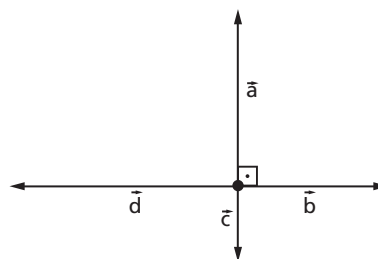
b) $\begin{cases} a = 15 \\ b = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$

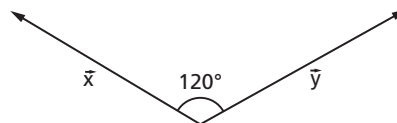
d) $\begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$



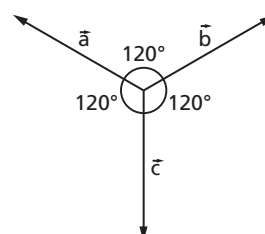
e) $\begin{cases} |\vec{a}| = 7 & |\vec{c}| = 3 \\ |\vec{b}| = 6 & |\vec{d}| = 9 \end{cases}$



f) $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 10$



g) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5$



9. Determine o módulo da resultante dos vetores representados na figura *a*, sabendo que cada divisão do quadriculado mede uma unidade.

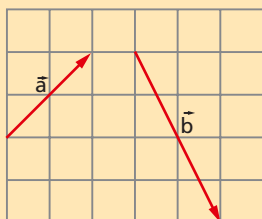


Figura *a*.

Resolução:

Tomemos um representante do vetor \vec{b} , de modo que sua origem coincida com a extremidade de \vec{a} , como mostra a figura *b*.

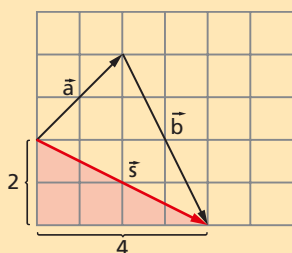


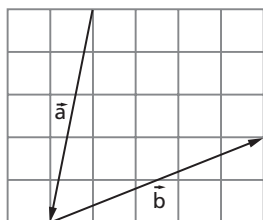
Figura *b*.

O vetor \vec{s} é a soma (ou resultante) de \vec{a} e \vec{b} . Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo colorido na figura, temos:

$$s^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow s^2 = 20 \Rightarrow s = \sqrt{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 2\sqrt{5}$$

10. Considere os vetores \vec{a} e \vec{b} representados na figura. Sendo $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, determine $|\vec{x}|$. (Considere que cada divisão do quadriculado mede uma unidade.)



11. A resultante de três vetores, \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , é nula. Sabendo que \vec{a} é perpendicular a \vec{b} e que $|\vec{a}| = 90$ cm e $|\vec{b}| = 120$ cm, determine o módulo de \vec{c} .

12. Consideremos dois vetores, \vec{a} e \vec{b} , dos quais conhecemos os módulos, mas não sabemos a direção. Sendo $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, quais os valores possíveis para $|\vec{s}|$?

Resolução:

Suponhamos inicialmente que \vec{a} e \vec{b} não sejam nulos e que $|\vec{b}| < |\vec{a}|$. Vamos fixar o vetor \vec{a} e

girar o vetor \vec{b} de modo que a origem de \vec{b} coincida com a extremidade de \vec{a} , como ilustram as figuras *a*, *b*, *c* e *d*; desse modo, a extremidade de \vec{b} descreve uma circunferência de raio $R = |\vec{b}|$.

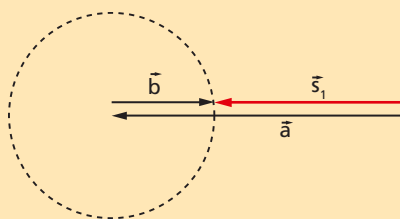


Figura *a*.

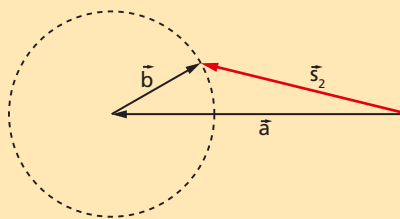


Figura *b*.

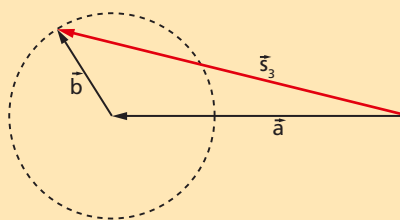


Figura *c*.

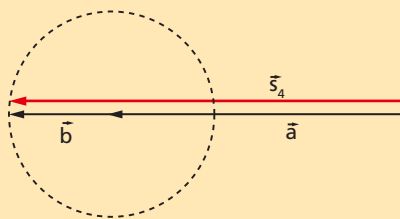


Figura *d*.

Na posição da figura *a*, temos:

$$\left. \begin{aligned} |s_1| &= |\vec{a}| - |\vec{b}| \\ \text{ou } s_1 &= a - b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Lembrando que, em qualquer triângulo, a medida de um lado é menor que a soma das medidas dos outros dois, podemos afirmar que nas posições das figuras *b* e *c* temos:

$$\left. \begin{aligned} s_2 &< a + b \\ \text{e } s_3 &< a + b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Além disso, é fácil perceber que:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &< s_2 \\ s_1 &< s_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

isto é, s_1 é o valor mínimo possível para s . Na posição da figura d , temos:

$$s_4 = a + b \quad (4)$$

e é fácil perceber que s_4 é o valor máximo possível para s . Juntando as conclusões (1), (2), (3) e (4), podemos escrever:

$$s_1 \leq s \leq s_4$$

ou

$$a - b \leq s \leq a + b \quad (5)$$

Para incluir tanto o caso $a > b$ como o caso $a < b$, podemos escrever:

$$|a - b| \leq s \leq a + b \quad (6)$$

pois:

$$|a - b| = |b - a|$$

É fácil verificar que a desigualdade (6), conhecida como "desigualdade triangular", vale também para os casos em que \vec{a} ou \vec{b} são nulos. A desigualdade (6) pode ainda ser escrita assim:

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

13. Dois vetores, \vec{a} e \vec{b} , cujas direções são desconhecidas, têm módulos dados por $|\vec{a}| = 20$ e $|\vec{b}| = 13$. Sendo $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, determine:

- o valor máximo possível para $|\vec{s}|$;
- o valor mínimo possível para $|\vec{s}|$.

Exercícios de Reforço

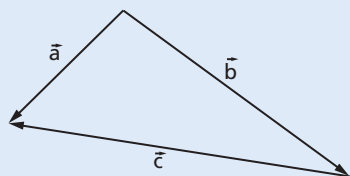
14. Uma grandeza física vetorial fica perfeitamente definida quando se lhe conhecem:

- valor numérico e unidade.
- valor numérico, unidade e direção.
- valor numérico, unidade e sentido.
- valor numérico, unidade, direção e sentido.
- direção, sentido e unidade.

15. São grandezas escalares:

- tempo, força e massa.
- volume, vazão e massa.
- força, vazão e densidade.
- densidade, velocidade e força.

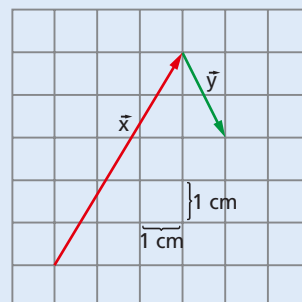
16. Na figura, temos representados os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .



Assinale a afirmativa correta:

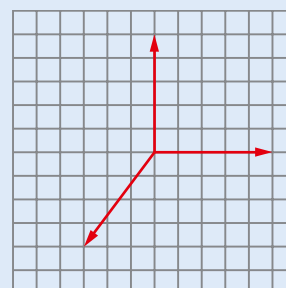
- $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$
 - $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
 - $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$
 - $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$
 - $\vec{a} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b}$
17. Dois vetores perpendiculares têm resultante cujo módulo é 60. Sabendo que o módulo de um dos vetores é 36, calcule o módulo do outro vetor.

18. Na figura estão desenhados dois vetores, \vec{x} e \vec{y} . O módulo do vetor resultante $\vec{x} + \vec{y}$ é igual a:



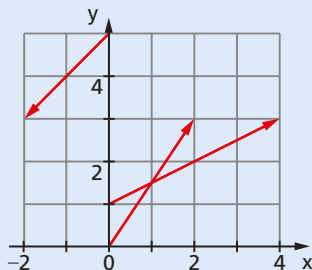
- 4 cm
- 5 cm
- 8 cm
- 13 cm
- 25 cm

19. (Unifor-CE) A figura representa três vetores, tendo os três módulo igual a 5. O módulo do vetor resultante dos três vetores é igual a:



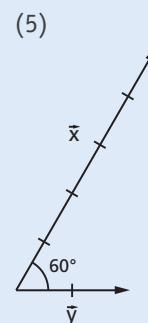
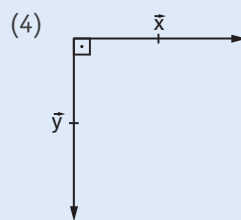
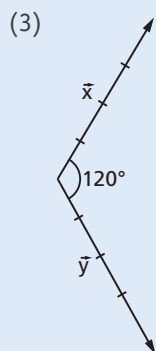
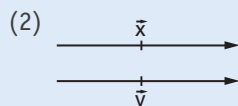
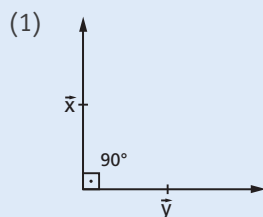
- 2
- $\sqrt{15}$
- 3
- $\sqrt{7}$
- $\sqrt{5}$

20. (Cefet-PR) A seguir, em um sistema de coordenadas cartesianas estão representados três vetores. O vetor resultante desses vetores tem módulo igual a:



- a) 0 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7

21. (PUC-BA) Nas figuras seguintes estão representados pares de vetores $(\vec{x}$ e $\vec{y})$, nos quais cada segmento orientado está subdividido em segmentos unitários.



Quais destes pares têm a mesma resultante?

- a) 1 e 5 d) 2 e 3
b) 2 e 4 e) 2 e 5
c) 3 e 5

22. (UnB-DF) Considere um relógio com mostrador circular de 10 cm de raio e cujo ponteiro dos minutos tem comprimento igual ao raio do mostrador. Considere esse ponteiro como um vetor de origem no centro do relógio e direção variável. O módulo da soma dos três vetores determinados pela posição desse ponteiro quando o relógio marca exatamente 12 horas, 12 horas e 20 minutos e, por fim, 12 horas e 40 minutos é, em cm, igual a:

- a) 30 c) 20
b) $10(1 + \sqrt{3})$ d) zero

23. (UE-CE) A soma de dois vetores cujos módulos são 12 e 18 tem certamente o módulo compreendido entre:

- a) 29 e 31 d) 6 e 30
b) 12 e 18 e) 12 e 30
c) 6 e 18

8. Subtração de vetores

Para definir a subtração de vetores, precisamos antes definir o conceito de **oposto** de um vetor.

Consideremos um vetor \vec{a} não nulo. O **oposto** de \vec{a} é um vetor que tem o mesmo módulo e a mesma direção de \vec{a} , mas sentido oposto ao de \vec{a} . Indica-se o oposto de \vec{a} por $-\vec{a}$ (fig. 24).

O oposto do vetor nulo é o próprio vetor nulo:

$$-\vec{0} = \vec{0}$$

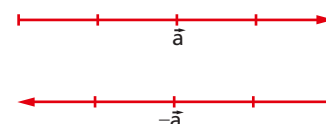


Figura 24.

Consideremos agora dois vetores quaisquer, \vec{x} e \vec{y} . A **diferença** entre \vec{x} e \vec{y} é um vetor \vec{d} representado por:

$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$$

e definido por:

$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$$

Observe que, para se subtrair \vec{y} de \vec{x} , adiciona-se \vec{x} com o vetor oposto de \vec{y} .

A operação que obtém a diferença de dois vetores é chamada **subtração** de vetores.

É importante observar a ordem em que é feita a subtração, pois, para $\vec{x} \neq \vec{y}$, teremos sempre $\vec{x} - \vec{y} \neq \vec{y} - \vec{x}$.

Consideremos, por exemplo, o caso da figura 25 e determinemos o vetor \vec{d} tal que $\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$. Temos então:

$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$$

Na figura 26 foi obtida a diferença \vec{d} fazendo-se a adição de \vec{x} com $-\vec{y}$. No entanto, é fácil observar que o vetor \vec{d} poderia ser obtido ligando-se as extremidades de \vec{x} e \vec{y} , como na figura 27, no sentido de B para A.

Considerando ainda a figura 25, determinemos o vetor \vec{d}' tal que:

$$\vec{d}' = \vec{y} - \vec{x}$$

Podemos ligar os extremos de \vec{x} e \vec{y} , no sentido de A para B, como mostra a figura 28.

A adição e a subtração de vetores foram definidas de tal modo que podemos trabalhar com as equações vetoriais, de modo semelhante ao desenvolvido nas equações que envolvem números e variáveis numéricas. Assim, podemos passar um termo de um lado para o outro da equação, desde que “troquemos” o seu sinal. Por exemplo, a equação:

$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$$

é equivalente à equação

$$\vec{d} + \vec{y} = \vec{x}$$

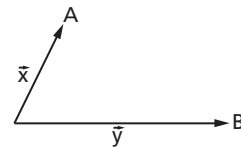


Figura 25.

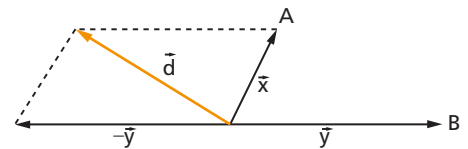


Figura 26.

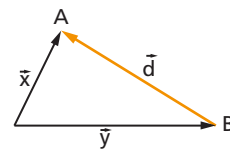


Figura 27.

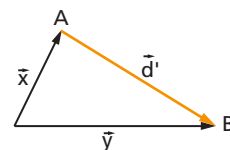


Figura 28.

Exercícios de Aplicação

24. Considere os vetores \vec{a} e \vec{b} da figura a e determine o vetor \vec{d} tal que $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, sabendo que $|\vec{a}| = 4$ e $|\vec{b}| = 6$.

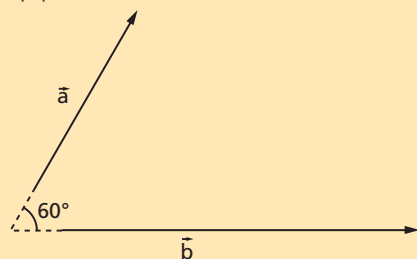


Figura a.

Resolução:

Representemos os dois vetores por segmentos orientados de mesma origem, como na figura b.

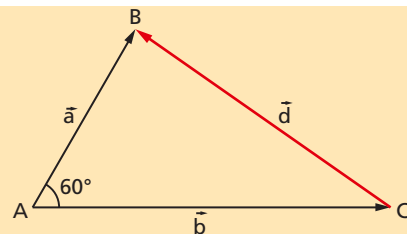


Figura b.

O vetor \vec{d} é obtido ligando-se as extremidades de \vec{a} e \vec{b} , no sentido de C para B. Para obtermos $|\vec{d}|$ podemos aplicar a Lei dos Cossenos ao triângulo ABC.

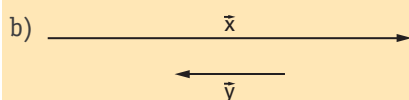
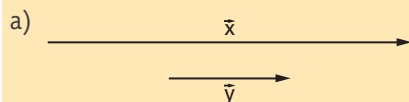
$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 4^2 + 6^2 - 2(4) \cdot (6) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 28 \end{aligned}$$

Portanto, $d = \sqrt{28} = \sqrt{4(7)} = 2\sqrt{7}$

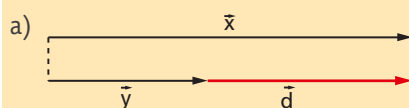
$$d = 2\sqrt{7}$$

Repare que de $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ obtemos $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$.

25. Nos dois casos a seguir, temos $|\vec{x}| = 5$ e $|\vec{y}| = 2$. Em cada um deles, determine o vetor \vec{d} tal que $\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$.

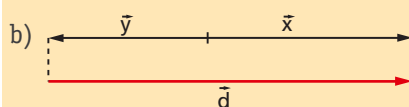


Resolução:



$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$$

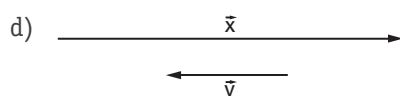
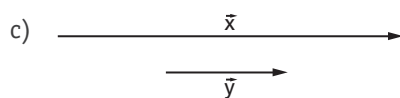
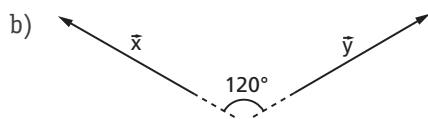
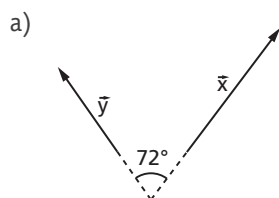
$$|\vec{d}| = |\vec{x}| - |\vec{y}| = 5 - 2 = 3$$



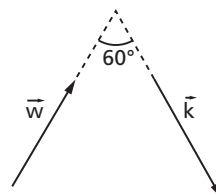
$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$$

$$|\vec{d}| = |\vec{x}| + |\vec{y}| = 5 + 2 = 7$$

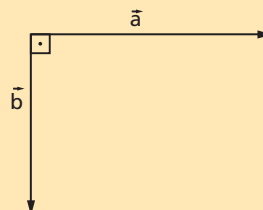
26. Nos casos a seguir, considere $|\vec{x}| = 6$ e $|\vec{y}| = 4$. Determine o módulo do vetor \vec{d} , tal que $\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$, em cada caso.



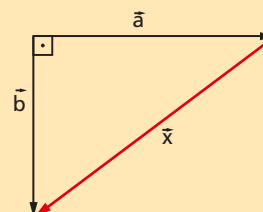
27. Considere os vetores \vec{w} e \vec{k} representados na figura, com $|\vec{w}| = 8$ e $|\vec{k}| = 6$. Determine o vetor \vec{x} tal que $\vec{x} = \vec{k} - \vec{w}$.



28. Dados os vetores \vec{a} e \vec{b} da figura, resolva a equação: $\vec{a} = \vec{b} - \vec{x}$, com $|\vec{a}| = 8$ e $|\vec{b}| = 6$.



Resolução:



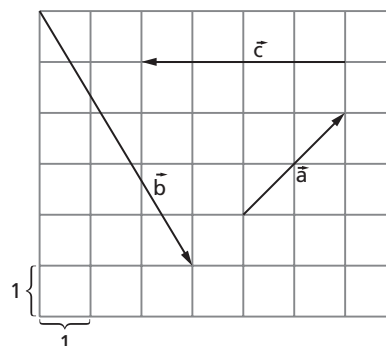
Podemos passar um termo de um lado da equação para o outro, desde que troquemos o seu sinal:

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$x^2 = b^2 + a^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

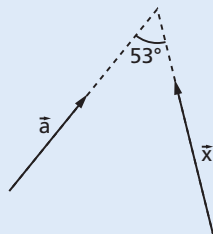
$$|\vec{x}| = 10$$

29. Considerando os vetores representados na figura, resolva a equação: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} - \vec{x}$

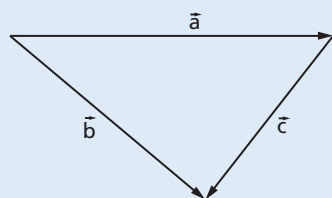


Exercícios de Reforço

30. Na figura estão representados os vetores \vec{a} e \vec{x} , com $|\vec{x}| = 10$ e $|\vec{a}| = 6$. Determine o vetor \vec{w} tal que $\vec{x} = \vec{a} - \vec{w}$.

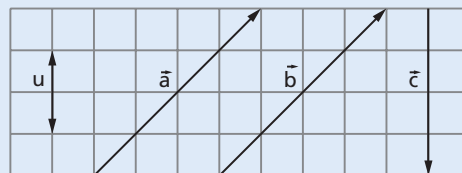


31. (PUC-MG) Para o diagrama vetorial, a única igualdade correta é:



- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
 b) $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$
 c) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$
 d) $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$
 e) $\vec{c} - \vec{b} = \vec{a}$

32. (Unifesp-SP) Na figura são dados os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} . Sendo u a unidade de medida do módulo desses vetores, pode-se afirmar que o vetor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ tem módulo:



- a) $2u$, e sua orientação é vertical, para cima.
 b) $2u$, e sua orientação é vertical, para baixo.
 c) $4u$, e sua orientação é horizontal, para a direita.
 d) $\sqrt{2}u$ e sua orientação forma 45° com a horizontal, no sentido horário.
 e) $\sqrt{2}u$ e sua orientação forma 45° com a horizontal, no sentido anti-horário.

9. Multiplicação de um vetor por um número

Consideremos um número real $k \neq 0$ e um vetor $\vec{a} \neq \vec{0}$. O **produto** de k por \vec{a} é um vetor \vec{w} (e escreve-se $\vec{w} = k \cdot \vec{a}$) cujas características são:

1ª) $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

2ª) A direção de \vec{w} é a mesma de \vec{a} .

3ª) Se $k > 0$, \vec{w} tem o mesmo sentido de \vec{a} ; se $k < 0$, \vec{w} tem sentido oposto ao de \vec{a} .

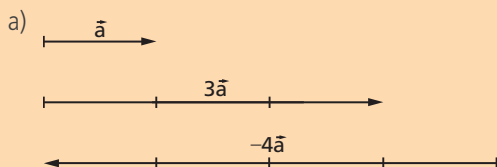
Se $k = 0$ ou $\vec{a} = \vec{0}$, o produto $k \cdot \vec{a}$ é o vetor nulo.

Se $k = -1$, teremos $k \cdot \vec{a} = -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$, isto é, o produto $k \cdot \vec{a}$ é o oposto de \vec{a} .

"Multiplicar o vetor \vec{a} pelo número real k " significa "obter o produto de k por \vec{a} ".

Sendo k um número real não nulo, o produto $\frac{1}{k} \cdot \vec{a}$ pode ser indicado por $\frac{\vec{a}}{k}$.

Exemplo 7



$$|3\vec{a}| = |3| \cdot |\vec{a}| = 3 \cdot |\vec{a}|$$

$$|-4\vec{a}| = |-4| \cdot |\vec{a}| = 4 \cdot |\vec{a}|$$



$$\left| \frac{\vec{a}}{2} \right| = \frac{|\vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{a}|}{2}$$

Exercícios de Aplicação

33. Na figura *a* estão representados os vetores \vec{a} e \vec{b} , com $|\vec{a}| = 4$ e $|\vec{b}| = 5$. Determine o vetor \vec{x} tal que $\vec{x} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$.

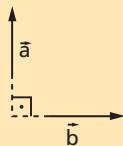


Figura a.

Resolução:

Representemos os vetores $2\vec{b}$ e $3\vec{a}$ por segmentos orientados de mesma origem.

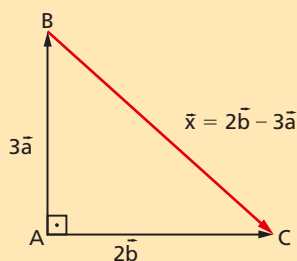


Figura b.

Temos:
$$\begin{cases} |3\vec{a}| = 3|\vec{a}| = 12 \\ |2\vec{b}| = 2|\vec{b}| = 10 \end{cases}$$

O vetor \vec{x} é a diferença entre $2\vec{b}$ e $3\vec{a}$; portanto, podemos obter \vec{x} ligando as extremidades de

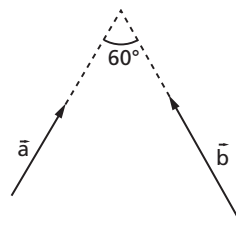
$2\vec{b}$ e $3\vec{a}$, no sentido de B para C. Para obtermos $|\vec{x}|$, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC.

$$|\vec{x}|^2 = |3\vec{a}|^2 + |2\vec{b}|^2 = 12^2 + 10^2 = 244$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{244} = \sqrt{4(61)} = 2\sqrt{61}$$

$$|\vec{x}| = 2\sqrt{61}$$

34. Considere os vetores \vec{a} e \vec{b} da figura, em que $|\vec{a}| = 5$ e $|\vec{b}| = 6$. Determine o módulo do vetor \vec{x} tal que: $2\vec{b} = 4\vec{a} - 2\vec{x}$.



35. Dado um vetor \vec{a} , não nulo, e um número real k , assinale a alternativa errada:

- Se $k > 0$, o vetor \vec{b} , dado por $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, tem o mesmo sentido de \vec{a} .
- Se $k < 0$, o vetor \vec{c} , dado por $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$, tem sentido oposto ao de \vec{a} .
- A direção do vetor \vec{d} , dado por $\vec{d} = k \cdot \vec{a}$, é a mesma direção de \vec{a} , qualquer que seja $k \neq 0$.
- Sendo $k \neq 0$, a direção do vetor \vec{x} , dado por $\vec{x} = k \cdot \vec{a}$, pode ser diferente da direção de \vec{a} .

10. Decomposição de um vetor

Consideremos um vetor \vec{a} não nulo. Às vezes pode ser útil determinarmos dois vetores perpendiculares (isto é, de direções perpendiculares), \vec{a}_1 e \vec{a}_2 , tais que:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

Diremos então que o vetor \vec{a} foi **decomposto** nas **componentes** \vec{a}_1 e \vec{a}_2 . Consideremos, por exemplo, o caso da figura 29. O vetor \vec{a} foi decomposto em duas componentes perpendiculares: a componente \vec{a}_1 , na direção da reta r , e a componente \vec{a}_2 , na direção da reta s .

Podemos dizer também que:

- \vec{a}_1 é a projeção de \vec{a} sobre a reta r ;
- \vec{a}_2 é a projeção de \vec{a} sobre a reta s .

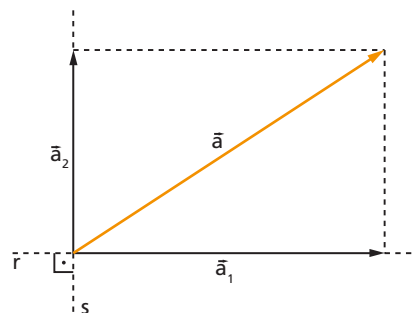


Figura 29.

Para obtermos os módulos de \vec{a}_1 e \vec{a}_2 podemos usar as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Seja, por exemplo, o caso da figura 30. Considerando o triângulo retângulo ABC, temos:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{a_2}{a} \\ \cos \theta = \frac{a_1}{a} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_2 = a \cdot \sin \theta \\ a_1 = a \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Se considerarmos o triângulo retângulo ABD, teremos:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{a_1}{a} \\ \cos \alpha = \frac{a_2}{a} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = a \cdot \sin \alpha \\ a_2 = a \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Quando fazemos a decomposição sobre dois eixos perpendiculares, O_x e O_y , cada projeção será considerada:

- **positiva**, se tiver o mesmo sentido do eixo;
- **negativa**, se tiver sentido contrário ao do eixo.

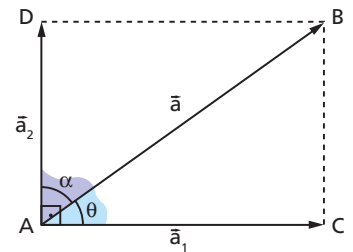
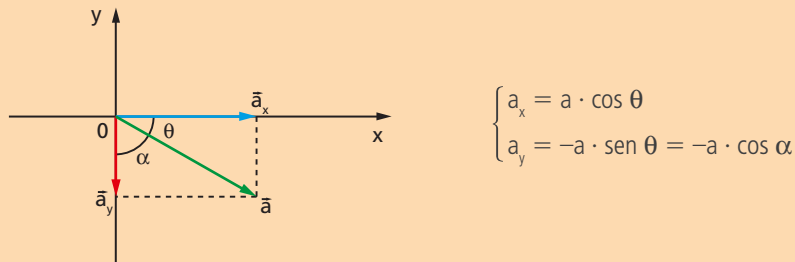


Figura 30.

OBSERVAÇÃO

A palavra "componente" pode ter um significado diferente do mencionado na página 156. Esse outro significado será apresentado no exercício 38.

Exemplo 8



Exercícios de Aplicação

36. Um vetor \vec{a} de módulo igual a 10 está representado na figura a. Obtenha as componentes de \vec{a} nas direções das retas r e s .

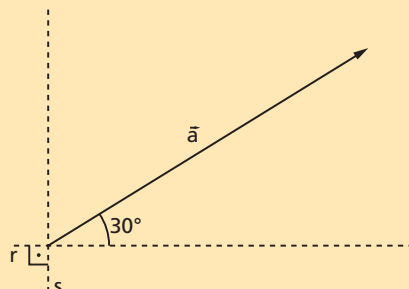


Figura a.

Resolução:

Na figura b estão representadas as componentes pedidas.

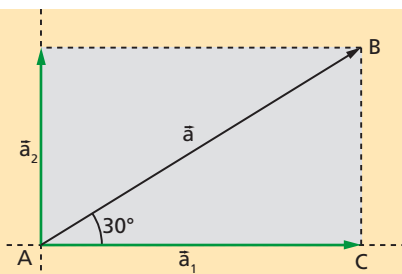


Figura b.

Considerando o triângulo retângulo ABC, temos:

$$a_1 = a \cdot \cos 30^\circ = 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5\sqrt{3}$$

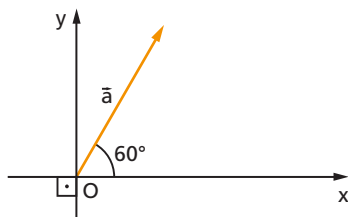
$$a_2 = a \cdot \sin 30^\circ = 10 \left(\frac{1}{2} \right) = 5$$

$$a_1 = 5\sqrt{3}$$

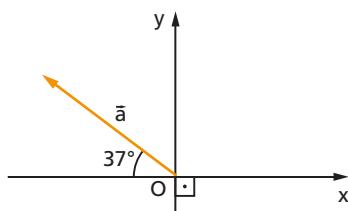
$$a_2 = 5$$

37. Em cada caso, determine as componentes do vetor \vec{a} nas direções dos eixos O_x e O_y :

a) $|\vec{a}| = 20$



b) $|\vec{a}| = 30$



38. Na figura a, o vetor \vec{i} é perpendicular ao vetor \vec{j} e $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Considere cada divisão do “quadriculado” tendo medida igual a 1. Represente o vetor \vec{a} em função de \vec{i} e \vec{j} .

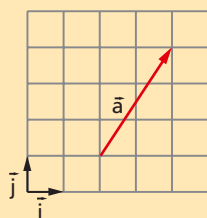


Figura a.

Resolução:

Façamos a decomposição de \vec{a} nas direções de \vec{i} e \vec{j} , obtendo \vec{a}_1 e \vec{a}_2 como mostra a figura b.

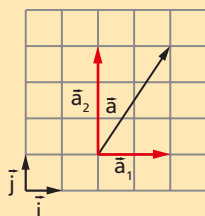


Figura b.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad (1)$$

Mas é fácil perceber da figura que:

$$\vec{a}_1 = 2\vec{i} \text{ e } \vec{a}_2 = 3\vec{j}$$

Substituindo na igualdade (1), obtemos:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

OBSERVAÇÕES

1ª) Quando se faz a representação de um vetor \vec{a} em função de \vec{i} e \vec{j} , podemos chamar os coeficientes \vec{i} e \vec{j} de **componentes do vetor \vec{a} nas direções de \vec{i} e \vec{j}** . Assim, neste exercício 38, as componentes do vetor \vec{a} são os números 2 e 3.

2ª) Os vetores \vec{i} e \vec{j} têm módulo 1 e, portanto, são vetores unitários ou versores.

39. Obtenha a resultante dos vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} representados na figura a, através de suas projeções nas direções dos versores \vec{i} e \vec{j} .

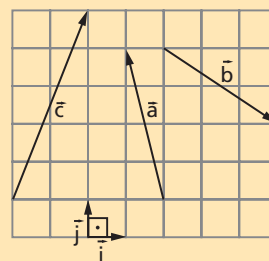


Figura a.

Resolução:

Da figura a obtemos:

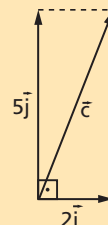


Figura b.

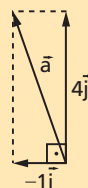


Figura c.

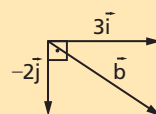


Figura d.

isto é:

$$\vec{a} = -1\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$$

Assim, a resultante \vec{s} é dada por:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{s} = (-1\vec{i} + 4\vec{j}) + (3\vec{i} - 2\vec{j}) + (2\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$\vec{s} = (-1 + 3 + 2)\vec{i} + (4 - 2 + 5)\vec{j} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$$

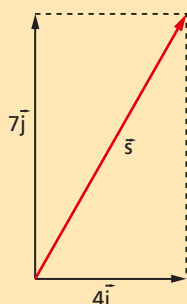


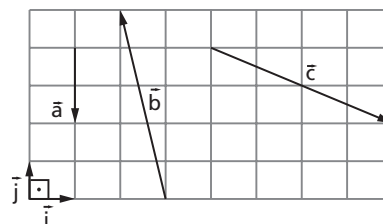
Figura e.

Como os módulos de \vec{i} e \vec{j} são iguais a 1, temos:

$$s^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$$

$$s = \sqrt{65}$$

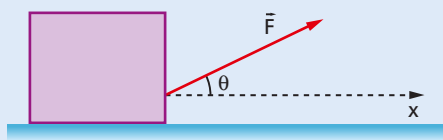
40. Seja \vec{s} o vetor resultante dos vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} representados na figura.



- Represente \vec{s} em função dos versores ortogonais \vec{i} e \vec{j} .
- Determine o módulo de \vec{s} .

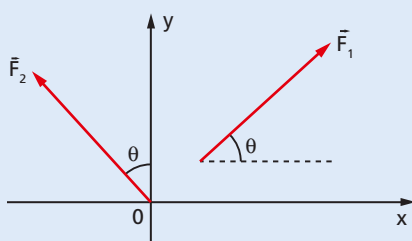
Exercícios de Reforço

41. (Unifor-CE) Um bloco é puxado pela força \vec{F} , como ilustra a figura, sendo $|\vec{F}| = 50$ unidades = 50 u.



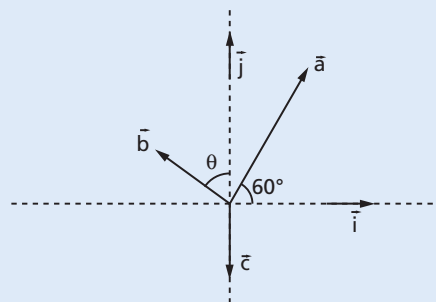
Sabendo que $\sin \theta = 0,80$ e $\cos \theta = 0,60$, a componente de \vec{F} na direção do eixo x vale:

- 30 u
 - 37,5 u
 - 40 u
 - 48 u
 - 50 u
42. (U. F. Lavras-MG) Duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , de módulos 30 N e 50 N, têm suas direções indicadas no diagrama.



Considerando-se $\cos \theta = 0,6$ e $\sin \theta = 0,8$, as projeções F_{1x} e F_{2x} valem, respectivamente:

- $F_{1x} = 18$ N; $F_{2x} = -30$ N
 - $F_{1x} = 24$ N; $F_{2x} = -18$ N
 - $F_{1x} = 18$ N; $F_{2x} = -40$ N
 - $F_{1x} = 30$ N; $F_{2x} = -40$ N
43. Determine a resultante (\vec{R}) dos vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} representados na figura, obtendo primeiramente suas decomposições em função dos versores ortogonais \vec{i} e \vec{j} . São dados: $|\vec{a}| = 10$; $|\vec{b}| = 5$; $|\vec{c}| = 4,7$; $\sin \theta = 0,60$; $\sin 60^\circ = 0,87$; $\cos \theta = 0,80$; $\cos 60^\circ = 0,50$.



Exercícios de Aprofundamento

44. (Mackenzie-SP) A resultante de dois vetores perpendiculares entre si tem módulo igual a $\sqrt{20}$. Sabendo que o módulo de um dos vetores é o dobro do outro, calcule os módulos dos dois vetores.

45. (Unitau-SP) Consideremos quatro vetores de módulos iguais a 5,0, tais que, ao se determinar sua resultante pelo método do polígono, obteve-se um quadrado, dando resultante nula. Se trocarmos os sentidos de dois deles, consecutivos, a resultante terá módulo aproximadamente igual a:

- a) zero
- b) 5,0
- c) 8,0
- d) 10
- e) 14

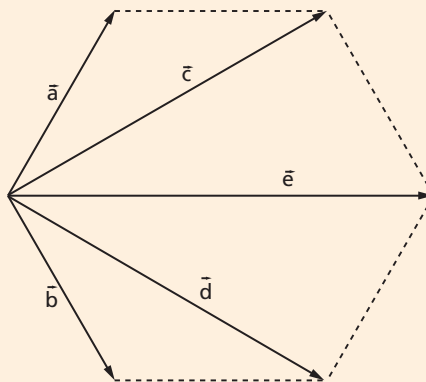
46. (UnB-DF) Ao se determinar a resultante de seis vetores de mesmo módulo k , pelo método do polígono, foi obtido um hexágono regular dando resultante nula. Se trocarmos o sentido de três deles, alternadamente, a resultante terá módulo igual a:

- a) $2k$
- b) $2\sqrt{3}k$
- c) $\sqrt{\frac{3}{2}}k$
- d) zero
- e) $6k$

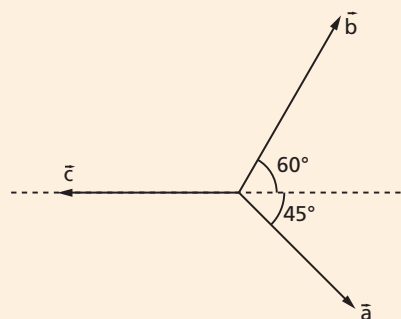
47. (FEI-SP) O vetor representativo de uma certa grandeza física possui módulo igual a 2. As componentes ortogonais desse vetor medem $\sqrt{3}$ e 1. Qual o ângulo que o vetor forma com a sua componente de maior intensidade?

48. (Mackenzie-SP) Na figura estão representados cinco vetores de mesma origem e cujas extremidades estão sobre os vértices de um hexágono

regular cujos lados medem k unidades. Calcule o módulo da resultante desses vetores.



49. (U. F. Lavras-MG) Os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , representados abaixo, têm resultante nula.



Sabendo que: $|\vec{b}| = \sqrt{6}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, podemos afirmar que os módulos de \vec{a} e \vec{c} valem, respectivamente:

- a) 3 e $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ e $2\sqrt{3}$
- c) $3\sqrt{2}$ e 3
- d) 6 e 3
- e) 3 e $3\sqrt{2}$

Cinemática vetorial

1. Vetor deslocamento

Consideremos uma partícula movendo-se em uma trajetória qualquer. Na Cinemática escalar determinamos a posição da partícula pela sua abscissa s ; na Cinemática vetorial determinamos a posição da partícula através de seu **vetor posição** \vec{p} (fig. 1). O vetor posição da partícula, em um instante t , é um vetor que tem origem em um ponto O (arbitrariamente escolhido) e extremidade no ponto onde se encontra a partícula.

Sejam s_1 e s_2 as abscissas da partícula nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente (com $t_2 > t_1$), e sejam \vec{p}_1 e \vec{p}_2 os vetores posição da partícula nos mesmos instantes. Na Cinemática escalar definimos a variação de abscissa Δs por $\Delta s = s_2 - s_1$. Na Cinemática vetorial definimos o **vetor deslocamento** (\vec{d}) da partícula entre os instantes t_1 e t_2 por:

$$\vec{d} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

isto é, o vetor deslocamento é o vetor representado pelo segmento orientado cuja origem é a extremidade do vetor \vec{p}_1 e cuja extremidade é a extremidade do vetor \vec{p}_2 (fig. 2).

Observando a figura 2, percebemos que:

$$|\Delta s| \geq |\vec{d}|$$

O caso $|\Delta s| = |\vec{d}|$ ocorre quando a trajetória é retilínea (fig. 3) ou quando $\Delta s = 0$.

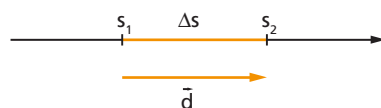


Figura 3. Quando a trajetória é retilínea, temos $|\Delta s| = |\vec{d}|$.

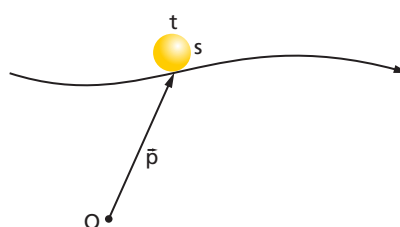


Figura 1.

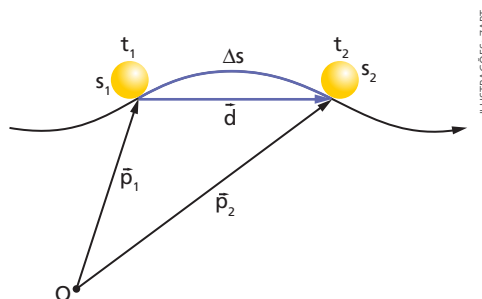


Figura 2.

ILUSTRAÇÕES: ZAPT

1. Vetor deslocamento
2. Velocidade vetorial média
3. Velocidade vetorial instantânea
4. Aceleração vetorial média
5. Aceleração vetorial instantânea

2. Velocidade vetorial média

Na Cinemática escalar, definimos a **velocidade escalar média** v_m por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Na Cinemática vetorial, definimos a **velocidade vetorial média** \vec{v}_m por:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

Como $\Delta t > 0$, o vetor \vec{v}_m deve ter a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{d} (fig. 4), desde que $\vec{d} \neq \vec{0}$.

Vimos no item anterior que: $|\Delta s| \geq |\vec{d}|$

Dividindo os dois membros por Δt , obtemos: $\frac{|\Delta s|}{\Delta t} \geq \frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$

ou:

$$|v_m| \geq |\vec{v}_m|$$

isto é:

O módulo da velocidade escalar média é maior ou igual ao módulo da velocidade vetorial média, num mesmo intervalo de tempo.

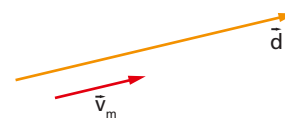


Figura 4.

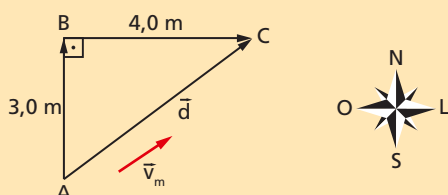
Exercícios de Aplicação

1. Uma partícula move-se sobre uma superfície plana horizontal. Ela parte de um ponto A, move-se 3,0 m para o norte, em trajetória retilínea, e, em seguida, move-se 4,0 m para o leste, também em trajetória retilínea, gastando 10 segundos nessa viagem. Calcule os módulos:

- da distância percorrida;
- do vetor deslocamento;
- da velocidade escalar média;
- da velocidade vetorial média.

Resolução:

- a) A partícula sai do ponto A (veja a figura) e move-se 3,0 m para o norte, atingindo o ponto B. A seguir move-se 4,0 m para o leste, atingindo o ponto C.



$$|\Delta s| = 3,0 + 4,0$$

$$|\Delta s| = 7,0 \text{ m}$$

$$\text{b) } |\vec{d}|^2 = (3,0)^2 + (4,0)^2 = 25$$

$$|\vec{d}| = 5,0 \text{ m}$$

$$\text{c) } |v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{7,0}{10}$$

$$|v_m| = 0,70 \text{ m/s}$$

$$\text{d) } |\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = \frac{5,0}{10}$$

$$|\vec{v}_m| = 0,50 \text{ m/s}$$

2. Uma partícula move-se em linha reta com velocidade escalar constante e igual a 5,0 m/s. Para um intervalo de tempo $\Delta t = 4,0$ segundos, calcule os módulos:

- a) da distância percorrida;
- b) do vetor deslocamento;
- c) da velocidade escalar média;
- d) da velocidade vetorial média.

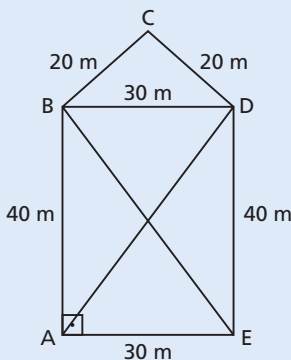
3. Uma partícula move-se com velocidade escalar constante sobre uma circunferência de raio

$R = 20$ m, gastando 12 segundos para completar uma volta. Para um intervalo de tempo $\Delta t = 2,0$ s, calcule os módulos:

- a) da distância percorrida;
- b) do vetor deslocamento;
- c) da velocidade escalar média;
- d) da velocidade vetorial média.

Exercícios de Reforço

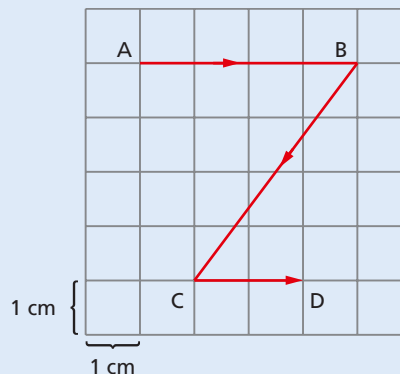
4. (UF-MA) Partindo de um ponto A (figura a seguir) um menino anda, passando pelos pontos B, C, D, B e E, onde para.



O caminho percorrido e o módulo do vetor deslocamento são, respectivamente, iguais a:

- a) 150 m e 30 m
 - b) 150 m e 20 m
 - c) 160 m e 20 m
 - d) 160 m e 30 m
 - e) 180 m e 20 m
5. Uma partícula tem trajetória circular de raio $R = 2,0$ m. Num certo intervalo de tempo Δt , a partícula executa um quarto de volta. Para esse intervalo de tempo calcule o módulo do vetor deslocamento.

6. Uma partícula percorreu em dois segundos a trajetória ABCD da figura a seguir.



Para esse percurso calcule os módulos da:

- a) velocidade escalar média;
 - b) velocidade vetorial média.
7. Uma pedra é lançada verticalmente para cima, a partir do solo, com velocidade inicial 40 m/s, num local onde $g = 10$ m/s². Calcule o módulo da velocidade vetorial média da pedra para o intervalo de tempo que vai do instante de lançamento até o instante em que a pedra volta ao solo.

3. Velocidade vetorial instantânea

Na Cinemática escalar definimos a velocidade escalar instantânea (v) por:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Agora definiremos a **velocidade vetorial instantânea** (\vec{v}) por:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

Assim, se quisermos calcular a velocidade vetorial instantânea de uma partícula quando esta passa por um ponto P , devemos tomar outro ponto Q da trajetória, de-

terminar o deslocamento entre P e Q e fazer Q tender a P . Mas é fácil perceber que quando isso ocorre (fig. 5) a direção de \vec{d} aproxima-se da direção da reta tangente à trajetória no ponto P . Portanto, a direção da velocidade vetorial instantânea é a da tangente à trajetória no ponto considerado (fig. 6). O sentido será o mesmo do movimento.

Outro fato importante é que, para $\Delta t \rightarrow 0$, teremos $|\Delta s| \rightarrow |\vec{d}|$. Assim:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \text{ ou } |v| = |\vec{v}|, \text{ isto é:}$$

O módulo da velocidade vetorial instantânea é igual ao módulo da velocidade escalar instantânea.

Lembremos que para as velocidades médias a conclusão é diferente (como vimos no item anterior):

$$|v_m| \geq |\vec{v}_m|$$

Resumindo:

A **velocidade vetorial instantânea** tem as seguintes características:

- **direção:** a reta tangente à trajetória no ponto considerado;
- **sentido:** o mesmo do movimento;
- **módulo:** igual ao módulo da velocidade escalar instantânea.

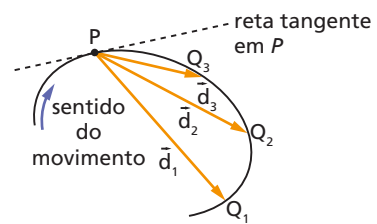


Figura 5.

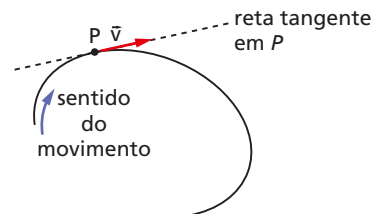


Figura 6.

OBSERVAÇÕES

- 1ª) Quando se fala em **velocidade vetorial** e não se esclarece se é média ou instantânea, admite-se que se trata da instantânea.
- 2ª) Quando se fala em **velocidade** e não se dá nenhuma outra informação, admite-se que se trata da velocidade vetorial.

Alguns casos particulares

Movimento retilíneo uniforme

Como a trajetória é retilínea, a velocidade vetorial terá sempre a mesma direção. Como o movimento é uniforme, a velocidade vetorial terá sempre o mesmo módulo e sentido (fig. 7).

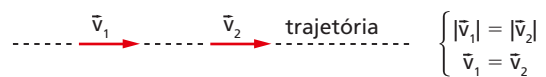


Figura 7.

Podemos então dizer que, nesse caso, **a velocidade vetorial é constante**.

Movimento circular e uniforme

Como a trajetória é circular, a direção da velocidade vetorial não é constante; mas, como o movimento é uniforme, o módulo da velocidade é constante. Podemos então dizer que, nesse caso, **a velocidade vetorial é variável**, pois muda a direção da velocidade, embora o módulo fique constante (fig. 8).

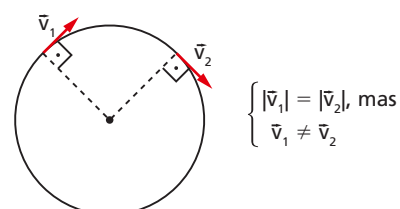


Figura 8.

Movimento retilíneo uniformemente acelerado

Pelo fato de a trajetória ser retilínea, a direção da velocidade vetorial é constante. Como o movimento é acelerado, o módulo da velocidade vetorial aumenta sempre e o sentido se mantém constante (fig. 9).

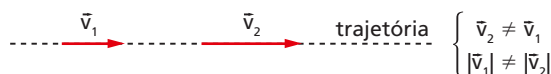


Figura 9.

Movimento retilíneo uniformemente retardado

Como a trajetória é retilínea, a direção de \vec{v} se mantém constante. Pelo fato de o movimento ser retardado, o módulo de \vec{v} diminui. O sentido permanece constante (fig. 10).

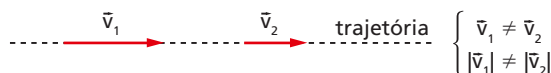


Figura 10.

Movimento circular uniformemente acelerado

Nesse caso variam tanto o módulo como a direção da velocidade vetorial, conforme podemos observar na figura 11.

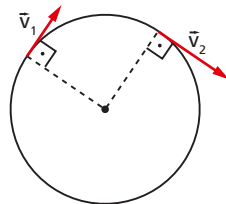


Figura 11.

Exercícios de Aplicação

8. Consideremos um movimento retilíneo e uniforme com velocidade escalar $v = 2,0$ m/s. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) nas seguintes sentenças:
 - a) A velocidade vetorial é constante em módulo, mas tem direção variável.
 - b) A velocidade vetorial é constante.
9. Consideremos um movimento circular e uniforme com velocidade escalar constante $v = 3$ m/s. Assinale verdadeiro ou falso nas seguintes sentenças:
 - a) A velocidade vetorial é constante.
 - b) A velocidade vetorial é constante em módulo.
 - c) A velocidade vetorial é variável em direção.
10. No movimento retilíneo uniformemente acelerado temos:
 - a) A velocidade é constante em módulo.
 - b) A velocidade é constante em direção.
 - c) A velocidade varia em direção.
11. No movimento circular uniformemente acelerado temos:
 - a) A velocidade é constante em módulo.
 - b) A velocidade é constante em direção.
 - c) A velocidade varia em direção e módulo.

4. Aceleração vetorial média

Consideremos uma partícula que tem velocidade vetorial \vec{v}_1 no instante t_1 e velocidade vetorial \vec{v}_2 no instante t_2 (com $t_2 > t_1$). A **aceleração vetorial média** da partícula (\vec{a}_m) entre os instantes t_1 e t_2 é definida por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Exemplo

Consideremos uma partícula em movimento circular uniforme de velocidade escalar 10 m/s, dando uma volta a cada 8,0 segundos. Como a velocidade escalar é constante, a **aceleração escalar** é nula; no entanto, dependendo do intervalo de tempo considerado, a **aceleração vetorial média** pode ser não nula.

Tomemos, por exemplo, o intervalo de tempo Δt , em que a partícula dá $\frac{1}{4}$ de volta (fig. 12); como a volta toda é completada em 8,0 segundos, para $\frac{1}{4}$ de volta teremos $\Delta t = 2,0$ segundos. Nesse intervalo de tempo, a velocidade vetorial inicial (\vec{v}_1) e a velocidade vetorial final (\vec{v}_2) são perpendiculares (fig. 13) e teremos:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 10 \text{ m/s}$$

Determinemos a seguir a variação da velocidade vetorial ($\Delta\vec{v}$):

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$|\Delta\vec{v}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

$$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{200} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Podemos agora obter a aceleração vetorial média $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, que tem a mesma direção de $\Delta\vec{v}$ (fig. 14).

$$|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{2}}{2,0} \Rightarrow |\vec{a}_m| = 5\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

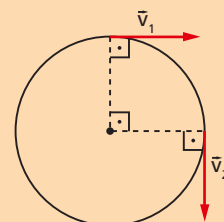


Figura 12.

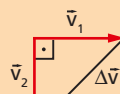


Figura 13.

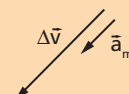
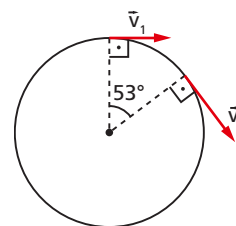


Figura 14.

Exercícios de Aplicação

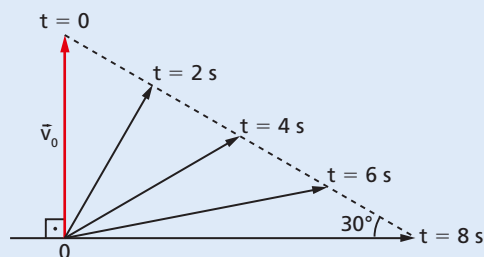
12. Uma partícula move-se em trajetória circular, com velocidade escalar constante e igual a 4,0 m/s, dando uma volta a cada 12 segundos. Calcule o módulo da aceleração vetorial média para um intervalo de tempo $\Delta t = 2,0$ s.
13. Uma partícula move-se sobre uma circunferência, de modo que no instante $t_1 = 7,0$ s sua velocidade

é \vec{v}_1 e no instante $t_2 = 11$ s sua velocidade é \vec{v}_2 . Sabendo que $|\vec{v}_1| = 6,0$ m/s e $|\vec{v}_2| = 8,0$ m/s, calcule o módulo da aceleração vetorial média do movimento para o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.



Exercícios de Reforço

14. (FEI-SP) A velocidade \vec{v} de um móvel em função do tempo acha-se representada pelo diagrama vetorial da figura. A intensidade da velocidade inicial é $v_0 = 20$ m/s.



Determine o módulo da aceleração vetorial média entre os instantes $t = 0$ e $t = 8$ s.

15. Uma partícula tem movimento circular e uniforme sobre uma circunferência de raio $R = 4,0$ m, com velocidade escalar 8,0 m/s. Calcule:
 - a) o módulo da aceleração escalar;
 - b) o módulo da aceleração vetorial média para um intervalo de tempo em que a partícula percorre $\frac{1}{4}$ de volta;
 - c) o módulo da aceleração vetorial média para um intervalo de tempo em que a partícula percorre meia volta.

5. Aceleração vetorial instantânea

Na Cinemática escalar definimos a **aceleração escalar instantânea** (α) por:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Definiremos agora a **aceleração vetorial instantânea** (\vec{a}) por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Se $\vec{a} = \vec{0}$, teremos \vec{v} constante, o que significa que ou a partícula está em repouso ou está em movimento retilíneo uniforme. Se $\vec{a} \neq \vec{0}$, consideremos dois casos: trajetória retilínea e trajetória curvilínea.

Trajétória retilínea

Nesse caso o vetor \vec{a} tem a mesma direção da trajetória e módulo igual ao módulo da aceleração escalar α ($|\vec{a}| = |\alpha|$). Se o movimento for acelerado, \vec{a} terá o mesmo sentido da velocidade vetorial \vec{v} (fig. 15); se o movimento for retardado, \vec{a} terá sentido contrário ao de \vec{v} (fig. 16).

Trajétória curvilínea

Nesse caso, verifica-se que \vec{a} "aponta para dentro" da curva (como, por exemplo, na figura 17) e pode ser decomposta em duas acelerações componentes, como ilustra a figura 18: uma componente tangente à trajetória, chamada **aceleração tangencial** (\vec{a}_t), e outra componente normal à trajetória, chamada **aceleração normal** ou **centrípeta** (\vec{a}_c).

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Pelo Teorema de Pitágoras: $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_c|^2$

É possível demonstrar que a aceleração tangencial \vec{a}_t tem módulo igual ao módulo da aceleração escalar α :

$$|\vec{a}_t| = |\alpha|$$

Portanto, se $\alpha = 0$, isto é, se o movimento for uniforme, teremos $|\vec{a}_t| = 0$.

A aceleração tangencial está relacionada com a variação do módulo de \vec{v} (e às vezes do sentido de \vec{v} , quando o movimento passa de retardado para acelerado), mas não muda a sua direção.

O sentido de \vec{a}_t é o mesmo da velocidade vetorial instantânea \vec{v} , se o movimento for acelerado (fig. 19), e contrário ao de \vec{v} , se o movimento for retardado (fig. 20).

Quanto à aceleração centrípeta \vec{a}_c , é possível demonstrar que seu módulo é dado por:

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$$

em que v é o módulo da velocidade e R é o **raio de curvatura**.

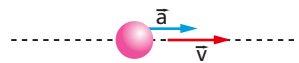


Figura 15. Movimento retilíneo e acelerado.



Figura 16. Movimento retilíneo e retardado.

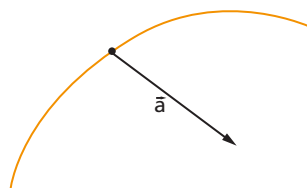


Figura 17.

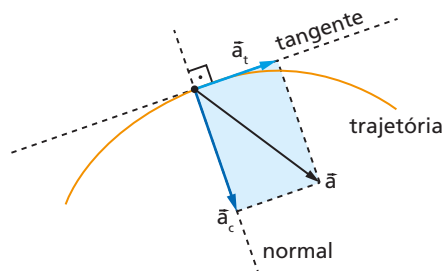


Figura 18.

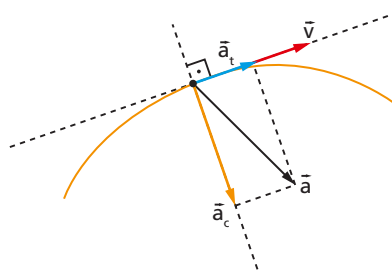


Figura 19. Movimento acelerado.

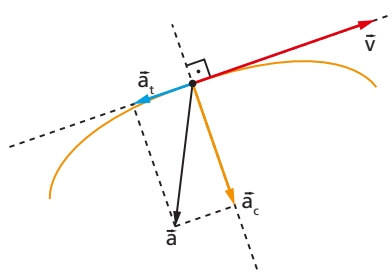


Figura 20. Movimento retardado.

Quando a trajetória é circular, o raio de curvatura é o próprio raio da circunferência. Quando a trajetória é curva mas não circular, é possível obter uma circunferência tangente à trajetória (fig. 21), denominada **circunferência osculadora**, cujo raio é o raio de curvatura a ser usado no cálculo do módulo da aceleração centrípeta, a qual aponta para o centro da circunferência osculadora.

No CD, demonstramos a fórmula $a_c = \frac{v^2}{R}$ para o caso particular do movimento circular e uniforme.

A aceleração centrípeta está relacionada com a variação da **direção** da velocidade.

É importante então ressaltar que:

- 1º) Se o movimento for retilíneo, teremos sempre $\vec{a}_c = \vec{0}$, isto é, a aceleração centrípeta é não nula apenas nos movimentos de trajetória curvilínea.
- 2º) Se o movimento for uniforme, teremos sempre $\vec{a}_t = \vec{0}$.
- 3º) Quando se fala em **aceleração** e não se dá nenhuma outra informação, admite-se que se trata da **aceleração vetorial instantânea** (\vec{a}).

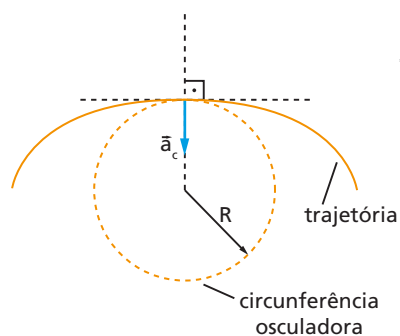


Figura 21.

Alguns casos particulares

Movimento retilíneo e uniforme

Nesse caso, temos $\vec{a}_t = \vec{0}$ e $\vec{a}_c = \vec{0}$, isto é, $\vec{a} = \vec{0}$.

Movimento circular e uniforme

Como o movimento é uniforme, a aceleração escalar α é nula e, portanto, a aceleração tangencial também é nula: $\vec{a}_t = \vec{0}$. Porém, a trajetória é curva, e assim temos $\vec{a}_c \neq \vec{0}$. Nesse caso, a aceleração centrípeta coincide com a aceleração vetorial instantânea: $\vec{a}_c = \vec{a}$ (fig. 22). Sabemos que o módulo de \vec{a}_c é dado por $|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$; já que o movimento é circular e uniforme, os valores de R e v são constantes, e assim $|\vec{a}_c|$ é constante, isto é, o módulo da aceleração centrípeta é constante. Porém, como a direção de \vec{a}_c é variável, podemos dizer que a aceleração vetorial é variável. Assim, na figura 23 temos $\vec{a}_{c1} \neq \vec{a}_{c2}$, embora $|\vec{a}_{c1}| = |\vec{a}_{c2}| = \frac{v^2}{R}$.

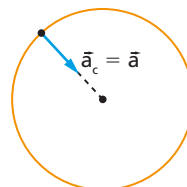


Figura 22.

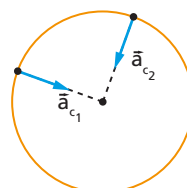


Figura 23.

Movimento circular uniformemente acelerado

Sendo o movimento uniformemente acelerado, a aceleração escalar α é constante e não nula; assim, a aceleração tangencial \vec{a}_t (cujo módulo é igual ao módulo de α) é não nula e tem **módulo constante**. Porém, a direção de \vec{a}_t varia; então podemos dizer que \vec{a}_t é variável (fig. 24). Como o movimento é acelerado, o módulo da velocidade é variável e, portanto, o módulo da aceleração centrípeta também é variável (pois $|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$). Assim, a aceleração centrípeta varia em módulo e direção (fig. 24).

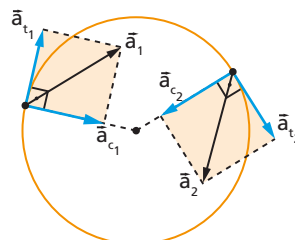


Figura 24.

$$\begin{cases} \vec{a}_{t1} \neq \vec{a}_{t2} & \text{e } |\vec{a}_{t1}| = |\vec{a}_{t2}| = \alpha \\ \vec{a}_{c1} \neq \vec{a}_{c2} & \text{e } |\vec{a}_{c1}| \neq |\vec{a}_{c2}| \end{cases}$$

Exercícios de Aplicação

16. Uma partícula move-se em trajetória circular de raio $R = 2,0$ m com velocidade escalar constante igual a $6,0$ m/s. Calcule:

- o módulo da aceleração tangencial;
- o módulo da aceleração centrípeta;
- o módulo da aceleração vetorial instantânea.

Resolução:

- a) Como a velocidade escalar é constante, a aceleração escalar α é nula e, assim, a aceleração tangencial também é nula. Trata-se então de um movimento circular e uniforme. Logo:

$$\vec{a}_t = \vec{0}$$

b) $|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R} = \frac{(6,0)^2}{2,0} \Rightarrow |\vec{a}_c| = 18 \text{ m/s}^2$

- c) Sabemos que a aceleração vetorial instantânea é dada por $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$. Mas, como $\vec{a}_t = \vec{0}$, temos $\vec{a} = \vec{a}_c$ e, portanto, $|\vec{a}| = |\vec{a}_c|$:

$$|\vec{a}| = 18 \text{ m/s}^2$$

17. Consideremos uma partícula em movimento circular e uniforme cuja velocidade escalar é 20 m/s. Sabendo que o raio da trajetória é igual a $4,0$ m, calcule os módulos da:

- aceleração tangencial;
- aceleração centrípeta;
- aceleração vetorial instantânea.

18. Uma partícula move-se em trajetória circular de raio $R = 24$ m, em movimento uniformemente acelerado, de aceleração escalar $\alpha = 3,0$ m/s². Sabendo que no instante $t = 0$ a velocidade escalar da partícula é $6,0$ m/s, calcule no instante $t = 2,0$ s os módulos da:

- aceleração tangencial;
- aceleração normal;
- aceleração.

Resolução:

- a) O módulo da aceleração tangencial \vec{a}_t é igual ao módulo da aceleração escalar α :

$$|\vec{a}_t| = |\alpha| \Rightarrow |\vec{a}_t| = 3,0 \text{ m/s}^2$$

- b) Como o movimento é uniformemente acelerado, a velocidade escalar v é dada por $v = v_0 + \alpha t$. Assim, no instante $t = 2,0$ s, temos:

$$v = 6,0 + 3,0(2,0) \Rightarrow v = 12 \text{ m/s}$$

Portanto, a aceleração normal (ou centrípeta) tem módulo dado por:

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R} = \frac{(12)^2}{24} = 6,0 \Rightarrow |\vec{a}_c| = 6,0 \text{ m/s}^2$$

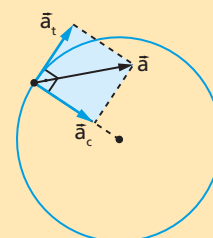
- c) Quando se pede a aceleração e não se diz mais nada, supõe-se que seja a aceleração vetorial instantânea. Temos então:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_c|^2$$

$$|\vec{a}| = (3,0)^2 + (6,0)^2$$

Assim:

$$|\vec{a}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Rightarrow |\vec{a}| = 3\sqrt{5} \text{ m/s}^2$$



19. Uma partícula tem movimento uniformemente acelerado, de aceleração escalar $\alpha = 3,0$ m/s², sobre uma trajetória circular de raio $R = 25$ m, tendo velocidade escalar $v_0 = 4,0$ m/s no instante $t = 0$. No instante $t = 2,0$ s, calcule os módulos da:

- aceleração tangencial;
- aceleração normal;
- aceleração.

Exercícios de Reforço

20. Um movimento retilíneo uniforme tem velocidade escalar $3,0$ m/s. Calcule os módulos da:

- aceleração escalar;
- aceleração tangencial;
- aceleração centrípeta;
- aceleração.

21. Um movimento retilíneo uniformemente variado tem aceleração escalar 8 m/s². Calcule os módulos da:

- aceleração tangencial;
- aceleração centrípeta;
- aceleração.

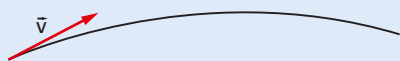
22. Consideremos um movimento circular uniforme de velocidade escalar $6,0 \text{ m/s}$ e raio da trajetória $R = 4,0 \text{ m}$. Calcule:

- a aceleração escalar;
- o módulo da aceleração tangencial;
- o módulo da aceleração centrípeta;
- o módulo da aceleração.

23. Uma partícula percorre uma trajetória circular de raio $R = 18 \text{ m}$, com movimento uniformemente variado cuja aceleração escalar é $6,0 \text{ m/s}^2$. Sabendo que no instante $t = 0$ sua velocidade é nula, calcule, no instante $t = 2,0 \text{ s}$, os módulos da:

- velocidade vetorial;
- aceleração tangencial;
- aceleração normal;
- aceleração vetorial.

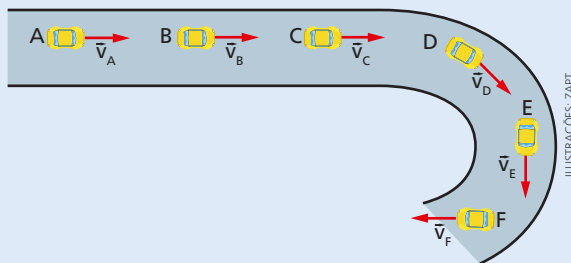
24. (Unifesp-SP) A trajetória de uma partícula, representada na figura, é um arco de circunferência de raio $r = 2,0 \text{ m}$, percorrido com velocidade de módulo constante $v = 3,0 \text{ m/s}$.



O módulo da aceleração vetorial dessa partícula nesse trecho, em m/s^2 , é:

- zero
- 1,5
- 3,0
- 4,5
- impossível de ser calculado.

25. (UF-SC) Um carro com velocidade de módulo constante de 20 m/s percorre a trajetória descrita na figura, sendo que de A a C a trajetória é retilínea e de D a F é circular, no sentido indicado.



Em seu caderno, identifique a(s) proposição(ões) correta(s):

- O carro tem movimento uniforme de A até C.
- O carro tem movimento uniforme de A até F.
- O carro tem aceleração de A até C.
- O carro tem aceleração de D até F.
- O carro tem movimento retilíneo uniformemente variado de D até F.

26. (Cefet-MG) Nos esquemas seguintes estão representadas a velocidade \vec{v} e a aceleração \vec{a} do ponto material P. O módulo da velocidade desse ponto material permanece constante em:

-
-
-
-
-

Exercícios de Aprofundamento

Enunciado para as questões 27 e 28.

Uma partícula tem movimento uniforme sobre uma circunferência de raio $R = 6 \text{ m}$. Num intervalo de tempo $\Delta t = 2 \text{ s}$ percorre um arco correspondente a um ângulo central de 120° .



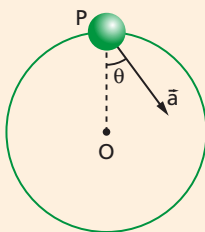
27. O módulo da velocidade vale:

- $\frac{3\pi}{2} \text{ m/s}$
- $2\pi \text{ m/s}$
- $\frac{4\pi}{3} \text{ m/s}$
- $\frac{5\pi}{2} \text{ m/s}$
- zero

28. O módulo da aceleração vetorial média para o intervalo de tempo dado é:

- a) $\pi\sqrt{3} \text{ m/s}^2$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}^2$
 b) $\pi \text{ m/s}^2$ e) zero
 c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \text{ m/s}^2$

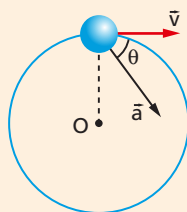
29. Uma partícula P move-se em trajetória circular de centro O , tendo velocidade escalar $v_0 = 8,0 \text{ m/s}$ no instante $t = 0$. No instante $t = 1,0 \text{ s}$ a aceleração vetorial instantânea \vec{a} tem módulo 20 m/s^2 e está representada no desenho.



Sabendo que $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$, calcule:

- a) o módulo da aceleração escalar;
 b) o módulo da aceleração centrípeta no instante $t = 1,0 \text{ s}$;
 c) o módulo da velocidade no instante $t = 1,0 \text{ s}$;
 d) o raio da trajetória.

30. A figura representa a velocidade vetorial \vec{v} e a aceleração vetorial \vec{a} de uma partícula que se move em trajetória circular de centro O , num mesmo instante t .



Sabendo que $\theta = 30^\circ$, $|\vec{v}| = 6,0 \text{ m/s}$ e $|\vec{a}| = 4,0 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a) o raio da trajetória;
 b) o módulo da aceleração tangencial no instante t .

31. Um automóvel executa uma volta completa em uma pista circular, em dois minutos, mantendo constante a indicação do velocímetro. Em um dos pontos da trajetória, a aceleração vetorial do automóvel tem módulo igual a 4 m/s^2 . O raio da pista é aproximadamente igual a:

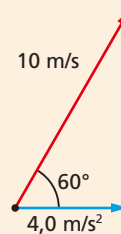
- a) zero c) 1000 m e) 3000 m
 b) 500 m d) 1500 m

32. (ITA-SP) Uma partícula descreve um movimento circular de raio R , partindo do repouso no instante $t = 0$ e com uma aceleração tangencial \vec{a}_t cujo módulo é constante. Sendo t o tempo e \vec{a}_c a aceleração centrípeta no instante t , podemos afirmar que $\left| \frac{\vec{a}_c}{\vec{a}_t} \right|$ é igual a:

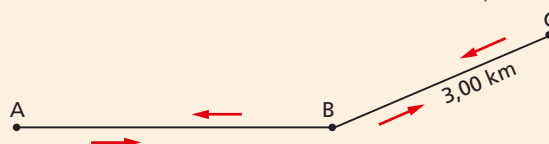
- a) $\frac{a_t^2 \cdot t}{R}$ c) $\frac{v^2}{R}$ e) $\frac{a_t \cdot t^2}{R}$
 b) $\frac{R}{a_t^2 \cdot t}$ d) $\frac{a_t \cdot t}{R}$

33. (FESP-SP) Em determinado instante, a velocidade vetorial e a aceleração vetorial de uma partícula estão representadas na figura. Qual dos pares oferecidos representa, no instante considerado, os valores da aceleração escalar α e do raio de curvatura R da trajetória?

- a) $\alpha = 4,0 \text{ m/s}^2$ e $R = 0$
 b) $\alpha = 4,0 \text{ m/s}^2$ e $R \rightarrow \infty$
 c) $\alpha = 2,0 \text{ m/s}^2$ e $R = 29 \text{ m}$
 d) $\alpha = 2,0 \text{ m/s}^2$ e $R = 2,9 \text{ m}$
 e) $\alpha = 3,4 \text{ m/s}^2$ e $R = 29 \text{ m}$



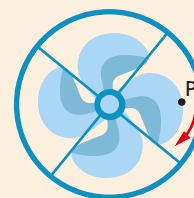
34. (ITA-SP) Na figura, um ciclista percorre o trecho AB com velocidade escalar média de $22,5 \text{ km/h}$ e, em seguida, o trecho BC de $3,00 \text{ km}$ de extensão. No retorno, ao passar em B, verifica ser de $20,0 \text{ km/h}$ sua velocidade escalar média no percurso então percorrido, ABCB. Finalmente, ele chega a A percorrendo todo o percurso de ida e volta em $1,00 \text{ h}$, com velocidade escalar média de $24,0 \text{ km/h}$.



Assinale o módulo v do vetor velocidade média referente ao percurso ABCB.

- a) $v = 12,0 \text{ km/h}$ d) $v = 20,00 \text{ km/h}$
 b) $v = 12,00 \text{ km/h}$ e) $v = 36,0 \text{ km/h}$
 c) $v = 20,0 \text{ km/h}$

35. (UE-CE) Um ventilador acaba de ser desligado e está parando vagarosamente, girando no sentido horário, conforme a figura.



A aceleração vetorial da pá do ventilador no ponto P tem orientação mais bem representada na opção:

- a) c)
 b) d)

ILUSTRAÇÕES: ZAPET

Composição de movimentos

Nos problemas de Cinemática analisados até agora, temos em geral utilizado um único referencial: a Terra. No entanto, já vimos no capítulo 2 que as características de um movimento dependem do referencial usado para descrevê-lo. Vamos agora considerar algumas situações em que o movimento de um corpo é analisado por observadores em diferentes referenciais.

1. Composição de movimentos de mesma direção

Consideremos um homem (H) sobre um vagão ferroviário (F) que pode mover-se sobre trilhos horizontais e retilíneos (fig. 1). Suponhamos que o vagão esteja inicialmente em repouso em relação ao solo. Admitamos que o homem se mova sobre o vagão com velocidade 2 m/s em relação ao vagão, isto é, se fizermos sobre o “chão” do vagão (fig. 2) duas marcas, A e B , distanciadas 2 metros uma da outra, o homem gastará 1 segundo para percorrer essa distância.

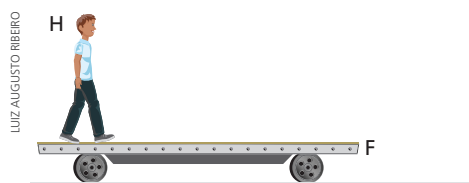


Figura 1.

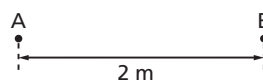


Figura 2. Marcas no vagão vistas de cima.

Vamos representar a velocidade do homem em relação ao vagão ferroviário por \vec{v}_{HF} :

$$\begin{cases} \vec{v}_{HF} = \text{velocidade do homem em relação ao vagão ferroviário} \\ |\vec{v}_{HF}| = 2 \text{ m/s} \end{cases}$$

Suponhamos agora que o vagão comece a mover-se sobre os trilhos, com velocidade \vec{v}_{FS} **em relação ao solo** e cujo módulo é 5 m/s:

$$\begin{cases} \vec{v}_{FS} = \text{velocidade do vagão ferroviário em relação ao solo} \\ |\vec{v}_{FS}| = 5 \text{ m/s} \end{cases}$$

Consideremos dois casos a seguir.

1. Composição de movimentos de mesma direção
2. Composição de movimentos de direções quaisquer
3. Velocidade de um corpo em relação a outro

1º caso: \vec{v}_{FS} e \vec{v}_{HF} têm a mesma direção e o mesmo sentido

De acordo com o desenho da figura 3, podemos dizer que, em 1 segundo, o homem anda 2 metros para a **direita** sobre o vagão, enquanto este anda, também para a **direita**, 5 metros sobre o solo. Assim, para um observador que esteja no solo, a cada segundo o deslocamento do homem será de 7 metros para a direita, isto é, a velocidade do homem em relação ao solo terá módulo igual a 7 m/s.

Em resumo, temos:

$$\begin{cases} \vec{v}_{HF} = \text{velocidade do homem em relação ao vagão ferroviário} \\ \vec{v}_{FS} = \text{velocidade do vagão ferroviário em relação ao solo} \\ \vec{v}_{HS} = \text{velocidade do homem em relação ao solo} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{HS} = \vec{v}_{HF} + \vec{v}_{FS}$$

Como \vec{v}_{HF} e \vec{v}_{FS} têm a mesma direção e sentido (fig. 4), temos:

$$|\vec{v}_{HS}| = |\vec{v}_{HF}| + |\vec{v}_{FS}| = 2 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = 7 \text{ m/s}$$

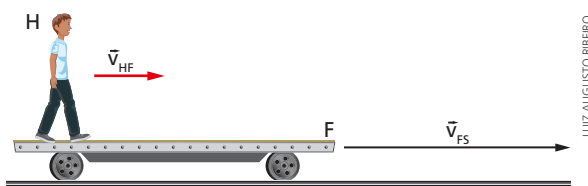


Figura 3.

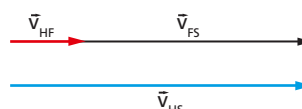


Figura 4.

2º caso: \vec{v}_{FS} e \vec{v}_{HF} têm a mesma direção e sentidos opostos

De acordo com o desenho da figura 5, podemos dizer que, em 1 segundo, o homem anda 2 metros para a **esquerda** sobre o vagão, enquanto este anda, para a **direita**, 5 metros sobre o solo. Assim, para um observador que esteja no solo, a cada segundo o deslocamento do homem será 3 metros para a direita, isto é, a velocidade do homem em relação ao solo terá módulo igual a 3 m/s.

Em resumo, temos:

$$\vec{v}_{HS} = \vec{v}_{HF} + \vec{v}_{FS}$$

Como \vec{v}_{FS} e \vec{v}_{HF} são vetores de mesma direção e sentidos opostos (fig. 6), temos:

$$|\vec{v}_{HS}| = |\vec{v}_{FS}| - |\vec{v}_{HF}| = 5 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

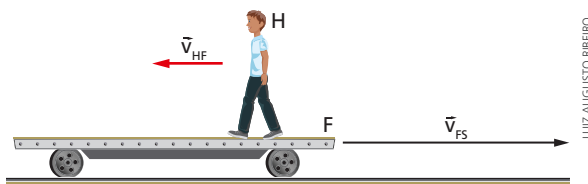


Figura 5.

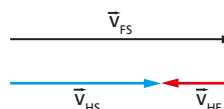


Figura 6.

Exercícios de Aplicação

- Um vagão ferroviário move-se sobre trilhos retílicos, com velocidade \vec{v}_0 em relação ao solo, cujo módulo é $|\vec{v}_0| = 6,0 \text{ m/s}$. Um homem anda sobre o vagão, na mesma direção de \vec{v}_0 , com velocidade \vec{v}_1 em relação ao vagão, tal que $|\vec{v}_1| = 4,0 \text{ m/s}$. Calcule o módulo da velocidade do homem em relação ao solo, nos seguintes casos:
 - \vec{v}_1 e \vec{v}_0 têm o mesmo sentido;
 - \vec{v}_1 e \vec{v}_0 têm sentidos opostos.
- Um ônibus tem movimento retílico e uniforme em relação ao solo, sendo \vec{v}_0 sua velocidade em relação ao solo. Dentro do ônibus, um passageiro anda com velocidade \vec{v}_1 em relação ao ônibus, de modo que \vec{v}_0 e \vec{v}_1 têm a mesma direção e sentidos opostos. Sabendo que $|\vec{v}_0| = |\vec{v}_1| = 5,0 \text{ m/s}$, calcule o módulo da velocidade do passageiro em relação ao solo.

3. As águas de um rio retilíneo movimentam-se com velocidade 3,0 m/s em relação às margens. Sobre o rio há duas pontes distanciadas 80 m uma da outra. Um barco, cuja velocidade em relação à água é 5,0 m/s, parte de um ponto situado abaixo de uma das pontes, sobe o rio até a outra ponte e volta para a primeira ponte.

- Calcule o intervalo de tempo no qual o barco sobe o rio, de uma ponte à outra.
- Calcule o intervalo de tempo no qual o barco desce o rio, de uma ponte à outra.
- Qual o intervalo de tempo total de ida e volta? (Despreze o intervalo de tempo gasto pelo barco para virar.)
- Se o rio estivesse parado em relação às margens, qual seria o intervalo de tempo total de ida e volta?

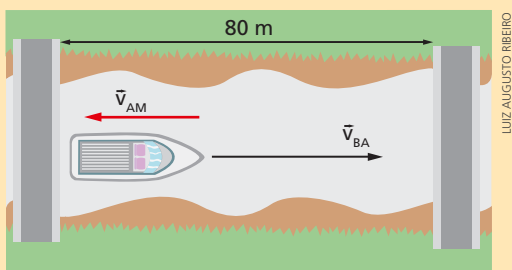
Resolução:

- a) Consideremos as seguintes velocidades:

$$\begin{cases} \vec{v}_{BM} = \text{velocidade do barco em relação às margens} \\ \vec{v}_{BA} = \text{velocidade do barco em relação à água} \\ \vec{v}_{AM} = \text{velocidade da água em relação às margens} \end{cases}$$

“Subir o rio” significa “ir contra a correnteza”, isto é, \vec{v}_{BA} e \vec{v}_{AM} têm sentidos opostos. (Para afirmar que o barco **sobe o rio**, podemos dizer que o barco vai **a montante**.)

$$\begin{array}{c} \vec{v}_{BA} \rightarrow \\ \leftarrow \vec{v}_{BM} \quad \leftarrow \vec{v}_{AM} \\ \vec{v}_{BM} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AM} \end{array}$$



De acordo com o enunciado, temos $|\vec{v}_{BA}| = 5,0 \text{ m/s}$ e $|\vec{v}_{AM}| = 3,0 \text{ m/s}$. Assim:

$$|\vec{v}_{BM}| = |\vec{v}_{BA}| - |\vec{v}_{AM}| = 5,0 \text{ m/s} - 3,0 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{BM}| = 2,0 \text{ m/s}$$

Para um referencial fixo nas margens, a distância percorrida pelo barco, para ir de uma ponte à outra, é $\Delta s = 80 \text{ m}$.

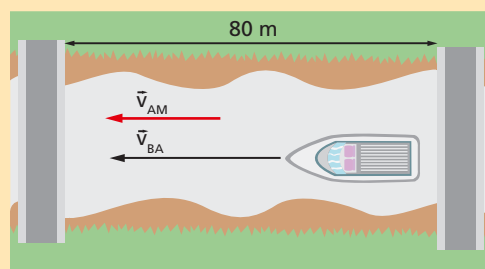
Portanto:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s}{|\vec{v}_{BM}|} = \frac{80}{2,0}$$

$$\Delta t_1 = 40 \text{ s}$$

- b) “Descer o rio” significa “ir a favor da correnteza”, isto é, \vec{v}_{BA} e \vec{v}_{AM} têm o mesmo sentido. (Podemos dizer também que o barco vai **a jusante**.)

$$\begin{array}{c} \leftarrow \vec{v}_{AM} \quad \leftarrow \vec{v}_{BA} \\ \leftarrow \vec{v}_{BM} \\ \vec{v}_{BM} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AM} \end{array}$$



Nesse caso temos:

$$|\vec{v}_{BM}| = |\vec{v}_{BA}| + |\vec{v}_{AM}| = 5,0 \text{ m/s} + 3,0 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{BM}| = 8,0 \text{ m/s}$$

Portanto:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta s}{|\vec{v}_{BM}|} = \frac{80}{8,0}$$

$$\Delta t_2 = 10 \text{ s}$$

- c) O intervalo de tempo total é obtido adicionando-se o intervalo de tempo de ida ao de volta.

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 40 + 10$$

$$\Delta t = 50 \text{ s}$$

- d) Se o rio estivesse parado em relação às margens, os intervalos de tempo de ida e volta seriam iguais e teríamos:

$$|\vec{v}_{BM}| = |\vec{v}_{BA}| = 5,0 \text{ m/s}$$

Representando por $\Delta t'$ o intervalo de tempo de ida, teríamos:

$$\Delta t' = \frac{\Delta s}{|\vec{v}_{BM}|} = \frac{80}{5,0}$$

$$\Delta t' = 16 \text{ s}$$

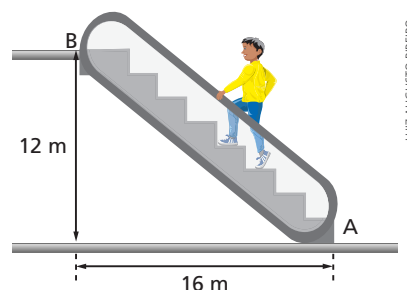
Portanto, sendo $\Delta t''$ o intervalo de tempo de ida e volta:

$$\Delta t'' = 2(\Delta t') = 2(16) \Rightarrow \Delta t'' = 32 \text{ s}$$

Comparando com o item *c*, observamos que o intervalo de tempo total de ida e volta é maior com o rio movendo-se do que com o rio parado.

4. As águas de um rio retilíneo movimentam-se com velocidade 4,0 m/s em relação às margens. Sobre o rio há duas pontes distanciadas 60 m uma da outra. Um barco cuja velocidade em relação à água é 6,0 m/s parte de um ponto situado debaixo de uma ponte, sobe o rio até a outra ponte e, em seguida, desce o rio até a primeira ponte. Calcule:
- o intervalo de tempo gasto pelo barco para subir o rio, de uma ponte à outra;
 - o intervalo de tempo gasto pelo barco para descer o rio, de uma ponte à outra;
 - o intervalo de tempo total de subida e descida, desprezando o tempo gasto para virar o barco;
 - o intervalo de tempo total de ida e volta se o rio estivesse parado em relação às margens.

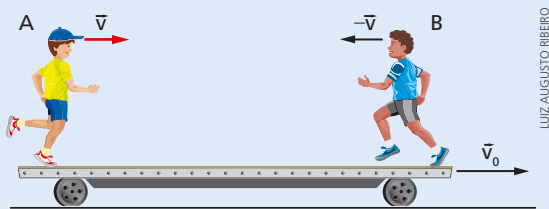
5. Um avião tem velocidade de 750 km/h em relação ao ar. Esse avião deve sair de uma cidade *A* e dirigir-se a uma cidade *B*, situada 1600 km ao norte de *A*. Calcule quanto tempo demorará essa viagem, sabendo que sopra um vento de sul para norte, com velocidade de 50 km/h em relação ao solo.
6. Uma escada rolante tem movimento ascendente ligando o piso *A* ao piso *B*. A velocidade da escada em relação ao solo é 5,0 m/s. Um garoto sobe por essa escada com velocidade 3,0 m/s em relação a ela.



- Qual a velocidade do garoto em relação ao solo?
- Quanto tempo o garoto gasta para ir de *A* até *B*?

Exercícios de Reforço

7. (Fuvest-SP) Num vagão ferroviário que se move com velocidade $|\vec{v}_0| = 3,0 \text{ m/s}$ com relação aos trilhos, estão dois meninos *A* e *B* que correm um em direção ao outro, cada um com velocidade $v = 3 \text{ m/s}$ com relação ao vagão.



As velocidades dos meninos *A* e *B*, com relação aos trilhos, serão respectivamente:

- 6 m/s e 0 m/s
- 3 m/s e 3 m/s
- 0 m/s e 9 m/s
- 9 m/s e 0 m/s
- 0 m/s e 6 m/s

8. (PUC-BA) Entre as cidades *A* e *B* existem sempre correntes de ar que vão de *A* para *B* com uma velocidade de 50 km/h. Um avião, voando em linha reta, com uma velocidade de 150 km/h em relação ao ar, demora 4 h para ir de *B* até *A*. Qual é a distância entre as duas cidades?

- 200 km
- 400 km
- 600 km
- 800 km
- 1000 km

9. (UF-PI) Um barco, navegando a favor da correnteza de um rio, tem velocidade de 6 m/s e, contra a correnteza, sua velocidade é 2 m/s, ambas em relação à Terra. Podemos afirmar corretamente que a velocidade da correnteza, em relação à Terra, e a velocidade do barco, em relação à correnteza, são, respectivamente:

- 4 m/s e 2 m/s
- 2 m/s e 4 m/s
- 1 m/s e 2 m/s
- 2 m/s e 1 m/s
- 6 m/s e 4 m/s

2. Composição de movimentos de direções quaisquer

Sejam dois sistemas de referência, R e r , tais que um esteja em movimento em relação ao outro (fig. 7). O movimento de um ponto material P pode ser descrito usando-se o referencial R ou o referencial r . Consideremos as velocidades \vec{v}_{PR} , \vec{v}_{Pr} e \vec{v}_{rR} , assim definidas:

$$\begin{cases} \vec{v}_{PR} = \text{velocidade de } P \text{ em relação a } R \\ \vec{v}_{Pr} = \text{velocidade de } P \text{ em relação a } r \\ \vec{v}_{rR} = \text{velocidade de } r \text{ em relação a } R \end{cases}$$

Assim, a velocidade de P em relação a R (\vec{v}_{PR}) é dada por (fig. 8):

$$\vec{v}_{PR} = \vec{v}_{Pr} + \vec{v}_{rR} \quad (1)$$

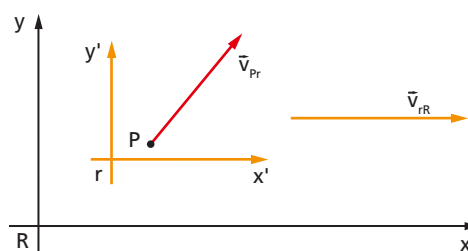


Figura 7.

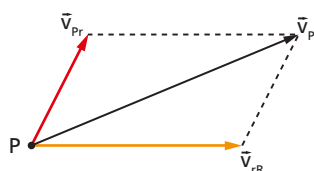


Figura 8.

Exercícios de Aplicação

10. As águas de um rio correm com velocidade \vec{v}_0 em relação às margens, sendo $|\vec{v}_0| = 6,0 \text{ m/s}$. As margens do rio são paralelas e separadas por uma distância de 24 m. Uma lancha sai de uma das margens em direção à outra, com velocidade \vec{v}_1 em relação à água, de modo que seu eixo fique perpendicular à correnteza. Sabendo que $|\vec{v}_1| = 8,0 \text{ m/s}$, calcule:

- o módulo da velocidade da lancha em relação às margens;
- o intervalo de tempo de travessia;
- o deslocamento rio abaixo;
- o deslocamento em relação às margens.

Resolução:

- a) Consideremos as seguintes velocidades:

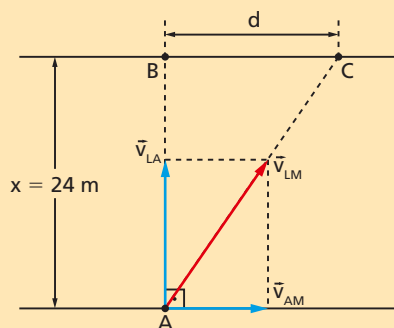
$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{LA} = \text{velocidade da lancha em relação à água} \\ \vec{v}_0 = \vec{v}_{AM} = \text{velocidade da água em relação às margens} \\ \vec{v}_{LM} = \text{velocidade da lancha em relação às margens} \end{cases}$$

De acordo com o enunciado, temos:

$$|\vec{v}_{LA}| = 8,0 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad |\vec{v}_{AM}| = 6,0 \text{ m/s}$$

Devemos ter:

$$\vec{v}_{LM} = \vec{v}_{LA} + \vec{v}_{AM}$$



Usando o Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}_{LM}|^2 = |\vec{v}_{LA}|^2 + |\vec{v}_{AM}|^2 = (8,0)^2 + (6,0)^2 = 100$$

Portanto:

$$|\vec{v}_{LM}| = 10 \text{ m/s}$$

- b) O movimento da correnteza não interfere no intervalo de tempo da travessia. Podemos fazer o cálculo como se o rio estivesse parado:

$$\Delta t = \frac{x}{|\vec{v}_{LA}|} = \frac{24}{8,0}$$

$$\Delta t = 3,0 \text{ s}$$

- c) Ao sair do ponto A em uma das margens (veja a figura), o eixo da lancha aponta para o ponto B da margem oposta. Mas, devido ao movimento da água, a lancha é arrastada lateralmente, indo atingir a margem oposta

no ponto C . O deslocamento rio abaixo (d) pode ser calculado, então, usando-se a velocidade da água em relação às margens:

$$d = |\vec{v}_{AM}| \cdot (\Delta t)$$

$$d = (6,0) \cdot (3,0) \Rightarrow d = 18 \text{ m}$$

- d) Para um observador fixo na margem, a trajetória do barco é o segmento de reta \overline{AC} , cujo comprimento pode ser calculado aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (24)^2 + (18)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 30 \text{ m}$$

Um outro modo de calcular \overline{AC} é usar o tempo de travessia e a velocidade \vec{v}_{LM} :

$$\Delta s = v \cdot (\Delta t) \Rightarrow AC = |\vec{v}_{LM}| \cdot (\Delta t)$$

$$AC = (10) \cdot (3,0) \Rightarrow AC = 30 \text{ m}$$

É interessante observar que o tempo de travessia pode ser calculado usando-se qualquer uma das três velocidades mencionadas:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{AB}{|\vec{v}_{LA}|} = \frac{BC}{|\vec{v}_{AM}|} = \frac{AC}{|\vec{v}_{LM}|}$$

$$3,0 \text{ s} = \frac{24 \text{ m}}{8,0 \text{ m/s}} = \frac{18 \text{ m}}{6,0 \text{ m/s}} = \frac{30 \text{ m}}{10 \text{ m/s}}$$

11. A correnteza de um rio retilíneo com margens paralelas tem velocidade de módulo $5,0 \text{ m/s}$ em relação às margens. Um barco sai de uma das margens em direção à outra, com velocidade 12 m/s em relação à água, de modo que seu eixo fique perpendicular à correnteza. Sabendo que a distância entre as margens é 48 m , calcule:

- o módulo da velocidade do barco em relação às margens;
- o tempo que o barco gasta para atingir a outra margem;
- a distância percorrida pelo barco, rio abaixo;
- a distância percorrida pelo barco em relação às margens.

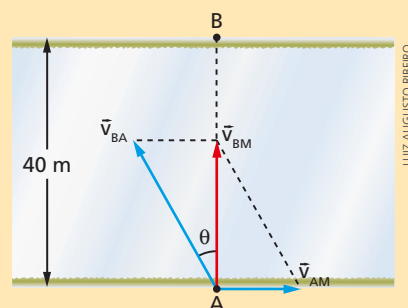
12. A correnteza de um rio retilíneo com margens paralelas tem velocidade $6,0 \text{ m/s}$ em relação às margens. Um barco sai de uma das margens em direção à outra, com velocidade de módulo 10 m/s em relação à água, de modo que a direção de seu movimento é perpendicular à correnteza, para um observador fixo na margem. Sabendo-se que a distância entre as margens é 40 m , pede-se:

- a velocidade do barco em relação às margens;
- o ângulo que o eixo do barco deve fazer com a direção normal às margens;
- o intervalo de tempo de travessia.

Resolução:

- a) Consideremos as seguintes velocidades:

$$\begin{cases} \vec{v}_{BA} = \text{velocidade do barco em relação à água} \\ \vec{v}_{AM} = \text{velocidade da água em relação às margens} \\ \vec{v}_{BM} = \text{velocidade do barco em relação às margens} \end{cases}$$



De acordo com o enunciado, temos:

$$|\vec{v}_{AM}| = 6,0 \text{ m/s} \text{ e } |\vec{v}_{BA}| = 10 \text{ m/s}$$

Para um observador fixo em uma das margens, a velocidade do barco é \vec{v}_{BM} , perpendicular à correnteza. Isso significa que, para esse observador, o barco sai de um ponto A em uma das margens (veja a figura) e atinge um ponto B da outra margem, exatamente em frente a A . O eixo do barco deve então ser disposto de modo a formar um ângulo θ com a direção \overline{AB} . Observando a figura e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$|\vec{v}_{BA}|^2 = |\vec{v}_{BM}|^2 + |\vec{v}_{AM}|^2$$

$$10^2 = |\vec{v}_{BM}|^2 + (6,0)^2$$

$$|\vec{v}_{BM}| = 8,0 \text{ m/s}$$

- b) Da figura tiramos:

$$\text{sen } \theta = \frac{|\vec{v}_{AM}|}{|\vec{v}_{BA}|} = \frac{6,0}{10} = 0,60$$

Consultando a tabela que se encontra no CD, obtemos: $\theta \cong 37^\circ$

- c) Para um observador na margem, a velocidade do barco é \vec{v}_{BM} e a distância percorrida é $d = 40$ m. Assim:

$$\Delta t = \frac{d}{|\vec{v}_{BM}|}$$

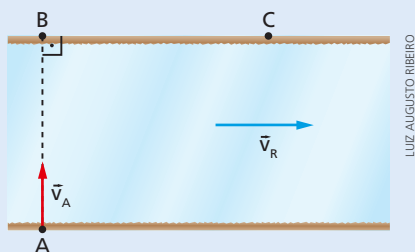
$$\Delta t = \frac{40}{8,0} \Rightarrow \Delta t = 5,0 \text{ s}$$

13. Um avião vai de uma cidade A a uma cidade B , situada 400 km ao norte de A . Os instrumentos do aeroporto registram um vento de 50 km/h de oeste para leste. Sabendo-se que a velocidade do avião em relação ao ar é 200 km/h, pede-se:

- o ângulo que o eixo do avião forma com a direção sul-norte;
- a velocidade do avião em relação ao solo;
- o tempo de voo entre A e B .

Exercícios de Reforço

14. (UF-PE) Uma pessoa quer atravessar um rio (de margens paralelas) cuja largura é 60 m, nadando com velocidade constante \vec{v}_A em relação à água, orientada perpendicularmente às margens e de módulo $v_A = 1,5$ m/s. Por causa do movimento do rio, cuja velocidade em relação às margens tem módulo $v_R = 0,6$ m/s, a pessoa chegará à outra margem, no ponto C assinalado na figura. Qual a distância entre os pontos B e C ?



15. (Fatec-SP) Um avião teco-teco mantém uma velocidade de 120 km/h em relação ao ar, com o eixo do avião na direção oeste-leste. Sopra um vento do norte para o sul com velocidade 90 km/h. Qual a velocidade do avião em relação à Terra?

16. Um avião tem velocidade de 130 km/h em relação ao ar. O piloto quer ir de uma cidade A para uma cidade B situada 600 km ao norte de A . Sabendo que sopra um vento de 50 km/h em relação ao solo, dirigido de oeste para leste, determine:

- o módulo da velocidade do avião em relação ao solo;
- o tempo de viagem;
- o ângulo que o eixo do avião deve fazer com a direção \overline{AB} .

3. Velocidade de um corpo em relação a outro

Como vimos no início do item anterior, dados dois referenciais, R e r , e um ponto material P , vale a equação ①:

$$\vec{v}_{PR} = \vec{v}_{Pr} + \vec{v}_{rR} \quad \text{①}$$

Essa equação é equivalente a:

$$\vec{v}_{Pr} = \vec{v}_{PR} - \vec{v}_{rR} \quad \text{②}$$

ou:

$$\vec{v}_{Pr} = \vec{v}_P - \vec{v}_r \quad \text{③}$$

sendo \vec{v}_P e \vec{v}_r as velocidades de P e r em relação a um mesmo referencial R .

Portanto, de modo geral, dados dois corpos, x e y , a velocidade de x em relação a y (\vec{v}_{xy}) é dada por:

$$\vec{v}_{xy} = \vec{v}_x - \vec{v}_y \quad \text{④}$$

sendo \vec{v}_x e \vec{v}_y as velocidades de x e y em relação a um mesmo referencial R . Do mesmo modo, podemos escrever também:

$$\vec{v}_{yx} = \vec{v}_y - \vec{v}_x \quad (5)$$

Observando as equações (4) e (5), percebemos que:

$$\vec{v}_{xy} = -\vec{v}_{yx}$$

Exercícios de Aplicação

- 17.** Um observador fixo na Terra nota que está chovendo e que as gotas de chuva caem verticalmente, com velocidade constante \vec{v}_c , tal que $v_c = 6,0$ m/s. Um indivíduo dirige um automóvel, com velocidade constante \vec{v}_A em relação à Terra, tal que $v_A = 8$ m/s. Determine o módulo da velocidade das gotas de chuva para o indivíduo dentro do automóvel.

Resolução:

Seendo \vec{v}_{CA} a velocidade de cada gota de chuva em relação ao automóvel, temos:

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_c - \vec{v}_A = \vec{v}_c + (-\vec{v}_A)$$

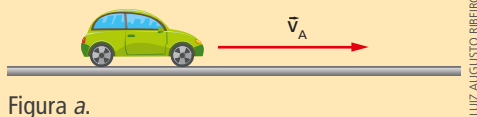


Figura a.

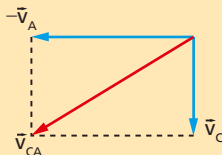


Figura b.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$|\vec{v}_{CA}|^2 = |\vec{v}_c|^2 + |\vec{v}_A|^2 = (6,0)^2 + (8,0)^2 = 100$$

Portanto:

$$|\vec{v}_{CA}| = 10 \text{ m/s}$$

Essas gotas de chuva, ao caírem nas janelas laterais do automóvel, deixarão trajetórias que têm a direção de \vec{v}_{CA} .

- 18.** Durante um dia chuvoso, um motorista dirige seu automóvel com velocidade \vec{v}_0 em relação à Terra. Para um observador parado em relação à Terra, as gotas de chuva caem verticalmente com velocidade constante \vec{v}_1 . Sabendo-se que $|\vec{v}_0| = 12$ m/s e $|\vec{v}_1| = 5,0$ m/s, pede-se:
- o módulo da velocidade da chuva em relação ao automóvel;
 - o ângulo formado entre a direção vertical e as marcas deixadas pelas gotas de chuva nas janelas laterais do automóvel.
- 19.** Dois automóveis, A e B , movem-se sobre um mesmo eixo com velocidades escalares constantes, respectivamente iguais a 4 m/s e -8 m/s. Sendo v_{AB} a velocidade de A em relação a B e v_{BA} a velocidade de B em relação a A , os valores de v_{AB} e v_{BA} são, respectivamente:
- 6 m/s e 6 m/s
 - 12 m/s e 12 m/s
 - 6 m/s e -6 m/s
 - 12 m/s e -12 m/s
 - 12 m/s e 12 m/s

Exercícios de Reforço

- 20.** (Mackenzie-SP) Um motorista, dirigindo a $100\sqrt{3}$ km/h sob uma tempestade, observa que a chuva deixa nas janelas laterais marcas inclinadas de 60° com a vertical. Ao parar o carro, ele nota que a chuva cai verticalmente. Podemos afirmar que a velocidade da chuva relativa ao carro, quando ele estava em movimento, era:
- 200 km/h
 - $100\sqrt{3}$ km/h
 - $200\sqrt{3}$ km/h
 - $180\sqrt{3}$ km/h
 - n.d.a.
- 21.** Para a situação do teste anterior, qual a velocidade da chuva em relação ao solo?

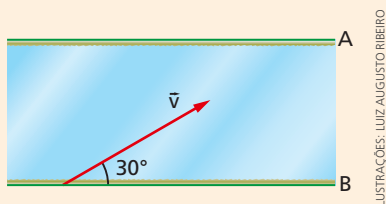
- 22.** Ao longo de um eixo, duas partículas, X e Y , movem-se com velocidades constantes, em sentidos opostos. Os módulos de suas velocidades são, respectivamente, 5,0 m/s e 2,5 m/s. Sendo v_{XY} a velocidade escalar de X em relação a Y e v_{YX} a velocidade escalar de Y em relação a X , determine o valor da razão $\frac{v_{XY}}{v_{YX}}$.
- 23.** Dois ciclistas, A e B , movem-se sobre duas ruas perpendiculares, com A no sentido de oeste para leste e B no sentido de sul para norte. Sabendo que os módulos das velocidades de A e B são, respectivamente, iguais a 12 m/s e 16 m/s, determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade de A em relação a B .

Exercícios de Aprofundamento

24. Sobre um rio retilíneo há duas pontes distanciadas de 160 metros. Um barco parte de um ponto situado abaixo de uma das pontes, sobe o rio até a outra ponte e, em seguida, desce o rio até a primeira ponte. A velocidade da correnteza em relação às margens e a velocidade do barco em relação à água são ambas constantes. Sabendo que o intervalo de tempo de subida foi 40 segundos e o intervalo de tempo de descida foi 16 segundos, calcule:

- o módulo da velocidade do barco em relação à água;
- o módulo da velocidade da correnteza em relação às margens.

25. Um indivíduo rema seu barco mantendo o eixo do barco perpendicular à correnteza de um rio retilíneo cujas margens, A e B , são paralelas. A figura representa a velocidade \vec{v} do barco em relação às margens, sendo $|\vec{v}| = 2,0$ m/s.



Calcule:

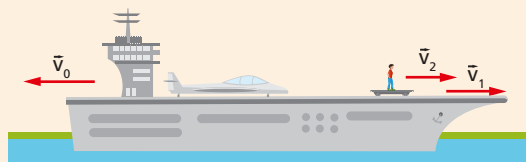
- a velocidade do rio em relação às margens;
- a velocidade do barco em relação ao rio.

26. Consideremos um rio de margens paralelas, sendo a distância entre elas igual a 120 m. A velocidade da água em relação às margens é de 10 m/s. Um barco cuja velocidade em relação à água é 8,0 m/s atravessa o rio de uma margem à outra no menor tempo possível. Quanto tempo demorou a travessia?

27. Um barco está inicialmente parado, encostado em uma das margens de um rio de margens paralelas. A água do rio tem, em relação às margens, velocidade \vec{v}_{AM} cujo módulo é $|\vec{v}_{AM}| = 8,0$ m/s. A partir do instante $t = 0$, o barco começa a movimentar-se com movimento retilíneo uniformemente variado em relação à água, cuja aceleração escalar é $\alpha = 4,0$ m/s², de modo que o eixo do barco fique perpendicular à correnteza.

- Qual é a trajetória do barco para um observador fixo em uma das margens?
- Qual a velocidade do barco em relação às margens no instante $t = 1,0$ s? (supondo que o tempo de travessia seja superior a 1,0 segundo)

28. Um porta-aviões move-se sobre um rio com velocidade constante \vec{v}_0 em relação às margens do rio. Sobre o porta-aviões move-se um vagão com velocidade \vec{v}_1 em relação ao porta-aviões e sobre o vagão move-se um indivíduo com velocidade \vec{v}_2 em relação ao vagão. As velocidades \vec{v}_0 , \vec{v}_1 e \vec{v}_2 têm a mesma direção e os sentidos estão indicados na figura.



Sabendo que $|\vec{v}_0| = 12$ m/s, $|\vec{v}_1| = 5,0$ m/s e $|\vec{v}_2| = 4,0$ m/s, calcule o módulo da velocidade do indivíduo em relação às margens do rio.

29. Uma escada rolante liga o piso A ao piso B . Estando a escada parada em relação ao solo, um garoto vai de A até B em 60 s, mantendo velocidade constante \vec{v}_0 em relação à escada.

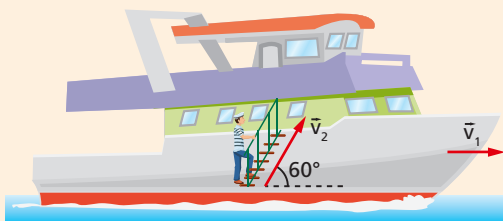


Suponhamos agora que a escada esteja em movimento ascendente, com velocidade constante \vec{v}_1 em relação ao solo; nessas condições, o garoto, parado em relação à escada, vai de A até B em 40 s. Se o garoto subisse essa escada com velocidade \vec{v}_0 em relação a ela, com ela em movimento em relação ao solo, quanto tempo levaria para ir de A até B ?

30. (Cesesp-PE) Um avião, cuja velocidade em relação ao ar é v , viaja da cidade A para a cidade B em um tempo t , quando não há vento. Quanto tempo será gasto para a viagem, quando sopra um vento com velocidade u (em relação ao solo) perpendicularmente à linha que liga as duas cidades? (Despreze o tempo de subida e descida do avião.)

- | | |
|--|--|
| a) $t \left(1 - \frac{u}{v}\right)^2$ | d) $t \left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ |
| b) $t (1 - uv)$ | e) $t \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ |
| c) $t \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ | |

31. Um iate move-se com velocidade \vec{v}_1 em relação à água, enquanto um homem sobe uma escada interna com velocidade \vec{v}_2 em relação ao iate, como ilustra a figura. Sabendo que $v_1 = 2,0$ m/s e $v_2 = 0,5$ m/s, calcule o módulo da velocidade do homem em relação à água.



LUIS AUGUSTO RIBEIRO

32. (UF-PI) Uma pessoa em dificuldades no meio de um rio foi socorrida por amigos que lhe jogaram quatro boias, que coincidentemente ficaram igualmente distanciadas dele, como mostra a figura.



ALBERTO DE STEFANO

Analise as afirmativas e verifique qual é V (verdadeira) ou F (falsa).

- I. O tempo que a pessoa levará nadando para a boia 1 é diferente do que levará nadando para a boia 3.
 - II. O tempo que a pessoa levará nadando para a boia 1 é igual ao tempo que levará nadando para a boia 2.
 - III. O tempo que a pessoa levará nadando para a boia 2 é diferente do que levará nadando para a boia 4.
 - IV. O tempo que a pessoa levará nadando é o mesmo, qualquer que seja a boia.
33. Um iate sobe um rio retilíneo, com velocidade constante em relação à água. A velocidade do rio em relação às margens também é constante. Ao passar por baixo de uma ponte, o bote salva-vidas do iate cai no rio, sem que o piloto perceba, e flutua rio abaixo, arrastado pela correnteza. O piloto só percebe que perdeu o bote 2 horas depois. Nesse momento, o iate vira e,

segue rio abaixo para recuperar o bote, mantendo a mesma velocidade que antes em relação à água. Determine a velocidade do rio em relação às margens, sabendo que o bote é recuperado 12 km abaixo da ponte. (Despreze o intervalo de tempo gasto para virar o iate.)

34. (Vunesp-SP) Uma partícula desloca-se num plano, partindo da origem, com velocidade $\vec{v}_0 = \vec{0}$ e aceleração constante, dada pelas componentes $a_x = 3,0$ m/s² e $a_y = 4,0$ m/s².

- a) Calcule o instante t para o qual o módulo da velocidade da partícula é 40 m/s.
- b) Determine as coordenadas x e y da partícula, no instante t calculado no item a .

35. (ITA-SP) Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

- a) 14 horas e 30 minutos.
- b) 13 horas e 20 minutos.
- c) 7 horas e 20 minutos.
- d) 10 horas.
- e) Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo barco.

36. (OBF-Brasil) Num dia de chuva, um garoto parado consegue abrigar-se perfeitamente mantendo a haste do seu guarda-chuva na vertical, conforme mostra a figura I a seguir.



Figura I.



Figura II.

Movimentando-se para a direita com velocidade constante e de módulo 4,0 m/s, entretanto, ele só consegue abrigar-se mantendo a haste do guarda-chuva inclinada 60° com a horizontal, como mostra a figura II. Admitindo-se que as gotas de chuva tenham movimento uniforme, calcule a intensidade da sua velocidade em relação ao garoto: (Use, se necessário, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.)

- a) nas condições da figura I;
- b) nas condições da figura II.

ALBERTO DE STEFANO

Cinemática angular

Nos capítulos anteriores estudamos alguns aspectos dos movimentos de **translação**. Neste capítulo vamos estudar a Cinemática do movimento de **rotação** de um corpo rígido (indeformável).

Suponhamos, por exemplo, que um disco esteja girando em um antigo toca-discos (fig. 1). Sobre o disco consideremos dois pontos, X e Y, alinhados com o centro O. Em determinado instante eles estão nas posições da figura 2 e, depois de algum tempo, estarão nas posições da figura 3.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 1.

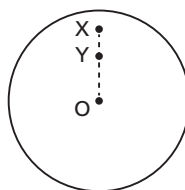


Figura 2.

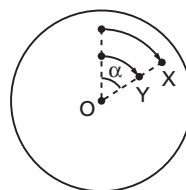


Figura 3.

É fácil perceber que a distância percorrida pelo ponto X é maior do que a distância percorrida pelo ponto Y. No entanto há algo em comum aos deslocamentos de X e Y: o ângulo central α . Podemos garantir que, entre os instantes correspondentes às figuras 2 e 3, todos os pontos do disco giraram o mesmo ângulo α (com exceção do ponto O).

Esse exemplo nos mostra que, para estudar a rotação de um corpo, pode ser mais interessante usar o ângulo girado em vez da distância percorrida por um ponto. Mesmo no caso de uma partícula, se esta tiver movimento circular, veremos que pode ser conveniente descrever o movimento usando o ângulo girado.

1. Medidas de ângulos
2. Deslocamento angular
3. Velocidade angular
4. Período e frequência
5. Transmissão de movimento circular
6. Rolamento
7. A persistência retiniana e o efeito estroboscópico

1. Medidas de ângulos

Na Geometria Elementar são usadas duas unidades de ângulo: o **grau** e a **revolução** (ou **volta**). A relação entre essas unidades é:

$$1 \text{ revolução} = 1 \text{ rev} = 360^\circ$$

Na Trigonometria é introduzida outra unidade: o **radiano**, cujo símbolo é **rad**, e que é a unidade de ângulo do SI.

O radiano é definido como a medida de um ângulo central de uma circunferência que corresponde a um arco de comprimento igual ao raio da circunferência (fig. 4).

Sabemos que o comprimento (perímetro) da circunferência é dado por $C = 2\pi R$, em que $\pi \approx 3,14$. Assim, $C \approx 6,28R$. Como cada R corresponde a um radiano (fig. 5), o número de radianos em uma volta (1 rev) é igual a 2π :

$$1 \text{ volta} = 1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad} \approx 6,28 \text{ rad}$$

Portanto:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx \frac{360^\circ}{6,28} \approx 57,3^\circ$$

Como consequência, temos (fig. 6):

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ rad} \rightarrow R \\ \theta \text{ rad} \rightarrow s \end{array} \right\} \Rightarrow s = \theta \cdot R \quad \text{①}$$

↓
em radianos

Devido à simplicidade da equação ①, há uma preferência pela unidade radiano no estudo das rotações.

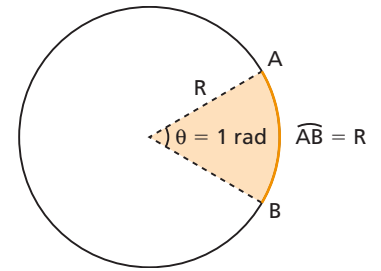


Figura 4.

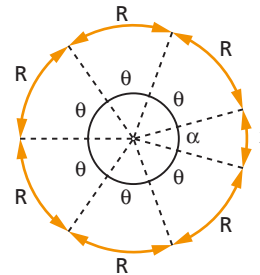


Figura 5.

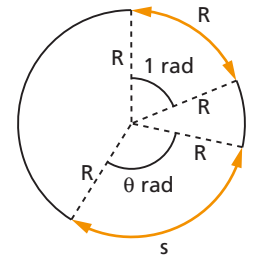


Figura 6.

Exemplo 1

Em uma circunferência de raio $R = 60 \text{ cm}$, consideramos um arco \widehat{AB} de comprimento s , determinado por um ângulo central $\theta = 30^\circ$. Vamos determinar o valor de s .

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad} \\ 30^\circ \rightarrow x \text{ rad} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{(30)(2\pi)}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Para θ em radianos, podemos usar a equação ①:

$$s = \theta \cdot R = \frac{\pi}{6} (60 \text{ cm}) = 10\pi \text{ cm} \approx 10(3,14) \text{ cm} \approx 31,4 \text{ cm}$$

$$s \approx 31,4 \text{ cm}$$

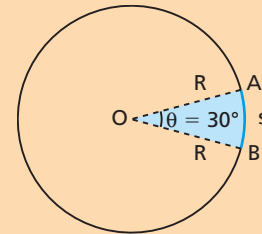


Figura 7.

É costume dar como medida de um arco o ângulo central a ele correspondente. Assim, no Exemplo 1, o arco \widehat{AB} tem comprimento aproximadamente igual a 31,4 cm, mas podemos dizer: “ \widehat{AB} é um arco de 30° ” ou “ \widehat{AB} é um arco de $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$ ”.

2. Deslocamento angular

Na figura 8a representamos uma partícula que se deslocou do ponto A para o ponto B sobre uma circunferência de centro O e raio R . O comprimento Δs do arco \widehat{AB} é o espaço percorrido pela partícula, e o ângulo central $\Delta\theta$ oposto ao arco \widehat{AB} é o **deslocamento angular**:

$$\Delta\theta = \text{deslocamento angular}$$

Na figura 8a o deslocamento ocorreu no sentido **horário**, isto é, no mesmo sentido dos ponteiros do relógio; na figura 8b o deslocamento do ponto P ao ponto Q ocorreu no sentido **anti-horário**, isto é, no sentido oposto ao do movimento dos ponteiros do relógio. Na maioria das aplicações, levaremos em conta o deslocamento angular em

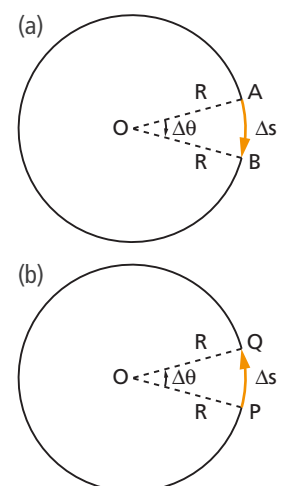


Figura 8.

módulo; porém, em certos casos, quando estivermos analisando dois ou mais pontos girando em sentidos diferentes, poderemos adotar um dos sentidos como positivo e o outro como negativo.

Assim como na Trigonometria, também poderemos ter deslocamentos angulares maiores que uma volta.

3. Velocidade angular

Definimos a velocidade escalar média por $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e a velocidade vetorial média por $v_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$, em que Δs é a variação de posição e \vec{d} é o vetor deslocamento. De modo análogo, definimos uma **velocidade angular média**.

Suponhamos que, num intervalo de tempo Δt , uma partícula em movimento circular (fig. 9) execute um deslocamento angular $\Delta\theta$. A velocidade angular média (ω_m) da partícula nesse intervalo de tempo é definida por:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2)$$

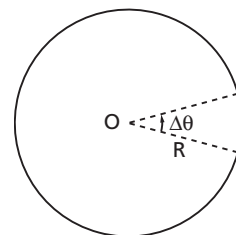


Figura 9.

Se tivermos um corpo rígido em rotação, a equação (2) nos dará a velocidade angular média do corpo, isto é, todos os pontos do corpo terão a mesma velocidade angular (com exceção dos pontos do eixo de rotação).

No Sistema Internacional, a unidade de velocidade angular é o rad/s (ou $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), mas, com frequência, também são usadas as unidades rev/s (simbolizada por **rps**) e rev/min (simbolizada por **rpm**). As unidades envolvendo o grau (grau/s, grau/min, etc.) são pouco usadas.

No capítulo 3 vimos que, além da velocidade escalar média, há a velocidade escalar instantânea, definida por um limite. Aqui ocorre o mesmo; além da velocidade angular média, definimos uma velocidade angular instantânea por meio de um limite:

$$\omega_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Na realidade, não calcularemos esse limite. Vamos apenas repetir o comentário feito no capítulo 3: se a velocidade angular instantânea for constante (movimento uniforme), ela será igual à velocidade angular média em qualquer intervalo de tempo:

$$\omega_i = \text{constante} \Rightarrow \omega_i = \omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (\text{movimento uniforme})$$

De modo geral, tomaremos a velocidade angular em módulo. No entanto, quando vários movimentos ocorrerem em sentidos diferentes, é conveniente atribuir um sinal à velocidade angular.

No capítulo 1 vimos que a grandeza ângulo não é básica. Assim, embora a unidade de ω , no SI, seja

$$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

a equação dimensional de ω é:

$$[\omega] = T^{-1}$$

Exemplo 2

Um pião que está girando executa 480 revoluções em 2,00 minutos. Vamos calcular a velocidade angular média do pião nesse intervalo de tempo.

A velocidade angular pode ser dada em várias unidades. Inicialmente vamos manter as unidades do enunciado.

$$\omega_m = \frac{480 \text{ rev}}{2,00 \text{ min}} = 240 \text{ rev/min} = 240 \text{ rpm}$$

Vamos agora expressar essa velocidade angular em outras unidades.

$$\omega_m = 240 \text{ rev/min} = \frac{240 \text{ rev}}{60 \text{ s}} = 4,00 \text{ rev/s} = 4,00 \text{ rps}$$

Lembrando que $1 \text{ rev} = 360^\circ$, temos:

$$\omega_m = 4,00 \text{ rev/s} = 4,00 \cdot (360^\circ)/\text{s} = 1440 \text{ graus/s}$$

Como $1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad}$, temos:

$$\omega_m = 4,00 \text{ rev/s} = 4,00 (2\pi) \text{ rad/s} = (8,00)\pi \text{ rad/s}$$

Assim:

$$\omega_m = 240 \text{ rev/min} = 4,00 \text{ rev/s} = 1440 \text{ graus/s} = (8,00)\pi \text{ rad/s}$$



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 10.

Velocidade angular e velocidade escalar

Na figura 11 representamos uma partícula em movimento circular que, num certo intervalo de tempo Δt , foi do ponto A para o ponto B. Nesse intervalo de tempo, a velocidade escalar média (v_m) é dada por $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Supondo que o deslocamento angular $\Delta\theta$ seja dado em radianos, vale a equação ①: $\Delta s = (\Delta\theta) \cdot R$. Assim:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(\Delta\theta) \cdot R}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \cdot R = \omega_m \cdot R$$

Usando o processo de limite, pode-se mostrar que a relação acima vale também para valores instantâneos:

$$v = \omega \cdot R \quad \text{③}$$

Portanto, quando estivermos expressando os deslocamentos angulares em **radianos**, valem as equações:

$$\Delta s = (\Delta\theta) \cdot R \quad \text{e} \quad v = \omega \cdot R$$

A velocidade escalar (v) é às vezes também chamada **velocidade linear** ou **velocidade tangencial**.

Às vezes pode ser útil expressar a aceleração centrípeta de uma partícula usando a velocidade angular em vez da velocidade escalar.

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R \Rightarrow a_c = \omega^2 R \quad \text{④}$$

É importante ressaltar que a equação ④ só vale quando estivermos medindo os deslocamentos angulares em radianos, pois, para obtê-la, usamos a equação ③, que só vale para radianos.

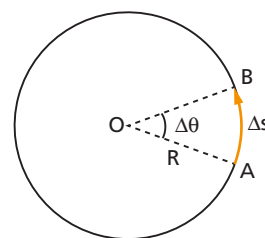


Figura 11.

Exemplo 3

Um disco gira em torno de um eixo que passa por seu centro O , com velocidade angular $\omega = 1,5 \text{ rad/s}$. Sobre o disco considere os pontos A e B assinalados na figura 12.

Sendo: $a = 4,0 \text{ cm}$ e $b = 2,0 \text{ cm}$, vamos calcular:

a) a velocidade escalar do ponto A .

O raio da trajetória do ponto A é $a = 4,0 \text{ cm}$.

Assim, de acordo com a fórmula (3), temos:

$$\vec{v}_A = \omega \cdot R = \omega \cdot a = (1,5 \text{ rad/s})(4,0 \text{ cm})$$

$$\vec{v}_A = 6,0 \text{ cm/s}$$

b) a velocidade escalar do ponto B .

O raio da trajetória do ponto B é $b = 2,0 \text{ cm}$.

Assim:

$$\vec{v}_B = \omega \cdot R = \omega \cdot b = (1,5 \text{ rad/s})(2,0 \text{ cm})$$

$$\vec{v}_B = 3,0 \text{ cm/s}$$

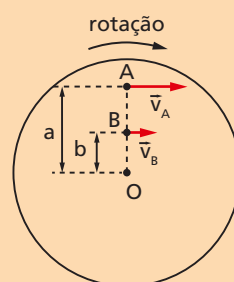


Figura 12.

Equação horária da posição angular no MCU

No estudo do movimento uniforme (capítulo 4) vimos que em certos casos era conveniente usar a equação horária da posição: $s = s_0 + vt$. No caso de um movimento circular uniforme (MCU) também convém, em certos casos, usar uma equação horária da posição angular.

Suponhamos que uma partícula se mova sobre uma circunferência com velocidade angular constante ω . Vamos supor que o movimento ocorra no sentido anti-horário (fig. 13).

Sendo C o centro da circunferência, vamos tomar o segmento \overline{CP} como referência para medir as posições angulares. No instante inicial ($t = 0$), a partícula está no ponto A e sua posição angular inicial é θ_0 . Num outro instante t qualquer, a partícula estará num ponto B , cuja posição angular é θ . Nesse intervalo de tempo, temos:

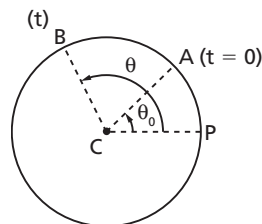


Figura 13.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} = \frac{\theta - \theta_0}{t} \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega t \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

A equação $\theta = \theta_0 + \omega t$ é a equação horária procurada.

Exercícios de Aplicação

- Entre as 8 h e as 9 h, a que horas o ponteiro dos minutos de um relógio se sobrepõe ao ponteiro das horas?

Resolução:

Primeiramente vamos determinar as velocidades angulares dos ponteiros das horas (ω_H) e dos minutos (ω_M). Vamos usar a unidade revolução/hora. O ponteiro das horas dá uma volta a cada

12 horas, e o ponteiro dos minutos dá uma volta a cada 1 hora. Assim:



Figura a.



Figura b.

ILUSTRAÇÕES: ZAPET

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_H &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1 \text{ rev}}{12 \text{ h}} = \frac{1}{12} \text{ rev/h} \\ \omega_M &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1 \text{ rev}}{1 \text{ h}} = 1 \text{ rev/h} \end{aligned} \right.$$

Vamos considerar como situação inicial um momento em que saibamos as posições exatas dos ponteiros: às 8 h (fig. a).

Nesse momento o ângulo γ entre os dois ponteiros é igual a $\frac{8}{12}$ de volta:

$$\gamma = \frac{8}{12} \text{ rev} = \frac{2}{3} \text{ rev}$$

Tomando o sentido horário como positivo e a posição angular inicial do ponteiro grande como nula, isto é, $\theta_{0H} = 0$, a posição angular inicial do ponteiro pequeno será:

$$\theta_{0H} = \gamma = \frac{2}{3} \text{ rev}$$

Portanto, as equações horárias das posições angulares dos dois ponteiros são:

$$\theta_H = \theta_{0H} + \omega_H t \Rightarrow \theta_H = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} t$$

$$\theta_M = \theta_{0H} + \omega_M t \Rightarrow \theta_M = 1t$$

Quando os ponteiros se superpuserem pela primeira vez, teremos:

$$\theta_H = \theta_M \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{12} t = 1t \Rightarrow t = \frac{8}{11} \text{ h}$$

$$t = \frac{8}{11} \text{ h} = \frac{8}{11} (60 \text{ min}) = \frac{480}{11} \text{ min} =$$

$$= 43 \text{ min} + \frac{7}{11} \text{ min}$$

Mas:

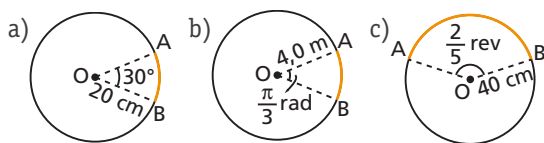
$$\frac{7}{11} \text{ min} = \frac{7}{11} (60 \text{ s}) = \frac{420}{11} \text{ s} =$$

$$= 38 \text{ s} + \frac{2}{11} \text{ s} \approx 38,2 \text{ s}$$

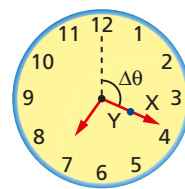
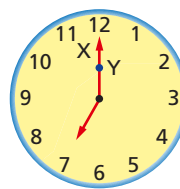
Assim, $t \approx 43 \text{ min } 38,2 \text{ s}$.

Portanto, o ponteiro dos minutos se sobrepõe ao ponteiro das horas aproximadamente às 8 h 43 min 38,2 s.

2. Em cada caso a seguir, calcule o comprimento do arco \widehat{AB} (o ponto O é o centro da circunferência):



3. Entre 7 h e 7 h 20 min, o ponteiro dos minutos de um relógio teve o deslocamento angular $\Delta\theta$. O comprimento do ponteiro é 10 cm.



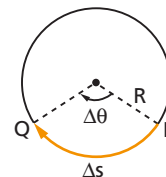
- a) Calcule o valor de $\Delta\theta$ em graus, rad e rev.
b) Nesse intervalo de tempo, qual foi o espaço percorrido pela extremidade X do ponteiro?
c) Nesse intervalo de tempo, qual foi o espaço percorrido pelo ponto Y que está no meio do ponteiro?

4. Consideremos um relógio de ponteiros funcionando durante um dia. Nesse intervalo de tempo, os ponteiros das horas, dos minutos e dos segundos terão, respectivamente, deslocamentos angulares x , y e z . Calcule os valores desses deslocamentos em:



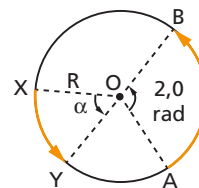
- a) revoluções; b) graus; c) radianos.

5. Uma partícula move-se sobre uma circunferência descrevendo um arco \widehat{PQ} , que corresponde a um ângulo central $\Delta\theta = 120^\circ$, em um intervalo de tempo $\Delta t = 2$ segundos. Calcule a velocidade angular média da partícula nesse intervalo de tempo, em rad/s.



6. Calcule o valor aproximado da velocidade angular da Terra, em rad/s.

7. Uma partícula move-se sobre uma circunferência de centro O , com velocidade angular constante $\omega = 5,0 \text{ rad/s}$, como ilustra a figura. Calcule:



- a) o intervalo de tempo gasto pela partícula no percurso \widehat{AB} ;
b) a medida do ângulo α , sabendo que o trecho \widehat{XY} é percorrido em 0,30 s.

8. O prato de um antigo toca-discos tem rotação uniforme, executando 78 revoluções a cada minuto.



MARCOS AURELIO NEVES GOMES

- Calcule a velocidade angular desse prato, em rev/s e rad/s.
- Em quanto tempo esse prato executa uma rotação de $\frac{3\pi}{2}$ radianos?
- Qual é o deslocamento angular do prato em 5,0 s?
- Calcule a velocidade linear (escalar) e a aceleração centrípeta de um ponto A situado a 10 cm do centro C do prato.
- Calcule a velocidade linear e a aceleração centrípeta de um ponto B situado a 4,0 cm do centro C.

9. A figura representa uma situação em que um indivíduo tira água de um poço, girando a manivela à razão de 30 revoluções por minuto. Desprezando a espessura da corda e sabendo que o cilindro onde ela se enrola tem raio $R = 10$ cm, calcule a velocidade escalar do balde, em metros por segundo.



ALBERTO DE STEFANO

10. Uma bala é disparada com velocidade \vec{v} , penetrando num buraco B (fig. a) de um cilindro oco que gira com velocidade angular (ω) constante com eixo de rotação vertical. Suponhamos que a trajetória da bala seja retilínea e que passe pelo eixo. Suponhamos também que $v = 200$ m/s e que o raio do cilindro seja $R = 0,200$ m. Calcule o valor de ω de modo que a bala saia pelo mesmo buraco por onde entrou (fig. b).

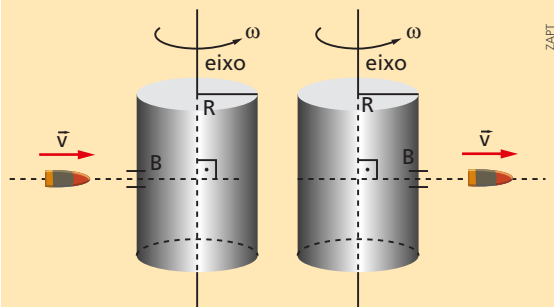


Figura a.

Figura b.

Resolução:

É fácil perceber que o problema tem mais de uma solução possível. Uma delas é supor que, entre a posição a e a posição b, o cilindro tenha efetuado **meia volta**, isto é, o deslocamento angular seja $\Delta\theta = \frac{1}{2}$ rev. Mas o cilindro poderia também ter dado **uma volta e meia**, ou **duas voltas e meia**, ou **três voltas e meia**, etc. Assim, poderíamos ter: $\Delta\theta = \frac{1}{2}$ rev ou $\Delta\theta = \frac{3}{2}$ rev ou $\Delta\theta = \frac{5}{2}$ rev ou $\Delta\theta = \frac{7}{2}$ rev, etc.

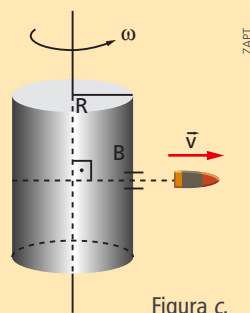


Figura c.

De modo geral podemos, então, dizer que os valores possíveis de $\Delta\theta$ são dados por:

$$\Delta\theta = \frac{n}{2} \text{ rev} \quad (1)$$

onde n é um número natural **ímpar** (pode ser 1, 3, 5, etc.).

O espaço percorrido pela bala dentro do cilindro é igual ao diâmetro: $\Delta s = 2R$. Sendo Δt o tempo de percurso, temos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2R}{v} \quad (2)$$

Nesse mesmo intervalo de tempo, o cilindro efetuou o deslocamento angular $\Delta\theta$ dado pela equação (1):

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\frac{n}{2} \text{ rev}}{\omega} = \frac{n}{2\omega} \quad (3)$$

Comparando (2) e (3):

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = \frac{n}{2\omega} \Rightarrow \omega = \frac{n \cdot v}{4R}$$

$$\omega = \frac{n \cdot (200)}{4(0,200)} = n \cdot 250$$

Portanto:

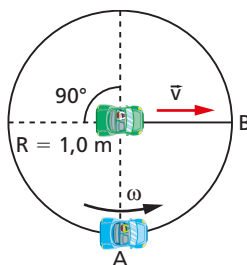
$$\omega = n \cdot 250 \text{ rev/s} = n \cdot 250 \cdot 2\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = n \cdot 500\pi \text{ rad/s}$$

Por exemplo:

- para $n = 1$, temos:
 $\omega = 250 \text{ rev/s} = 500\pi \text{ rad/s}$
- para $n = 3$, temos:
 $\omega = 750 \text{ rev/s} = 1500\pi \text{ rad/s}$

11. Na figura ao lado, representamos um brinquedo no qual há dois carrinhos. Um dos carrinhos tem movimento circular com velocidade angular constante $\omega = 1,5\pi \text{ rad/s}$. No instante em que esse carrinho passa pelo ponto A, o outro carrinho parte do centro da circunferência, com movimento retilíneo uniforme de velocidade \vec{v} .



Desprezando o tamanho dos carrinhos, calcule:

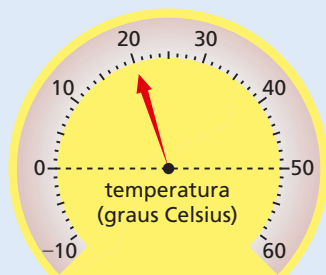
- o maior valor de v de modo que os carrinhos colidam no ponto B;
- todos os valores de v para os quais os carrinhos colidem em B.

12. Considere um relógio de ponteiros:

- Calcule a velocidade angular do ponteiro das horas e do ponteiro dos minutos.
- Entre 10 h e 11 h, a que horas o ponteiro dos minutos se sobrepõe ao ponteiro das horas?

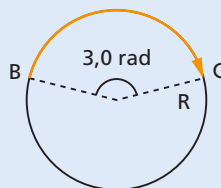
Exercícios de Reforço

13. Na figura abaixo, temos o mostrador de um termômetro cuja função é medir a temperatura ambiente. Às 6 h da manhã de um dia de inverno, o ponteiro indica a temperatura de 5 graus Celsius e, ao meio-dia desse mesmo dia, o ponteiro indica 20 graus Celsius. Calcule, em radianos por hora, a velocidade angular média desse ponteiro entre as 6 h e o meio-dia.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

14. Uma roda com 0,50 m de diâmetro gira em torno do seu eixo em movimento de rotação uniforme, completando 5,0 voltas em 2,0 s. Determine a velocidade angular da roda e a velocidade escalar de um ponto de sua periferia.
15. Um automóvel percorre uma pista circular de raio $R = 160 \text{ m}$, com velocidade escalar constante 24 m/s . Qual é o tempo gasto para percorrer o trecho BC?

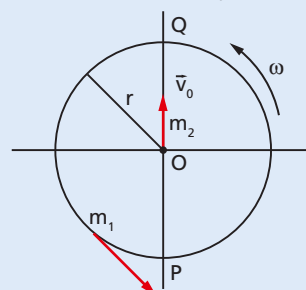


16. (Vunesp-SP) Dois atletas estão correndo numa pista de atletismo com velocidades constantes, mas diferentes. O primeiro atleta locomove-se com velocidade v e percorre a faixa mais interna da pista, que na parte circular tem raio R . O segundo atleta percorre a faixa mais externa, que tem raio $\frac{3R}{2}$. Num mesmo instante, os dois atletas entram no trecho circular da pista,

completando-o depois de algum tempo. Se ambos deixam esse trecho simultaneamente, podemos afirmar que a velocidade do segundo atleta é:

- $3v$
- $\frac{3v}{2}$
- v
- $\frac{2v}{3}$
- $\frac{v}{3}$

17. (UF-PI) Uma partícula move-se numa circunferência de raio r , no plano horizontal, com movimento circular uniforme de velocidade angular ω , conforme representado na figura. Ao passar pelo ponto P, outra partícula é lançada do ponto O, com velocidade de módulo v_0 constante.



Para que as partículas colidam no ponto Q, o maior valor de v_0 será:

- $\pi\omega$
- $\frac{\omega}{\pi}$
- $\frac{\omega}{\pi r}$
- $\frac{2\omega r}{\pi}$
- $\omega\pi r$

18. (UF-RN) Duas partículas percorreram a mesma trajetória em movimentos circulares uniformes, uma em sentido horário e a outra em sentido anti-horário. A primeira efetua $\frac{1}{3} \text{ rpm}$ e a segunda $\frac{1}{4} \text{ rpm}$. Sabendo que partiram do mesmo ponto, em uma hora encontrar-se-ão:

- 45 vezes.
- 35 vezes.
- 25 vezes.
- 15 vezes.
- 7 vezes.

4. Período e frequência

Consideremos um corpo girando com velocidade angular constante ou uma partícula em movimento circular uniforme. Nesses casos, o intervalo de tempo correspondente a uma volta é sempre o mesmo e é chamado de **período** do movimento, sendo usualmente representado por T . A **frequência** (f) desse movimento é o número de voltas por unidade de tempo:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \quad (5)$$

em que N é o número de voltas efetuadas no intervalo de tempo Δt . Observe que a frequência coincidirá com a velocidade angular (ω) quando a unidade de ângulo for revolução.

A frequência pode ser dada em **revoluções por hora (rph)**, **revoluções por minuto (rpm)**, **revoluções por segundo (rps)**, etc. No Sistema Internacional a unidade de frequência é o **hertz (Hz)**, que é igual a 1 revolução por segundo:

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ hertz} = 1 \text{ rps} = 1 \text{ revolução por segundo}$$

Se, na equação (5), fizermos $N = 1$, o intervalo de tempo Δt deverá ser igual a um período (T):

$$f = \frac{1}{T} \quad (6)$$

Já comentamos que a unidade de ângulo é adimensional; assim, na unidade de frequência podemos omitir a palavra revolução.

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ rps} = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

Exemplo 4

Uma partícula tem movimento circular e uniforme executando 600 voltas em 2,0 minutos. Vamos calcular:

a) a frequência do movimento em hertz.

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{600 \text{ voltas}}{2,0 \text{ min}} = \frac{600 \text{ voltas}}{(2,0 \text{ min})(60 \text{ s})} = 5,0 \text{ rps} = 5,0 \text{ Hz}$$

b) o período do movimento.

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5,0 \text{ Hz}} \Rightarrow T = 0,20 \text{ s}$$

Relação entre o período, a frequência e as velocidades

Podemos relacionar a velocidade escalar e a velocidade angular com o período e a frequência de um movimento circular uniforme.

Consideremos inicialmente a velocidade angular ω , supondo que os ângulos estejam expressos em radianos. Por definição, temos $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Se Δt for igual a um período ($\Delta t = T$), o deslocamento angular deverá ser igual a uma volta: $\Delta\theta = 2\pi$ radianos. Portanto: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Como a frequência é o inverso do período, temos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{ângulo em radianos})$$

Consideremos agora uma partícula em movimento circular uniforme cuja trajetória tem raio R (fig. 14). Sabemos que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Se Δt for igual a um período ($\Delta t = T$), o espaço percorrido deverá ser igual ao perímetro da circunferência: $\Delta s = 2\pi R$. Assim: $v = \frac{2\pi R}{T}$. Como a frequência é o inverso do período, concluímos:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi Rf$$

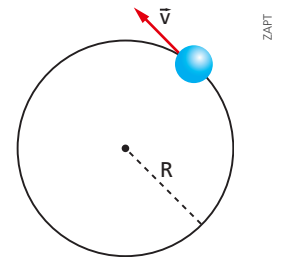


Figura 14.

É importante ressaltar que essas equações não precisam ser memorizadas; elas podem ser obtidas, sempre que necessário, a partir de outras expressões já conhecidas.

Fenômenos periódicos

Os conceitos de período e frequência não se aplicam apenas aos movimentos circulares, mas a qualquer movimento **periódico**, isto é, movimento que se repete em intervalos de tempo iguais. Nesses casos, o período (T) é o menor intervalo de tempo no qual o movimento se repete, e a frequência (f) é o número de repetições por intervalo de tempo, continuando a valer a equação $f = \frac{1}{T}$.

Por exemplo, o pêndulo do relógio da figura 15 tem um movimento periódico, sendo o período o tempo para uma oscilação completa (ida e volta).



VALUE STOCK IMAGES/GLOWIMAGES

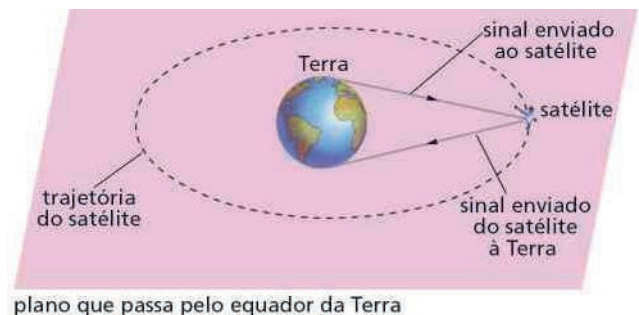
Figura 15. O pêndulo do relógio realiza um movimento periódico.

Satélites artificiais da Terra

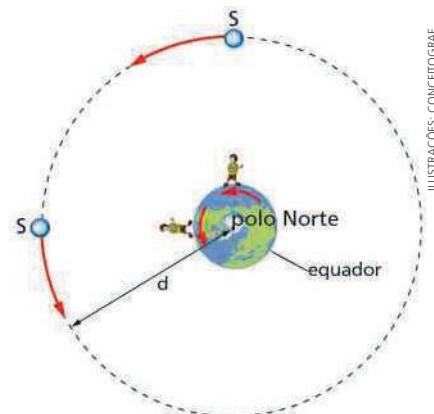
Há um grande número de satélites artificiais girando em torno da Terra em órbitas circulares, em diversas altitudes, de modo que o centro de cada órbita está próximo do centro da Terra (no capítulo 24 veremos a razão disso).

Suponhamos que a órbita de um desses satélites esteja no mesmo plano que contém o equador da Terra (fig. 16) e que o satélite gire no mesmo sentido em que ocorre o movimento de rotação da Terra (fig. 17). Suponhamos ainda que o período do movimento do satélite seja igual ao período de rotação da Terra, isto é, aproximadamente 24 horas (no exercício 56 veremos por que não é exatamente 24 horas).

Um observador na Terra terá a impressão de que o satélite está parado, isto é, verá o satélite sempre na mesma posição, como ilustra a figura 17. Por esse motivo esse satélite é chamado de **geoestacionário**. Esse tipo de satélite é usado nas telecomunicações (telefone, televisão, etc.). Como mostra a figura 16, um sinal é enviado de um ponto da Terra para o satélite, que devolve o sinal para outro ponto.



plano que passa pelo equador da Terra
Figura 16.



ILUSTRAÇÕES: CONCEITOGRAP

Figura 17.

Exercícios de Aplicação

19. Os pratos dos antigos toca-discos podiam girar em várias frequências, mas a mais usada era a de $33 \frac{1}{3}$ rpm. Suponha que um prato esteja girando com essa frequência. Calcule:
- o valor da frequência do movimento em hertz;
 - a velocidade angular do prato em rad/s.

Resolução:

$$a) \ 33 \frac{1}{3} = 33 + \frac{1}{3} = \frac{99 + 1}{3} = \frac{100}{3}$$

Assim:

$$f = 33 \frac{1}{3} \text{ rpm} = \frac{100}{3} \text{ revoluções por minuto}$$

Portanto:

$$f = \frac{\frac{100}{3} \text{ revoluções}}{60 \text{ segundos}} = \frac{5}{9} \text{ rps}$$

$$f = \frac{5}{9} \text{ Hz} \approx 0,55 \text{ Hz}$$

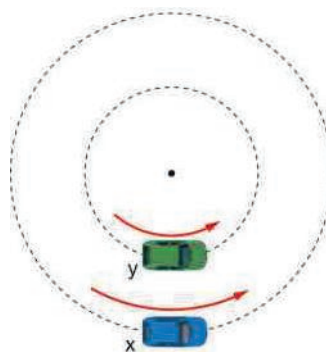
- b) Quando os ângulos estão expressos em radianos, temos:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \left(\frac{5}{9} \right) = \frac{10\pi}{9}$$

$$\omega = \frac{10\pi}{9} \text{ rad/s}$$

20. Uma partícula tem movimento circular uniforme sobre uma circunferência de raio 2,0 metros. Sabendo que a partícula efetua 900 revoluções em 3,0 minutos, calcule:
- a frequência em Hz;
 - o período em segundos;
 - a velocidade angular em rad/s;
 - a velocidade linear em m/s.
21. Um pião gira com movimento uniforme de período 0,25 segundo. Calcule:
- a frequência do pião em Hz;
 - a velocidade angular do pião em rad/s.
22. Durante um exercício físico, o coração de uma pessoa está batendo com frequência de 120 batidas por minuto. Qual é o intervalo de tempo entre duas batidas consecutivas?

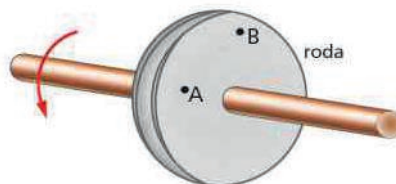
23. Em um brinquedo, dois carrinhos movem-se em trajetórias circulares concêntricas, com movimentos uniformes, sendo o período do carrinho x igual a 1,0 minuto e o do carrinho y igual a 1 min 20 s. Num determinado instante eles estão alinhados com o centro, como ilustra a figura, movendo-se no mesmo sentido.



ILUSTRAÇÕES: CONCEITOGRAF

- Depois de quanto tempo eles estarão pela primeira vez nas mesmas posições da figura?
- Nas condições do item a, quantas voltas terão dado os carrinhos?
- Depois de quanto tempo estarão pela quinta vez nas mesmas posições da figura?

24. Dois pontos, A e B, situam-se sobre uma roda a respectivamente 4 cm e 7 cm do seu eixo de rotação.



Pode-se dizer que:

- o período de B é maior que o período de A.
- a frequência de A é menor que a frequência de B.
- a velocidade angular de B é maior que a velocidade angular de A.
- a velocidade angular de A é igual à velocidade angular de B.
- as velocidades escalares de A e B são iguais.

Exercícios de Reforço

25. (Fuvest-SP) Um consórcio internacional, que reúne dezenas de países, milhares de cientistas e emprega bilhões de dólares, é responsável pelo *Large Hadrons Collider* (LHC), um túnel circular subterrâneo, de alto vácuo, com 27 km de extensão, no qual eletromagnetos aceleram partículas,

como prótons e antiprótons, até que alcancem 11 000 voltas por segundo para, então, colidirem entre si. As experiências realizadas no LHC investigam componentes elementares da matéria e reproduzem condições de energia que teriam existido por ocasião do *Big Bang*.

- a) Calcule a velocidade do próton, em km/s, relativamente ao solo, no instante da colisão.
- b) Calcule o percentual dessa velocidade em relação à velocidade da luz, considerada, para esse cálculo, igual a 300 000 km/s.
- c) Além do desenvolvimento científico, cite outros dois interesses que as nações envolvidas nesse consórcio teriam nas experiências realizadas no LHC.

26. (UF-AM) Uma propaganda na internet diz: “Seus negócios precisam andar mais rápido que a velocidade do mundo.”. As velocidades lineares, aproximadas, de um ponto sobre o Equador terrestre e a uma latitude de 25° , respectivamente, são: (Dados: raio da Terra no Equador terrestre = 6 400 km; $\sin 25^\circ = 0,42$ e $\cos 25^\circ = 0,91$). Adote $\pi = 3$.

- a) 350 m/s e 350 m/s
- b) 444 m/s e 404 m/s
- c) 400 m/s e 500 m/s
- d) 220 m/s e 200 m/s
- e) nenhuma das respostas

27. (UE-RJ) Segundo o modelo simplificado de Bohr, o elétron do átomo de hidrogênio executa um movimento circular uniforme, de raio igual a $5,0 \cdot 10^{-11}$ m, em torno do próton, com período igual a $2,0 \cdot 10^{-15}$ s. Com o mesmo valor da velocidade orbital no átomo, a distância, em quilômetros, que esse elétron percorreria no espaço livre, em linha reta, durante 10 minutos, seria da ordem de:

a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4 d) 10^5 e) 10^6

Adote $\pi = 3$.

28. (UF-GO) Uma partícula executa um movimento circular uniforme de raio 1,0 cm com aceleração $0,25 \text{ m/s}^2$. O período do movimento, em segundos, é:

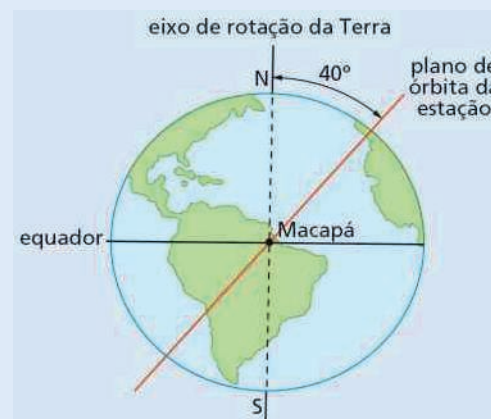
- a) 2π b) 4π c) 8π d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4}$

29. (Vunesp-SP) Em um hospital, o soro injetado em um paciente goteja à razão de 30 gotas por minuto.

- a) Qual a frequência do gotejamento em Hz?
- b) Qual o intervalo de tempo entre duas gotas consecutivas?

30. (Fuvest-SP) A Estação Espacial Internacional mantém atualmente uma órbita circular em torno da Terra, de tal forma que permanece sempre em um plano, normal a uma direção fixa no espaço. Esse plano contém o centro da Terra e faz um ângulo de 40° com o eixo de rotação da Terra.

Em um certo momento, a estação passa sobre Macapá, que se encontra na linha do Equador.



CONCEITO GRAF

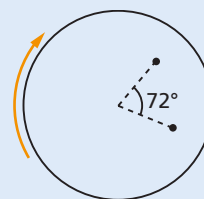
- Dados da estação:
Período aproximado = 90 minutos
Altura acima da Terra $\approx 40\,000$ km
- Dados da Terra:
Circunferência no Equador $\approx 40\,000$ km

Depois de uma volta completa em sua órbita, a estação passará novamente sobre o Equador em um ponto que está a uma distância de Macapá de, aproximadamente:

- a) zero km
- b) 500 km
- c) 1 000 km
- d) 2 500 km
- e) 5 000 km

31. (UF-PE) Um satélite artificial geoestacionário orbita em torno da Terra, de modo que sua trajetória permanece no plano do Equador terrestre, e sua posição aparente para um observador situado na Terra não muda. Qual deve ser a velocidade linear orbital, em unidades de 10^3 km/h , deste satélite cuja órbita circular tem raio de $4,3 \cdot 10^4 \text{ km}$? Adote $\pi = 3$.

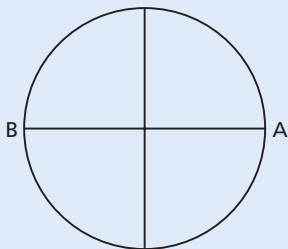
32. (PUC-MG) Para determinar a velocidade média dos projéteis expelidos pelo cano de uma metralhadora, utilizamos um disco que gira a uma frequência constante de 0,50 Hz. As marcas produzidas no disco por dois disparos consecutivos determinam um arco de 72° .



Quantas balas essa metralhadora dispara por minuto?

- a) 150
- b) 250
- c) 350
- d) 400
- e) 450

- 33 (UF-MS) Uma partícula executa movimento uniforme no sentido anti-horário com velocidade angular de $\frac{\pi}{4}$ rad/s sobre uma circunferência de diâmetro $AB = 8$ cm. Sabe-se que 3 segundos após passar pelo ponto A a partícula está passando por um ponto C .



É correto afirmar que:

- a) o módulo do vetor velocidade média no trecho AC é $\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{2}}{3}$ cm/s.
- b) os pontos A , B e C são vértices de um triângulo isósceles.
- c) o período, a aceleração centrípeta e a velocidade escalar da partícula no ponto C são, respectivamente, 8 s, zero e π cm/s.
- d) o período, a aceleração centrípeta e a velocidade escalar da partícula no ponto C são, respectivamente, 4 s, zero e 4π cm/s.
- e) a medida do arco \widehat{AC} é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm.

5. Transmissão de movimento circular

Observe abaixo alguns casos de transmissão de movimento circular.



Figura 18. Exemplos de transmissão de movimento circular.

No caso da figura 18a, a transmissão é feita por uma correia; na figura 18b (bicicleta) é uma corrente que transmite o movimento de uma roda dentada a outra. No exemplo da figura 18c não há correia nem corrente, e a transmissão é feita diretamente de uma roda a outra; nesse caso são usadas rodas dentadas para evitar o deslizamento.

De modo geral, os vários dispositivos de transmissão de movimento circular encaixam-se em um dos dois casos esquematizados na figura 19: transmissão por contato (fig. 19a) ou por meio de correia ou corrente (fig. 19b). No caso do contato, as rodas giram em sentidos opostos e, no caso de correia (ou corrente), as duas giram no mesmo sentido.

Nos dois casos, para que não haja escorregamento, os pontos das periferias das duas rodas devem ter a mesma velocidade linear v . Supondo que os ângulos sejam medidos em radianos, temos $v = \omega \cdot R$. Assim:

$$\omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B \quad (7)$$

Já vimos que, para ângulos em radianos, vale a equação $\omega = 2\pi f$. Substituindo em (7):

$$(2\pi f_A)R_A = (2\pi f_B)R_B \Rightarrow f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$$

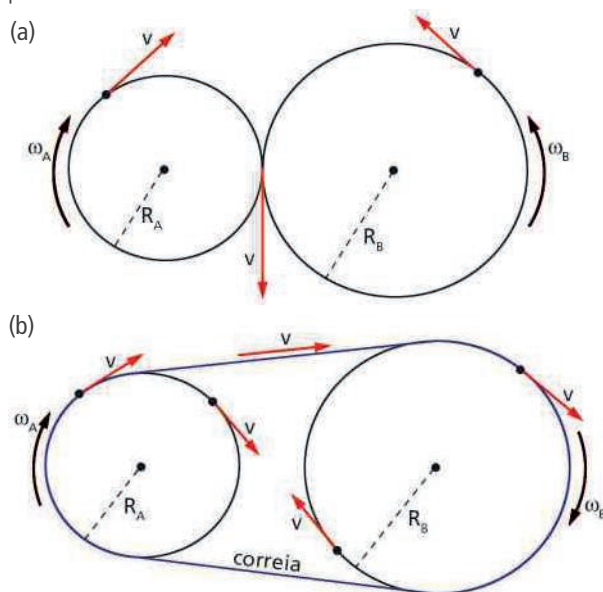


Figura 19.

6. Rolamento

Na figura 20 representamos um menino andando de bicicleta. As rodas da bicicleta têm, simultaneamente, movimentos de translação e rotação. Dizemos que as rodas estão rolando sobre o chão ou que as rodas têm movimento de **rolamento**.

Vamos admitir que a bicicleta tenha movimento retilíneo e uniforme, com as rodas rolando sem escorregar. Fixando a atenção sobre um ponto P da periferia de uma das rodas (fig. 21) e supondo que a roda gire no sentido horário, o centro C move-se para a direita com velocidade v_c . No instante $t = 0$, o ponto P está em contato com o solo; em seguida, representamos as posições do ponto P depois de $\frac{1}{4}$ de volta ($t = \frac{T}{4}$), meia volta ($t = \frac{T}{2}$), $\frac{3}{4}$ de volta ($t = \frac{3T}{4}$) e uma volta ($t = T$).

O ponto P descreve uma curva denominada cicloide (para um observador no solo).

Como a roda rolou sem escorregar, a distância d assinalada na figura 21 é igual ao perímetro da circunferência: $d = 2\pi R$. Por outro lado, essa foi a distância percorrida pelo centro C (e pela bicicleta) durante o intervalo de tempo igual a um período (T); portanto, temos também $d = v_c \cdot T$. Assim:

$$d = 2\pi R = v_c \cdot T \Rightarrow v_c = \frac{2\pi R}{T}$$

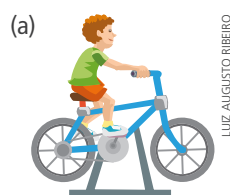
Mas $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ (para ângulos em radianos).

Portanto:

$$v_c = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi Rf = \omega R \quad (8)$$

Observando as igualdades em (8), percebemos um fato interessante: a velocidade do centro da roda (e da bicicleta) é igual à velocidade linear (fig. 23) de um ponto da periferia de uma roda com rotação pura (sem translação) de período T , frequência f e velocidade angular ω . Essa observação nos ajuda a calcular a velocidade instantânea de um ponto da roda durante o rolamento.

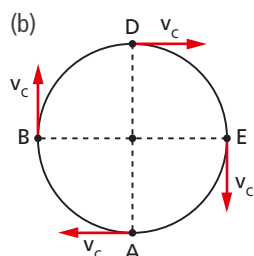
Suponhamos que inicialmente a bicicleta esteja suspensa em um suporte (fig. 23a), com o garoto pedalando, de modo que a roda traseira tem período T , frequência f e velocidade angular ω ; os pontos da periferia dessa roda (fig. 23b) têm velocidade linear v_c .



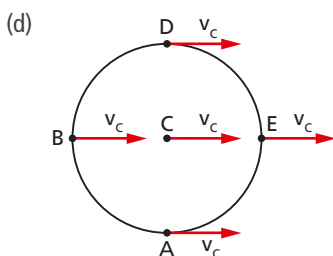
LUIZ AUGUSTO RIBEIRO



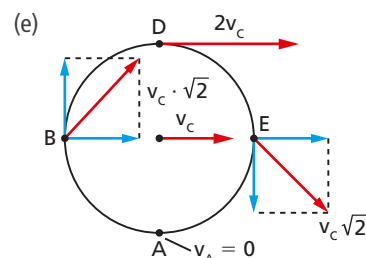
LUIZ AUGUSTO RIBEIRO



ZAPT



ZAPT



ZAPT

Figura 23.



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Figura 20.

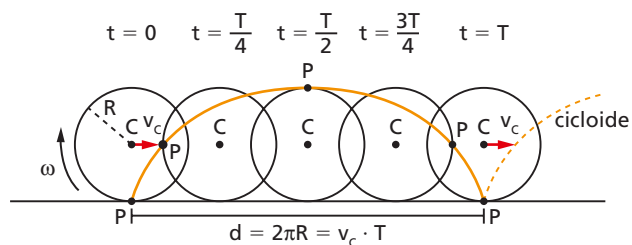
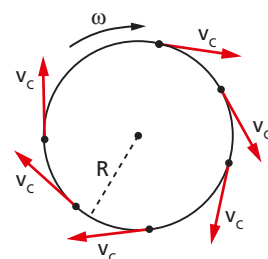


Figura 21.



ZAPT

Figura 22. Roda com rotação pura:

$$v_c = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi Rf = \omega R$$

Suponhamos agora que a bicicleta seja colocada em contato com o solo (fig. 23c), com o garoto pedalando com a mesma frequência; cada ponto da roda (e da bicicleta) adquire uma velocidade de translação para a direita (fig. 23d) cujo valor é v_c . A superposição das figuras *b* e *d* nos dá a figura *e*, que mostra a velocidade resultante dos quatro pontos escolhidos. É importante observar que o ponto que está em contato com o solo tem velocidade nula. Isso explica o fato de uma foto da roda em movimento ficar menos nítida na parte de cima que na parte de baixo.

Exercícios de Aplicação

34. Duas rodas dentadas, *A* e *B*, de raios $R_A = 12$ cm e $R_B = 6,0$ cm, estão acopladas, como mostra a figura *a*. A roda *A* gira no sentido anti-horário, com frequência $f_A = 30$ Hz. Qual é a frequência da roda *B*?

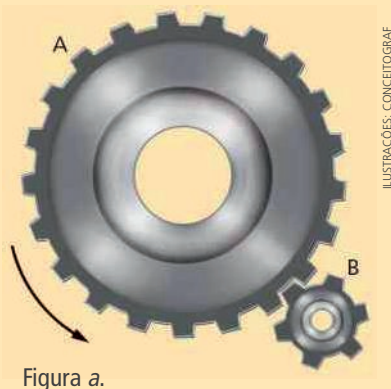


Figura *a*.

Resolução:

A roda *B* deve girar no sentido horário (oposto ao de *A*), como mostra a figura *b*.

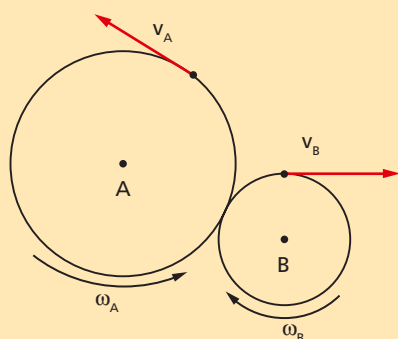


Figura *b*.

A condição para que não haja escorregamento é que a velocidade linear de um ponto da periferia de *A* (v_A) seja igual à velocidade linear de um ponto da periferia de *B* (v_B):

$$v_A = v_B$$

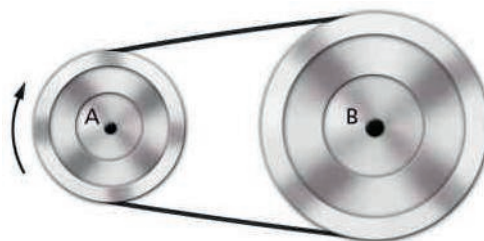
Como $v = 2\pi fR$, substituindo na equação acima, temos:

$$2\pi \cdot f_A \cdot R_A = 2\pi \cdot f_B \cdot R_B$$

$$(30)(12) = f_B \cdot (6,0)$$

$$f_B = 60 \text{ Hz}$$

35. A figura ilustra duas polias acopladas por uma correia. A polia *A*, de raio 12 cm, gira no sentido horário com velocidade angular 50 rad/s. A polia *B* tem raio 30 cm.



- Em que sentido gira a polia *B*?
- Qual é a velocidade angular da polia *B*?

36. As rodas dentadas têm raios $R_A = 15$ cm e $R_B = 20$ cm. Sabe-se que a roda *A* gira no sentido horário com frequência 40 Hz.



Responda:

- Em que sentido gira a roda *B*?
- Qual é a frequência do movimento de *B*?

37. Em uma bicicleta o pedal faz girar uma roda dentada chamada coroa. Por meio de uma corrente, a coroa está acoplada a outra roda dentada, a catraca, que movimenta a roda traseira da bicicleta. Suponhamos que a coroa tenha 35 dentes e a catraca, 7 dentes. Suponhamos também que

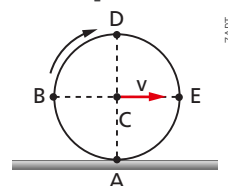
a pessoa que dirige a bicicleta pedale à razão de 40 voltas por minuto. Calcule, em rpm, a frequência de rotação da roda da bicicleta.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

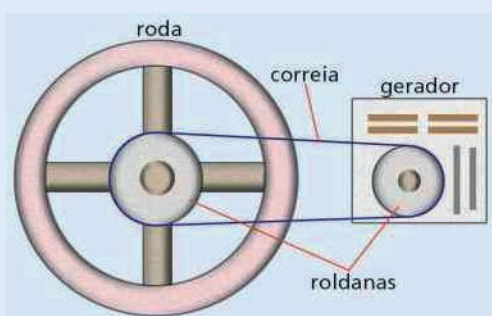
38. Um automóvel cujas rodas têm diâmetro de 50 cm tem movimento retilíneo uniforme, de modo que a frequência de rotação de suas rodas é 1200 rpm. Qual é o módulo da velocidade do automóvel?

39. Uma roda está rolando sem escorregar em uma superfície horizontal, de modo que seu centro C tem velocidade $v = 4$ m/s. Calcule os módulos das velocidades dos pontos A , B , D e E .



Exercícios de Reforço

40. (Vunesp-SP) Uma técnica secular utilizada para aproveitamento da água como fonte de energia consiste em fazer uma roda, conhecida como roda-d'água, girar sob a ação da água em uma cascata ou em correnteza de pequenos riachos. O trabalho realizado para girar a roda é aproveitado em outras formas de energia. A figura mostra um projeto com o qual uma pessoa poderia, nos dias atuais, aproveitar-se do recurso hídrico de um riacho, utilizando um pequeno gerador e uma roda-d'água para obter energia elétrica destinada à realização de pequenas tarefas em seu sítio.

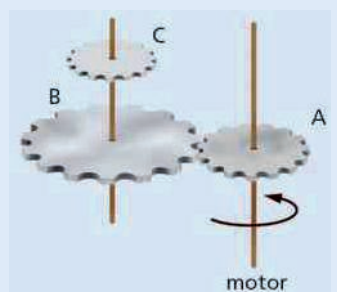


CONCEITOGRAF

Dois roldanas, uma fixada ao eixo da roda e a outra ao eixo do gerador, são ligadas por uma correia. O raio da roldana do gerador é 2,5 cm e o da roldana da roda-d'água é R . Para que o gerador trabalhe com eficiência aceitável, a velocidade angular de sua roldana deve ser 5 rotações por segundo, conforme instruções no manual do usuário. Considerando que a velocidade angular da roda é 1 rotação por segundo, e que não varia ao acionar o gerador, o valor do raio R da roldana da roda-d'água deve ser:

- a) 0,5 cm c) 2,5 cm e) 12,5 cm
b) 2,0 cm d) 5,0 cm

41. As rodas dentadas A , B e C da figura têm raios, respectivamente, iguais a 8,0 cm, 12,0 cm e 6,0 cm. O motor faz a roda A girar com frequência 600 Hz. Com que frequência giram as rodas B e C ?



CONCEITOGRAF

42. (Unicamp-SP) Em 1885, Michaux lançou o biciclo com uma roda dianteira diretamente acionada por pedais (fig. a). Através do emprego da roda dentada, que já tinha sido concebida por Leonardo da Vinci, obteve-se melhor aproveitamento da força nos pedais (fig. b). Considere que um ciclista consiga pedalar 40 voltas por minuto em ambas as bicicletas.



ALAMY/OTHER IMAGES

Figura a.

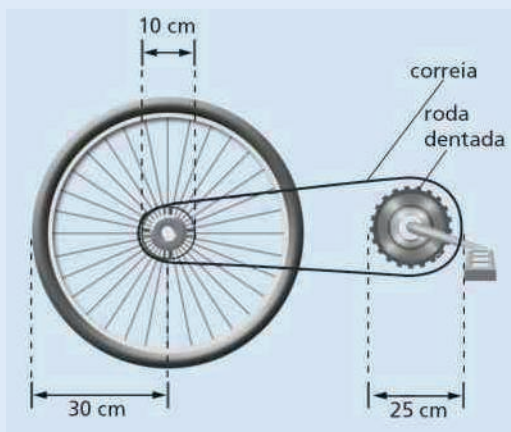


Figura b.

- a) Qual a velocidade de translação do biciclo de Michaux para um diâmetro da roda de 1,20 m?
- b) Qual a velocidade de translação para a bicicleta padrão aro 60 (fig. b)?
43. (UF-PE) A velocidade de um automóvel pode ser medida facilmente através de um dispositivo que registra o número de rotações efetuadas por uma de suas rodas, desde que se conheça seu diâmetro. Considere, por exemplo, um pneu cujo diâmetro é de 0,50 m. Se o pneu executa 480 rotações em cada minuto, pode-se afirmar que a velocidade do automóvel, em m/s, é:
- a) 4π d) 16π
 b) 8π e) 20π
 c) 12π

44. (UF-RJ) Uma das atrações típicas do circo é o equilibrista sobre o monociclo. O raio da roda do monociclo utilizado é igual a 20 cm, e o movimento do equilibrista é retilíneo.



- a) O equilibrista percorre, no início de sua apresentação, uma distância de 24π metros. Determine o número de pedaladas por segundo necessárias para que ele percorra essa distância em 30 s, considerando-se o movimento uniforme.
- b) Em outra situação, o monociclo começa a se mover a partir do repouso com aceleração escalar constante de $0,50 \text{ m/s}^2$. Calcule a velocidade escalar média do equilibrista no trajeto percorrido, nos primeiros 6,0 s.

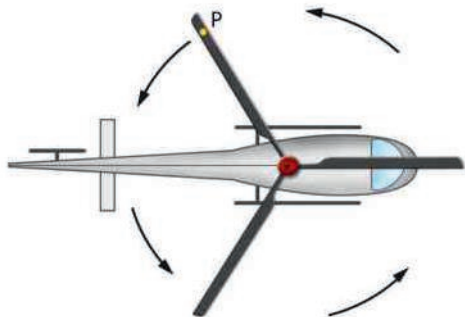
7. A persistência retiniana e o efeito estroboscópico

Quando nosso olho recebe a luz vinda de um corpo, a imagem desse corpo permanece na nossa retina durante aproximadamente $\frac{1}{20}$ de segundo. Esse efeito é chamado

persistência retiniana. Por esse motivo os projetores cinematográficos projetam as imagens na frequência de 24 imagens por segundo, dando-nos a impressão de movimentos contínuos. Nos televisores, a frequência é um pouco maior; devido a esse processo, às vezes, nos filmes, observamos que as rodas dos automóveis em movimento (ou das diligências de filmes de banguê-banguê) parecem estar em repouso, ou girando mais lentamente do que deveriam, ou até girando em sentido oposto ao que deveriam. Esse efeito é chamado de **efeito estroboscópico**, pois ele pode ser obtido também quando um objeto que gira é iluminado por uma lâmpada **estroboscópica**, que é uma lâmpada que acende e apaga com uma frequência determinada.

Exercícios de Aplicação

45. Sob iluminação de uma lâmpada estroboscópica, uma marca P feita numa das pás da hélice de um helicóptero parece estar parada. Sabe-se que a frequência de rotação das pás é $f = 80$ Hz.



- Quais são os valores possíveis para a frequência da lâmpada?
 - Se não houvesse a marca P em uma das pás, estas seriam idênticas. Assim, quais as frequências da lâmpada que nos dariam a sensação de que as pás estão paradas?
46. Uma lâmpada estroboscópica é usada para observar o movimento de um ventilador de 4 pás.
- Fazendo-se uma marca em uma das pás, a marca parece estar parada quando a frequência da lâmpada é 12 Hz. Quais são as frequências possíveis para o movimento de rotação das pás?
 - Consideremos que nenhuma marca tenha sido feita nas pás, isto é, que elas sejam idênticas.

Nesse caso, supondo que as pás pareçam estar paradas com a lâmpada acendendo a uma frequência de 12 Hz, quais são as frequências possíveis para o movimento do ventilador?

47. Um indivíduo tem um projetor cinematográfico que projeta na frequência de 16 quadros (fotografias) por segundo. Porém, sua filmadora pode filmar em várias frequências. Ele deseja filmar um *round* de luta de boxe, que deve durar exatamente 3 minutos, e depois projetar essa luta em câmara lenta, de modo que a projeção dure 12 minutos.
- Quantas fotos serão tiradas?
 - Em que frequência deve funcionar sua filmadora?
48. Um indivíduo tem um projetor cinematográfico que projeta 24 quadros por segundo. Porém, sua filmadora pode filmar em várias frequências. Ele deseja filmar uma corrida de cavalos de modo que, ao projetar, a velocidade dos cavalos seja reduzida à metade da velocidade real. Para tanto, ele deve ajustar sua filmadora para a frequência de:
- 12 quadros por segundo.
 - 48 quadros por segundo.
 - 24 quadros por segundo.
 - 6 quadros por segundo.
 - 96 quadros por segundo.

Exercícios de Reforço

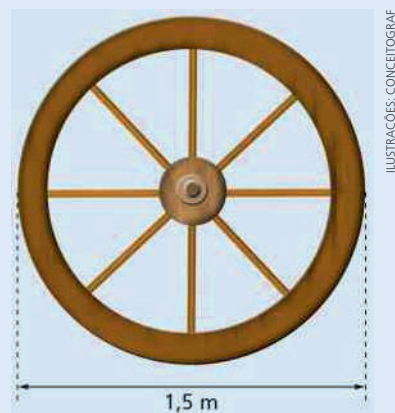
49. (Cesgranrio-RJ) Uma filmagem de cinema é uma sucessão de fotografias ("quadros"), batidas em sequência a intervalos de tempo iguais. Quando projetadas na mesma sequência, dão a impressão de movimento. Num certo filme de banguê-banguê, a roda da diligência, reproduzida a seguir, dava a impressão de estar parada. Sabendo que a filmagem e a projeção são realizadas à razão de 24 quadros por segundo, a roda da diligência podia estar girando à razão de:

- 1,0 volta por segundo.
- 1,2 volta por segundo.
- 2,0 voltas por segundo.
- 2,4 voltas por segundo.
- 3,0 voltas por segundo.



50. (UFF-RJ) Num antigo filme passado no tempo das diligências, há uma cena na qual uma diligência,

puxada por 4 cavalos, foge do ataque de índios. Ao assistir-se à cena tem-se a ilusão de que as rodas da diligência não giram. Sabe-se que cada roda tem 8 raios igualmente espaçados e diâmetro de 1,5 m.



Supondo que a filmagem foi realizada na frequência padrão de 24 quadros por segundo, verifique qual é a opção que contém um possível valor para a velocidade da diligência:

- a) 40 km/h
- b) 50 km/h
- c) 60 km/h
- d) 65 km/h
- e) 70 km/h

51. (Unicamp-SP)

a)



b)



c)



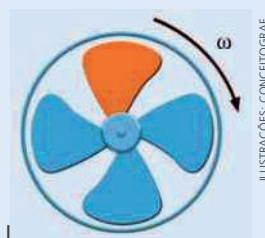
O quadro (a), anterior, refere-se à imagem de televisão de um carro parado, em que podemos distinguir claramente a marca do pneu ("PNU"). Quando o carro está em movimento, a imagem da marca aparece como um borrão em volta de toda a roda, como ilustrado em (b). A marca do pneu volta a ser nítida, mesmo com o carro em movimento, quando este atinge uma determinada velocidade. Essa ilusão de movimento na imagem

gravada é devida à frequência de gravação de 30 quadros por segundo (30 Hz).

Considerando que o diâmetro do pneu é igual a 0,6 m e $\pi = 3,0$, responda:

- a) Quantas voltas o pneu completa em um segundo, quando a marca filmada pela câmara aparece parada na imagem, mesmo estando o carro em movimento?
- b) Qual a menor frequência angular ω do pneu em movimento, quando a marca aparece parada?
- c) Qual a menor velocidade linear (em m/s) que o carro pode ter na figura (c)?

52. (UF-RJ) Filma-se um ventilador cujas pás estão girando no sentido horário, com velocidade angular constante ω . O ventilador possui quatro pás simetricamente dispostas, uma das quais pintada de cor diferente, como ilustra a figura I. Ao projetarmos o filme, à razão de 24 fotogramas por segundo, as imagens aparecem na tela na sequência indicada na figura II, o que dá a sensação de que as pás estão girando no sentido anti-horário. Calcule, em revoluções por segundo, o valor mínimo da frequência de rotação das pás do ventilador, para que isso ocorra.



II



PROCURE NO CD

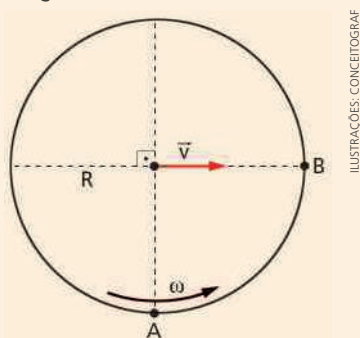
Veja, no CD, o tópico **Aceleração angular**, no qual discutimos casos em que a aceleração angular é constante.

Exercícios de Aprofundamento

53. (UF-PE) Uma bicicleta possui duas catracas, uma de raio 6,0 cm, e outra de raio 4,5 cm. Um ciclista move-se com velocidade escalar constante de 12 km/h usando a catraca de 6,0 cm. Com o objetivo de aumentar a sua velocidade escalar, o ciclista muda para a catraca de 4,5 cm mantendo a mesma velocidade angular dos pedais. Determine a velocidade escalar final da bicicleta, em km/h.



54. (ITA-SP) Sobre uma mesa sem atrito uma partícula move-se em trajetória circular com velocidade angular ω constante. Ao passar pelo ponto A, uma segunda partícula é lançada do centro da circunferência com velocidade constante \vec{v} , como indica a figura.



Qual o maior valor de $|\vec{v}|$ para que as partículas colidam em B?

- a) $2\pi\omega R$ d) $\frac{\omega R}{\pi}$
 b) $\frac{2\omega}{\pi R}$ e) $\pi\omega R$
 c) $\frac{2\omega R}{\pi}$
55. Em um automóvel, o hodômetro (que mede a distância percorrida) mede, na realidade, o número de voltas efetuadas, e, com o diâmetro do pneu, o aparelho é ajustado para fornecer a distância percorrida. Consideremos um automóvel cujos pneus, quando novos, têm diâmetro de 60 cm. Suponhamos que os pneus tenham se desgastado e apresentem diâmetro de 59 cm.

- a) Quando o velocímetro assinalar 100 km/h, qual será a velocidade real do automóvel?
 b) Quando o hodômetro assinalar um percurso de 100 km, qual terá sido o valor real da distância percorrida?

56. Uma ideia familiar para nós é que um dia (24 horas) é o intervalo de tempo gasto pela Terra para efetuar uma revolução em torno do seu eixo de rotação. Veremos a seguir que não é bem assim. Para facilitar os cálculos, faremos uma simplificação. O eixo de rotação da Terra tem uma pequena inclinação em relação ao plano que contém a órbita, como ilustra a figura a. Vamos supor que essa inclinação não exista, isto é, vamos admitir que o equador esteja contido no plano da órbita.

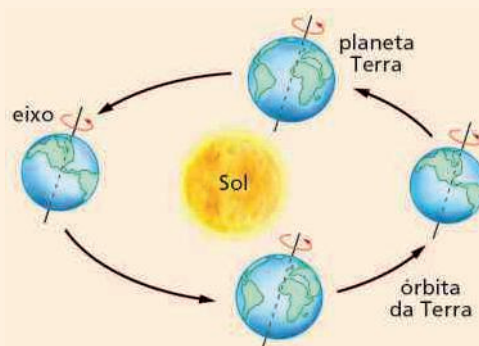


Figura a.

A figura b representa a Terra descrevendo um movimento de translação em torno do Sol, ao mesmo tempo em que efetua um movimento de rotação em torno do eixo que passa pelo seu centro. Observe que os dois movimentos ocorrem no mesmo sentido (anti-horário). O observador representado está fixo em relação à Terra, em um ponto do equador. Para facilitar a compreensão, as proporções estão exageradas.

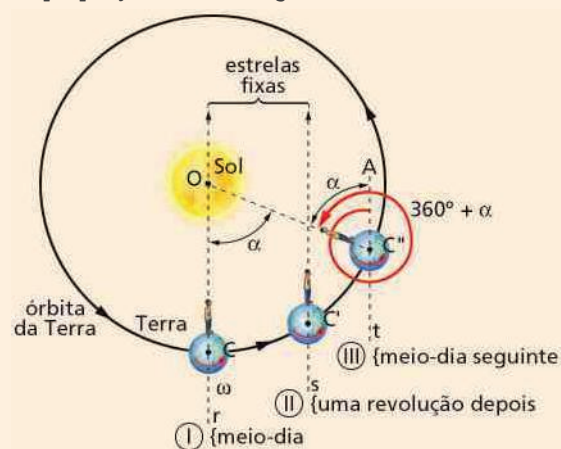


Figura b.

A posição I representa o **meio-dia**, isto é, o momento em que o Sol está na posição mais alta em sua trajetória para um observador em determinado local na Terra (fig. c). Tomando-se como referencial as estrelas fixas, entre as posições I e II a Terra efetuou uma revolução; porém, o próximo meio-dia só ocorrerá um pouco depois, na situação III.

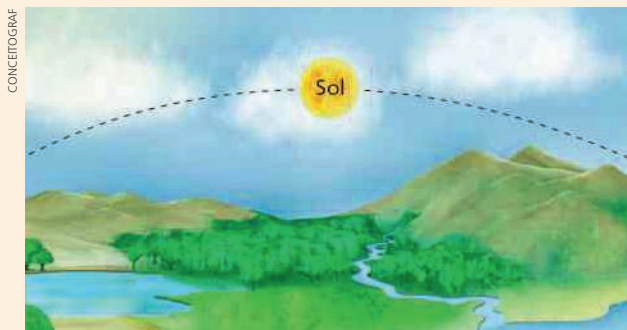
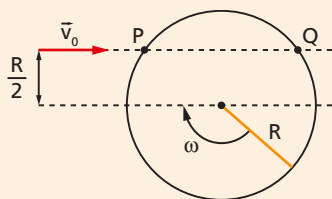


Figura c.

O intervalo de tempo entre dois meios-dias consecutivos é chamado de **dia solar** e vale 24 horas (ou 86 400 segundos). Portanto, o intervalo de tempo gasto em uma revolução é um pouco menor que 24 horas e é chamado de **dia sideral**. A palavra sideral vem do latim *sidus*, que pode significar “astro” ou “conjunto de estrelas” (para uma única estrela a palavra latina é *stella*). Neste caso, a palavra sideral significa que estamos usando as estrelas fixas como referencial.

Pelo mesmo motivo, o intervalo de tempo entre duas luas novas consecutivas (mês sinódico) é igual a 29,53 dias solares, enquanto o período de rotação da Lua, tomando como referencial as estrelas fixas (mês sideral), é igual a 27,3 dias solares. Calcule o valor aproximado do dia sideral.

57. (Vunesp-SP) Um disco horizontal de raio $R = 0,50$ m gira em torno de seu eixo com velocidade angular $\omega = 2\pi$ rad/s. Um projétil é lançado de fora no mesmo plano do disco e rasante a ele, sem tocá-lo, com velocidade v_0 (veja figura), passando sobre o ponto P .

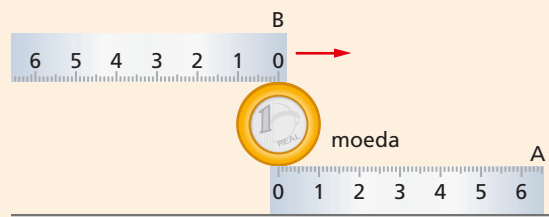


O projétil sai do disco pelo ponto Q , no instante em que o ponto P está passando por aí pela primeira vez. Qual é a velocidade v_0 ?

- a) 1,5 m/s c) 3,0 m/s e) 6,28 m/s
b) 2,6 m/s d) 5,2 m/s

58. (FEI-SP) Dois móveis, A e B , percorrem a mesma pista circular com movimentos uniformes, partindo do mesmo ponto e caminhando no mesmo sentido. Determine as velocidades angulares desses móveis sabendo que, $0,50$ s após a partida, eles se alinham pela primeira vez com o centro da pista e que a velocidade angular de B é o triplo da velocidade angular de A .

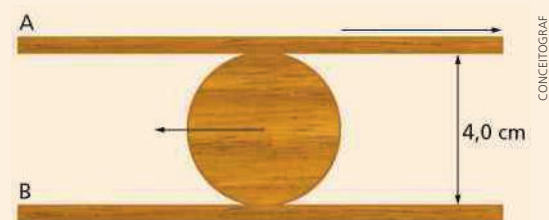
59. (PUC-MG) A figura mostra uma montagem em que uma moeda rola sobre a régua A , partindo da posição mostrada na figura “empurrada” pela régua B , sem que haja deslizamento dela em relação a qualquer uma das régua.



A régua A está fixa no plano horizontal de apoio. Quando a moeda estiver na posição “2 cm” em relação à régua A , a régua B terá percorrido, em relação à mesma régua A :

- a) 1 cm d) 4 cm
b) 2 cm e) 6 cm
c) 3 cm

60. (Fuvest-SP) Um cilindro de madeira de $4,0$ cm de diâmetro rola, sem deslizar, entre duas tábuas horizontais móveis, A e B , como mostra a figura.



Em determinado instante, a tábua A se movimenta para a direita, com velocidade de 40 cm/s, e o centro do cilindro se move para a esquerda, com velocidade de 10 cm/s. Qual é, nesse instante, a velocidade da tábua B em módulo e sentido?

As leis de Newton

1. Dinâmica

Neste capítulo, iniciaremos o estudo das leis da Mecânica, as quais são baseadas no conceito de **força**. Por esse motivo, esse estudo é chamado **Dinâmica**, palavra derivada do grego *dynamis*, que significa **força**.

2. O nascimento da Mecânica

Hoje, quando falamos em **ciência**, estamos nos referindo a um tipo de conhecimento obtido com o uso da **razão** e da **experimentação**. Porém, não foi sempre assim. Na Antiguidade, todos os povos explicavam o funcionamento do Universo por meio de **mitos**, que são relatos envolvendo seres sobrenaturais (ou deuses). Na realidade, os mitos ainda são encontrados em povos atuais, como os índios brasileiros. As grandes civilizações antigas, como, por exemplo, a egípcia e a mesopotâmica, desenvolveram muitas **técnicas**, mas nada parecido com ciência.

A passagem do mito para a razão ocorreu na Grécia, no início do século VI a.C., por obra de um grupo de pensadores, que foram chamados de **filósofos**, e o conjunto de suas realizações intelectuais foi chamado de **filosofia**, palavra formada pela junção dos termos gregos *filo* (amigo) e *sófia* (sabedoria). Por influência dos gregos, a civilização ocidental tomou um rumo totalmente diferente do tomado pelos povos do Oriente.

Os primeiros filósofos formularam teorias sobre a constituição da matéria e os movimentos. Mais tarde, seu campo de reflexões aumentou e eles passaram a se preocupar com outros temas, tais como a moral, a estética, a política, o direito.

A seguir, vamos apresentar as principais ideias sobre o movimento, desenvolvidas pelo grande sistematizador da Filosofia antiga: Aristóteles.



Figura 1. Tales (624-547 a.C.), o iniciador da Filosofia grega.

PHOTO RESEARCHERS/GETTY IMAGES

1. Dinâmica
2. O nascimento da Mecânica
3. A obra de Newton
4. Primeira Lei de Newton
5. Medida de forças
6. Segunda Lei de Newton
7. Peso
8. Terceira Lei de Newton
9. Forças exercidas por fios
10. Equilíbrio
11. Força variável
12. Referenciais inerciais e a Segunda Lei de Newton
13. Massa inercial e massa gravitacional
14. Limitações das leis de Newton

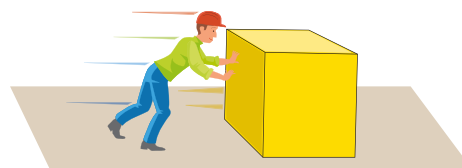
Aristóteles

A importância de Aristóteles para a Mecânica é que suas ideias sobre o movimento dominaram o pensamento ocidental até o final da Idade Média, quando começaram a ser questionadas.

Na teoria de Aristóteles, a Terra e todos os corpos que dela fazem parte são formados pela mistura de quatro elementos: **terra, água, ar e fogo**. A Lua, os planetas e o Sol seriam formados por um quinto elemento (quinta-essência): o **éter**.

Cada elemento teria um movimento **natural**. Para os corpos celestes, o movimento natural seria circular: a Lua, o Sol e os planetas teriam movimentos circulares em torno da Terra. Para os quatro elementos da Terra, o movimento natural seria retilíneo e vertical: a terra e a água tenderiam naturalmente para baixo e o ar e o fogo tenderiam naturalmente para cima. No caso de um corpo qualquer, constituído pela mistura dos quatro elementos, o movimento natural seria o do elemento que aparecesse em maior proporção. Por exemplo, em um pedaço de ferro, o elemento predominante é a terra; portanto, se largarmos um pedaço de ferro de uma certa altura, ele vai naturalmente para baixo, sem que nada o puxe. Além disso, o movimento natural para baixo seria diferente para os vários corpos: os mais pesados cairiam mais rapidamente que os mais leves.

Para os corpos terrestres, além dos movimentos naturais haveria os movimentos **violentos**, produzidos por “puxões” e “empurrões”, que ocorreriam apenas enquanto persistisse o puxão ou empurrão. Cessado o puxão ou empurrão, o corpo logo ficaria em repouso. Por exemplo, no caso da figura 3, enquanto a pessoa empurra a caixa, esta se move. Porém, se a pessoa deixar de empurrar, a caixa para.



LUIS AUGUSTO RIBEIRO

Figura 3. Para Aristóteles, o movimento do corpo só se mantém enquanto o corpo estiver sendo empurrado.

Galileu

No final da Idade Média começaram a aparecer contestações às teorias de Aristóteles. Uma das contestações foi sobre sua afirmação de que os corpos mais pesados caem mais depressa que os mais leves. Logo se percebeu, por meio de experimentos, que não era bem assim. Porém, a análise correta da queda dos corpos só foi feita por Galileu, como vimos no capítulo 6. Outra contestação à obra de Aristóteles foi feita por Nicolau Copérnico (1473-1543), que defendeu um Sistema de Mundo em que o Sol estaria fixo, enquanto a Terra e os outros corpos celestes se moveriam em torno do Sol. (A teoria de Copérnico será analisada com mais detalhes no capítulo 24.)

Galileu foi também o primeiro a fazer uma análise correta do movimento de um projétil (como a bala de um canhão), como veremos no capítulo 13. Porém, apesar de ter dado grandes contribuições ao estudo do movimento, Galileu não conseguiu apresentar um conjunto completo de leis que substituísse o de Aristóteles. Quem conseguiu isso foi o inglês Isaac Newton, como veremos a seguir. No capítulo 13, depois de estudarmos o movimento de um projétil, voltaremos a falar de Galileu, fazendo uma comparação entre o seu trabalho e o de Newton.

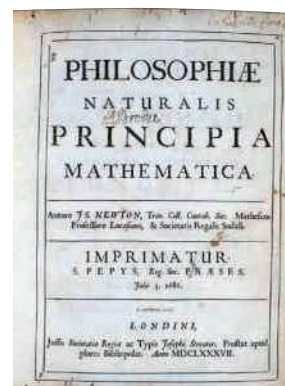
3. A obra de Newton

Isaac Newton (1642-1727) apresentou as leis do movimento em uma obra, escrita em latim, cujo título é *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Princípios matemáticos da filosofia natural*). Mais tarde essa obra ficou conhecida simplesmente como *Principia*.



DE AGOSTINI PICTURE LIBRARY/GETTY IMAGES/
MUSEO NAZIONALE ROMANO PALAZZO ALTEMPI, ROMA

Figura 2. Aristóteles (384-322 a.C.), o grande sistematizador da Filosofia antiga.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 4. Frontispício da primeira edição dos *Principia*.

Newton eliminou a diferença entre corpos terrestres e corpos celestes, assim como aboliu a diferença entre movimentos naturais e violentos. Para ele, todos os corpos do Universo obedecem às mesmas leis de movimento e, para determinar o movimento de um corpo, só precisamos conhecer as forças que atuam sobre ele e, a seguir, aplicar as leis do movimento.

Quando trabalhamos com corpos macroscópicos, as forças podem ser classificadas em dois tipos: **forças de contato** e **forças de ação a distância**.

Forças de contato são forças do tipo puxão ou empurrão, que aparecem quando há contato entre os corpos, como ilustra a figura 5.



(a) Ao puxar o trenó, o menino exerce através do fio uma força sobre ele.



(b) Ao chutar a bola, o jogador exerce uma força sobre ela.



(c) O homem está aplicando uma força sobre o carro ao empurrá-lo.

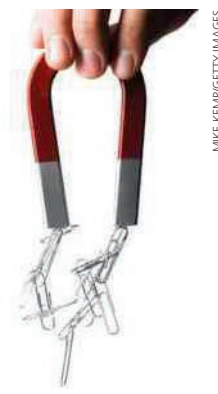
Figura 5. Alguns exemplos de força de contato.

As forças de ação a distância são forças que ocorrem mesmo que os corpos não estejam em contato. Como exemplos, podemos citar a força gravitacional (fig. 6a) e a força magnética (fig. 6b).

As forças de ação a distância são, às vezes, chamadas **força de campo**. Porém, no volume 3 desta coleção veremos que há diferença entre os significados das duas denominações.



(a) Força gravitacional. Quando o garoto solta a bola, esta cai. Segundo Newton, isso ocorre porque a Terra exerce uma força sobre a bola. Essa força é chamada força gravitacional.



(b) Força magnética. Ao aproximar um ímã de pequenos cliques de ferro, estes são atraídos por ele.

Figura 6. Alguns exemplos de força de atração a distância.

Hoje sabemos que, do ponto de vista **microscópico**, as forças de contato são, na realidade, forças de campo de natureza **elétrica**. Analisemos a situação ilustrada na figura 7. Na figura 7a, o jogador está chutando a bola, e, do ponto de vista macroscópico, dizemos que há um contato entre o pé do jogador e a bola. No entanto, do ponto

de vista microscópico (fig. 7b), o que ocorre é que, quando o pé do jogador chega a uma distância (d) muito pequena da bola (distância essa que não podemos perceber a olho nu), os átomos do pé do jogador exercem uma força (F) de repulsão elétrica muito intensa sobre os átomos da bola, fazendo com que esta se movimente, sem que haja propriamente contato entre o pé e a bola.

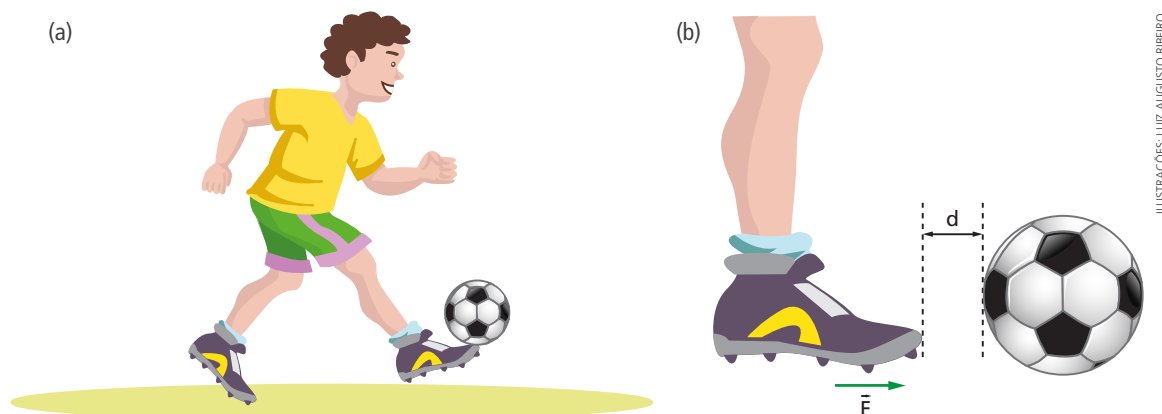


Figura 7.

Leitura

A vida de Isaac Newton

Isaac Newton nasceu na fazenda de seus pais, situada a aproximadamente 160 quilômetros de Londres, no Natal de 1642, mesmo ano da morte de Galileu.

Viúva desde três meses antes do nascimento de Newton, sua mãe, Hannah Ayscough, desejava que ele se tornasse o administrador da fazenda. No entanto, por influência de um tio por parte de mãe, que havia estudado na Universidade de Cambridge, Newton estudou em boas escolas e em junho de 1661 foi admitido em Cambridge.

Desse conglomerado de faculdades independentes, Newton foi para a mais prestigiada delas, o Trinity College.

Formou-se em junho de 1665 e logo a seguir a universidade foi fechada por causa da peste bubônica que assolava Londres. Assim, Newton voltou para a fazenda de sua mãe, e lá ficou cerca de dois anos. Esse período mais tarde foi chamado de "os anos miraculosos" por historiadores da ciência, pois, segundo o próprio Newton, foi nesse tempo que teve suas primeiras ideias revolucionárias. Entre elas se destacam uma nova ferramenta matemática (o Cálculo Diferencial e Integral) e a Lei da Gravitação Universal (da qual falaremos mais adiante).

Em meados de 1667, retorna ao Trinity College, assumindo o cargo de professor, e em 1669 torna-se professor catedrático (o mais alto grau na hierarquia dos professores).

Em 1687, Newton publica seu maior trabalho, os *Princípios matemáticos da filosofia natural*, informalmente chamado de os *Principia*. Em 1696, assume o cargo de inspetor da Casa da Moeda e em 1703 torna-se presidente da Royal Society, a mais importante associação de cientistas da Inglaterra. Ele manteve esses cargos até a morte, em 1727.



Isaac Newton (1642-1727).

AKG-IMAGES/LATINSTOCK/SCIENCE MUSEUM, LONDON, UK

4. Primeira Lei de Newton

A primeira lei apresentada por Newton tem o seguinte enunciado:

Todo corpo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme continua nesses estados, a menos que seja obrigado a alterá-los por forças aplicadas sobre ele.

Assim, desde que nenhuma força atue sobre um corpo, estando ele em repouso, deverá ficar **eternamente** em repouso. Para tirarmos o corpo do repouso devemos aplicar sobre ele uma força; mas, se, após iniciado o movimento, retirarmos a força, o corpo deverá prosseguir **eternamente** em linha reta e com velocidade constante, isto é, em movimento retilíneo uniforme (MRU). Consideremos agora um corpo livre da ação de forças que já esteja em movimento retilíneo uniforme: se aplicarmos uma força a esse corpo, provocaremos uma alteração em sua velocidade, isto é, uma aceleração.

Segundo Newton, a matéria possui **inércia**. A inércia de um corpo é a propriedade que esse corpo tem de resistir à mudança de sua velocidade. Somente conseguimos alterar a velocidade do corpo aplicando sobre ele uma força. Dado um corpo livre da ação de forças, é costume dizer que:

- 1º) Se o corpo estiver em repouso, deverá, **por inércia**, permanecer em repouso.
- 2º) Se o corpo estiver em MRU, deverá, **por inércia**, manter esse movimento.

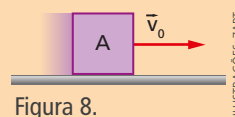
A Primeira Lei de Newton nos informa, então, qual é o comportamento de um corpo na ausência de forças. Mas essa é obviamente uma situação ideal. Na prática, nunca encontramos um corpo livre da ação de forças. No entanto, é possível encontrar situações em que, apesar de haver forças atuando no corpo, a resultante dessas forças é nula e, assim, é como se não houvesse nenhuma força atuando.

Ainda segundo Newton, a inércia de um corpo é proporcional à massa do corpo. Assim, podemos considerar a massa como uma medida da inércia.

A Primeira Lei de Newton é também chamada de **Lei da Inércia** ou **Princípio da Inércia**.

Exemplo 1

Consideremos um bloco A, lançado com velocidade inicial \vec{v}_0 sobre uma superfície plana horizontal (fig. 8). De acordo com a Lei da Inércia, desde que nenhuma força se oponha ao movimento, o bloco deverá prosseguir eternamente em linha reta com velocidade constante \vec{v}_0 . No entanto, em geral o que observamos é que o bloco vai diminuindo sua velocidade até parar (fig. 9), percorrendo determinada distância d .



ILUSTRAÇÕES: ZAPPT

Figura 8.

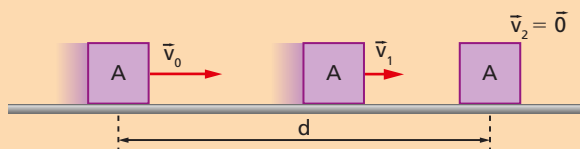


Figura 9.

Isso ocorre porque, em geral, há duas forças se opondo ao movimento (fig. 10): uma força de resistência do ar (\vec{F}_{ar}) e uma força de atrito (\vec{F}_{at}), que a superfície horizontal exerce no bloco.

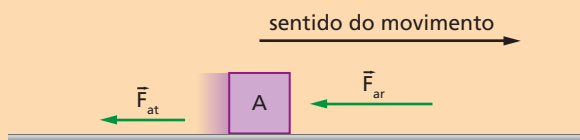


Figura 10.

A força de atrito é causada principalmente pelo fato de tanto o bloco como a superfície horizontal serem **ásperos** (no capítulo 15 faremos um estudo das forças de atrito e de resistência do ar). No entanto, se conseguirmos diminuir o atrito, através do polimento ou da lubrificação do bloco e da superfície horizontal, observaremos que, lançando-se novamente o bloco A com a mesma velocidade inicial \vec{v}_0 , ele percorrerá uma distância d' , maior do que d (fig. 11), antes de parar.

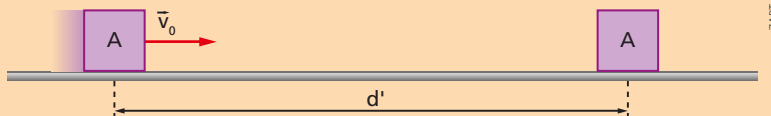


Figura 11.

Se conseguíssemos eliminar completamente o atrito e também a resistência do ar (fazendo a experiência no vácuo), o bloco deveria prosseguir com velocidade constante \vec{v}_0 .

Exemplo 2

Consideremos um indivíduo dentro de um trem que se move em linha reta com velocidade constante \vec{v} em relação ao solo (fig. 12). Se o trem breca, o indivíduo tenderá, por inércia, a manter a velocidade \vec{v} em relação ao solo, e, assim, ele se sentirá projetado para a frente em relação ao trem (fig. 13).

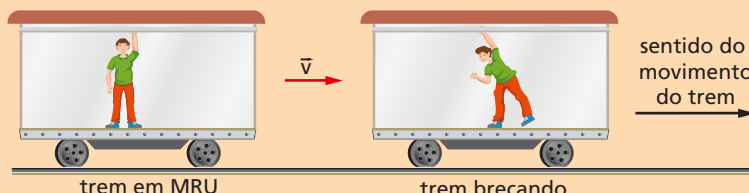


Figura 12.

Figura 13.

Exemplo 3

Consideremos agora um indivíduo dentro de um trem inicialmente em repouso em relação ao solo (fig. 14). Se, de repente, o trem "arranca", por inércia o indivíduo tenderá a permanecer em repouso em relação ao solo e, assim, irá sentir-se projetado para trás em relação ao trem (fig. 15).



Figura 14.

Figura 15.

Exemplo 4

Consideremos um indivíduo dentro de um automóvel do qual se tiraram as portas e que se move inicialmente em linha reta com velocidade constante \vec{v} em relação ao solo (fig. 16). Se, de repente, o automóvel entra numa curva e o indivíduo não está se segurando em nada, ele será projetado para fora do automóvel, pois, por inércia, sua tendência é prosseguir em linha reta com a mesma velocidade \vec{v} que ele tinha dentro do automóvel. O automóvel só consegue fazer a curva porque a estrada aplica sobre os pneus uma força de atrito que muda a direção da velocidade do automóvel. Caso não houvesse atrito, o automóvel não conseguiria fazer a curva e prosseguiria em linha reta, saindo da estrada.

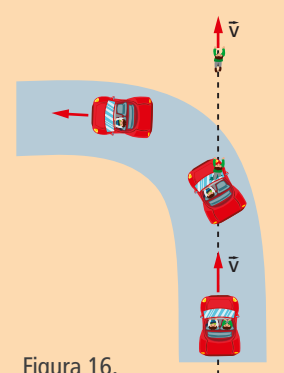


Figura 16.

Referenciais inerciais

De acordo com a Lei da Inércia, uma partícula livre da ação de forças deverá estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Mas já vimos que o movimento depende do referencial, isto é, uma partícula pode ter velocidade constante em relação a um referencial e velocidade variável em relação a outro referencial. Assim, qual o referencial a ser adotado?

No capítulo 10 analisamos alguns casos em que um movimento é descrito por observadores que estão em referenciais diferentes, mas de modo que um dos referenciais tem velocidade constante em relação ao outro. Vimos que, se a velocidade de um corpo é constante em relação a um desses referenciais, será constante também em relação ao outro referencial. Portanto, se a Lei da Inércia vale para um referencial, deverá valer também para qualquer referencial que se mova em relação a ele com movimento de translação retilíneo e uniforme. Os referenciais para os quais vale a Lei da Inércia são chamados **referenciais inerciais**.

Do que dissemos acima, concluímos que a Terra não é um referencial inercial, pois, além do seu movimento de rotação, ela possui um movimento de translação não retilíneo em torno do Sol. No entanto, para a maioria das aplicações, podemos considerar a Terra um referencial aproximadamente inercial.

5. Medida de forças

A Primeira Lei de Newton nos informa o comportamento de um corpo na ausência de forças. Mas o que acontece quando aplicamos uma força a um corpo? Isso é respondido pela Segunda Lei de Newton, que veremos mais adiante. Antes disso, porém, vamos tentar responder às seguintes perguntas: Como medir a intensidade de uma força? Como construir um aparelho para fazer essa medida? Na realidade, existem vários processos de medida de força, que veremos ao longo do curso. Por enquanto, vamos considerar um processo que pode ser usado em alguns casos, baseado na deformação que uma força pode produzir em uma mola (fig. 17).

Podemos escolher uma mola cujo comprimento, quando ela não está deformada, é L (fig. 18a). Em seguida podemos escolher como unidade de força aquela que provoca uma deformação d na mola (fig. 18b). Para obtermos uma força de intensidade igual a 2 unidades, podemos tomar duas molas idênticas à mola padrão (fig. 18c) e provocar a mesma deformação d . Depois de obtidos os padrões de força, podemos calibrar uma única mola, aplicando a ela, sucessivamente, forças de intensidades iguais a 1 unidade, 2 unidades, 3 unidades, etc. e verificando o seu comprimento em cada caso. Em seguida adaptamos uma escala à mola, obtendo um aparelho para medir intensidades de força cujo nome é **dinamômetro** (fig. 19).

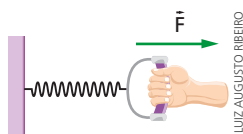


Figura 17. Uma mola pode ser deformada aplicando-se uma força sobre ela.

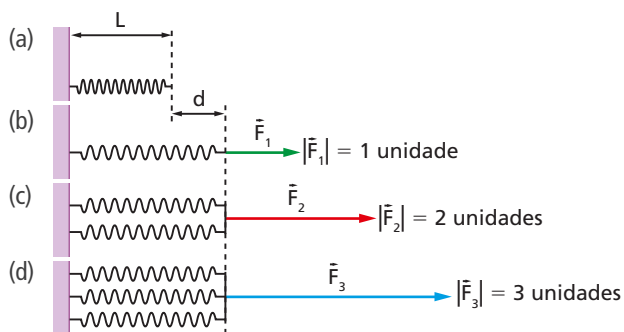


Figura 18.

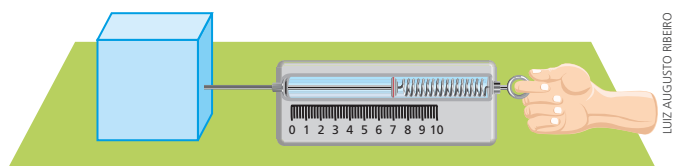


Figura 19. O dinamômetro assinala a intensidade da força aplicada ao bloco.

Esse processo de medida de força não pode ser usado em todos os casos. Ele não serve, por exemplo, para medir forças aplicadas em objetos muito pequenos (como átomos, elétrons, etc.) nem muito grandes (como, por exemplo, a Lua). Para esses casos há outros processos, que veremos ao longo do curso.

6. Segunda Lei de Newton

Newton enunciou sua Segunda Lei de maneira muito complexa para quem está se iniciando no estudo da Dinâmica. Assim, é costume, por razões didáticas, apresentar um enunciado simplificado dessa lei, e é o que faremos (no capítulo 20 apresentaremos o enunciado de Newton).

Um modo simplificado de apresentar a Segunda Lei de Newton é o seguinte:

Sendo \vec{F} a resultante de todas as forças que atuam sobre um ponto material de massa m , temos:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

em que \vec{a} é a aceleração do ponto material.

Observando a equação $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ e lembrando que a massa m é uma grandeza escalar positiva, concluímos que \vec{F} e \vec{a} devem ter sempre a **mesma direção** e o **mesmo sentido** (quando não nulas). Se \vec{F} for nula, \vec{a} também será nula, e caímos no caso da Lei da Inércia: o ponto material permanecerá em repouso ou em MRU. Por enquanto, aplicaremos a Segunda Lei de Newton apenas para os movimentos **retilíneos**. Os casos de movimentos curvos serão analisados no capítulo 17.

Unidade de força

No SI a unidade de força é o **newton**, cujo símbolo é **N**. Assim, considerando a equação $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, temos:

$$\begin{array}{ccccc} F & = & m & \cdot & a \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 \text{ N} & = & (1 \text{ kg}) \cdot (1 \text{ m/s}^2) & = & 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \end{array}$$

e a equação dimensional de $|\vec{F}|$ é:

$$[F] = \text{LMT}^{-2}$$

Movimentos acelerado e retardado

Suponhamos que um ponto material esteja em movimento retilíneo e que a força resultante \vec{F} que atua sobre ele não seja nula. Podemos destacar dois casos.

1º caso: \vec{F} tem o mesmo sentido da velocidade \vec{v}

Nesse caso, a aceleração \vec{a} também tem o mesmo sentido de \vec{v} (fig. 20) e o movimento é **acelerado**, isto é, o módulo de \vec{v} aumenta com o tempo.

2º caso: \vec{F} tem sentido oposto ao da velocidade \vec{v}

Como a aceleração \vec{a} deve ter o mesmo sentido de \vec{F} , o sentido de \vec{a} é oposto ao sentido de \vec{v} (fig. 21) e o movimento é retardado, isto é, o módulo de \vec{v} diminui com o tempo.

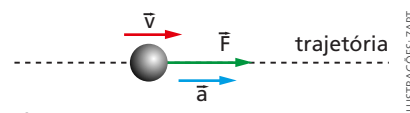


Figura 20.

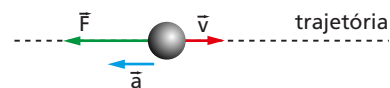


Figura 21.

Exemplo 5

Consideremos um ponto material de massa $m = 4,0 \text{ kg}$, em movimento retilíneo e acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 3,0 \text{ m/s}^2$.

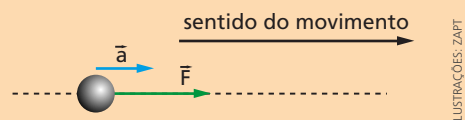


Figura 22.

Como o movimento é acelerado, a resultante \vec{F} das forças que atuam no ponto material tem o mesmo sentido do movimento (isto é, o mesmo sentido da velocidade). A Segunda Lei de Newton nos diz que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Considerando apenas os módulos de \vec{F} e \vec{a} , podemos escrever:

$$F = m \cdot a$$

Substituindo os valores de m e a e lembrando que a unidade de força do SI é o newton (N), temos:

$$F = (4,0 \text{ kg}) \cdot (3,0 \text{ m/s}^2) = 12 \text{ newtons} = 12 \text{ N}$$

Portanto, a resultante \vec{F} das forças que atuam nesse ponto material tem módulo (ou intensidade) igual a 12 newtons.

Exemplo 6

Seja \vec{F} a resultante das forças que atuam sobre um ponto material de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ em movimento retilíneo retardado e suponhamos que o módulo de \vec{F} seja 14 newtons, isto é, $F = 14 \text{ N}$.

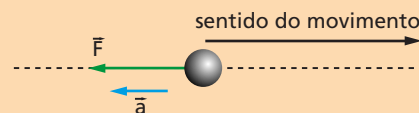


Figura 23.

Como o movimento é retardado, \vec{F} tem sentido oposto ao do movimento, isto é, sentido oposto ao da velocidade. Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = m \cdot a$$

$$14 = 2,0 \cdot a$$

$$a = 7,0 \text{ m/s}^2$$

Portanto, a aceleração do movimento tem **módulo** igual a $7,0 \text{ m/s}^2$.

Exercícios de Aplicação

- Um ponto material de massa $m = 400 \text{ g}$ está em movimento retilíneo acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 6,0 \text{ m/s}^2$. Calcule o módulo da resultante das forças que atuam no ponto material.

Resolução:

No SI, a unidade de massa é o quilograma (kg). Assim:

$$m = 400 \text{ g} = 0,400 \text{ kg}$$

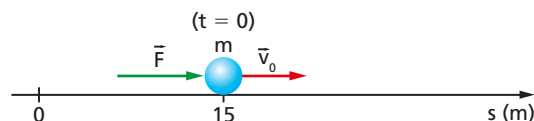
Sendo \vec{F} a resultante das forças que atuam no ponto material, temos pela Segunda Lei de Newton: $F = m \cdot a$. Portanto:

$$F = (0,400) \cdot (6,0)$$

$$F = 2,4 \text{ N}$$

- Consideremos um ponto material de massa $m = 2000 \text{ g}$, em movimento retilíneo acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 7,0 \text{ m/s}^2$. Calcule o módulo da resultante das forças que atuam no ponto material.

- A resultante das forças que atuam num ponto material de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ tem intensidade $F = 60 \text{ N}$. Calcule o módulo da aceleração do ponto material.
- Uma partícula de massa $m = 4,0 \text{ kg}$ tem movimento retilíneo e acelerado, sob a ação de uma única força \vec{F} cujo módulo é $F = 24 \text{ N}$. No instante $t = 0$ a partícula tem posição $s_0 = 15 \text{ m}$ e velocidade \vec{v}_0 , cujo módulo é $v_0 = 20 \text{ m/s}$, como mostra a figura.



- Calcule o módulo da aceleração da partícula.
- Calcule a velocidade escalar da partícula no instante $t = 2,0 \text{ s}$.
- Determine a posição da partícula no instante $t = 2,0 \text{ s}$.

5. Uma partícula de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ move-se inicialmente em linha reta, livre da ação de forças, com velocidade constante \vec{v}_0 , cujo módulo é $v_0 = 24 \text{ m/s}$. A partir do instante $t = 0$ aplica-se à partícula uma força constante \vec{F} , de sentido oposto ao de \vec{v}_0 e de intensidade $F = 20 \text{ N}$.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

- Calcule o módulo da aceleração da partícula a partir do instante em que foi aplicada \vec{F} .
- Em que instante a partícula para?
- Calcule a distância percorrida pela partícula desde o instante $t = 0$ até o instante em que para.

6. Uma partícula de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ está submetida à ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , de mesma direção e sentidos opostos, como mostra a figura a. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F_1 = 50 \text{ N}$ e $F_2 = 30 \text{ N}$.

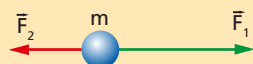


Figura a.

Resolução:

Seja \vec{F} a resultante de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , isto é, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Como \vec{F}_1 e \vec{F}_2 têm sentidos opostos e $F_1 > F_2$, concluímos que \vec{F} tem o mesmo sentido de \vec{F}_1 (fig. b) e tem módulo dado por $F = F_1 - F_2$.

$$F = F_1 - F_2 = 50 - 30$$

$$F = 20 \text{ N}$$

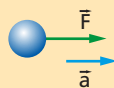


Figura b.

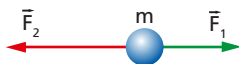
Pela Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = m \cdot a$$

$$20 = 5,0 \cdot a$$

$$a = 4,0 \text{ m/s}^2$$

7. Consideremos uma partícula de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ submetida à ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , de mesma direção e sentidos opostos, como mostra a figura.



Sabendo que $F_1 = 24 \text{ N}$ e $F_2 = 30 \text{ N}$, determine:

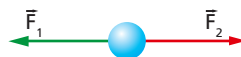
- o módulo da aceleração da partícula;
- a direção e o sentido da aceleração.

8. Uma partícula de massa $m = 4,0 \text{ kg}$ está submetida à ação de apenas três forças, como mostra a figura.



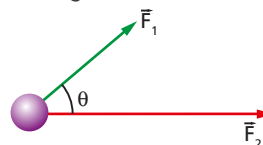
Calcule o módulo da aceleração da partícula sabendo que $F_1 = 30 \text{ N}$, $F_2 = 40 \text{ N}$ e $F_3 = 60 \text{ N}$.

9. Uma partícula de massa $m = 3,0 \text{ kg}$ está sob a ação de apenas duas forças, como mostra a figura, sendo $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 80 \text{ N}$.



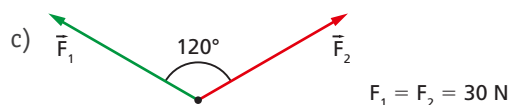
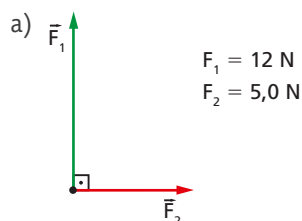
Calcule o módulo da aceleração da partícula e determine o tipo de movimento que ela tem.

10. Um ponto material de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ está submetido à ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , como mostra a figura.

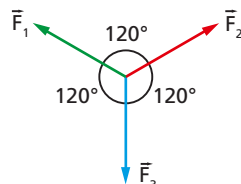


Calcule o módulo da aceleração do ponto material, sabendo que $F_1 = 20 \text{ N}$, $F_2 = 30 \text{ N}$ e $\theta = 53^\circ$. No CD há uma tabela com os valores de senos, cossenos e tangentes.

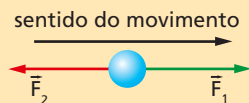
11. Em cada caso a seguir temos uma partícula de massa $m = 10 \text{ kg}$ sob a ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 . Determine o módulo da aceleração da partícula em cada caso.



12. Determine o módulo da resultante das forças assinaladas na figura, sabendo que $F_1 = F_2 = F_3 = 50 \text{ N}$.



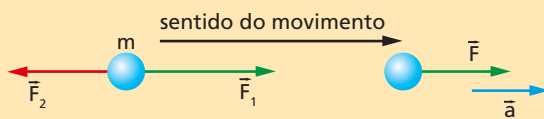
13. Uma partícula de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ tem movimento retilíneo e acelerado, sob a ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , como mostra a figura. O módulo da aceleração da partícula é $a = 3,0 \text{ m/s}^2$ e $F_1 = 40 \text{ N}$. Calcule o módulo de \vec{F}_2 .



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Resolução:

Como o movimento é retilíneo e acelerado, a força resultante \vec{F} deve ter o mesmo sentido do movimento e, portanto, devemos ter $F_1 > F_2$.



Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

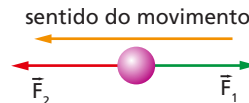
$$F = m \cdot a$$

$$F_1 - F_2 = m \cdot a$$

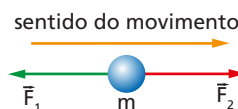
$$40 - F_2 = 2,0 \cdot 3,0$$

$$F_2 = 34 \text{ N}$$

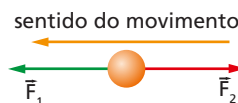
14. Consideremos um ponto material de massa $m = 4,0 \text{ kg}$, em movimento retilíneo acelerado, sob a ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , como indica a figura. Calcule o módulo de \vec{F}_2 , sabendo que $F_1 = 70 \text{ N}$ e que a aceleração do ponto material tem módulo $a = 5,0 \text{ m/s}^2$.



15. Uma partícula de massa $m = 6,0 \text{ kg}$ tem movimento retilíneo e retardado, sob a ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , como representa a figura. A aceleração da partícula tem módulo $a = 3,0 \text{ m/s}^2$ e $F_2 = 50 \text{ N}$. Calcule o módulo de \vec{F}_1 .



16. Consideremos um ponto material de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ em movimento retilíneo e uniforme, sob a ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , como mostra a figura. Determine o módulo de \vec{F}_1 , sabendo que $F_2 = 24 \text{ N}$.



Exercícios de Reforço

17. As estatísticas indicam que o cinto de segurança deve ser obrigatório para prevenir lesões mais graves em motoristas e passageiros no caso de acidentes. Fisicamente, a função do cinto está relacionada com que lei?
18. O arremesso de martelo é uma das provas do atletismo. O que se chama "martelo" nessa prova é uma esfera de ferro presa a um cabo, como ilustra a figura.

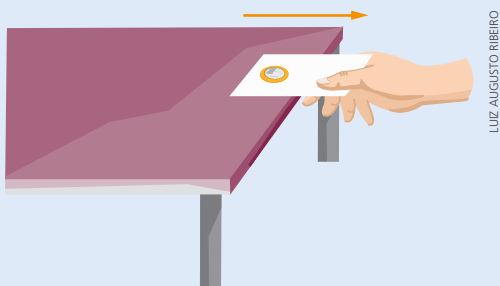


LUIS AUGUSTO REBEIRO

Se não houvesse a influência da Terra nem a resistência do ar, qual seria a trajetória da esfera após ser abandonada pelo atleta?

19. Diga se cada sentença a seguir é verdadeira (V) ou falsa (F):
- Um corpo pode estar sob a ação de várias forças e, apesar disso, ficar em repouso.
 - Um corpo sobre o qual não atua nenhuma força está certamente em repouso.
 - Um corpo sobre o qual não atua nenhuma força pode estar em repouso.
 - Um corpo sobre o qual não atua nenhuma força pode estar em movimento retilíneo e uniforme.
 - Um corpo sobre o qual não atua nenhuma força deve estar em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme.

20. Um experimento bastante simples que você pode realizar está esquematizado na figura a seguir. Coloque uma moeda sobre uma folha de papel apoiada em uma mesa.



Em seguida, puxe bruscamente a folha de papel para fora da mesa. Você observará que a moeda não acompanha o movimento do papel, ficando sobre a mesa. Por quê? (No estudo do atrito veremos por que o puxão tem que ser brusco.)

21. Sendo \vec{F} a resultante das forças que atuam numa partícula e \vec{a} a aceleração dessa partícula, classifique as afirmações a seguir como verdadeiras (V) ou falsas (F):

- a) \vec{F} e \vec{a} podem ter direções diferentes.
- b) \vec{F} e \vec{a} têm sempre a mesma direção, mas podem ter sentidos diferentes.
- c) \vec{F} e \vec{a} têm sempre a mesma direção e sentido.

22. (Mackenzie-SP) Um automóvel de massa 1600 kg desloca-se a partir do repouso e atinge certa velocidade devido à ação de uma força resultante, constante, paralela à trajetória, de intensidade de 800 N. A aceleração sofrida pelo carro nesse intervalo foi:

- a) $0,5 \text{ m/s}^2$ c) $2,0 \text{ m/s}^2$ e) $20\sqrt{2} \text{ m/s}^2$
- b) $1,0 \text{ m/s}^2$ d) 40 m/s^2

23. (Unicamp-SP) Dois objetos, A e B, equilibram-se, quando colocados em pratos opostos de uma balança de braços iguais. Quando colocados num mesmo prato da balança, eles equilibram um terceiro objeto C, colocado no outro prato. Suponha então que sobre uma mesa horizontal sem atrito uma certa força imprima ao objeto A uma aceleração de 10 m/s^2 . Qual será a aceleração adquirida pelo objeto C, quando submetido a essa mesma força?

24. (UF-RS) Um corpo de massa igual a 5 kg, inicialmente em repouso, sofre a ação de uma força resultante constante de 30 N. Qual a velocidade do corpo depois de 5 s?

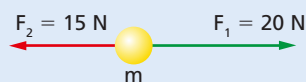
- a) 5 m/s c) 25 m/s e) 150 m/s
- b) 6 m/s d) 30 m/s

25. (Cefet-PR) Um automóvel de massa $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$ movendo-se inicialmente com velocidade escalar de 72 km/h é freado uniformemente e para

após percorrer 50 m. O intervalo de tempo de frenagem e o módulo da força resultante sobre o automóvel durante a frenagem valem, respectivamente:

- a) 5,0 s e $4,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
- b) 2,5 s e $8,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
- c) 2,5 s e $4,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
- d) 5,0 s e $8,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
- e) 2,5 s e $6,0 \cdot 10^3 \text{ N}$

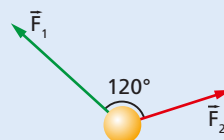
26. (Unifor-CE) Um corpo de massa $m = 0,5 \text{ kg}$ está sob a ação das duas forças colineares indicadas na figura.



De acordo com a Segunda Lei de Newton, a aceleração resultante, em m/s^2 , é de:

- a) 0 c) 30 e) 70
- b) 10 d) 40

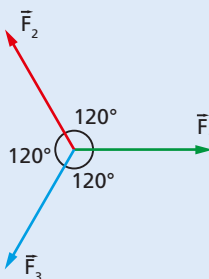
27. Uma partícula de massa $m = 10 \text{ kg}$ está submetida à ação de apenas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F_1 = 40 \text{ N}$ e $F_2 = 20 \text{ N}$.



28. Determine o módulo da resultante das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 assinaladas na figura, sabendo que $F_1 = F_2 = 20 \text{ N}$.



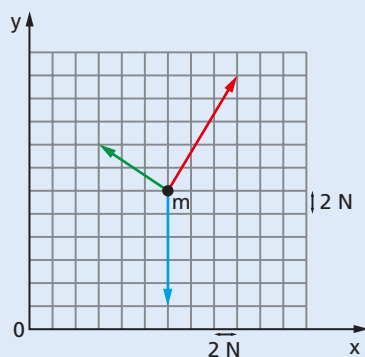
29. (UF-PI) Três forças de mesma intensidade, F , estão aplicadas numa partícula, como na figura.



O módulo da força resultante sobre a partícula é:

- a) 3 F c) 1,5 F e) 0
- b) 2 F d) F

30. (Vunesp-SP) Um corpo de 1,0 kg em repouso é submetido à ação de 3 forças coplanares, como ilustra a figura. Esse corpo passa a se locomover em movimento retilíneo acelerado no plano.



Pode-se afirmar que o módulo da aceleração do corpo, em m/s^2 , a direção e o sentido do movimento são, respectivamente:

- 1, paralela ao eixo y e para cima.
- 2, paralela ao eixo y e para baixo.
- 2,5, formando 45° com x e para cima.
- 4, formando 60° com x e para cima.
- 4, paralela ao eixo y e para cima.

31. O sistema de unidades mais usado atualmente é o SI. No entanto, há algumas áreas da Física que, por razões práticas, usam o sistema CGS, sigla formada pelas iniciais das três unidades básicas desse sistema: centímetro, grama e segundo (veja tabela). Nesse sistema, a unidade de intensidade de força é o dina. A tabela mostra também as unidades usadas no Sistema Britânico.

Grandeza	Unidades do Sistema CGS	Sistema Britânico	
		Unidade	Tradução
comprimento	centímetro (cm)	foot (ft)	pé
massa	grama (g)	slug	–
tempo	segundo (s)	second (s)	segundo
força	dina (dyn)	pound (lb)	libra

- Determine o valor de 1 newton em dinas.
- Sabendo que:
 $1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$ e $1 \text{ slug} = 14,59 \text{ kg}$
determine o valor de uma libra em newtons.

7. Peso

A experiência mostra que a Terra exerce uma força de atração sobre qualquer corpo situado em suas proximidades. No capítulo 24 faremos um estudo mais detalhado dessa força. Por enquanto, nos limitaremos a constatar que ela existe e a chamaremos de **peso do corpo**. Representaremos o peso de um corpo por \vec{P} . O peso tem a direção de uma reta que passa aproximadamente pelo centro da Terra e sentido para o centro dela (fig. 24).

Na figura 25, \vec{P}_A é o peso do corpo A e \vec{P}_B é o peso do corpo B. No caso dessa figura, vemos que \vec{P}_A e \vec{P}_B têm direções diferentes. No entanto, com exceção dos casos que vão aparecer no capítulo 24, todos os movimentos que analisaremos vão ocorrer bem perto da superfície da Terra e numa região pequena em comparação com o tamanho dela. Nessa “pequena” região (fig. 26) podemos considerar que os pesos dos vários corpos nela situados terão aproximadamente a mesma direção (que é a da vertical do lugar) e o mesmo sentido (para baixo).

Para determinarmos o peso de um corpo, basta fazer um experimento em que a única força atuante no corpo seja o **peso**, medir a aceleração do corpo e aplicar a Segunda Lei de Newton. A experiência mostra que, quando abandonamos um corpo de certa altura, numa região em que foi feito vácuo (e assim não há resistência do ar) e de modo que a única força atuante no corpo seja o peso, o corpo cai com uma aceleração

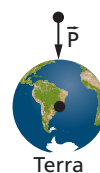


Figura 24.

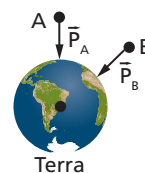


Figura 25.

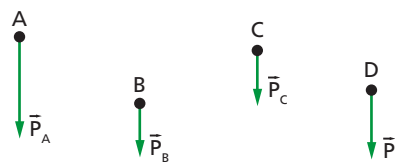


Figura 26.

que **não** depende da massa, nem do tamanho, nem do formato do corpo (desde que o corpo tenha tamanho desprezível em comparação com a Terra; analisaremos esse fato com mais detalhes no capítulo 24). Essa aceleração é chamada **aceleração da gravidade** e é representada por \vec{g} . Sendo m a massa do corpo, temos, pela Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F}_{\text{resultante}} = m \cdot \vec{a}$$

Mas, nesse caso, a força resultante é o peso e a aceleração é a da gravidade. Assim:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

tendo \vec{P} e \vec{g} a mesma direção e o mesmo sentido.

O módulo de \vec{g} depende do local em que é feito o experimento, variando também com a altura. No entanto, se nos limitarmos a uma pequena região em comparação com o tamanho da Terra e situada próximo de sua superfície, podemos admitir que o módulo de \vec{g} é aproximadamente o mesmo em todos os pontos da região. Suponhamos que a região da figura 27 seja desse tipo. Sendo \vec{g}_A , \vec{g}_B e \vec{g}_C as acelerações da gravidade nos pontos A, B e C, devemos ter:

$$g_A = g_B = g_C$$

Para pontos próximos da superfície da Terra obtemos $g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$. No polo Norte, por exemplo, temos $g \cong 9,83 \text{ m/s}^2$, enquanto no equador temos $g \cong 9,78 \text{ m/s}^2$. No entanto, nos exercícios é comum que se adote $g = 10 \text{ m/s}^2$, apenas para facilitar os cálculos.

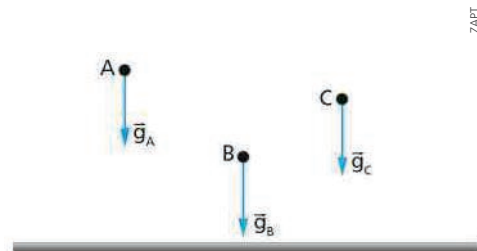


Figura 27.

Exemplo 7

Consideremos um corpo de massa $m = 100 \text{ kg}$. Supondo que no polo Norte a aceleração da gravidade tenha módulo $g \cong 9,83 \text{ m/s}^2$, o peso desse corpo no polo Norte terá módulo P dado por:

$$P = m \cdot g = 100 \cdot 9,83$$

$$P = 983 \text{ N}$$

Suponhamos agora que esse corpo seja levado para o equador, onde a aceleração da gravidade tem módulo $g' = 9,78 \text{ m/s}^2$. O peso desse corpo no equador terá módulo P' , dado por:

$$P' = m \cdot g' = 100 \cdot 9,78$$

$$P' = 978 \text{ N}$$

Observemos que, ao levar o corpo do polo Norte para o equador, sua massa **não variou**; o que variou foi o seu peso, isto é, a força de atração da Terra.

OBSERVAÇÕES

1ª) Na linguagem cotidiana é comum as pessoas confundirem massa com peso. Frequentemente ouvimos frases do tipo: “O meu peso é 70 quilogramas”. Porém, **quilograma** é unidade de massa, e não de peso. O peso é uma força e deve ser medido em unidades de força.

2ª) Por convenção, o módulo de \vec{g} num determinado ponto situado ao nível do mar e na latitude de 45° é denominado **aceleração normal da gravidade**, sendo representado por g_n . Seu valor é dado por:

$$g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

3ª) Definimos o peso de um corpo como a força de atração que a Terra exerce sobre esse corpo. No entanto, conforme veremos no capítulo 24, não é só a Terra que tem essa capacidade de atrair os objetos. Os outros planetas e também a Lua atraem os corpos situados em suas proximidades. Assim, podemos ampliar o conceito de peso e definir o **peso de um corpo em relação a um planeta** (ou satélite) como a **força de atração exercida pelo planeta sobre o corpo**.

Dinamômetro

O dinamômetro é baseado no alongamento sofrido por uma mola, quando ela é submetida à ação de uma força. No entanto, podemos construir medidores de intensidade de força utilizando a compressão sofrida por uma mola quando submetida à ação de uma força, como ilustra a figura 28a. Em geral, as balanças encontradas em farmácias (fig. 28b) e as balanças domésticas (fig. 28c) utilizam a compressão de molas.

As balanças das figuras 28b e 28c são, na realidade, medidores de intensidade de força. No entanto, ao usarmos uma dessas balanças, poderemos observar que seu mostrador está graduado em quilogramas, isto é, unidades de massa! Por que isso ocorre?

O fabricante dessas balanças tem inicialmente um mostrador graduado em unidades de força. Quando ele recebe uma encomenda, sua primeira providência é verificar qual é o valor da aceleração da gravidade no local para onde vai a balança. Em seguida, aplicando a equação:

$$P = m \cdot g$$

obtem:

$$m = \frac{P}{g}$$

Assim, o que ele faz é dividir todos os valores do peso que estão no mostrador pelo valor de g , obtendo os valores das massas correspondentes; com esses valores ele constrói um novo mostrador, graduado em quilogramas.

Se essa balança for transportada para um local onde a aceleração da gravidade tem outro valor, o mostrador deverá ser novamente ajustado, caso contrário não fornecerá os valores corretos para as massas.

Daqui em diante, nos exercícios, se nada for comentado, você poderá supor sempre que nossas balanças de molas estão graduadas em unidades de força (newton, dina, libra, etc.).

O quilograma-força

Há uma antiga unidade de força que não pertence ao SI, mas que ainda hoje ocasionalmente é usada: é o **quilograma-força**, cujo símbolo é **kgf**.

O quilograma-força é definido como a intensidade de força igual à intensidade do peso de um corpo cuja massa é 1 kg, num local onde a aceleração da gravidade tem seu valor normal ($9,80665 \text{ m/s}^2$).

A partir de:

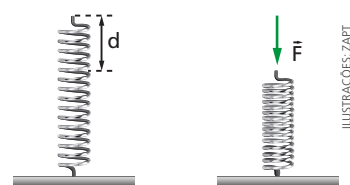
$$\begin{array}{ccccc} P & = & m & \cdot & g \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 \text{ kgf} & = & (1 \text{ kg}) & (9,80665 \text{ m/s}^2) & = 9,80665 \text{ N} \end{array}$$

temos:

$$1 \text{ kgf} = 9,80665 \text{ N}$$

Nos exercícios a seguir, se nada for dito, adotaremos a aproximação:

$$1 \text{ kgf} \approx 9,81 \text{ N}$$



(a) Compressão sofrida por uma mola sob ação de uma força.



(b) Balança de ponteiros.



(c) Balança digital.

Figura 28.

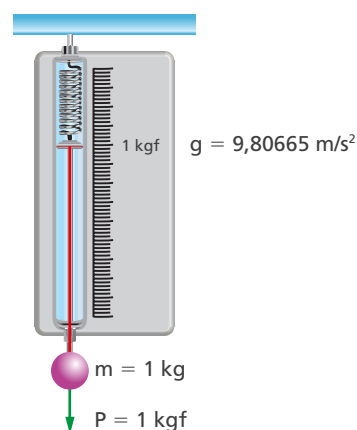
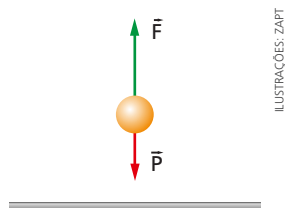


Figura 29. Num local onde $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$, um corpo cuja massa é 1 kg tem peso de 1 kgf.

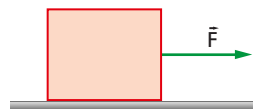
Exercícios de Aplicação

32. Consideremos um corpo de massa $m = 10 \text{ kg}$.
- Calcule o peso desse corpo na Terra, onde a aceleração da gravidade tem módulo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
 - Calcule o peso desse corpo na Lua, onde a aceleração da gravidade tem módulo $g' = 1,6 \text{ m/s}^2$.
33. Uma partícula de massa $m = 4,0 \text{ kg}$ sobe verticalmente, em movimento acelerado, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso \vec{P} e uma força vertical \vec{F} , como mostra a figura.



Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F = 70 \text{ N}$ e que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$.

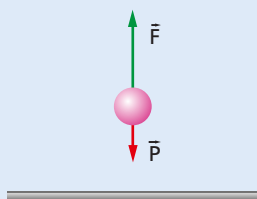
34. A figura representa um bloco de massa 10 kg que estava inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e lisa. A partir de certo instante aplica-se ao corpo uma força horizontal \vec{F} , cuja intensidade é $1,00 \text{ kgf}$. Qual é a aceleração adquirida pelo bloco? (Despreze a resistência do ar.)



35. No Brasil é comum as pessoas usarem a unidade quilograma de modo inadequado. Elas usam o quilograma, que é unidade de massa, para medirem o seu peso, que é uma força. Nos países de língua inglesa ocorre uma confusão semelhante. As pessoas usam a libra, que é unidade de força, para medirem massa. Suponhamos que uma pessoa diga que a massa de um corpo é 1 libra . Isso, na realidade, significa que, num local onde a aceleração da gravidade é normal ($g = 9,80665 \text{ m/s}^2$), o **peso** desse corpo é 1 libra . Volte ao exercício 31 para saber o valor de 1 libra em newtons e, com esse dado, calcule a massa desse corpo.

Exercícios de Reforço

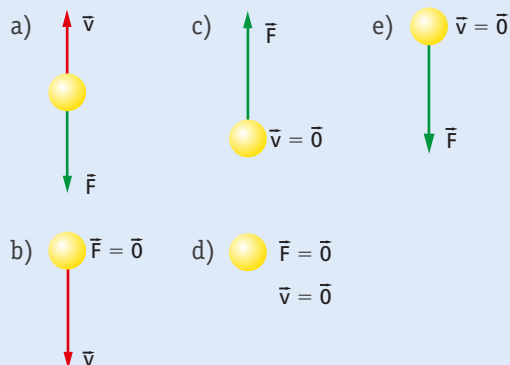
36. Uma partícula de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ está em movimento vertical, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso \vec{P} e uma força vertical \vec{F} , como mostra a figura.



Calcule o módulo de \vec{F} , supondo que:

- a partícula esteja subindo em movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 2,0 \text{ m/s}^2$.
- a partícula esteja subindo em movimento retardado cuja aceleração tem módulo $a = 2,0 \text{ m/s}^2$.
- a partícula esteja descendo em movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 3,0 \text{ m/s}^2$.
- a partícula esteja subindo em movimento uniforme.

37. (Cesgranrio-RJ) Atira-se uma pedra verticalmente para cima. Assinale a opção que representa corretamente a velocidade \vec{v} da pedra e a força resultante \vec{F} que atua sobre ela no ponto mais alto da trajetória.



38. (UF-SC) No livro *Viagem ao Céu*, Monteiro Lobato afirma que, quando jogamos uma laranja para cima, ela sobe enquanto a força que produziu o movimento é maior que a força da gravidade. Quando a força da gravidade se torna maior, a laranja cai.

Em seu caderno, identifique a(s) proposição(ões) *correta(s)*:

- I. Realmente na subida, após ser lançada pela mão de alguém, haverá uma força maior do que o peso para cima, de modo a conduzir a laranja até uma altura máxima.
- II. Quando uma laranja atinge sua altura máxima, a velocidade é nula e todas as forças também se anulam.
- III. Supondo nula a resistência do ar, após a laranja ser lançada para cima, somente a força peso atuará sobre ela.

IV. Para que a laranja cesse sua subida e inicie sua descida, é necessário que a força da gravidade seja maior que a mencionada força para cima.

V. Supondo nula a resistência do ar, a aceleração da laranja independe de sua massa.

39. Em um local onde a aceleração da gravidade tem seu valor normal ($9,80665 \text{ m/s}^2$), qual é o peso, em kgf, de um corpo cuja massa é 3 kg ?

8. Terceira Lei de Newton

Por razões didáticas, apresentaremos inicialmente a Terceira Lei de Newton de uma forma um pouco diferente da utilizada por ele. Mais adiante apresentaremos o enunciado de Newton.

Se um corpo A exerce uma força \vec{F}_1 em um corpo B , então o corpo B exerce uma força \vec{F}_2 em A , tal que:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1,$$

isto é, as duas forças têm a mesma direção, o mesmo módulo e sentidos opostos.

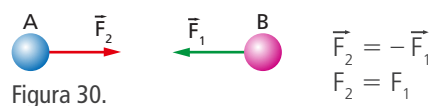


Figura 30.

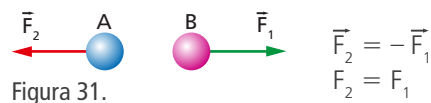


Figura 31.

ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Assim, para Newton, as forças sempre aparecem aos pares. As duas forças que compõem o par recebem o nome de **ação** e **reação**, porém cada uma das duas forças pode ser chamada de ação ou reação, pois elas aparecem **simultaneamente**. Essas forças podem ser de atração ou repulsão; no caso da figura 30 elas são de atração, e no caso da figura 31 elas são de repulsão.

É importante observar que as forças de ação e reação agem sobre corpos diferentes e, portanto, não podemos dizer que se cancelam.

Convém também destacar que, embora as forças de ação e reação tenham o mesmo módulo, isso não significa que vão produzir acelerações de módulos iguais; a aceleração que cada uma delas produz vai depender da massa de cada corpo, de acordo com a Segunda Lei de Newton.

A Terceira Lei de Newton também é chamada de **Lei da Ação e Reação** ou **Princípio da Ação e Reação**.

Exemplo 8

Um corpo A , nas proximidades da Terra, sofre desta uma atração que é o peso \vec{P} do corpo (fig. 32). Portanto, pelo Princípio da Ação e Reação, a Terra também é atraída pelo corpo A com uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao de \vec{P} . Essa força está representada por $-\vec{P}$ e, supondo a Terra homogênea, está aplicada no centro da Terra.

As forças \vec{P} e $-\vec{P}$ têm o mesmo módulo. Porém, se a massa de A for diferente da massa da Terra, as acelerações de A e da Terra também serão diferentes. Em geral, nos casos que analisaremos, a massa de A é desprezível em comparação com a massa da Terra e, assim, a aceleração da Terra será desprezível em relação à do corpo.



Figura 32.

Exemplo 9

Consideremos um indivíduo de patins (a utilidade dos patins é apenas para diminuir o atrito dos pés do indivíduo com o solo) sobre uma superfície plana horizontal. Suponhamos que, de início, o indivíduo esteja em repouso segurando um objeto A (fig. 33). Imaginemos então que o indivíduo jogue o objeto A para a frente. Para fazê-lo, o indivíduo aplicou sobre A uma força \vec{F} (fig. 34). Pelo Princípio da Ação e Reação, o objeto A aplica sobre o indivíduo uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao de \vec{F} , que é a força $-\vec{F}$.



Figura 33.



Figura 34.

A força $-\vec{F}$ fará com que o indivíduo se movimente para trás, desde que o atrito não o impeça.

Exemplo 10

Consideremos agora um indivíduo andando. O pé do indivíduo empurra o chão para trás, exercendo uma força \vec{F} (fig. 35). Pelo Princípio da Ação e Reação, o chão exerce no pé do indivíduo uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao de \vec{F} ; é a força $-\vec{F}$.

Desse modo o indivíduo move-se para a direita, enquanto a Terra move-se para a esquerda pela ação da força \vec{F} . Nós não percebemos esse movimento da Terra pois sua massa é muito grande e sua aceleração será muito pequena. Para percebermos que a força \vec{F} tem efeito podemos fazer o experimento ilustrado nas figuras 36 e 37.

O indivíduo caminha sobre um carrinho "leve", cujas rodas podem girar com pouco atrito. À medida que o indivíduo caminha para a direita, a força \vec{F} aplicada sobre o carrinho fará com que este se mova para a esquerda, afastando-se da árvore.

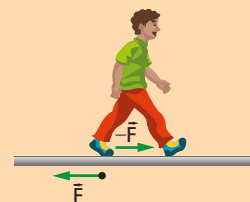


Figura 35.



Figura 36.



Figura 37.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Exemplo 11

Consideremos um bloco A apoiado numa mesa M , a qual está apoiada na Terra (fig. 38).

Uma das forças que atuam sobre o bloco é o seu peso \vec{P} (fig. 39); a reação do peso é a força $-\vec{P}$ que é aplicada à Terra.

O bloco **comprime** a mesa exercendo sobre ela a força $-\vec{F}_N$ (fig. 40); a reação de $-\vec{F}_N$ é a força \vec{F}_N que está aplicada **ao bloco**.

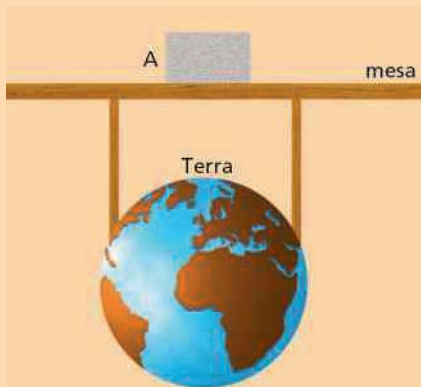


Figura 38.

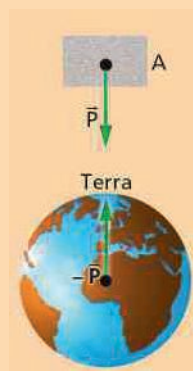


Figura 39.

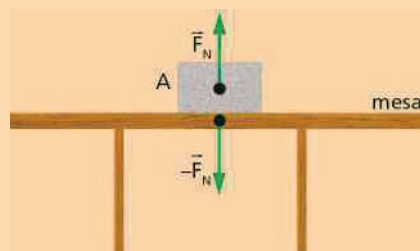


Figura 40.

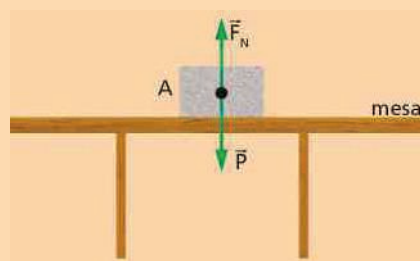


Figura 41.

As forças \vec{F}_N e $-\vec{F}_N$ formam um par de ação e reação; as forças \vec{P} e $-\vec{P}$ formam **outro** par de ação e reação. Assim, a força \vec{F}_N **não é reação de \vec{P}** .

Isolando o bloco (fig. 41), as forças que atuam sobre ele são \vec{P} e \vec{F}_N . A força \vec{F}_N , pelo fato de ser uma força de compressão, é **sempre perpendicular** à superfície de contato. Por isso é chamada **força normal** (às vezes é também chamada **reação normal do apoio**).

Exemplo 12

Os aviões a jato (fig. 42) e os foguetes (fig. 43) movem-se lançando um jato de gás para trás. Pela Lei da Ação e Reação, os veículos são lançados para a frente.

Num avião a hélice (fig. 44), esta empurra o ar para trás, o que faz com que o avião seja empurrado para a frente.



Figura 42.



Figura 43.



Figura 44.

O dinamômetro e a Terceira Lei de Newton

Vamos analisar o dinamômetro à luz da Terceira Lei de Newton. Na figura 45a representamos um dinamômetro preso a um suporte S ; aplicando-se uma força \vec{F}_1 ao dinamômetro, sua escala deverá indicar F_1 . Na figura 45b indicamos as forças de interação entre o dinamômetro e o suporte. O dinamômetro exerce no suporte a força \vec{F}_2 , e o suporte exerce no dinamômetro a força $-\vec{F}_2$ (ação e reação). Supondo que a massa do dinamômetro seja desprezível (dinamômetro ideal) e considerando que ele esteja em equilíbrio, temos:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F_1$$

Concluimos então que, quando o mostrador de um dinamômetro está indicando um valor F_1 , é porque nas duas extremidades da mola temos forças de intensidade F_1 (fig. 45c).

O enunciado de Newton

Newton enunciou sua Terceira Lei do seguinte modo:

Para toda ação há sempre uma reação oposta e igual. As ações mútuas de dois corpos entre si são sempre iguais e dirigidas para partes contrárias.

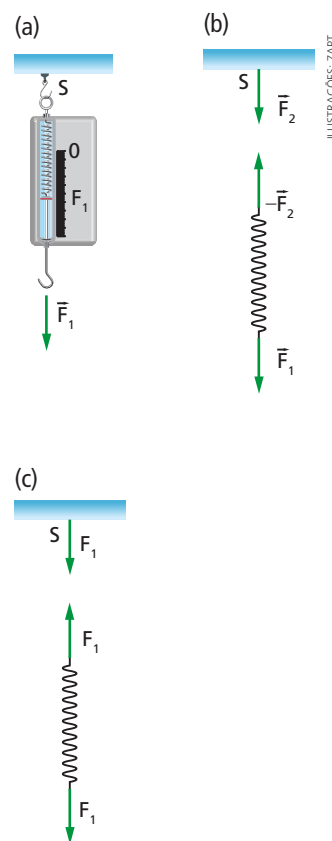


Figura 45.

Exercícios de Aplicação

40. Um bloco de massa $m = 8,0 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal sob a ação de apenas duas forças: o seu peso \vec{P} e a força normal \vec{F}_N exercida pela superfície (fig. a). A partir de determinado instante aplicamos ao bloco uma força vertical \vec{F} de intensidade $F = 30 \text{ N}$, como mostra a figura b. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

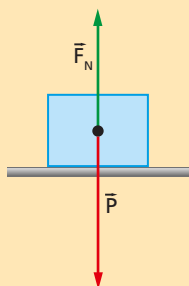


Figura a.

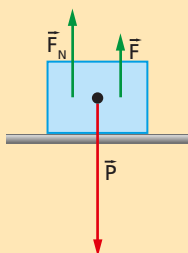


Figura b.

- Calcule a intensidade de \vec{F}_N antes da aplicação de \vec{F} .
- Calcule a intensidade de \vec{F}_N depois da aplicação de \vec{F} .

Resolução:

- a) Temos:

$$P = m \cdot g = 8,0 \cdot 10$$

$$P = 80 \text{ N}$$

Antes da aplicação de \vec{F} , o bloco está em repouso sob a ação de apenas duas forças (\vec{P} e \vec{F}_N) de sentidos opostos (fig. a). Portanto, essas forças devem ter o mesmo módulo:

$$F_N = P$$

$$F_N = 80 \text{ N}$$

- b) Temos $P = 80 \text{ N}$ e $F = 30 \text{ N}$. Portanto, como $F < P$, ao aplicarmos a força \vec{F} o bloco permanecerá em repouso e, por isso, a resultante das forças deve ser nula. Para que isso ocorra devemos ter:

$$F_N + F = P$$

$$F_N + 30 = 80$$

$$F_N = 50 \text{ N}$$

41. Um corpo de massa $m = 6,0 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso \vec{P} e a força normal \vec{F}_N exercida pela superfície (fig. a). A partir de determinado instante, aplicamos ao corpo uma força vertical \vec{F} , de intensidade $F = 20 \text{ N}$, como mostra a figura b.

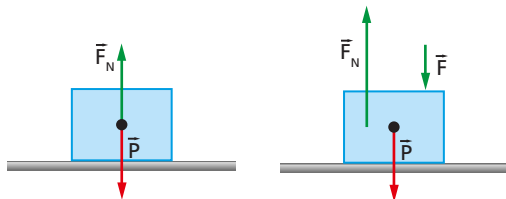
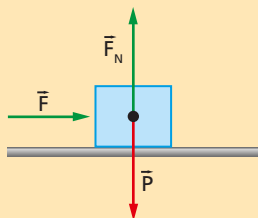


Figura a.

Figura b.

Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a intensidade de \vec{F}_N antes da aplicação de \vec{F} ;
 - a intensidade de \vec{F}_N depois da aplicação de \vec{F} .
42. Um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal sob a ação de apenas duas forças: o seu peso \vec{P} e a força normal \vec{F}_N exercida pela superfície horizontal. A partir de determinado instante aplicamos ao bloco uma força horizontal \vec{F} , de intensidade $F = 14 \text{ N}$, como mostra a figura.



Despreze o atrito e a resistência do ar. Admitindo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

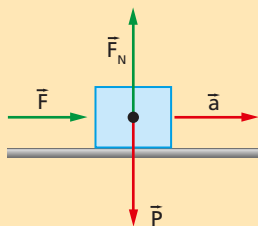
- a intensidade de \vec{F}_N após a aplicação de \vec{F} ;
- o módulo da aceleração adquirida pelo bloco após a aplicação de \vec{F} .

Resolução:

- a) Temos:

$$P = m \cdot g = 2,0 \cdot 10 \Rightarrow P = 20 \text{ N}$$

O bloco estava em repouso sobre a superfície horizontal e recebeu a aplicação de uma força \vec{F} horizontal.



Portanto, na direção vertical não haverá outra força, o que significa que as forças \vec{F}_N e \vec{P} devem se anular. Assim:

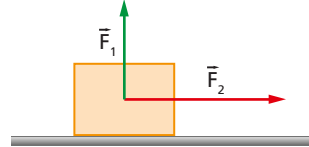
$$F_N = P \Rightarrow F_N = 20 \text{ N}$$

- b) Com o anulamento de \vec{F}_N e \vec{P} , a força \vec{F} é a força resultante. Assim, de acordo com a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = m \cdot a \Rightarrow 14 = 2,0 \cdot a$$

$$a = 7,0 \text{ m/s}^2$$

43. Consideremos um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal sem atrito, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso \vec{P} e a normal \vec{F}_N . A partir de determinado instante, aplicamos ao bloco as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , de intensidade $F_1 = 7,0 \text{ N}$ e $F_2 = 16 \text{ N}$, como mostra a figura.



Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- o módulo de \vec{F}_N após a aplicação de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 ;
- o módulo da aceleração adquirida pelo bloco após a aplicação de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

44. Dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a $7,0 \text{ kg}$ e $3,0 \text{ kg}$, estão inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, encostados um no outro. A partir de determinado instante, aplicamos ao conjunto uma força horizontal \vec{F} , de intensidade $F = 40 \text{ N}$, como mostra a figura a.

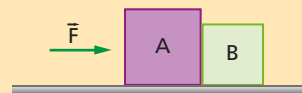


Figura a.

Calcule:

- o módulo da aceleração adquirida pelo conjunto;
- o módulo da força que um bloco exerce sobre o outro;
- o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco B;
- o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco A.

Resolução:

- a) As forças que atuam sobre o conjunto estão indicadas na figura b. No entanto, nesse caso, o peso de cada bloco anula-se com a correspondente normal e, assim, a resultante das forças que atuam sobre o conjunto é a força \vec{F} .

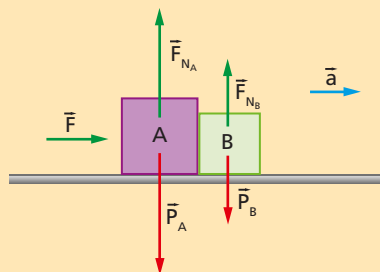


Figura b.

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao conjunto, temos:

$$F = (m_A + m_B) \cdot a \quad (1)$$

$$40 = (7,0 + 3,0) \cdot a$$

$$a = 4,0 \text{ m/s}^2$$

- b) Vamos agora fazer um diagrama das forças que atuam em cada bloco separadamente (fig. c), sem considerar o peso e a normal, já que estas se anulam.

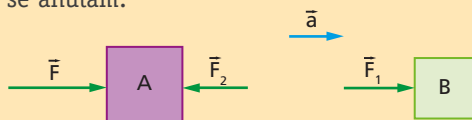


Figura c.

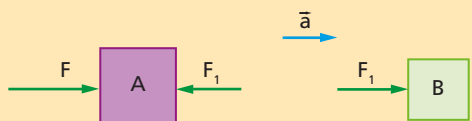


Figura d.

O bloco A, ao ser "empurrado" por \vec{F} , exerce sobre o bloco B a força \vec{F}_1 . Pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco B exerce sobre A uma força \vec{F}_2 , tal que \vec{F}_1 e \vec{F}_2 têm a mesma direção, o mesmo módulo e sentidos opostos:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Assim, podemos adotar o esquema simplificado da figura d. Escolhamos agora um dos dois blocos e apliquemos a ele a Segunda Lei de Newton. Se escolhermos o bloco B, teremos:

$$F_1 = m_B \cdot a \quad (2)$$

$$F_1 = (3,0) \cdot (4,0)$$

$$F_1 = 12 \text{ N}$$

Se escolhermos o bloco A, teremos:

$$F - F_1 = m_A \cdot a \quad (3)$$

$$40 - F_1 = (7,0) \cdot (4,0)$$

$$F_1 = 12 \text{ N}$$

- c) Seja \vec{F}_B a resultante das forças que atuam sobre o bloco B. De acordo com a figura c, temos $\vec{F}_B = \vec{F}_1$. Portanto:

$$F_B = 12 \text{ N}$$

- d) Seja \vec{F}_A a resultante das forças que atuam sobre o bloco A. De acordo com a figura d, temos:

$$F_A = F - F_1 \quad \text{ou} \quad F_A = 40 - 12$$

$$F_A = 28 \text{ N}$$

Poderíamos também escrever, pela Segunda Lei de Newton:

$$F_A = m_A \cdot a = (7,0) \cdot (4,0)$$

$$F_A = 28 \text{ N}$$

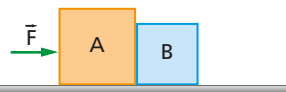
É interessante observar o sistema formado pelas equações (2) e (3):

$$\begin{cases} F_1 = m_B \cdot a & (2) \\ F - F_1 = m_A \cdot a & (3) \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos a equação (1):

$$F = (m_A + m_B) \cdot a$$

45. Dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 12 kg e 8,0 kg, estão inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, encostados um no outro. A partir de determinado instante, aplicamos ao conjunto uma força horizontal \vec{F} , de intensidade $F = 60 \text{ N}$, como ilustra a figura.



Calcule:

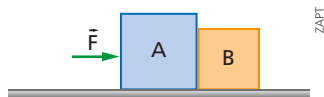
- o módulo da aceleração adquirida pelo conjunto;
- o módulo da força que um bloco exerce sobre o outro;
- o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco B;
- o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco A.

46. (FEI-SP) Um aluno que tinha tido sua primeira aula sobre o Princípio da Ação e Reação ficou sem gasolina no carro. Raciocinou: "Se eu descer do carro e tentar empurrá-lo com uma força \vec{F} , ele vai reagir com uma força $-\vec{F}$; ambas vão se anular e eu não conseguirei mover o carro". Mas seu colega desceu do carro e o empurrou, conseguindo movê-lo. Qual o erro cometido pelo aluno em seu raciocínio?
47. (Fuvest-SP) Um homem tenta levantar uma caixa de 5 kg, que está sobre uma mesa, aplicando uma força vertical de 10 N.



Nesta situação, o valor da força que a mesa aplica na caixa é: (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- a) 0 N c) 10 N e) 50 N
b) 5 N d) 40 N
48. (U. E. Londrina-PR) Na figura abaixo, os blocos A e B estão sobre um plano horizontal sem atrito. Sendo F igual a 45 N, M_A igual a 8 kg e M_B igual a 7 kg, a força que A exerce sobre B, em newtons, vale:



- a) 15 c) 24 e) zero
b) 21 d) 45
49. (UE-PA) Um livro está em repouso sobre a superfície de uma mesa. De acordo com o princípio da ação e reação de Newton, a reação do peso do livro é:
- a) a força que o livro exerce sobre a mesa.
b) a força que a mesa exerce sobre o livro.
c) a força que o livro exerce sobre a Terra.
d) a força que a Terra exerce sobre o livro.
e) a força de atrito entre o livro e a mesa.

50. (UF-RN) Aracneide é uma aranha que mora no teto de um quarto. Ela é marrom, mede 1,5 cm e pesa $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ N}$. Considere que Aracneide está andando de cabeça para baixo em um teto horizontal e, enquanto anda, no mínimo seis de suas patas permanecem em contato com o teto.

Denominemos por \vec{N} a força normal que atua em Aracneide e por \vec{F}_{pata} a força média exercida em cada pata quando esta se encontra em contato com o teto.

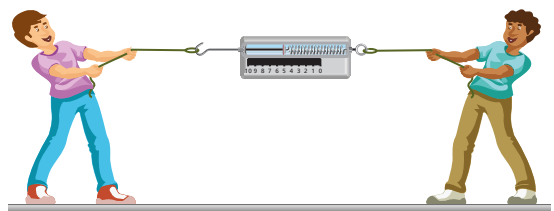
Nessas condições, pode-se afirmar que \vec{N} é vertical e aponta para:

- a) cima e que F_{pata} é maior ou igual a $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.
b) baixo e que F_{pata} é menor ou igual a $3,3 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.
c) cima e que F_{pata} é menor ou igual a $3,3 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.
d) baixo e que F_{pata} é maior ou igual a $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

51. (UF-PE) A Mecânica Clássica, também conhecida como mecânica newtoniana, fundamenta-se em princípios que podem ser sintetizados em um conjunto de três afirmações conhecidas como as leis de Newton do movimento. Assinale as sentenças verdadeiras:

- I. Se o motor de uma espaçonave que se move no espaço sideral suficientemente afastada de qualquer influência gravitacional deixar de funcionar, a espaçonave diminui sua velocidade e fica em repouso.
II. As forças de ação e reação agem em corpos diferentes.
III. Massa é propriedade de um corpo que determina a sua resistência a uma mudança de movimento.
IV. Se um corpo está se dirigindo para o norte, podemos concluir que podem existir várias forças sobre o objeto, mas a maior deve estar direcionada para o norte.
V. Se a resultante das forças que atuam sobre um corpo é nula, pode-se concluir que este se encontra em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

52. Um dinamômetro possui suas duas extremidades presas a duas cordas. Duas pessoas puxam as cordas na mesma direção e em sentidos opostos, com força de mesma intensidade $F = 100 \text{ N}$. Quanto marcará o dinamômetro?



- a) 200 N c) 100 N e) 400 N
b) 0 d) 50 N

9. Forças exercidas por fios

Há muitas situações em que as forças são exercidas nos corpos através de fios (ou cordas). Para analisar a ação dos fios, vamos considerar um caso concreto para facilitar o entendimento. Na figura 46 temos dois blocos, A e B , de massas conhecidas, m_A e m_B , ligados por uma corda C de massa conhecida, m_C . O conjunto todo está apoiado em um plano horizontal sem atrito e está sendo puxado por uma força horizontal \vec{F} de intensidade conhecida.

Considerando o conjunto todo como um único objeto e aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = (m_A + m_B + m_C) \cdot a \quad (1)$$



Figura 46.

ILUSTRAÇÕES: ZAPPT

Como os valores de F , m_A , m_B e m_C são conhecidos, da equação (1) tiramos o valor da aceleração a .

Consideremos agora separadamente as forças que agem sobre cada bloco e sobre a corda (sem considerar os pesos e as normais, que se anulam), como ilustra a figura 47.

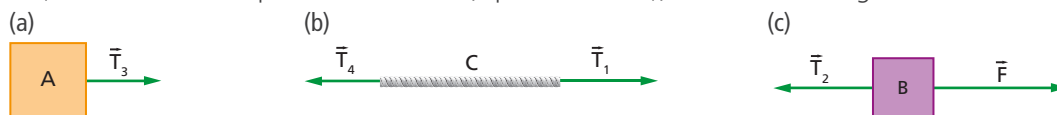


Figura 47.

O bloco B , ao ser “puxado” por \vec{F} , aplica à corda a força \vec{T}_1 ; mas, pelo Princípio da Ação e Reação, a corda exerce em B uma força \vec{T}_2 tal que $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$. A corda exerce no bloco A uma força \vec{T}_3 e A exerce na corda a força \vec{T}_4 tal que $\vec{T}_4 = -\vec{T}_3$. As forças que atuam nos extremos da corda (\vec{T}_1 e \vec{T}_4) são chamadas de **trações**.

Como $T_3 = T_4$ e $T_1 = T_2$, podemos adotar o esquema simplificado da figura 48.

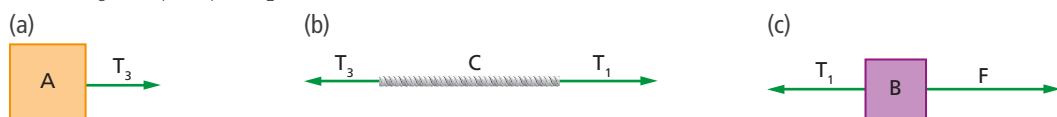


Figura 48.

Para obtermos o valor de T_3 , podemos aplicar a Segunda Lei de Newton ao bloco A :

$$T_3 = m_A \cdot a \quad (2)$$

Como os valores de m_A e a são conhecidos, essa equação nos dá o valor de T_3 . Para obtermos o valor de T_1 , podemos aplicar a Segunda Lei de Newton ao bloco B ou à corda:

$$\begin{cases} \text{bloco } B: F - T_1 = m_B \cdot a & (3) \\ \text{corda: } T_1 - T_3 = m_C \cdot a & (4) \end{cases}$$

Suponhamos agora que a massa da corda seja desprezível, isto é, $m_C \cong 0$. Da equação (4), temos:

$$T_1 - T_3 = m_C \cdot a \cong 0 \cdot a \cong 0$$

ou

$$T_1 \cong T_3$$

isto é, as trações nos dois extremos da corda têm praticamente a **mesma intensidade**.

A análise do caso apresentado neste item foi relativamente simples. No entanto, como veremos nos exercícios, na maioria dos casos os cálculos ficam bem complicados quando a massa da corda não é desprezível. Para evitar tais complicações, usamos em geral cordas (ou fios) cujas massas possam ser desprezadas. Surge, então, a noção de **fio ideal**: é um fio perfeitamente flexível, inextensível e de **massa nula**. De acordo com o que comentamos acima, nas duas extremidades de um fio ideal a tração tem a **mesma intensidade**.

No exemplo analisado neste item, se a corda fosse ideal, o esquema simplificado das forças ficaria como na figura 49.

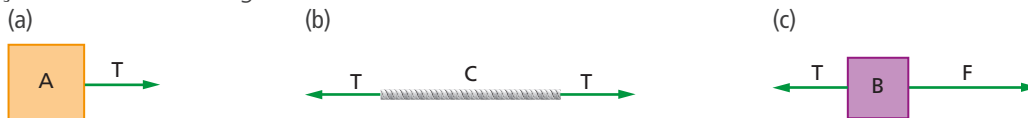


Figura 49.

Em alguns vestibulares a palavra **tensão** é usada como sinônimo de **tração**. Preferimos não fazê-lo, pois a palavra "tensão" tem outro significado no estudo das deformações.

Exercícios de Aplicação

53. Dois blocos, A e B, de massas $m_A = 5,0 \text{ kg}$ e $m_B = 7,0 \text{ kg}$, estão inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sem atrito, ligados por um fio ideal, como mostra a figura a. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco B a força horizontal \vec{F} de intensidade $F = 36 \text{ N}$.



Figura a.

Calcule:

- o módulo da aceleração do sistema;
- o módulo da tração no fio.

Resolução:

- O fio, sendo ideal, tem massa nula.

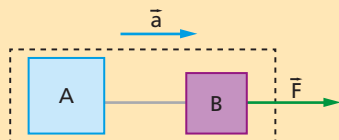


Figura b.

Considerando o conjunto todo como um único corpo (fig. b) e aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$36 = (5,0 + 7,0) \cdot a$$

$$a = 3,0 \text{ m/s}^2$$

- Vamos agora considerar, separadamente, as forças que atuam em cada bloco e no fio (sem considerar os pesos e as normais, pois elas se anulam). Como o fio é ideal, a tração tem a mesma intensidade T nas duas extremidades (fig. c). Por isso, em geral, usaremos um esquema simplificado, em que aparecem apenas as forças que atuam nos blocos (fig. d).

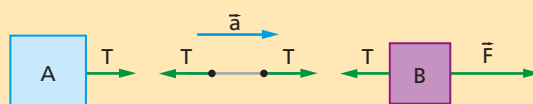


Figura c.



Figura d.

Aplicando a Segunda Lei de Newton para o bloco A, temos:

$$T = m_A \cdot a$$

$$T = (5,0) \cdot (3,0)$$

$$T = 15 \text{ N}$$

Poderíamos também ter aplicado a Segunda Lei de Newton para o bloco B:

$$F - T = m_B \cdot a$$

$$36 - T = (7,0) \cdot (3,0)$$

$$T = 15 \text{ N}$$

OBSERVAÇÃO

Se a massa do fio não fosse desprezível, o seu peso também não seria. Nesse caso, o fio não poderia manter-se esticado horizontalmente; ele apresentaria uma curvatura, como na figura e, o que complicaria bastante a resolução do exercício.



Figura e.

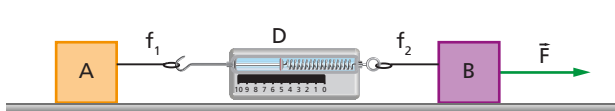
54. A figura representa dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 10 kg, apoiados num plano horizontal sem atrito e ligados por um fio ideal. No bloco B foi aplicada uma força horizontal \vec{F} de intensidade $F = 32$ N.



Calcule:

- o módulo da aceleração do sistema;
- o módulo da tração no fio.

55. No sistema representado na figura, f_1 e f_2 são fios ideais, D é um dinamômetro ideal (massa nula), as massas de A e B são $m_A = 20$ kg e $m_B = 30$ kg, a força \vec{F} tem intensidade $F = 200$ N. Desprezando o atrito, determine a marcação do dinamômetro.



Exercícios de Reforço

56. (Fatec-SP) No sistema figurado, desprezar dissipação, inércia das rodas e efeitos do ar ambiente. Os carros são interligados por um fio leve, flexível e inextensível.



- A aceleração do carro maior é $2,0 \text{ m/s}^2$.
 - O sistema move-se necessariamente para a direita.
 - A força de tração no fio de ligação é 24 N.
 - A força de tração da composição, 60 N, transmite-se inalterada para o carro menor.
57. (Unirio-RJ) Nas figuras a seguir temos blocos de massas m e $2m$ deslizando sobre uma superfície sem atrito.

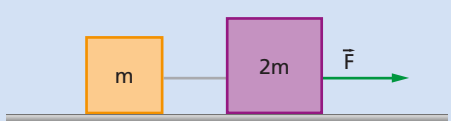


Figura a.

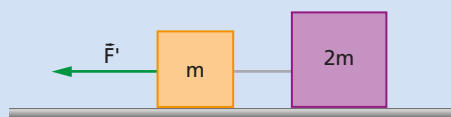


Figura b.

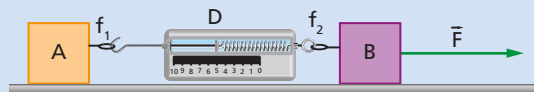
Sabendo que nos dois casos a tração no fio tem a mesma intensidade, podemos afirmar que $\frac{F}{F'}$ é igual a:

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$
- 1
- 2
- 3

58. (U. E. Londrina-PR) Numa situação de emergência, um bombeiro precisa retirar do alto de um prédio, usando uma corda, um adolescente de 40 kg. A corda suporta, no máximo, 300 N. Uma alternativa é fazer com que o adolescente desça com uma certa aceleração, para que a tensão na corda não supere o seu limite. Sob essas condições e considerando a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , qual deve ser o módulo dessa aceleração?

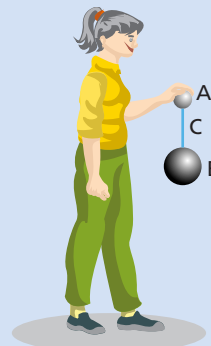
- $17,5 \text{ m/s}^2$
- $1,3 \text{ m/s}^2$
- $7,5 \text{ m/s}^2$
- $2,5 \text{ m/s}^2$
- $9,5 \text{ m/s}^2$

59. Dois blocos, A e B, de massas $m_A = 8,0$ kg e $m_B = 4,0$ kg, são ligados a fios ideais e a um dinamômetro D ideal, como mostra a figura. Desprezando o atrito e sabendo que $F = 36$ N, determine a marcação do dinamômetro.



60. (Fuvest-SP) Uma pessoa segura uma esfera A de 1,0 kg que está presa numa corda inextensível C de 200 g, a qual, por sua vez, tem presa na outra extremidade uma esfera B de 3,0 kg, como se vê na figura. A pessoa solta a esfera A. Enquanto o sistema estiver caindo e desprezando-se a resistência do ar, podemos afirmar que a tensão na corda vale:

- zero
- 2 N
- 10 N
- 20 N
- 30 N



10. Equilíbrio

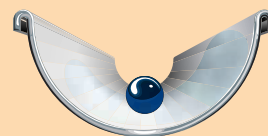
Dizemos que um ponto material está em **equilíbrio** quando sua velocidade vetorial se mantém constante. Isso significa que o ponto material permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Quando o ponto material tem velocidade constante e igual a zero, dizemos que está em **equilíbrio estático**. Quando o ponto material está em movimento retilíneo uniforme, dizemos que está em **equilíbrio dinâmico**. Para que um ponto material esteja em equilíbrio, é necessário, então, que a resultante das forças que atuam sobre ele seja constante e nula.

Consideremos um ponto material em equilíbrio estático. Se deslocarmos ligeiramente o ponto material de sua posição de equilíbrio, podem ocorrer três situações:

- 1ª) A tendência do ponto material é voltar para a posição inicial; nesse caso o equilíbrio é dito **estável**.
- 2ª) A tendência do ponto material é afastar-se mais ainda da posição inicial; nesse caso o equilíbrio é dito **instável**.
- 3ª) O ponto material fica em equilíbrio também na nova posição; nesse caso o equilíbrio é dito **indiferente**.

Exemplo 13

- a) Consideremos uma partícula em repouso no fundo de uma calha, como na figura 50. Se deslocarmos ligeiramente a partícula de sua posição, sua tendência é voltar para o fundo da calha. Portanto, é uma situação de equilíbrio **estável**.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Figura 50.

- b) Consideremos uma partícula em repouso, como está representado na figura 51. Se deslocarmos ligeiramente a partícula de sua posição, sua tendência é afastar-se mais ainda da posição inicial. A situação é, portanto, de equilíbrio **instável**.

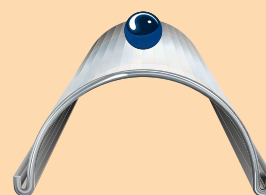


Figura 51.

- c) Consideremos uma partícula em repouso sobre uma superfície plana horizontal, como mostra a figura 52. Se fizermos com que a partícula sofra um pequeno deslocamento horizontal, ela ainda ficará em equilíbrio na nova posição. A situação é, portanto, de equilíbrio **indiferente**, para deslocamentos horizontais.



Figura 52.

Em resumo, temos:



11. Força variável

Até agora, aplicamos a Segunda Lei de Newton em situações em que a força é constante. Porém essa lei vale também quando a força é variável; nesse caso, a aceleração também será variável. Desde que se saiba a maneira como a força varia ao longo do tempo é possível estudar o movimento usando o Cálculo Diferencial e Integral. Como esse cálculo está além do nível do ensino médio, em geral, não trabalharemos com situações em que a força é variável. No entanto, como veremos nos capítulos 18 e 20, às vezes é possível obter algumas informações sobre o movimento de um corpo sob a ação de uma força variável, usando alguns recursos que serão apresentados nesses capítulos.

12. Referenciais inerciais e a Segunda Lei de Newton

Imaginemos uma partícula que se move em relação a um referencial inercial R constituído por um sistema cartesiano ortogonal xOy (fig. 53). Em relação a esse referencial, sejam \vec{v}_1 e \vec{v}_2 as velocidades das partículas nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente. Suponhamos que o referencial R , por sua vez, tenha movimento de translação com velocidade constante \vec{v}_R em relação a outro referencial inercial R' , constituído por um sistema cartesiano ortogonal $x'O'y'$.

Desse modo, nos instantes t_1 e t_2 , as velocidades da partícula em relação a R' serão, respectivamente, \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 , dadas por (fig. 54):

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_R \quad \text{e} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_R \quad (1)$$

Vamos calcular as acelerações vetoriais médias da partícula, entre os instantes t_1 e t_2 , em relação aos dois referenciais:

Em relação a R :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (2)$$

Em relação a R' :

$$\vec{a}'_m = \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t} = \frac{\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1}{t_2 - t_1} \quad (3)$$

Usando as igualdades (1), a igualdade (3) fica:

$$\vec{a}'_m = \frac{(\vec{v}_2 + \vec{v}_R) - (\vec{v}_1 + \vec{v}_R)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_R - \vec{v}_1 - \vec{v}_R}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (4)$$

Comparando (4) com (2), vemos que:

$$\vec{a}'_m = \vec{a}_m \quad (5)$$

Como a aceleração instantânea é o limite da aceleração média para Δt "tendendo a zero", a igualdade se aplica também às acelerações instantâneas:

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad (6)$$

em que \vec{a}' e \vec{a} são as acelerações instantâneas da partícula, num determinado instante t , em relação a R' e R , respectivamente.

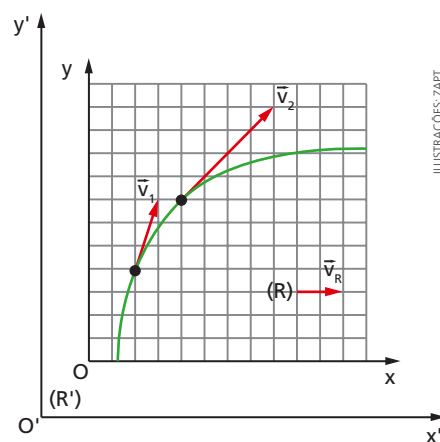


Figura 53.

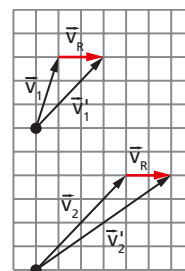


Figura 54.

Percebemos então que as velocidades da partícula em relação aos dois referenciais são diferentes, mas as acelerações são iguais e, desse modo, ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$), obteremos o mesmo valor para \vec{F} nos dois referenciais. Assim, se as leis de Newton valem para um referencial inercial R' , deverão valer também para qualquer outro referencial inercial.

Referenciais não inerciais

Vamos agora analisar um exemplo que ilustra o que ocorre quando um movimento é estudado em relação a um referencial **não inercial**, isto é, um referencial que tem uma **aceleração não nula** em relação a um referencial **inercial**.

Consideremos um indivíduo O fixo no solo (fig. 55), que chamaremos de referencial R e suporemos inercial. O indivíduo observa o movimento de um vagão ferroviário R' que se move inicialmente com velocidade constante \vec{v}_0 (em relação a R), sobre trilhos retos e horizontais. Dentro do trem há um indivíduo O' (fixo em relação a R') e um bloco B apoiado no piso e em repouso em relação a R' . Vamos admitir que não haja atrito entre o bloco e o piso do vagão.

Suponhamos que, a partir do instante t_0 , o vagão freia, adquirindo movimento uniformemente retardado, de aceleração \vec{a} em relação a R (fig. 56). Como o movimento é retardado, o sentido de \vec{a} é oposto ao da velocidade \vec{v}_0 . Para o indivíduo O , o bloco B deverá, por inércia, continuar com velocidade \vec{v}_0 . Para o indivíduo O' , o bloco, que inicialmente estava em repouso, começa a deslizar sobre o piso do vagão (fig. 57) com movimento acelerado de aceleração \vec{a}' , cujo sentido é **oposto** ao de \vec{a} , mas de mesmo módulo:

$$\vec{a}' = -\vec{a} \quad \text{e} \quad |\vec{a}'| = |\vec{a}|$$

O indivíduo O' interpreta esse fato dizendo que sobre o bloco atua uma força \vec{F}' dada por:

$$\vec{F}' = m \cdot \vec{a}'$$

enquanto para o indivíduo O não há essa força; para ele o bloco move-se por inércia.

O referencial R' tem aceleração em relação ao referencial inercial R ; assim, R' é não inercial e a força \vec{F}' é chamada de **força fictícia** ou **força inercial**. A palavra “fictícia” serve para destacar que \vec{F}' não é resultado da interação de corpos.

O caso que acabamos de analisar é o de um referencial não inercial que tem movimento de translação **retilíneo** em relação a um referencial inercial. No capítulo 17 veremos um exemplo de referencial não inercial em movimento de rotação.

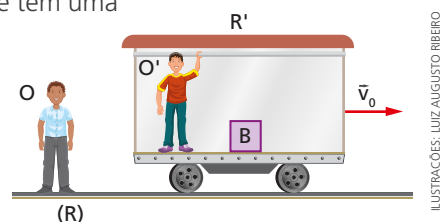


Figura 55.

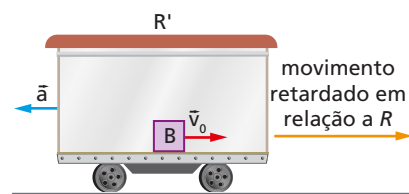


Figura 56.

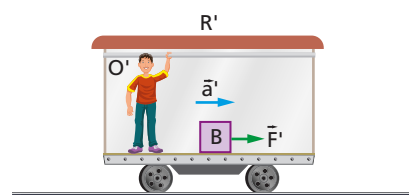


Figura 57.

13. Massa inercial e massa gravitacional

A massa definida no capítulo 1 é chamada de **massa gravitacional**, pois é definida a partir dos efeitos da atração gravitacional que a Terra exerce sobre os corpos. Mas existe outra massa, chamada de **massa inercial**, que é a que aparece na Segunda Lei de Newton ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$). Supondo que tenhamos estabelecido um processo para medir forças, a experiência mostra que a **resultante das forças** (\vec{F}) aplicadas a um corpo é diretamente proporcional à aceleração do corpo (\vec{a}), isto é,

$$\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m$$

em que a constante de proporcionalidade m é a **massa inercial** do corpo.

Em princípio, nada garante que a massa gravitacional de um corpo coincida com sua massa inercial, e esse foi um fato logo percebido tanto por Newton como pelos críticos de sua teoria. A partir de então foram feitos inúmeros experimentos que, com grande precisão, mostraram que, dados vários corpos C_1, C_2, C_3, \dots , de massas gravitacionais M_1, M_2, M_3, \dots e massas inerciais m_1, m_2, m_3, \dots , tem-se:

$$\frac{M_1}{m_1} = \frac{M_2}{m_2} = \frac{M_3}{m_3} = \dots = k = \text{constante}$$

isto é, a massa gravitacional e a massa inercial são **proporcionais**. Assim, podemos escolher as unidades de modo que a constante k seja igual a 1 e, desse modo, considerar a massa inercial e a massa gravitacional como idênticas, que é o que se faz atualmente.

14. Limitações das leis de Newton

Como já mencionamos no capítulo 1, no fim do século XIX foram percebidos fenômenos que não eram explicáveis pela Física até então conhecida e que serão apresentados no volume 3 desta coleção, na parte de Física Moderna. Porém, neste momento queremos adiantar um problema que existe com a Segunda Lei de Newton, quando um corpo move-se com velocidade muito alta, comparável à velocidade da luz no vácuo (que é $3,0 \cdot 10^8$ m/s).

Suponhamos que um corpo de massa m esteja inicialmente em repouso. Se aplicarmos a esse corpo uma força constante \vec{F} , de acordo com Newton, o corpo deverá adquirir uma aceleração constante \vec{a} dada por:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{ou} \quad \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} = m = \text{constante}$$

Como a velocidade inicial é nula, o gráfico da velocidade escalar em função do tempo deveria ser a linha reta da figura 58. De fato, isso é verdade para velocidades pequenas em comparação com a velocidade da luz. Porém, o físico alemão Albert Einstein mostrou (e os experimentos comprovaram) que o gráfico é retilíneo apenas para baixas velocidades. À medida que a velocidade aumenta, o gráfico fica curvo, como ilustra a figura, e a velocidade nunca atinge o valor da velocidade da luz, por mais tempo que a força fique atuando. Isso significa que a aceleração vai diminuindo, aproximando-se do valor zero. Mas, se a aceleração diminui, concluímos que:

$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} \text{ aumenta} \quad (1)$$

Porém, para Newton vale:

$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} = \text{massa} \quad (2)$$

Assim, um modo de interpretar a conclusão (1) é afirmar que:

À medida que a velocidade aumenta, a massa também aumenta.

De fato, no início do século XX, essa foi a interpretação adotada. Porém, na segunda metade daquele século, surgiu outra interpretação, que comentaremos no volume 3 desta coleção.

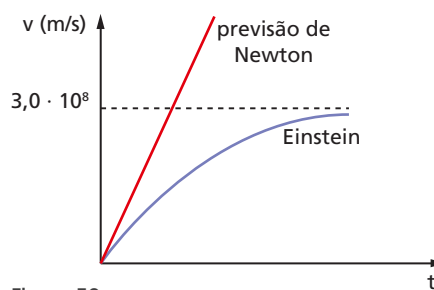
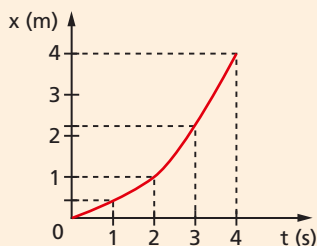


Figura 58.

Exercícios de Aprofundamento

61. (Cesesp-PE) O gráfico abaixo corresponde ao movimento de um pequeno disco de massa igual a 10 g sendo arrastado por uma força constante F sobre uma mesa horizontal sem atrito. Qual o valor da força em newtons?

- a) $5 \cdot 10^{-4}$
b) $2 \cdot 10^{-3}$
c) $5 \cdot 10^{-3}$
d) $8 \cdot 10^{-3}$
e) $3 \cdot 10^{-2}$



62. Um bloco de massa 4,0 kg tem, inicialmente, movimento retilíneo e uniforme, de velocidade \vec{v}_0 , sobre uma superfície horizontal lisa. A partir do instante $t = 0$ aplica-se ao bloco uma força horizontal \vec{F} , cujo módulo é 20 N e cujo sentido é oposto ao de \vec{v}_0 . Sabendo que, depois de percorrer 80 m, a velocidade fica reduzida a um terço de v_0 , calcule:

- a) o valor de v_0 ;
b) o tempo gasto para percorrer os 80 m.

63. (U. E. Londrina-PR) A teoria da relatividade restrita, proposta por Albert Einstein (1879-1955) em 1905, é revolucionária porque mudou as ideias sobre o espaço e o tempo, mas em perfeito acordo com os resultados experimentais. Ela é aplicada, entretanto, somente a referenciais inerciais. Em 1915, Einstein propôs a teoria geral da relatividade, válida não só para referenciais inerciais, mas também para referenciais não inerciais.

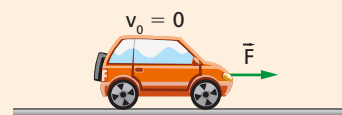
Sobre os referenciais inerciais, considere as seguintes afirmativas:

- I. São referenciais que se movem, uns em relação aos outros, com velocidade constante.
- II. São referenciais que se movem, uns em relação aos outros, com velocidade variável.
- III. Observadores em referenciais inerciais diferentes medem a mesma aceleração para o movimento de uma partícula.

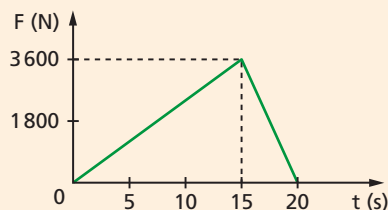
Assinale a alternativa correta.

- a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) As afirmativas I e II são verdadeiras.
d) As afirmativas II e III são verdadeiras.
e) As afirmativas I e III são verdadeiras.

64. Um automóvel de massa 1200 kg está inicialmente em repouso sobre uma estrada plana horizontal. A partir do instante $t = 0$, o automóvel começa a acelerar em linha reta, de modo que a resultante (\vec{F}) de todas as forças que atuam sobre ele tem intensidade variável de acordo com o gráfico.



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO



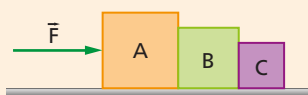
- a) Construa o gráfico da aceleração escalar em função do tempo.
b) Qual é a velocidade do automóvel no instante $t = 20$ s?
65. Quando uma força \vec{F} é variável, define-se o seu **valor médio** como a intensidade de uma força constante que produziria o mesmo efeito de \vec{F} . Para a situação do exercício 64, calcule:
- a) o módulo da aceleração média entre $t = 0$ e $t = 20$ s;
b) o valor da força média nos 20 segundos.
66. Consideremos um sistema de unidades hipotético em que a unidade de comprimento seja o quilômetro, a unidade de tempo seja o minuto e a unidade de massa seja a arroba. Suponhamos que nesse sistema a unidade de força seja a *Galileu*, com símbolo G . Lembrando que 1 arroba = 15 kg e que o símbolo do newton é N , determine os valores de x , y e z nas igualdades abaixo:
- a) $1 \text{ km/min}^2 = x \text{ m/s}^2$
b) $1 G = y N$
c) $1 N = z G$
67. (Mackenzie-SP) Se num determinado sistema de unidades forem multiplicadas por k as unidades de comprimento, massa e tempo, então a unidade de força desse sistema será multiplicada por:

- a) k^{-2}
b) k^{-1}
c) k^0
d) k^1
e) k^2

68. (Fatec-SP) Seja g a aceleração da gravidade em um laboratório terrestre. Nesse laboratório suspende-se um bloco A a um dinamômetro e coloca-se um bloco B em um dos pratos de uma “balança de pratos”. A leitura é 2,0 kgf no dinamômetro; o massor equilibrante da balança de pratos tem massa igual a 2,0 kg. O sistema é levado a um planeta no qual a aceleração da gravidade é $g' = \frac{g}{2}$. No dinamômetro e na balança medem-se respectivamente:

- a) 1,0 kgf e 2,0 kg c) 2,0 kgf e 1,0 kg
b) 1,0 kgf e 1,0 kg d) 2,0 kgf e 2,0 kg

69. Três blocos, A , B e C , de massas respectivamente iguais a 9,0 kg, 6,0 kg e 2,0 kg, estão inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. A partir de determinado instante, aplicamos ao conjunto a força horizontal \vec{F} de intensidade $F = 85$ N.



Calcule:

- a) o módulo da aceleração adquirida pelo conjunto;
b) os módulos das forças de interação entre os blocos B e C ;
c) os módulos das forças de interação entre os blocos A e B .

70. (UF-RN) Quatro blocos idênticos, de massa m cada um, são empurrados sobre uma mesa sem atrito por uma força \vec{F} , conforme mostra a figura abaixo.



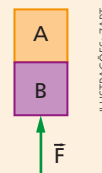
A aceleração do bloco 4 tem módulo igual a:

- a) $0,25 \frac{F}{m}$ c) $\frac{F}{m}$ e) $4 \frac{F}{m}$
b) $0,75 \frac{F}{m}$ d) $3 \frac{F}{m}$

71. (UF-RN) Para a situação do teste anterior, a força que o bloco 1 exerce no bloco 2 tem módulo:

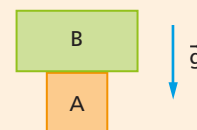
- a) $4 F$ d) $0,75 F$
b) $3 F$ e) $0,25 F$
c) F

72. Dois blocos, A e B , de massas $m_A = 4,0$ kg e $m_B = 8,0$ kg, sobem em movimento acelerado, empurrados por uma força \vec{F} de intensidade $F = 180$ N, como mostra a figura. Sendo $g = 10$ m/s², calcule:



- a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) o módulo da força que o bloco B exerce sobre o bloco A .

73. Dois blocos, A e B , de massas $m_A = 6,0$ kg e $m_B = 8,0$ kg, são abandonados de certa altura, encostados um no outro, como mostra a figura. Despreze a resistência do ar e adote $g = 10$ m/s².



- a) Calcule o módulo da aceleração do conjunto.
b) Calcule o módulo da força que o bloco B exerce sobre o bloco A .

74. Consideremos três blocos, A , B e C , de massas respectivamente iguais a 4,0 kg, 5,0 kg e 6,0 kg, inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito e ligados por fios ideais, como mostra a figura.



Aplica-se ao bloco A a força horizontal \vec{F} de intensidade $F = 120$ N. Calcule:

- a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da tração no fio que liga os blocos C e B ;
c) o módulo da tração no fio que liga os blocos B e A .

SUGESTÕES DE LEITURA

VALADARES, Eduardo de Campos. *Newton – A órbita da Terra em um copo d'água*. São Paulo: Odysseus, 2003.

- Este livro apresenta um esboço da vida de Newton e suas principais realizações.

WESTFALL, Richard S. de. *A vida de Isaac Newton*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

- Este livro também apresenta a vida e a obra de Newton, porém de modo mais detalhado que a obra anterior.

Algumas aplicações das leis de Newton

1. Elevadores em movimento vertical

Consideremos um indivíduo de massa m e peso \vec{P} sobre uma dessas balanças usadas em farmácias, colocada em um elevador (fig. 1a). Vamos supor que o mostrador da balança esteja graduado em unidades de força.

O indivíduo aplica sobre o prato da balança a força $-\vec{F}_N$ (fig. 1b) e, pela Lei da Ação e Reação, o prato aplica no indivíduo a força \vec{F}_N . Sobre o indivíduo atua ainda o peso \vec{P} .

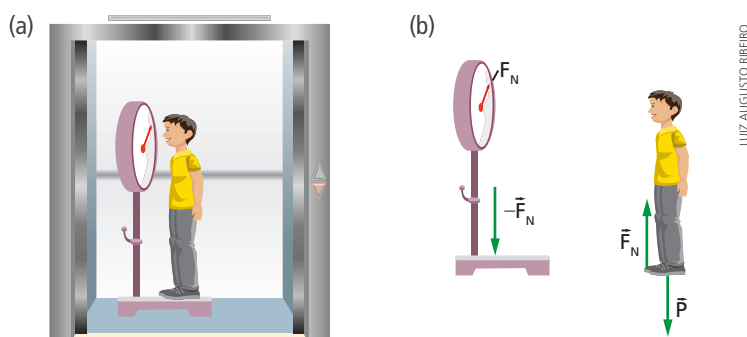


Figura 1.

O mostrador da balança deve indicar o módulo da força aplicada no prato, isto é, \vec{F}_N .

Se o elevador estiver em repouso ou movendo-se verticalmente com velocidade constante (subindo ou descendo), a resultante das forças sobre o indivíduo é nula e, portanto:

$$F_N = P = m \cdot g$$

isto é, a marcação da balança é igual ao peso do indivíduo.

Elevador em repouso ou em MRU na vertical:

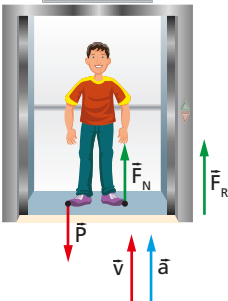
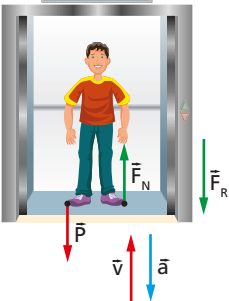
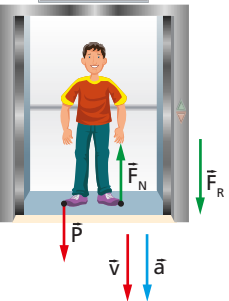
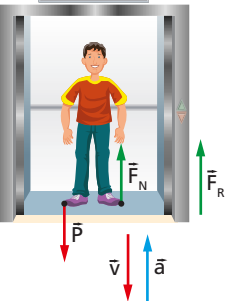
$$F_N = P$$

No entanto, se o elevador estiver se movimentando com aceleração não nula, a resultante das forças sobre o indivíduo não será mais nula; assim, deveremos ter $F_N \neq P$, isto é, a balança não marcará o peso do indivíduo. Nesse caso, o valor de F_N (que é o que a balança assinala) é chamado **peso aparente**.

Vamos analisar os casos em que o elevador sobe ou desce, em movimento acelerado ou retardado, com aceleração de módulo a , lembrando que:

- num movimento acelerado, a força resultante (\vec{F}_R) e a aceleração (\vec{a}) têm o mesmo sentido do movimento (\vec{v});
- num movimento retardado, \vec{F}_R e \vec{a} têm sentido oposto ao de \vec{v} .

1. Elevadores em movimento vertical
2. Polia fixa
3. Decomposição de forças
4. Plano inclinado

I. Elevador sobe acelerado	II. Elevador sobe retardado	III. Elevador desce acelerado	IV. Elevador desce retardado
 <p>Figura 2.</p>	 <p>Figura 3.</p>	 <p>Figura 4.</p>	 <p>Figura 5.</p>
$F_N > P$ $F_R = F_N - P = m \cdot a$ $F_N = mg + ma$ $F_N = m \cdot (g + a)$	$P > F_N$ $P - F_N = m \cdot a$ $F_N = mg - ma$ $F_N = m \cdot (g - a)$ $(a \leq g)$	$P > F_N$ $P - F_N = m \cdot a$ $F_N = mg - ma$ $F_N = m \cdot (g - a)$ $(a \leq g)$	$F_N > P$ $F_N - P = m \cdot a$ $F_N = mg + ma$ $F_N = m \cdot (g + a)$

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Note que nos casos II e III estamos supondo $a \leq g$.

Observando os quatro casos analisados, percebemos que:

- os casos I e IV são equivalentes (obtivemos as mesmas equações);
- os casos II e III são equivalentes.

A mesma análise que acabamos de fazer para o indivíduo sobre a balança de farmácia pode ser feita para o caso de termos um dinamômetro fixo no teto do elevador e um corpo de massa m pendurado no dinamômetro (fig. 6). O dinamômetro deve assinalar o módulo da força que o corpo exerce sobre ele (F).

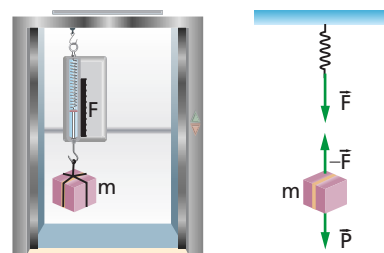


Figura 6.

Elevador em queda livre

Voltemos à situação da figura 4, em que o elevador desce acelerado com aceleração de módulo a . Se $a = g$, a equação para F_N nos dá:

$$F_N = m(g - a) = m(g - g) = 0$$

Isso significa que os pés do passageiro não comprimem mais o piso do elevador; ele se sente flutuar, como se não sentisse a força da gravidade (fig. 7).

Esse fato, chamado **imponderabilidade**, é fácil de entender: sabemos que na ausência de resistência do ar todos os corpos, independentemente de sua massa, caem com a mesma aceleração, que é a aceleração da gravidade. Assim, elevador e passageiro caem juntos, um não “empurra” o outro. Se um passageiro abandona um objeto qualquer (como a maçã da figura), o objeto aparentemente não cai, isto é, ele fica em repouso em relação ao elevador, pois está caindo junto com este, em queda livre.

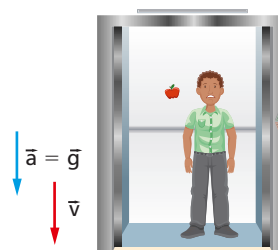


Figura 7. Elevador em queda livre.

Exemplo 1

Na figura 8 representamos um corpo C , de massa $m = 4,0 \text{ kg}$, pendurado em um dinamômetro, o qual está preso no teto de um elevador em repouso. Suponhamos que $g = 10 \text{ m/s}^2$. Assim, o peso \vec{P} tem módulo dado por:

$$P = mg = (4,0 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 40 \text{ N}$$

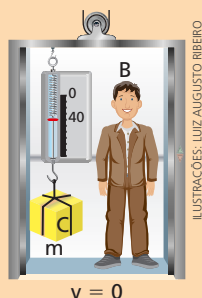


Figura 8.

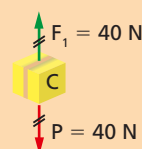


Figura 9.

Seja F_1 a intensidade das forças entre o corpo e o dinamômetro, como o elevador está em repouso, temos (fig. 9):

$$F_1 = P = 40 \text{ N}$$

isto é, a indicação do dinamômetro é 40 N.

Suponhamos agora que o elevador adquira movimento acelerado para cima, com aceleração \vec{a} de módulo $a = 5,0 \text{ m/s}^2$, em relação à Terra (fig. 10). Para um observador A , fixo na Terra, há duas forças atuando no corpo (fig. 11): o peso \vec{P} e a força \vec{F}_2 exercida pelo dinamômetro. Temos então:

$$F_2 - P = m \cdot a \Rightarrow F_2 - 40 = (4,0)(5,0) \Rightarrow F_2 = 60 \text{ N}$$

Portanto, o dinamômetro está marcando 60 N.

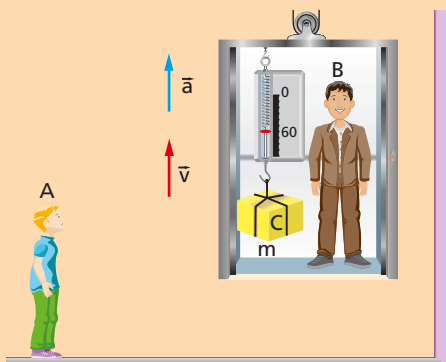


Figura 10.

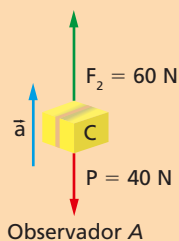


Figura 11.

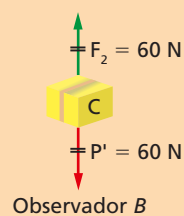


Figura 12.

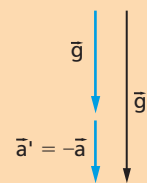


Figura 13.

Para o observador B , dentro do elevador, o dinamômetro, que inicialmente marcava 40 N, repentinamente passou a marcar 60 N, embora o corpo continue em repouso (em relação a ele). Para ele é como se a aceleração da gravidade (fig. 13) tivesse aumentado para um valor g' e, conseqüentemente, o peso tivesse aumentado para $P' = 60 \text{ N}$, sendo:

$$P' = mg' \Rightarrow 60 = 4,0g' \Rightarrow g' = 15 \text{ m/s}^2$$

O elevador sobe com aceleração \vec{a} em relação à Terra e, portanto, não é um referencial inercial. Para um observador dentro do elevador, tudo se passa como se tivesse surgido uma aceleração adicional $-\vec{a}$ (fig. 13), de modo que a nova aceleração da gravidade é \vec{g}' , dada por:

$$\vec{g}' = \vec{g} + (-\vec{a}) = \vec{g} - \vec{a}$$

Em módulo, temos:

$$|\vec{g}'| = |\vec{g}| + |-\vec{a}| = 10 \text{ m/s}^2 + 5,0 \text{ m/s}^2 = 15 \text{ m/s}^2$$

Chamaremos \vec{g}' de **aceleração da gravidade aparente**.

No Exemplo 1 consideramos o caso de um elevador subindo em movimento acelerado. Porém, a conclusão sobre a **aceleração da gravidade aparente** vale também para os outros casos em que o elevador tem aceleração \vec{a} não nula: **subindo retardado**, **descendo acelerado** e **descendo retardado**. Em todos os casos, para o referencial do elevador tudo se passa como se a aceleração da gravidade fosse \vec{g}' , dada por:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$$

Em certos casos, a resolução de um problema fica mais rápida se escolhermos um referencial não inercial para trabalhar. Vejamos isso por meio de um exemplo.

Exemplo 2

Consideremos um elevador subindo verticalmente com movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 2,0 \text{ m/s}^2$ (fig. 14), num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Como o movimento é acelerado, a aceleração \vec{a} tem o mesmo sentido da velocidade \vec{v} (para cima).

Um indivíduo está dentro do elevador segurando um corpo A a 1,5 metro do piso do elevador. Supondo que no instante $t = 0$ o indivíduo solte o corpo, depois de quanto tempo ele atingirá o piso?

Usemos o elevador como referencial. Como ele possui aceleração \vec{a} (em relação ao solo), para o indivíduo tudo se passa como se, dentro do elevador, além da aceleração da gravidade \vec{g} , houvesse uma aceleração adicional $-\vec{a}$ (fig. 15) de **sentido oposto** ao de \vec{a} . Assim, para o indivíduo, o problema é o de um corpo abandonado ($v_0 = 0$) de uma altura de 1,5 metro, num local onde a aceleração da gravidade é \vec{g}' (fig. 16) tal que:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$$

$$|\vec{g}'| = |\vec{g}| - |\vec{a}| = |\vec{g}| + |-\vec{a}| = 10 \text{ m/s}^2 + 2,0 \text{ m/s}^2 = 12 \text{ m/s}^2$$

Assim:

$$s = \underbrace{s_0}_0 + \underbrace{v_0 t}_0 + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} g' t^2 \Rightarrow 1,5 = \frac{1}{2} (12) t^2 \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$$

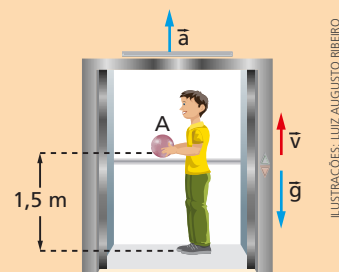


Figura 14.

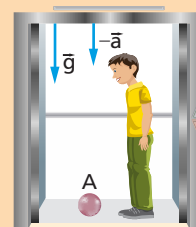


Figura 15.

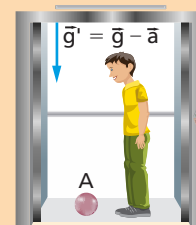


Figura 16.

Caso em que o sentido de \vec{a} é para baixo e $a > g$

Consideremos um corpo C, de massa m , apoiado no piso de um elevador (fig. 17) que está inicialmente parado no alto de um edifício ou descendo com velocidade constante.

Suponhamos que, a partir de certo instante, o elevador seja puxado para baixo por uma força \vec{F} (fig. 18) de modo que adquira movimento acelerado de aceleração \vec{a} tal que:

$$|\vec{a}| > |\vec{g}|$$

A tendência do corpo C é ficar “para trás”: depois de algum tempo estará em contato com o teto do elevador, como ilustra a figura 18. A partir desse momento o teto do elevador aplica sobre

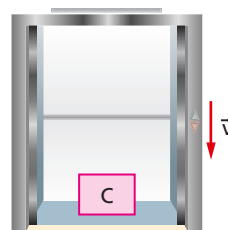


Figura 17. \vec{v} constante.

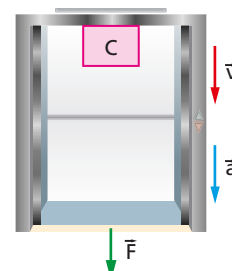


Figura 18. $|\vec{a}| > |\vec{g}|$

C a força normal \vec{F}_N (fig. 19), cujo sentido é para baixo. Assim, a força resultante sobre C é a soma de \vec{F}_N com o peso \vec{P} de C. Pela Segunda Lei de Newton, temos:

$$F_N + P = m \cdot |\vec{a}|$$

Tomando como referencial o elevador, tudo se passa como se dentro dele tivesse aparecido uma aceleração adicional $-\vec{a}$ (fig. 20) de modo que a gravidade aparente é \vec{g}' , dada por:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$$

Como $|\vec{a}| > |\vec{g}|$, o sentido de \vec{g}' é para cima. Assim, para um observador dentro do elevador, os corpos “caem para cima”.

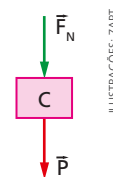


Figura 19.

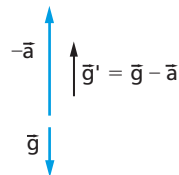
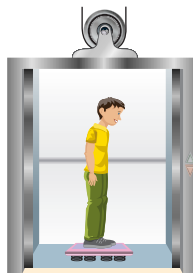


Figura 20.

Exercícios de Aplicação

- Consideremos uma balança de molas fixa no piso de um elevador, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sobre a balança está um indivíduo de massa $m = 50 \text{ kg}$. Determine a marcação da balança nos seguintes casos:



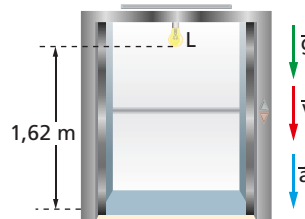
- o elevador está em repouso;
- o elevador está descendo com movimento uniforme;
- o elevador está subindo com movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 2,0 \text{ m/s}^2$;
- o elevador está descendo com movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 4,0 \text{ m/s}^2$;
- o elevador está subindo com movimento retardado, cuja aceleração tem módulo $a = 3,0 \text{ m/s}^2$;
- o elevador está descendo com movimento retardado, cuja aceleração tem módulo $a = 6,0 \text{ m/s}^2$.

- Um corpo de massa $4,0 \text{ kg}$ está pendurado num dinamômetro fixo no teto de um elevador, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Uma pessoa, dentro do elevador, observa que o ponteiro do dinamômetro assinala 48 N .



Responda:

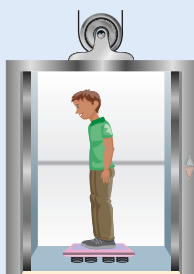
- Com essa informação, é possível determinar se o elevador está subindo ou descendo?
 - Quais são os movimentos possíveis?
 - Qual o módulo da aceleração do elevador?
- Um elevador desce acelerado com aceleração de módulo $1,00 \text{ m/s}^2$. No instante $t = 0$, uma lâmpada L , que estava $1,62 \text{ m}$ acima do piso do elevador, se desprende.



Sabendo que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, determine o instante em que a lâmpada atinge o piso do elevador.

Exercícios de Reforço

- (U. F. Uberlândia-MG) Um elevador tem uma balança no seu assoalho. Uma pessoa de massa $m = 70 \text{ kg}$ está sobre a balança conforme a figura. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$. Julgue os itens a seguir:



- Se o elevador subir acelerado com aceleração constante de 2 m/s^2 , a leitura da balança será 840 N .
- Se o elevador descer com velocidade constante, a balança indicará 700 N .
- Se o elevador descer retardado com aceleração constante de 2 m/s^2 , a leitura da balança será 840 N .

IV. Rompendo-se o cabo do elevador e ele caindo com aceleração igual à da gravidade, a balança indicará zero.

V. Se o elevador descer acelerado com aceleração constante de 2 m/s^2 , a leitura da balança será 560 N.

São corretos:

- a) apenas I, II e III d) apenas I, II, IV e V
b) apenas I, II e IV e) I, II, III, IV e V
c) apenas I, III e IV

5. (Fuvest-SP) Um avião com velocidade constante e horizontal, voando em meio a uma tempestade, repentinamente perde altitude, sendo tragado para baixo e permanecendo com aceleração constante vertical de módulo $a > g$, em relação ao solo, durante um intervalo de tempo Δt . Pode-se afirmar que, durante esse período, uma bola de futebol que se encontrava solta sobre uma poltrona desocupada:

- a) permanecerá sobre a poltrona, sem alteração de sua posição inicial.
b) flutuará no espaço interior do avião, sem aceleração em relação ao mesmo, durante o intervalo de tempo Δt .
c) será acelerada para cima, em relação ao avião, sem poder se chocar com o teto, independentemente do intervalo de tempo Δt .

d) será acelerada para cima, em relação ao avião, podendo se chocar com o teto, dependendo do intervalo de tempo Δt .

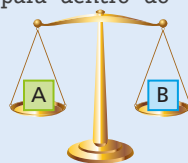
e) será pressionada contra a poltrona durante o intervalo de tempo Δt .

6. (ITA-SP) Dentro de um elevador em queda livre num campo gravitacional g , uma bola é jogada para baixo com velocidade v de uma altura h . Assinale o tempo previsto para a bola atingir o piso do elevador. (Sugestão dos autores: Suponha que v seja a velocidade inicial da bola em relação ao elevador.)

- a) $t = \frac{v}{g}$ d) $t = \frac{(\sqrt{v^2 + 2gh} - v)}{g}$
b) $t = \frac{h}{v}$ e) $t = \frac{(\sqrt{v^2 - 2gh} - v)}{g}$
c) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

7. Vimos que a marcação de uma balança do tipo usado em farmácias, dentro de um elevador, pode ser alterada se o elevador movimentar-se com aceleração não nula.

Suponhamos agora que levemos para dentro do elevador uma balança de braços iguais. Se usarmos essa balança para medir massas de corpos, essas medidas serão influenciadas pelo movimento do elevador?



2. Polia fixa

Vamos agora analisar o sistema esquematizado na figura 21, em que dois blocos, A e B, são ligados às extremidades de um fio ideal, que passa por uma polia (pequena roda) que pode girar em torno do eixo E. Se os blocos tiverem a mesma massa, o sistema ficará em equilíbrio. Mas, se as massas de A e B forem diferentes, os blocos terão movimentos com aceleração. Apenas para fixar as ideias, vamos supor que $m_A > m_B$. Desse modo, se abandonarmos o sistema em repouso, a tendência será o bloco A descer e o bloco B subir. Como o fio é ideal, portanto inextensível, os dois blocos terão acelerações de mesmo módulo, a ; a diferença é que um estará subindo e o outro descendo.

Na figura 22 fazemos um esquema detalhado das forças em A e B. T_A é a intensidade das forças entre o fio e o bloco A, e T_B é a intensidade das forças entre o fio e o bloco B.

Mesmo o fio sendo ideal, se a massa da polia não for desprezível ou se houver atrito no eixo, os valores de T_A e T_B serão diferentes. Assim, para simplificar o problema, iremos supor que, além de o fio ser ideal, a polia tem massa desprezível e não há atrito no eixo em torno do qual a polia gira (polia ideal). Com essas hipóteses, podemos supor $T_A = T_B = T$ (fig. 23). Na realidade, em geral usaremos o esquema simplificado da figura 24, no qual estão assinaladas as forças que atuam nos blocos.



Figura 21.

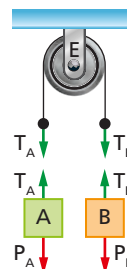


Figura 22.

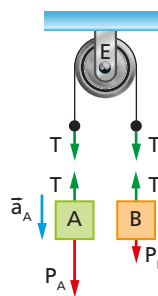


Figura 23.

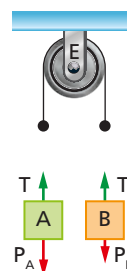


Figura 24.

Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada bloco separadamente, temos:

$$\text{bloco A} \rightarrow P_A - T = m_A \cdot a \quad (1)$$

$$\text{bloco B} \rightarrow T - P_B = m_B \cdot a \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos os valores de T e a .

Um fato interessante a destacar é que, se adicionarmos membro a membro as equações (1) e (2), obteremos:

$$P_A - P_B = (m_A + m_B) \cdot a \quad (3)$$

Observando a equação (3), percebemos que o cálculo da aceleração poderia ser feito imaginando o sistema “esticado”, como na figura 25, puxado pelas forças \vec{P}_A e \vec{P}_B ; a massa total do sistema seria: $m = m_A + m_B$.

Depois de obtido o valor de a , substituímos esse valor na equação (1) ou na equação (2), para obtermos o valor de T .

Na figura 26a reproduzimos parte da figura 23. Observando essa figura, percebemos que a força exercida pelo fio (ou pelo sistema “fio + corpo A + + corpo B”) sobre a polia tem intensidade igual a $2T$ (fig. 26b).

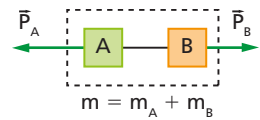


Figura 25.

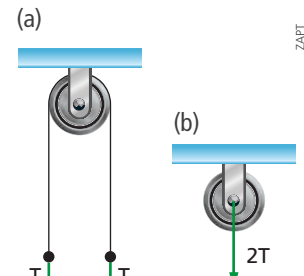


Figura 26.

OBSERVAÇÕES

1ª) Supondo $P_A > P_B$, ao abandonarmos o sistema em repouso, o corpo B deve **subir** em movimento **acelerado** e A deve **descer** em movimento **acelerado**. No entanto, pode ocorrer o caso em que o corpo B receba um impulso inicial para baixo. Nesse caso, de início teríamos B **descendo** em movimento **retardado** e A **subindo** em movimento **retardado**, até o instante em que ambos os corpos atingissem velocidade nula. A partir desse instante, B **subiria** com movimento **acelerado** e A **desceria** com movimento **acelerado**. Porém, nos dois casos, as acelerações vetoriais \vec{a}_A e \vec{a}_B teriam os sentidos indicados na figura 23.

2ª) A força exercida pelo fio sobre a polia tem intensidade igual a $2T$ apenas no caso em que os dois ramos do fio são paralelos. No entanto, conforme veremos nos exercícios, há casos em que os dois ramos não são paralelos (fig. 27). Nesses casos, a força \vec{F} exercida pelo fio sobre a polia deve ser obtida pela regra do paralelogramo (fig. 28).

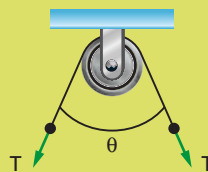


Figura 27.

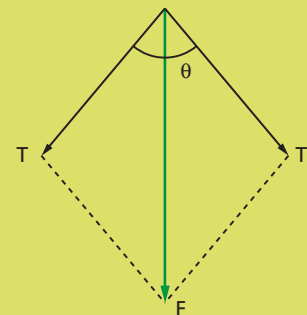


Figura 28.

Uma utilidade para as polias

As polias podem ser usadas, por exemplo, para levantar objetos, mas isso pode ser feito de vários modos. Consideremos primeiramente a figura 29a.

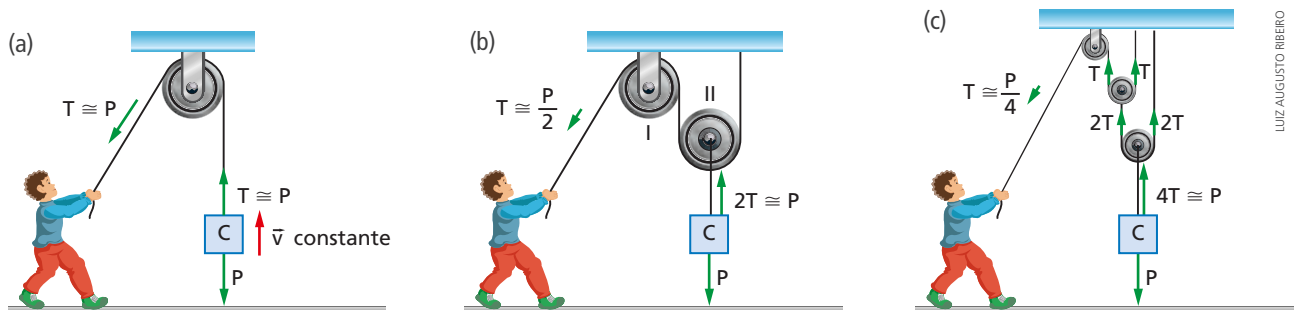


Figura 29.

Supondo que o levantamento se dê com velocidade aproximadamente constante, a tração é aproximadamente igual ao peso: $T \cong P$.

Analisemos agora a figura 29b. Nesse caso temos duas polias. A polia I é uma **polia fixa**; ela pode girar em torno do seu eixo, mas o eixo é fixo. A polia II é uma **polia móvel**, pois, além de girar, pode mover-se verticalmente. Observe que o corpo C está preso ao eixo da polia II, e não ao fio, como na figura 29a. Portanto, estando o corpo C preso ao eixo, a força que ele recebe para cima é $2T$, isto é, o dobro da tração no fio. Supondo velocidade aproximadamente constante, devemos ter:

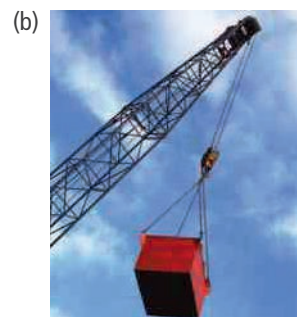
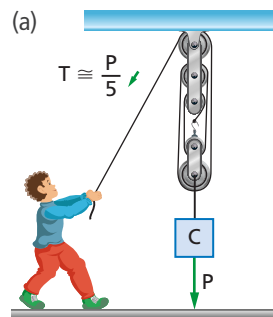
$$2T \cong P \text{ ou } T \cong \frac{P}{2}$$

isto é, nesse caso, o rapaz precisa aplicar uma força de intensidade aproximadamente igual à metade do peso do corpo.

Se aumentarmos o número de polias, a força necessária para levantar o corpo tornar-se-á ainda menor, caso da figura 29c.

Nas situações representadas nas figuras 29b e 29c há polias móveis em equilíbrio, isto é, elas estão em equilíbrio ou em movimento retilíneo uniforme.

Na prática, adotam-se montagens mais compactas, como a indicada na figura 30a. É o caso, por exemplo, dos grandes guindastes usados nas construções de edifícios e no transporte de cargas, como o mostrado na figura 30b.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 30.

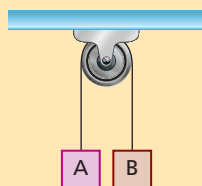


PROCURE NO CD

Veja, no capítulo 13 do CD, o texto "Polia móvel com aceleração".

Exercícios de Aplicação

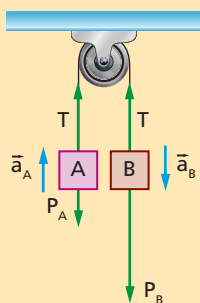
8. A figura representa dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 7,0 kg, presos às extremidades de um fio ideal que passa por uma polia ideal, como mostra a figura.



Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- o módulo da aceleração de cada bloco;
- o módulo da tração no fio que liga os blocos;
- o módulo da força exercida sobre a polia pelo fio que liga os blocos.

Resolução:



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

$$\text{a) } \begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 3,0 \cdot 10 \Rightarrow P_A = 30 \text{ N} \\ P_B = m_B \cdot g = 7,0 \cdot 10 \Rightarrow P_B = 70 \text{ N} \end{cases}$$

Observando que $P_A < P_B$, apliquemos a Segunda Lei de Newton a cada bloco:

$$\begin{cases} T - P_A = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} T - 30 = 3,0 \cdot a \quad (1) \\ 70 - T = 7,0 \cdot a \quad (2) \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações (1) e (2), obtemos:

$$70 - 30 = 10 \cdot a$$

ou

$$a = 4,0 \text{ m/s}^2$$

- b) Substituíamos o valor de a na equação (1):

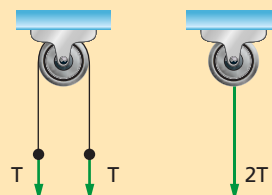
$$T - 30 = 3,0 \cdot 4,0$$

$$T = 42 \text{ N}$$

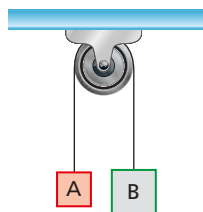
- c) A intensidade da força \vec{F} exercida sobre a polia pelo fio que liga os blocos é dada por $F = 2T$. Portanto:

$$F = 2 \cdot 42$$

$$F = 84 \text{ N}$$



9. No sistema esquematizado na figura, os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a 8,0 kg e 12 kg. Os blocos estão presos às extremidades de um fio ideal f que passa por uma polia também ideal.



Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- o módulo da aceleração de cada bloco;
- o módulo da tração no fio f ;
- o módulo da força exercida pelo fio f sobre a polia.

10. Dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 14 kg e 6,0 kg, são ligados a um fio ideal que passa por uma polia também ideal, como mostra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e não há atrito entre o bloco A e a superfície de apoio.

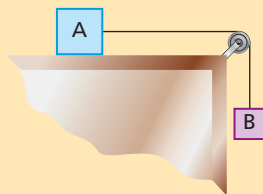


Figura a.

Calcule os módulos:

- da aceleração do bloco B;
- da tração no fio;
- da força exercida pelo fio sobre a polia.

Resolução:

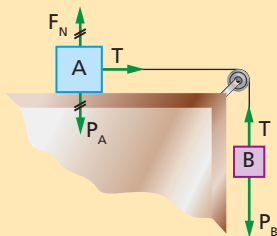


Figura b.

- Sobre o bloco B atuam o seu peso (P_B) e a tração do fio (T). Sobre o bloco A atuam o seu peso (P_A), a força normal (F_N) exercida pela superfície horizontal de apoio e a tração do fio (T). Como não há movimento na direção vertical, as forças F_N e P_A se anulam.

$$P_B = m_B \cdot g = 6,0 \cdot 10 \Rightarrow P_B = 60 \text{ N}$$

Os dois blocos têm acelerações de mesmo módulo a . Apliquemos então a Segunda Lei de Newton a cada bloco:

$$\begin{cases} T = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T = 14 \cdot a \\ 60 - T = 6,0 \cdot a \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações ① e ②, obtemos:

$$60 = 20 \cdot a$$

$$a = 3,0 \text{ m/s}^2$$

Poderíamos, também, ter usado o artifício de supor o sistema "esticado" (fig. c) e aplicar a Segunda Lei de Newton.

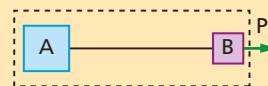


Figura c.

$$P_B = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$60 = (14 + 6,0) \cdot a$$

$$a = 3,0 \text{ m/s}^2$$

- Substituindo o valor de a na equação ①, obtemos:

$$T = 14 \cdot 3,0$$

$$T = 42 \text{ N}$$

- Seja \vec{F} a força exercida pelo fio sobre a polia.

$$F^2 = T^2 + T^2$$

$$F^2 = 2T^2$$

$$F = T \cdot \sqrt{2}$$

$$F = 42\sqrt{2}$$

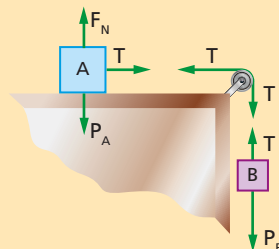


Figura d.

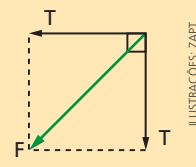
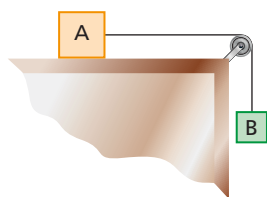


Figura e.

11. O desenho a seguir representa dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 12 kg e 8,0 kg, ligados por um fio ideal que passa por uma polia também ideal. Despreze o atrito e suponha $g = 10 \text{ m/s}^2$.

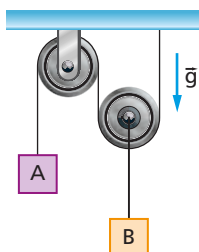


ZAPT

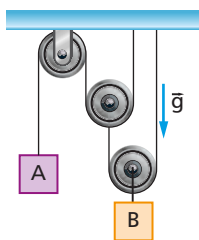
Calcule os módulos:

- da aceleração do bloco B ;
- da tração no fio;
- da força que o fio exerce sobre a polia.

12. Os dois sistemas esquematizados a seguir estão em equilíbrio, e a massa do bloco B é 24 kg.



situação I



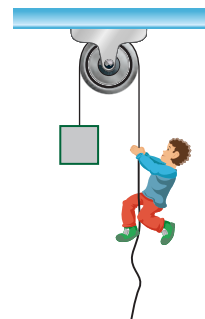
situação II

ZAPT

Supondo que os fios e as polias sejam ideais, calcule a massa de A :

- na situação I;
- na situação II.

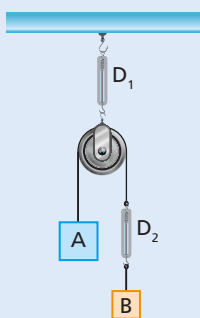
13. Um homem e um bloco de chumbo de massas iguais estão pendurados a um fio ideal que passa por uma polia ideal, conforme mostra a figura. De início, tanto o homem como o bloco estão em repouso e o bloco está no nível da cabeça do homem. A partir de determinado instante, o homem começa a puxar o fio, de modo que adquira movimento para cima. Enquanto o homem sobe, o bloco fica acima, abaixo ou no mesmo nível da cabeça do homem?



ZAPT

Exercícios de Reforço

14. No sistema representado na figura, os fios e a polia são ideais, D_1 e D_2 são dois dinamômetros também ideais. As massas dos blocos A e B são respectivamente iguais a 9,0 kg e 6,0 kg e a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 .



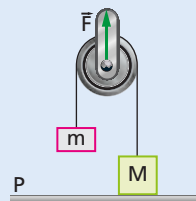
ZAPT

Determine:

- o módulo da aceleração de cada bloco;
- a marcação do dinamômetro D_2 ;
- a marcação do dinamômetro D_1 .

15. (UF-CE) A figura mostra dois blocos de massas $m = 2,5 \text{ kg}$ e $M = 6,5 \text{ kg}$, ligados por um fio que passa sem atrito por uma roldana. Despreze as massas do fio e da roldana e suponha que a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 . O bloco de massa M está apoiado sobre a plataforma P e a força \vec{F} aplicada sobre a roldana é suficiente

apenas para manter o bloco de massa m em equilíbrio estático na posição indicada.



ZAPT

Sendo R a intensidade da força que a plataforma exerce sobre o bloco de massa M , podemos afirmar que:

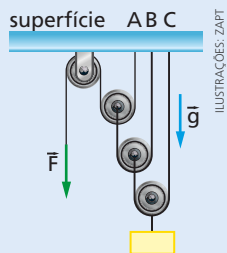
- $F = 50 \text{ N}$ e $R = 65 \text{ N}$
- $F = 25 \text{ N}$ e $R = 65 \text{ N}$
- $F = 25 \text{ N}$ e $R = 40 \text{ N}$
- $F = 50 \text{ N}$ e $R = 40 \text{ N}$
- $F = 90 \text{ N}$ e $R = 65 \text{ N}$

16. João tenta levantar o bloco B usando a montagem da figura. Se o peso de João for menor que o peso de B , ele conseguirá realizar a tarefa?



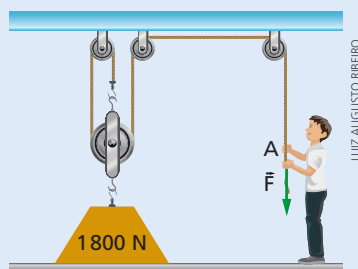
ZAPT

17. (Cesgranrio-RJ) Um corpo de peso P encontra-se em equilíbrio, devido à ação da força \vec{F} , como indica a figura ao lado, sendo os fios e as polias ideais.



As forças que a superfície exerce sobre os fios nos pontos A, B e C são, respectivamente:

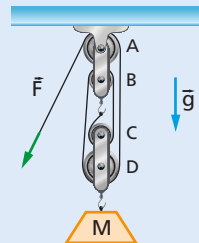
- a) $\frac{P}{8}, \frac{P}{4}, \frac{P}{2}$ d) $P, \frac{P}{2}, \frac{P}{4}$
 b) $\frac{P}{8}, \frac{P}{2}, \frac{P}{4}$ e) iguais a P
 c) $\frac{P}{2}, \frac{P}{4}, \frac{P}{8}$
18. (Fuvest-SP) Para erguer um bloco de peso 1800 N é utilizado um sistema de polias e fios, conforme o esquema.



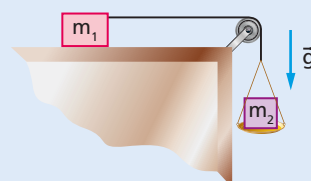
Considerando-se o sistema ideal:

- a) que força mínima F se deve aplicar na extremidade A do fio para que o corpo comece a ser erguido?
 b) seria possível a uma pessoa de peso 500 N erguer o bloco puxando o fio verticalmente pelo ponto A? Explique. (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

19. Um sistema de quatro polias, como o representado na figura, é usado para suspender um bloco M . As polias A e B são fixas, tendo seus eixos ligados; as polias C e D são móveis e têm também seus eixos ligados. O fio e as polias são ideais e $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. Sendo a massa de M igual a 120 kg, qual a intensidade da força \vec{F} necessária para manter o bloco M suspenso?



20. (UF-GO) No arranjo esquematizado na figura abaixo, o corpo de massa m_1 é ligado por um fio inextensível a uma bandeja, passando por uma polia. Sobre a bandeja há um corpo de massa m_2 .



O gráfico da velocidade do corpo de massa m_1 , em função do tempo, é:



Despreze as forças de atrito e as massas da bandeja, fio e polia. Considere $m_1 = 1,0 \text{ kg}$, $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e determine:

- a) a massa m_2 ;
 b) a força que a bandeja exerce sobre o corpo de massa m_2 .

3. Decomposição de forças

Às vezes, pode ser conveniente decompormos uma dada força sobre duas direções perpendiculares, como fizemos com os vetores em geral, no capítulo 8.

Consideremos, por exemplo, a força \vec{F} da figura 31. Vamos decompor a força \vec{F} em duas forças componentes, que estejam nas direções perpendiculares x e y , como indica a figura 32. Podemos afirmar que:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

isto é, a força \vec{F} é a resultante das forças \vec{F}_x e \vec{F}_y . Isso nos permite substituir a força \vec{F} pelo par de forças \vec{F}_x e \vec{F}_y (fig. 33), isto é, as forças \vec{F}_x e \vec{F}_y , atuando **juntas**, devem produzir o mesmo efeito que a força \vec{F} , atuando sozinha.

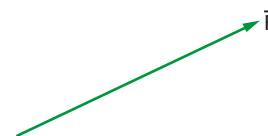


Figura 31.

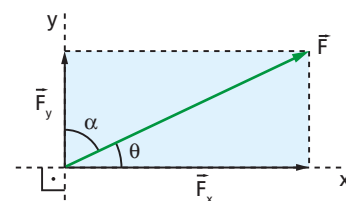


Figura 32.

Considerando o ângulo θ da figura 32, temos: $\begin{cases} \cos \theta = \frac{F_x}{F} \\ \sin \theta = \frac{F_y}{F} \end{cases}$ ou $\begin{cases} F_x = F \cdot \cos \theta \\ F_y = F \cdot \sin \theta \end{cases}$

Se considerarmos o ângulo α , teremos: $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{F_y}{F} \\ \sin \alpha = \frac{F_x}{F} \end{cases}$ ou $\begin{cases} F_y = F \cdot \cos \alpha \\ F_x = F \cdot \sin \alpha \end{cases}$

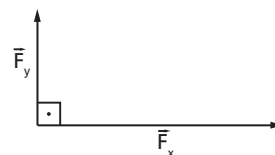


Figura 33.

É conveniente ressaltar que, sendo θ e α complementares ($\theta + \alpha = 90^\circ$), temos:

$$\sin \theta = \cos \alpha \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \cos \theta$$

Como escolher as direções de decomposição

Ao analisarmos as forças que atuam em uma partícula, poderemos “sentir” a conveniência de decompor uma ou mais forças; mas aí surge a pergunta: “que direções deveremos usar para efetuar a decomposição?”. Para responder a essa pergunta, consideraremos dois casos:

1º caso: A partícula tem aceleração \vec{a} não nula

Nesse caso, o mais conveniente, em geral, é considerarmos direções perpendiculares tais que uma delas seja **coincidente** com a direção da aceleração \vec{a} .

2º caso: A partícula tem aceleração nula, isto é, está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme

Nesse caso, em princípio, qualquer par de direções perpendiculares poderá ser usado. A escolha será ditada pela “economia”, isto é, escolheremos aquele par de direções que nos permita fazer o **menor número de decomposições**.

Exercícios de Aplicação

21. Um bloco de massa $m = 15 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partir de determinado instante aplica-se ao bloco uma força constante \vec{F} , como mostra a figura ($\sin \theta = \frac{5}{13}$ e $\cos \theta = \frac{12}{13}$), sendo $F = 130 \text{ N}$.

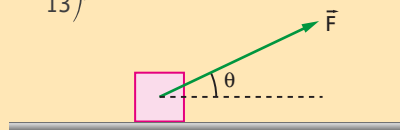


Figura a.

A partir do instante em que \vec{F} é aplicada, calcule:

- o módulo da força normal exercida pelo plano horizontal sobre o bloco;
- o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

Resolução:

- Suponhamos que o movimento do bloco seja retilíneo e horizontal, isto é, que o bloco

não perca o contato com o plano horizontal e assim sua aceleração \vec{a} tenha direção horizontal (fig. b). Mais adiante veremos se a hipótese está correta. As forças que atuam no bloco são o peso \vec{P} , a força normal \vec{F}_N e a força \vec{F} (fig. c).

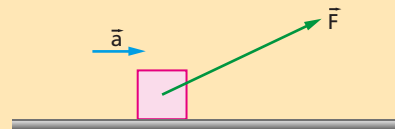


Figura b.

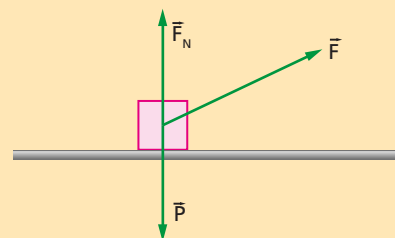


Figura c.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Temos:

$$P = m \cdot g = 15 \cdot 10 \Rightarrow P = 150 \text{ N}$$

Como estamos supondo que a aceleração \vec{a} tem direção **horizontal**, vamos decompor a força \vec{F} em duas direções perpendiculares tais que uma delas seja **horizontal** (fig. d). Temos, então:

$$\begin{cases} F_x = F \cdot \cos \theta = 130 \cdot \frac{12}{13} \Rightarrow F_x = 120 \text{ N} \\ F_y = F \cdot \sin \theta = 130 \cdot \frac{5}{13} \Rightarrow F_y = 50 \text{ N} \end{cases}$$

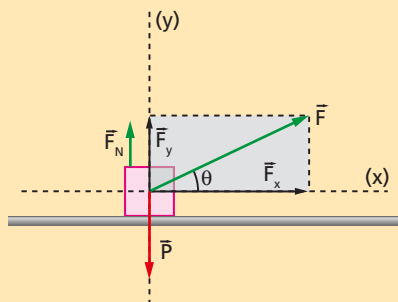


Figura d.

O esquema **real** de forças, que é o da figura c, é então substituído pelo esquema da figura e. (Na realidade, não é necessário fazer todos esses desenhos ao resolver um problema desse tipo; é suficiente fazer o desenho da fig. d.)

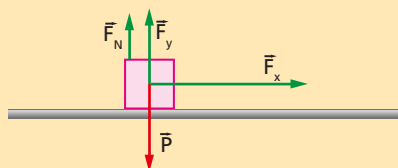


Figura e.

É nesse momento que percebemos se nossa hipótese de que o bloco não perde contato com o plano horizontal é ou não correta. O bloco perderia o contato se $F_y > P$. Mas, como podemos observar, neste caso temos $F_y < P$. Portanto, o bloco não perde o contato, o que significa que, na direção vertical, as forças devem se anular:

$$F_N + F_y = P$$

$$F_N + 50 = 150 \Rightarrow F_N = 100 \text{ N}$$

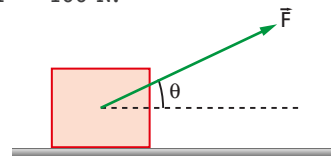
- b) A força resultante é a força componente \vec{F}_x . Portanto:

$$F_x = m \cdot a$$

$$120 = 15 \cdot a \Rightarrow a = 8,0 \text{ m/s}^2$$

22. Consideremos um bloco de massa $m = 20 \text{ kg}$, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e

horizontal sem atrito, num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco uma força constante \vec{F} , como mostra a figura ($\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$), cuja intensidade é $F = 100 \text{ N}$.



- A partir do instante em que \vec{F} é aplicada, calcule:
- o módulo da força normal exercida pela superfície horizontal sobre o bloco;
 - o módulo da aceleração do bloco.

23. A figura a mostra um bloco C de massa $m = 8,0 \text{ kg}$ em equilíbrio, preso a um sistema de três fios ideais (f_1 , f_2 e f_3). Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule as intensidades das trações nos três fios.

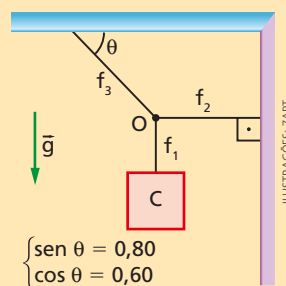


Figura a.

Resolução:

Na figura b representamos as trações nos fios. Em primeiro lugar, observamos que o bloco está em equilíbrio. Assim:

$$T_1 = P = m \cdot g = (8,0 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 80 \text{ N}$$

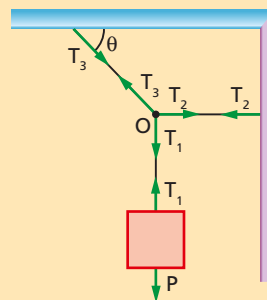


Figura b.

Na figura c fazemos a decomposição da tração T_3 .

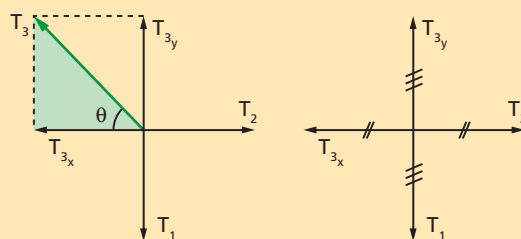


Figura c.

Figura d.

Do triângulo colorido temos:

$$T_{3x} = T_3 \cdot \cos \theta = T_3 \cdot (0,60)$$

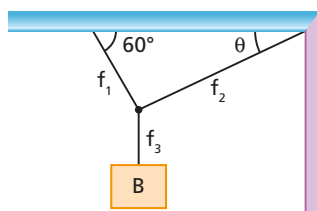
$$T_{3y} = T_3 \cdot \sin \theta = T_3 \cdot (0,80)$$

Estando o ponto O em equilíbrio, devemos ter:

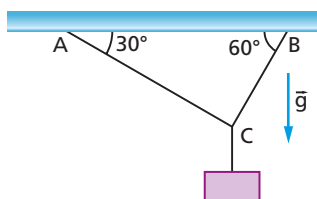
$$T_{3y} = T_1 \Rightarrow T_3 \cdot (0,80) = 80 \Rightarrow T_3 = 100 \text{ N}$$

$$T_2 = T_{3x} = T_3 \cdot (0,60) = (100)(0,60) \Rightarrow T_2 = 60 \text{ N}$$

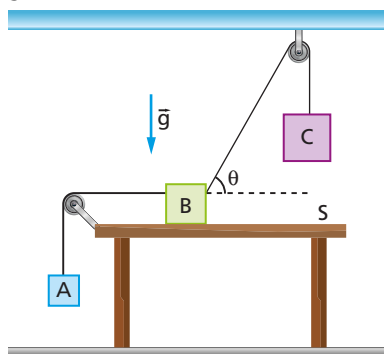
24. O sistema esquematizado está em equilíbrio. Os fios f_1 , f_2 e f_3 são ideais, e a massa do bloco B é 20 kg. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\sin 60^\circ = 0,87$; $\cos 60^\circ = 0,50$; $\sin \theta = 0,60$; $\cos \theta = 0,80$. Determine as intensidades das trações nos fios f_1 , f_2 e f_3 .



25. Um bloco está pendurado por três fios ideais, como ilustra a figura. Calcule a massa do bloco, sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a tração no fio \overline{AC} vale 200 N.



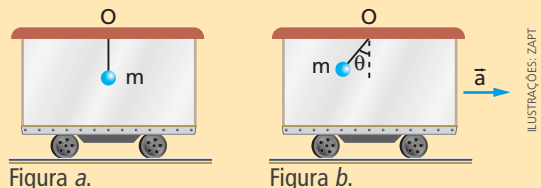
26. No sistema esquematizado os fios e as polias são ideais e a superfície S é perfeitamente lisa. Sabe-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que as massas dos blocos A , B e C são, respectivamente, 40 kg, 45 kg e 50 kg.



Supondo que o sistema esteja em equilíbrio, determine:

- a intensidade da força exercida pela superfície S sobre o bloco B ;
- o ângulo θ .

27. Um pêndulo simples é constituído por uma partícula de massa m presa em uma das extremidades de um fio ideal cuja outra extremidade está presa a um ponto O . Consideremos um pêndulo simples pendendo verticalmente, preso ao teto de um vagão inicialmente em repouso (fig. a).



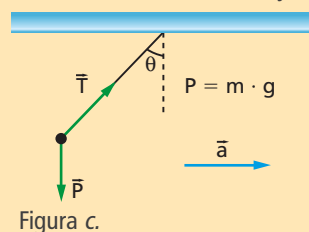
Suponhamos que, a partir de um determinado instante, o vagão adquira movimento retilíneo acelerado, com a aceleração constante \vec{a} (fig. a). Pela Lei da Inércia, a partícula, que estava em repouso, "tende a" ficar em repouso. Isso ocasiona a inclinação do fio, mostrada na figura b. Enquanto o vagão mantiver a aceleração \vec{a} , o fio permanecerá inclinado e **em repouso em relação ao vagão**, mantendo com a vertical um ângulo θ . Seja g o módulo da aceleração da gravidade. Determine, em função de m , g e θ :

- o módulo da aceleração;
- o módulo da tração no fio;
- a aceleração da gravidade aparente para um observador dentro do vagão.

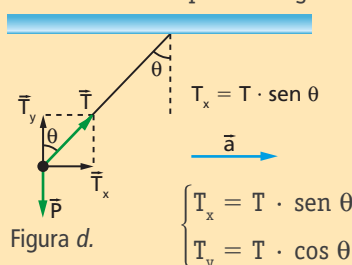
Resolução:

- a) 1ª modo:

As forças que atuam sobre a partícula são o peso \vec{P} e a tração \vec{T} do fio (fig. c). Como a partícula permanece em repouso em relação ao vagão, sua trajetória em relação ao solo é retilínea horizontal e sua aceleração em relação ao solo é a mesma aceleração \vec{a} do vagão.



Vamos então decompor a tração \vec{T} em duas forças componentes: horizontal \vec{T}_x e vertical \vec{T}_y (fig. d). Com isso, o esquema de forças da figura c é substituído pelo da figura e.



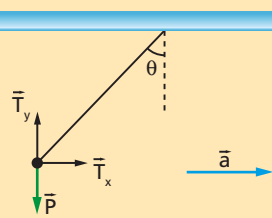


Figura e.

Como não há movimento na direção vertical, \vec{T}_y e \vec{P} devem se anular:

$$T_y = P \quad \text{ou} \quad T \cdot \cos \theta = m \cdot g \quad (1)$$

Assim, a resultante das forças que agem sobre a partícula é a força componente T_x . Aplicando a Segunda Lei de Newton:

$$T_x = m \cdot a \quad \text{ou} \quad T \cdot \sin \theta = m \cdot a \quad (2)$$

Dividindo membro a membro as igualdades (1) e (2), obtemos:

$$\frac{T \cdot \cos \theta}{T \cdot \sin \theta} = \frac{m \cdot g}{m \cdot a} \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{g}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = g \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Lembrando que $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$, temos:

$$a = g \cdot \tan \theta$$

2ª modo:

Como a aceleração da partícula em relação ao solo é igual à aceleração \vec{a} do vagão, a resultante \vec{F} das forças \vec{T} e \vec{P} deve ter a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{a} (fig. f). O triângulo colorido na figura f está separado na figura g.

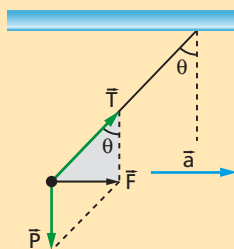


Figura f.

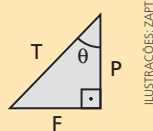


Figura g.

ILUSTRAÇÕES: ZAPPT

Desse triângulo tiramos:

$$\tan \theta = \frac{F}{P} \quad (3)$$

Mas $P = m \cdot g$ e $F = m \cdot a$ (pois \vec{F} é a força resultante). Substituindo em (3):

$$\tan \theta = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g}$$

Portanto:

$$a = g \cdot \tan \theta$$

Vemos, então, que o ângulo θ não depende da massa da partícula: depende apenas de g e a . Por isso, o pêndulo simples pode ser usado como um **acelerômetro**: conhecido o valor de g e o valor de θ , determinamos a aceleração do vagão. Podemos observar também que, quanto maior o valor de a , maior será o valor de $\tan \theta$ e, portanto, maior será o valor de θ . Porém, o valor de θ não poderá chegar a 90° , isto é, o fio não poderá ficar na direção horizontal. Podemos entender isso facilmente observando a figura e: o fio deve ter uma inclinação θ diferente de 90° para que haja uma força componente vertical \vec{T}_y (não nula) que anule o peso. Concluimos, então, que o fio só ficaria na direção horizontal se $P = 0$, isto é, se $g = 0$.

b) Do triângulo da figura g, temos:

$$\cos \theta = \frac{P}{T} \Rightarrow T = \frac{P}{\cos \theta} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

Poderíamos também ter usado a figura d, impondo $T_y = P$:

$$T_y = P \Rightarrow T \cdot \cos \theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

Supondo conhecida a aceleração \vec{a} , poderíamos tirar da figura g:

$$\sin \theta = \frac{F}{T} \Rightarrow T = \frac{F}{\sin \theta} \Rightarrow T = \frac{m \cdot a}{\sin \theta}$$

Novamente supondo conhecida a aceleração, poderíamos também aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo da figura g:

$$T^2 = P^2 + F^2 = (mg)^2 + (ma)^2 = m^2(g^2 + a^2)$$

$$T = m \sqrt{g^2 + a^2}$$

c) Se o vagão tem aceleração \vec{a} em relação ao solo, para o observador dentro do vagão há uma aceleração fictícia $-\vec{a}$ (fig. h) e tudo se passa como se a aceleração da gravidade fosse \vec{g}' , cuja direção é tomada pelo fio. Temos, então:

$$g'^2 = g^2 + a^2$$

e

$$\cos \theta = \frac{g}{g'} \Rightarrow g' = \frac{g}{\cos \theta}$$

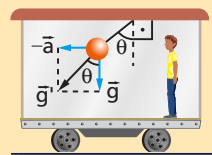


Figura h.

28. Um vagão move-se sobre trilhos retos e horizontais, com movimento uniformemente acelerado, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Preso ao teto do vagão há um pêndulo simples que se mantém em repouso em relação ao vagão, formando um ângulo θ com a vertical. São dados: $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$. Sabendo que a massa da partícula presa ao fio é $m = 4,0 \text{ kg}$, calcule:

- o módulo da aceleração do vagão;
- o módulo da tração no fio.

29. Consideremos um vagão movimentando-se sobre trilhos retos e horizontais, com velocidade constante. No teto do vagão está preso um pêndulo simples, com o fio na vertical, em repouso em relação ao vagão. A partir de determinado instante, o vagão adquire movimento retardado, de aceleração \vec{a} , até parar.

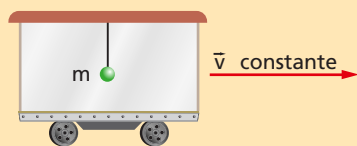


Figura a.

- O que ocorrerá com o pêndulo enquanto o vagão estiver em movimento retardado?
- O que ocorrerá com o pêndulo quando o vagão parar?

Resolução:

- Pela Lei da Inércia, assim que o vagão começa a retardar, a tendência da partícula presa ao fio é manter a velocidade original. Isso faz com que o fio se incline “para a frente”, isto é, no sentido do movimento retardado, como mostra a figura b. (Como o movimento é retardado, o sentido da aceleração é oposto ao sentido do movimento.) É fácil concluir que, do mesmo modo que no caso do movimento acelerado, teremos:

$$a = g \cdot \tan \theta$$

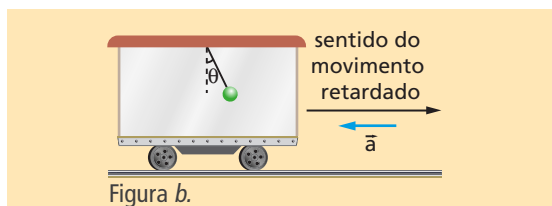


Figura b.

- Assim que o vagão parar, a tendência do fio será voltar para a posição vertical; com isso, ficará oscilando entre duas posições, A e B, como ilustra a figura c. Suponhamos que, depois de se retardar durante algum tempo, o vagão ficasse novamente com velocidade constante, mas não nula; também nesse caso o pêndulo ficaria oscilando.

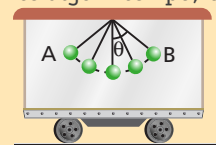
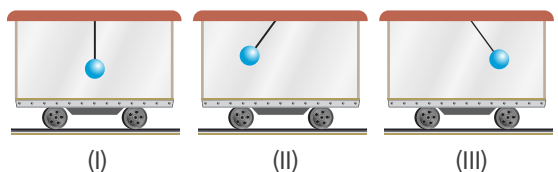


Figura c.

30. Cada uma das figuras a seguir representa um vagão (que pode mover-se sobre trilhos retos e horizontais), com um pêndulo simples pendurado no seu teto, estando o pêndulo em repouso em relação ao vagão.



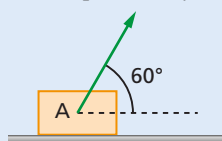
Para cada uma das situações propostas a seguir, indique qual é a figura correspondente.

- O vagão está em repouso.
- O vagão tem velocidade constante.
- O vagão move-se para a direita em movimento acelerado.
- O vagão move-se para a direita em movimento retardado.
- O vagão move-se para a esquerda em movimento acelerado.
- O vagão move-se para a esquerda em movimento retardado.

Exercícios de Reforço

31. (UF-PB) O corpo A da figura tem $2,0 \text{ kg}$ de massa e desliza num plano horizontal sem atrito, sob a ação de uma força de 20 N que faz um ângulo de 60° com o plano. A aceleração do corpo, em m/s^2 , será: (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

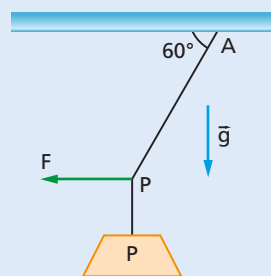
- 1,0
- 4,0
- 5,0
- 2,0
- 1,5



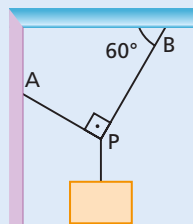
32. (PUC-RS) Um fio de peso desprezível está preso a um ponto A e, preso à sua extremidade, temos

um peso P. O fio é deslocado da vertical, quando da atuação de uma força F no ponto P. Qual deverá ser o valor de F, a fim de manter o sistema em equilíbrio?

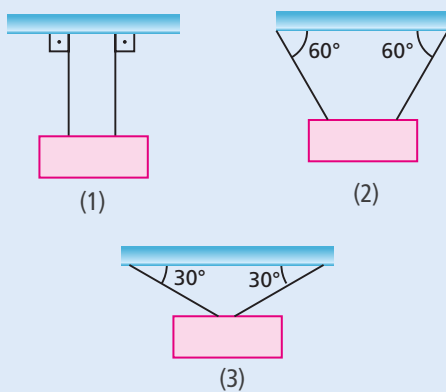
- P
- $\frac{P}{2}$
- 2P
- $\frac{P}{\sqrt{3}}$
- $P\sqrt{3}$



33. (UF-PE) A figura mostra um peso de 44 N suspenso no ponto P de uma corda. Os trechos AP e BP da corda formam um ângulo de 90° , e o ângulo entre BP e o teto é igual a 60° . Qual é o valor, em newtons, da tração no trecho AP da corda?



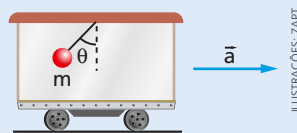
34. (Unifor-CE) Com 6 pedaços iguais de corda e três corpos de mesma massa e mesmo formato, um estudante fez as montagens representadas a seguir.



Nos pedaços de corda a intensidade da força de tração é:

- a) a mesma nas montagens 2 e 3 e menor que na 1.
- b) a mesma nas montagens 2 e 3 e maior que na 1.
- c) a mesma nas montagens 1, 2 e 3.
- d) maior na montagem 3 do que na 2.
- e) maior na montagem 2 do que na 3.

35. Um fio ideal tem uma de suas extremidades presa ao teto de um vagão que se move sobre trilhos retos e horizontais, com aceleração constante \vec{a} . Na outra extremidade do fio está presa uma partícula de massa $m = 5,0$ kg. O fio permanece em repouso em relação ao vagão, formando com a vertical um ângulo θ , tal que $\sin \theta = \frac{12}{13}$ e $\cos \theta = \frac{5}{13}$. Sabe-se ainda que $g = 10$ m/s².



- Calcule o módulo de \vec{a} .
- Calcule o módulo da tração no fio.

4. Plano inclinado

Frequentemente encontramos situações em que corpos deslizam ao longo de superfícies inclinadas, como na figura 34.

Vamos então analisar o movimento de um corpo que desliza ao longo de um plano inclinado sem atrito (o atrito será estudado no capítulo 15).



Figura 34. O escorregador é um exemplo de plano inclinado.

Consideremos um bloco de massa m , abandonado em repouso sobre uma superfície S , plana e sem atrito, a qual forma um ângulo θ com um plano horizontal (fig. 35). As forças que atuam no bloco são o seu peso \vec{P} e a força normal \vec{F}_N exercida pela superfície S sobre o bloco (fig. 36).

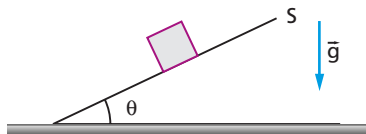


Figura 35.

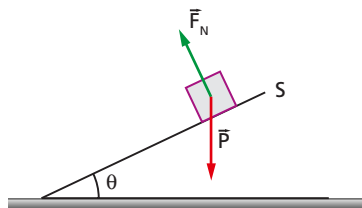


Figura 36.

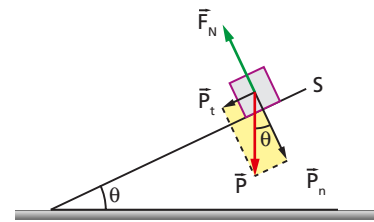


Figura 37.

Podemos decompor o peso em duas componentes: uma componente \vec{P}_t , tangente à superfície S , e outra componente \vec{P}_n , perpendicular a S (fig. 37). Após a decomposição, o sistema de forças da figura 36 foi substituído pelo sistema representado na figura 38.

Da figura 37 tiramos:

$$P_t = P \cdot \sin \theta$$

①

e

$$P_n = P \cdot \cos \theta$$

②

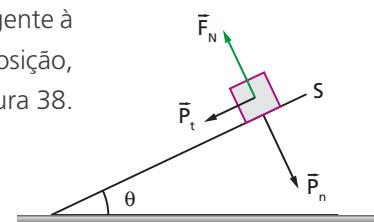


Figura 38.

Na direção perpendicular a S não há movimento, o que nos leva a concluir que:

$$F_N = P_n$$

③

Assim, a força resultante é a componente \vec{P}_t e o bloco deve descer em movimento acelerado, de aceleração \vec{a} (fig. 39). Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$P_t = m \cdot a$$

④

De ① e ④, temos:

$$P \cdot \sin \theta = m \cdot a \quad \text{ou} \quad m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

ou, ainda:

$$a = g \cdot \sin \theta$$

⑤

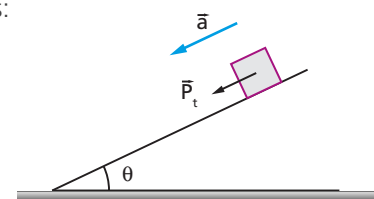


Figura 39.

É importante observar na igualdade ⑤ que a aceleração não depende da massa do bloco. Notemos também que a equação ⑤ vale apenas quando as únicas forças atuantes no bloco são o peso e a força normal. Se houver outras forças, a aceleração poderá ser diferente.

Se lançarmos o bloco de baixo para cima sobre a superfície, com velocidade inicial \vec{v}_0 (fig. 40), o bloco sobe em movimento retardado até o instante em que a velocidade se torna nula. A partir desse instante, o bloco desce em movimento acelerado. Porém, tanto na subida como na descida, a força resultante \vec{P}_t e a aceleração \vec{a} têm os sentidos indicados na figura 39 e o módulo de \vec{a} é dado pela igualdade ⑤.

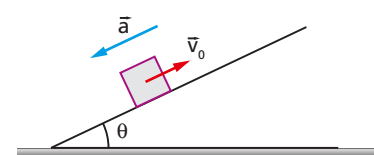


Figura 40.

Exemplo 3

Consideremos o plano inclinado da figura 41.

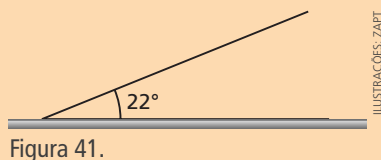


Figura 41.

Consultando a tabela que se encontra no CD, encontramos: $\text{tg } 22^\circ \cong 0,40$.

$$\text{Mas } 0,40 = \frac{40}{100} = 40\%$$

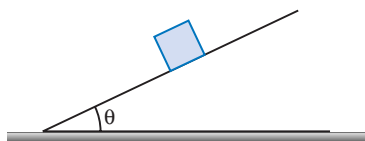
Assim, podemos dizer que a inclinação desse plano inclinado é aproximadamente igual a 40%.

OBSERVAÇÃO

Pode acontecer de a inclinação de um plano inclinado vir na forma de porcentagem. Consideremos um plano inclinado que forma um ângulo θ com um plano horizontal. Dizer que “a inclinação do plano inclinado é x%” significa que “ $\text{tg } \theta = x\%$ ”.

Exercícios de Aplicação

36. Um bloco de massa $m = 20 \text{ kg}$ é abandonado sobre um plano inclinado sem atrito, como mostra a figura, numa região onde a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Sabendo que $\theta = 30^\circ$, determine:

- a intensidade da força normal exercida pelo plano inclinado sobre o bloco;
 - o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.
37. Um bloco é abandonado sobre um plano inclinado de 75%, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Desprezando o atrito, calcule o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

Resolução:

Seja θ o ângulo formado pelo plano inclinado com um plano horizontal (fig. a). Dizer que “a inclinação do plano é 75%” significa que “ $\text{tg } \theta = 75\%$ ”, isto é:

$$\text{tg } \theta = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

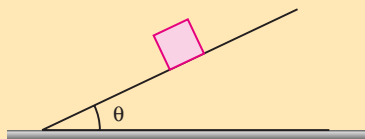


Figura a.

Para obter rapidamente o valor de $\text{sen } \theta$, podemos considerar um triângulo retângulo em que um dos ângulos internos seja θ , o cateto oposto a θ tenha medida igual a 3 e o cateto adjacente a θ tenha medida igual a 4 (fig. b).

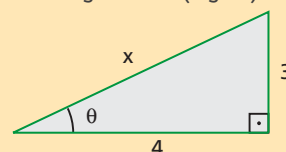


Figura b.

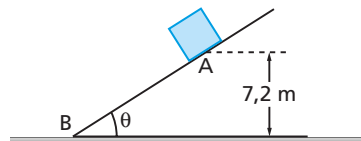
Desse modo, temos $\text{tg } \theta = \frac{3}{4}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a esse triângulo retângulo, temos $x^2 = 3^2 + 4^2$ e obtemos $x = 5$. Assim:

$$\text{sen } \theta = \frac{3}{x} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Portanto, a aceleração adquirida pelo bloco tem módulo a dado por:

$$a = g \cdot \text{sen } \theta = 10 \cdot 0,6 \Rightarrow a = 6,0 \text{ m/s}^2$$

38. Uma partícula é abandonada sobre um plano inclinado de 50%. Desprezando o atrito e adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o módulo da aceleração adquirida pela partícula.
39. Um bloco é abandonado em um ponto A de um plano inclinado, conforme mostra a figura, no instante $t = 0$. Sabe-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\text{sen } \theta = 0,40$.



Desprezando o atrito, determine:

- o instante em que a partícula atinge o ponto B;
- o módulo da velocidade da partícula ao atingir o ponto B.

40. Uma partícula de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ sobe um plano inclinado, como mostra a figura a, puxada por uma força \vec{F} de intensidade $F = 22 \text{ N}$, paralela ao plano inclinado. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o módulo da aceleração da partícula. (Despreze o atrito.)

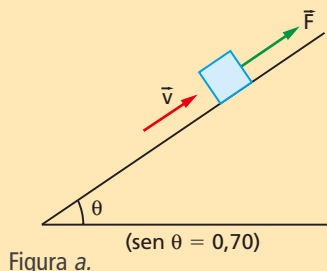


Figura a.

Resolução:

Além de \vec{F} , atuam sobre a partícula o seu peso (\vec{P}) e a força normal (\vec{F}_N) exercida pelo plano inclinado.

$$P = m \cdot g = 2,0 \cdot 10 \Rightarrow P = 20 \text{ N}$$

Podemos decompor o peso em duas componentes: uma componente paralela ao plano inclinado (\vec{P}_t) e outra perpendicular ao plano inclinado (\vec{P}_n).

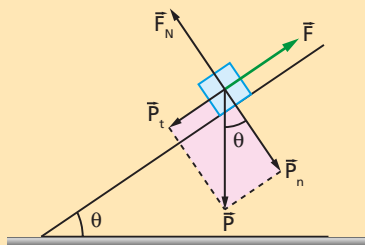


Figura b.

Não havendo movimento na direção perpendicular ao plano inclinado, devemos ter $F_N = P_n$. Temos, então:

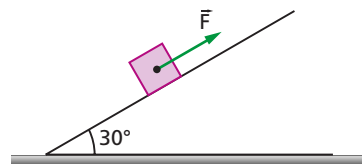
$$P_t = P \cdot \sin \theta = 20 \cdot 0,70 \Rightarrow P_t = 14 \text{ N}$$

Apliquemos a Segunda Lei de Newton (observando que $F > P_t$):

$$F - P_t = m \cdot a \Rightarrow 22 - 14 = 2,0 \cdot a$$

$$a = 4,0 \text{ m/s}^2$$

41. Um bloco de massa $m = 15 \text{ kg}$ move-se sobre um plano inclinado sem atrito, puxado por uma força \vec{F} paralela ao plano inclinado, como mostra a figura a seguir, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Calcule o módulo da força \vec{F} nos seguintes casos:

- o bloco sobe o plano inclinado em movimento acelerado, com aceleração de módulo $4,0 \text{ m/s}^2$;
- o bloco sobe o plano inclinado em movimento retardado, com aceleração de módulo $4,0 \text{ m/s}^2$;
- o bloco sobe o plano inclinado com velocidade constante;
- o bloco desce o plano inclinado com velocidade constante.

42. O sistema esquematizado na figura a é abandonado em repouso. A polia e o fio são ideais e não há atrito. As massas dos blocos A e B são, respectivamente, $m_A = 12 \text{ kg}$ e $m_B = 8,0 \text{ kg}$.

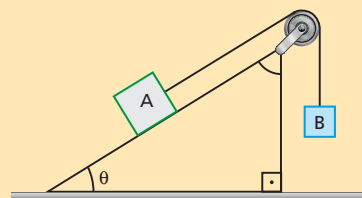


Figura a.

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\sin \theta = 0,25$, calcule:

- o módulo da aceleração de cada bloco e o módulo da tração no fio;
- o módulo da força exercida pelo fio sobre a polia.

Resolução:

- a) Sejam \vec{P}_A e \vec{P}_B os pesos dos blocos A e B, respectivamente. Temos:

$$\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 12 \cdot 10 \Rightarrow P_A = 120 \text{ N} \\ P_B = m_B \cdot g = 8,0 \cdot 10 \Rightarrow P_B = 80 \text{ N} \end{cases}$$

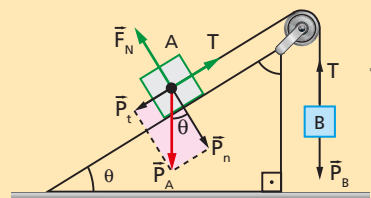


Figura b.

Podemos decompor \vec{P}_A em uma componente paralela ao plano inclinado (\vec{P}_t) e uma componente perpendicular ao plano inclinado (\vec{P}_n). Temos:

$$P_t = P_A \cdot \sin \theta = 120 \cdot 0,25 \Rightarrow P_t = 30 \text{ N}$$

Como $P_B > P_t$, concluímos que, ao abandonar o sistema, o bloco A deve subir e o bloco B deve descer, isto é:

$$P_B > T \text{ e } T > P_t$$

Os dois blocos têm acelerações de mesmo módulo a .

Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada bloco separadamente, temos:

$$\begin{cases} T - P_t = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T - 30 = 12 \cdot a \\ 80 - T = 8,0 \cdot a \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pela equações (1) e (2), obtemos:

$$a = 2,5 \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad T = 60 \text{ N}$$

Para obter de modo mais rápido a aceleração, poderíamos ter usado um artifício já empregado anteriormente: imaginar o sistema "esticado" e aplicar a Segunda Lei de Newton ao conjunto formado pelos blocos A e B.

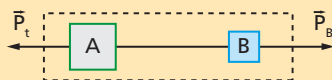


Figura c.

$$P_B - P_t = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$80 - 30 = 20 \cdot a \Rightarrow a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Porém, para obter a intensidade da tração no fio, teríamos de recorrer à equação (1) ou à equação (2).

b) Seja \vec{F} a força exercida pelo fio sobre a polia.

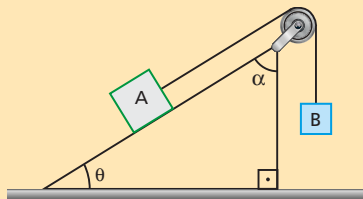


Figura d.

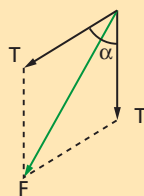


Figura e.

Observando a figura e e aplicando a Lei dos Cossenos, temos:

$$F^2 = T^2 + T^2 + 2 \cdot T \cdot T \cdot \cos \alpha$$

ou:

$$F^2 = 2T^2 + 2T^2 \cdot \cos \alpha$$

ou, ainda:

$$F^2 = 2T^2 (1 + \cos \alpha) \quad (3)$$

Os ângulos α e θ são complementares (ver fig. d) e, portanto:

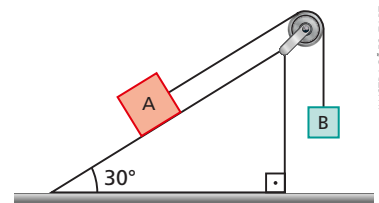
$$\cos \alpha = \sin \theta = 0,25$$

Já sabemos que $T = 60 \text{ N}$. Substituindo esses valores na igualdade (3), temos:

$$F^2 = 2(60)^2 (1 + 0,25)$$

$$F^2 = 9000 \quad \text{ou} \quad F = 30\sqrt{10} \text{ N}$$

43. No sistema representado na figura, o fio e a polia são ideais e não há atrito. Os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 4,0 kg.

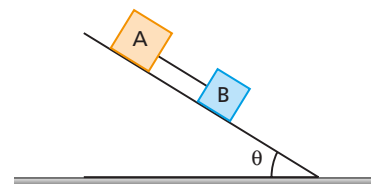


ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e supondo que o sistema foi abandonado em repouso, determine:

- o módulo da aceleração do bloco B;
- o módulo da tração no fio;
- o módulo da força que o fio exerce na polia.

44. No sistema esquematizado na figura, os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a m_A e m_B .



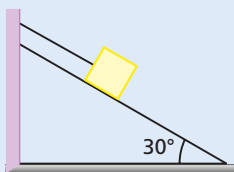
A aceleração da gravidade tem módulo g , o fio é ideal e não há atrito. Determine:

- o módulo da aceleração dos blocos;
- o módulo da tração no fio.

Exercícios de Reforço

45. (Fuvest-SP) Em um plano inclinado de 30° em relação à horizontal, um bloco de 10 kg de massa, sob a ação da gravidade, é mantido em repouso por meio de um fio, como mostra a figura. Desprezando-se o atrito entre o bloco e o plano, a tensão no fio vale: (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

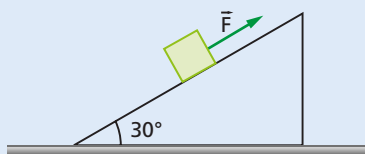
- a) 100 N
b) 75 N
c) 50 N
d) 25 N
e) 10 N



ZAPT

Enunciado para os testes 46 e 47:

A figura representa um corpo de massa igual a 60 kg sobre um plano inclinado sem atrito, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$.



ZAPT

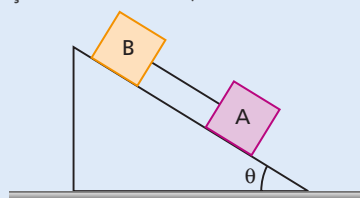
46. (UF-BA) O módulo de \vec{F} , de modo que o corpo suba o plano inclinado, em movimento acelerado de aceleração $0,8 \text{ m/s}^2$, será:

- a) zero c) 348 N e) 600 N
b) 300 N d) 519 N

47. (UF-BA) O módulo de \vec{F} se o corpo estiver subindo com velocidade constante será:

- a) zero c) 348 N e) 600 N
b) 300 N d) 519 N

48. (UF-MS) Dois blocos, A e B, interligados por um cabo de massa desprezível, são abandonados a partir do repouso e descem escorregando sobre uma superfície lisa, inclinada de um ângulo θ , em relação à horizontal, como ilustra a figura.



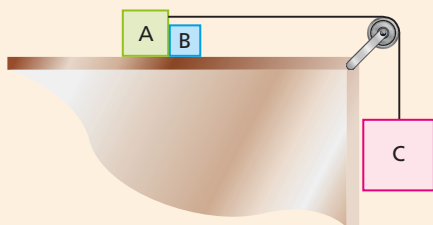
ZAPT

Verifique se cada sentença a seguir é verdadeira ou falsa:

- O movimento dos blocos é uniforme.
- A velocidade do bloco A será igual à do bloco B, independentemente de suas massas.
- A aceleração dos blocos é a mesma e constante.
- A força de tração no cabo é nula.

Exercícios de Aprofundamento

49. No sistema representado na figura, os blocos A, B e C têm massas respectivamente iguais a 4,0 kg, 3,0 kg e 13 kg. O fio e a polia são ideais e o bloco A está apenas encostado no bloco B.

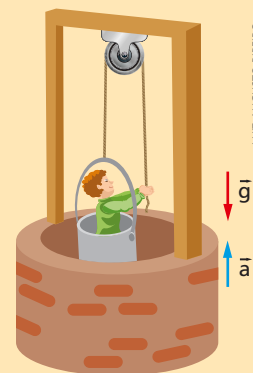


ZAPT

Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando o atrito, calcule os módulos:

- da aceleração do bloco C;
- da tração no fio;
- da força exercida pelo bloco A sobre o bloco B.

50. Consideremos um balde de massa $m_b = 60 \text{ kg}$ e um passageiro de massa $m_p = 80 \text{ kg}$. O balde está suspenso por uma corda ideal que passa por uma polia ideal e é puxada pelo passageiro de modo que este sobe juntamente com o balde, em movimento acelerado, de aceleração $a = 4,0 \text{ m/s}^2$. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule os módulos da tração no fio e da força exercida pelo piso do balde sobre o passageiro.



LUIS AUGUSTO RIBEIRO

Resolução:

Sejam P_b e P_p os pesos do balde e do passageiro, respectivamente:

Figura a.

$$\begin{cases} P_B = m_B \cdot g = 60 \cdot 10 \Rightarrow P_B = 600 \text{ N} \\ P_P = m_P \cdot g = 80 \cdot 10 \Rightarrow P_P = 800 \text{ N} \end{cases}$$

As forças que atuam no balde são o seu peso P_B , a força T que o fio exerce na alça e a força normal F_N que o passageiro exerce no piso do balde (fig. b). As forças que atuam no passageiro são o seu peso P_P , a força T que o fio exerce em suas mãos e a força normal F_N que o piso do balde aplica no passageiro, conforme ilustra a figura c. (Obviamente, pelo Princípio da Ação e Reação, a força que o passageiro aplica no piso do balde e a força que o piso do balde aplica no passageiro têm o mesmo módulo.)

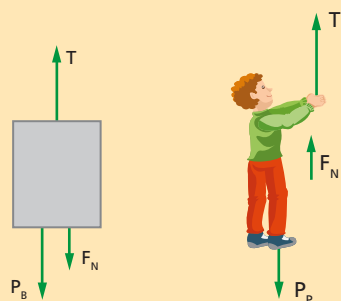


Figura b.

Figura c.

Apliquemos a Segunda Lei de Newton a cada corpo separadamente:

$$\begin{cases} T - P_B - F_N = m_B \cdot a \\ T + F_N - P_P = m_P \cdot a \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} T - 600 - F_N = 60 \cdot 4 \\ T + F_N - 800 = 80 \cdot 4 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} T - F_N = 840 & (1) \\ T + F_N = 1120 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos:

$$T = 980 \text{ N} \quad \text{e} \quad F_N = 140 \text{ N}$$

Se quiséssemos apenas o módulo da tração no fio, poderíamos ter considerado um único corpo formado pelo balde e pelo passageiro. Nesse caso, as duas forças F_N são **internas** e, em relação ao sistema, se cancelam. O esquema de forças é, então, o da figura d. Devemos observar também que há duas forças de módulo T puxando o corpo para cima: uma delas é a que atua na haste do balde e a outra é a que atua nas mãos do passageiro. Sejam m e P , respectivamente, a massa e o peso do corpo.

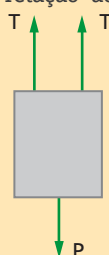


Figura d.

$$\begin{cases} m = m_b + m_B = 60 + 80 \Rightarrow m = 140 \text{ kg} \\ P = m \cdot g = 140 \cdot 10 \Rightarrow P = 1400 \text{ N} \end{cases}$$

Apliquemos a Segunda Lei de Newton a esse corpo:

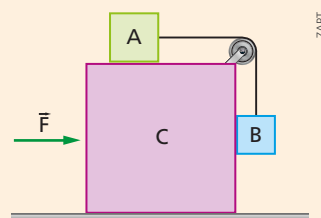
$$2T - P = m \cdot a \Rightarrow 2T - 1400 = 140 \cdot 4$$

$$T = 980 \text{ N}$$

51. Um indivíduo de massa 100 kg está dentro de um elevador de massa 70 kg. O elevador está suspenso por uma corda ideal que passa por uma polia ideal e é puxada pelo indivíduo, de modo que este sobe juntamente com o elevador, em movimento acelerado de aceleração $2,0 \text{ m/s}^2$. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule os módulos da tração no fio e a força que o piso do elevador exerce no indivíduo.



52. No sistema representado na figura, os blocos A, B e C têm massas $m_A = 20 \text{ kg}$, $m_B = 8,0 \text{ kg}$ e $m_C = 32 \text{ kg}$. O fio e a polia são ideais e não há atrito. Uma força horizontal \vec{F} é aplicada ao bloco C, de modo que o conjunto todo se move em relação ao solo, mas os blocos A e B permanecem em repouso em relação a C.

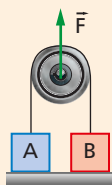


Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule os módulos:

- da aceleração do conjunto em relação ao solo;
- da força \vec{F} ;
- da força exercida por C sobre B.

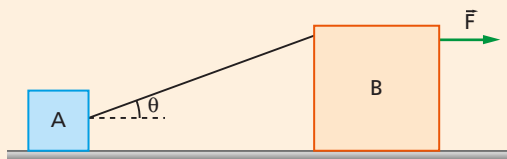
53. (E. E. São Carlos-SP) É dada uma polia ideal pela qual um fio também ideal, suportando em suas extremidades os blocos A e B, de massas respectivamente iguais a 40 kg e 24 kg, como mostra a figura. A partir de dado instante, aplica-se ao eixo da polia uma força vertical \vec{F} ,

cujo sentido é para cima. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule os módulos das acelerações adquiridas pelos blocos nos seguintes casos:



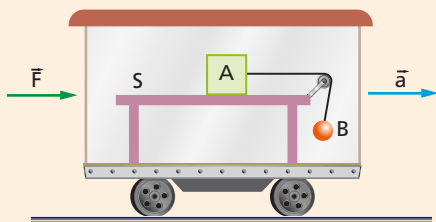
- $F = 400 \text{ N}$
- $F = 720 \text{ N}$
- $F = 1200 \text{ N}$

54. No sistema esquematizado na figura, os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a 20 kg e 40 kg. O fio é ideal e não há atrito. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $F = 240 \text{ N}$, $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$.



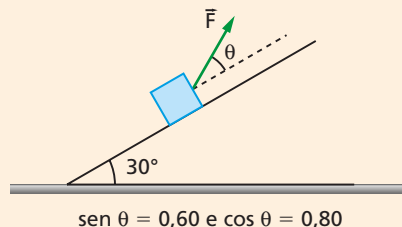
Calcule as intensidades:

- da aceleração do sistema;
 - da tração no fio;
 - das forças normais exercidas pela superfície horizontal sobre os blocos A e B.
55. No sistema representado na figura, temos um vagão que se move sobre trilhos retos e horizontais com movimento acelerado, de aceleração \vec{a} , empurrado por uma força horizontal \vec{F} . Dentro do vagão há uma mesa S, rigidamente presa ao piso do vagão, e sobre ela está um bloco A, o qual está ligado por um fio ideal a uma bolinha B. A polia é ideal e não há atritos. O sistema todo se move de modo que o bloco A e a bolinha B permanecem em repouso em relação ao vagão. A aceleração da gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$ e as massas de A e B são $m_A = 20 \text{ kg}$ e $m_B = 12 \text{ kg}$.

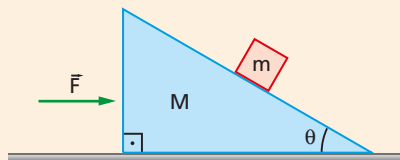


- Calcule os módulos de \vec{a} e da tração no fio.
- Sabendo que a massa do vagão juntamente com a mesa é $m = 68 \text{ kg}$, determine a intensidade de \vec{F} .

56. Um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ sobe um plano inclinado sem atrito, puxado por uma força \vec{F} que forma ângulo θ com o plano inclinado, como mostra a figura. A intensidade de \vec{F} é 15 N e o módulo da aceleração da gravidade é 10 m/s^2 . Calcule os módulos da aceleração do bloco e da força exercida pelo plano inclinado sobre o bloco.

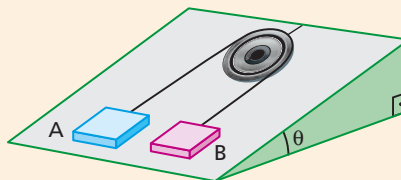


57. Um prisma triangular de massa $M = 2,4 \text{ kg}$ está apoiado sobre uma superfície horizontal. Uma das faces do prisma forma ângulo θ com a superfície horizontal, como mostra a figura. Sobre a face inclinada do prisma apoia-se um bloco de massa $m = 1,6 \text{ kg}$. Aplica-se no prisma uma força horizontal \vec{F} , de modo que o sistema todo se move com o bloco, ficando em repouso em relação ao prisma. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\sin \theta = 0,60$; $\cos \theta = 0,80$.



Desprezando os atritos, determine:

- o módulo da aceleração do conjunto;
 - o módulo de \vec{F} .
58. Um sistema formado por dois blocos A e B, um fio ideal e uma polia também ideal foi montado sobre um plano que tem inclinação θ em relação a um plano horizontal, como mostra a figura. As massas de A e B são respectivamente iguais a 5,0 kg e 15 kg. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\sin \theta = 0,60$.



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

Desprezando o atrito, calcule:

- o módulo da aceleração do bloco B;
- o módulo da tração no fio.

Lançamento não vertical

1. Movimento de projéteis

No capítulo 6 estudamos o movimento de um corpo nas proximidades da superfície da Terra, desprezando os efeitos do ar nos casos em que o corpo é abandonado ou lançado verticalmente. Agora, completaremos esse estudo analisando a situação em que o corpo é lançado com velocidade \vec{v}_0 de direção não vertical. É o caso, por exemplo, do lançamento de uma bola de basquete (fig. 1) ou de uma bola chutada por um jogador de futebol.

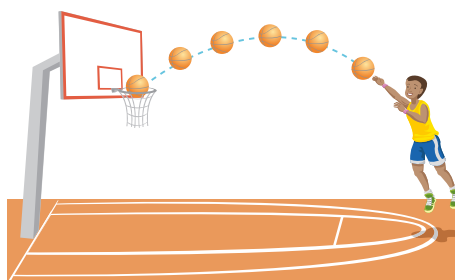


Figura 1. A trajetória descrita pela bola é um exemplo de movimento de projétil.

A análise correta desse tipo de movimento foi feita pela primeira vez por Galileu, que procurava estudar o movimento de um projétil disparado por um canhão; por esse motivo, até hoje esse tipo de movimento é chamado **movimento de projéteis**.

Se a resistência do ar for desprezada, a única força atuante no projétil é seu peso \vec{P} (fig. 2) que, de acordo com a Segunda Lei de Newton, é dado por

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

sendo m a massa do projétil e \vec{g} a aceleração da gravidade, considerada vetorialmente.

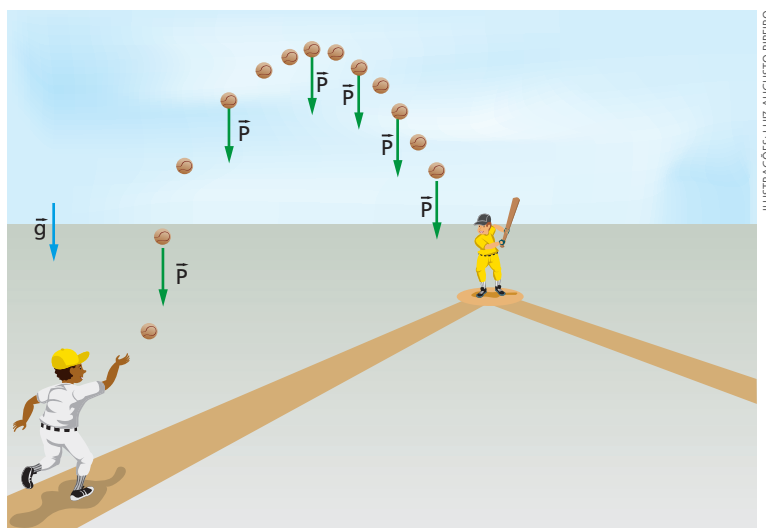


Figura 2.

Para facilitar a exposição, separaremos o lançamento não vertical em dois casos: **lançamento horizontal** e **lançamento oblíquo**.

1. Movimento de projéteis
2. Lançamento horizontal
3. Lançamento oblíquo
4. Estudo do alcance
5. Equações vetoriais do movimento de um projétil
6. Alcance máximo em geral
7. Galileu, Newton e a Lei da Inércia
8. Trajetórias possíveis com força resultante constante

2. Lançamento horizontal

Consideremos uma partícula lançada de um ponto O próximo da superfície da Terra, com velocidade \vec{v}_0 de direção horizontal. Desprezando os efeitos do ar, sua trajetória será curva, semelhante à trajetória desenhada na figura 3. Para esse caso, adotemos um sistema cartesiano ortogonal Oxy , com o eixo Ox de mesmo sentido de \vec{v}_0 e o eixo Oy na direção vertical, orientado para baixo (fig. 4).

Seja P a posição da partícula num instante qualquer após o lançamento (mas antes de atingir o solo). Sendo \vec{v} a velocidade da partícula nesse instante, façamos a decomposição de \vec{v} nas direções de Ox e Oy , obtendo as velocidades componentes \vec{v}_x e \vec{v}_y (fig. 5).

Como a aceleração da gravidade \vec{g} tem direção vertical, apenas a componente \vec{v}_y é variável; a componente \vec{v}_x permanece constante e, portanto, $\vec{v}_x = \vec{v}_0$. A figura 6 representa a partícula em duas posições P_1 e P_2 , com velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 ; decompondo essas velocidades nas direções de Ox e Oy devemos ter $\vec{v}_{1x} = \vec{v}_{2x} = \vec{v}_0$. Na figura 7 representamos os vetores \vec{v}_0 , \vec{v}_1 e \vec{v}_2 por segmentos orientados de mesma origem; repare que suas extremidades devem pertencer a uma mesma reta vertical r , pois $\vec{v}_0 = \vec{v}_{1x} = \vec{v}_{2x}$. A essa representação dá-se o nome de **hodógrafo** do movimento.

Convém observar que os componentes de \vec{v}_0 nas direções de Ox e Oy são $\vec{v}_{0x} = \vec{v}_0$ e $\vec{v}_{0y} = \vec{0}$, isto é, a componente vertical de \vec{v}_0 é nula.

De tudo o que dissemos, concluímos que o movimento dessa partícula pode ser imaginado como resultante da composição de dois movimentos retilíneos e ortogonais: um movimento horizontal uniforme, de velocidade constante \vec{v}_0 , e um movimento vertical uniformemente variado, de aceleração constante \vec{g} e velocidade inicial $\vec{v}_{0y} = \vec{0}$.

Isso pode ser verificado por meio do experimento ilustrado na figura 8, em que vemos a imagem estroboscópica do movimento de duas bolas. Um dispositivo mecânico abandona a bola verde no mesmo instante em que lança para a direita a bola vermelha. Podemos observar que os movimentos verticais de ambas serão iguais: a cada instante elas estão na mesma altura. Usando uma régua você poderá perceber que o movimento horizontal da bola vermelha se dá com velocidade constante.

No exercício 1 mostraremos que a trajetória da bola vermelha é um arco de parábola.

A distância A assinalada na figura 3 é o **alcance horizontal** do lançamento.

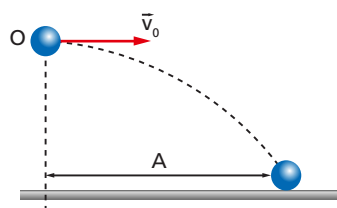


Figura 3.

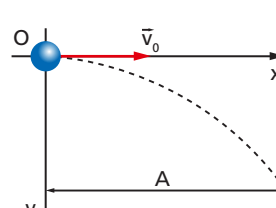


Figura 4.

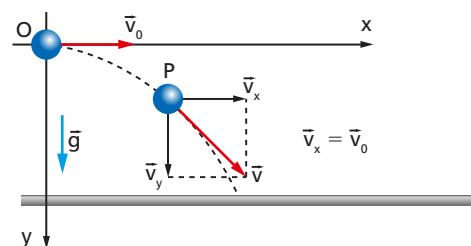


Figura 5.

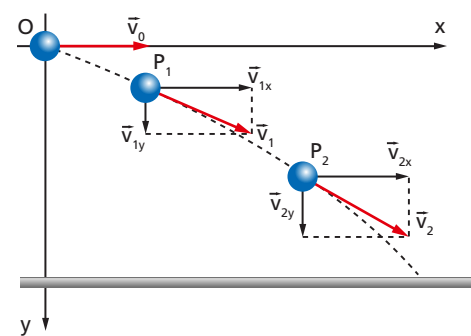


Figura 6.

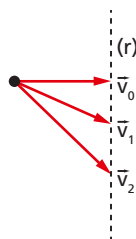


Figura 7.

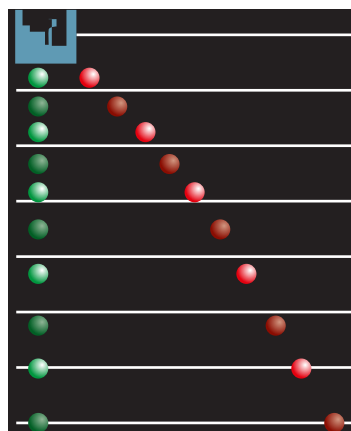
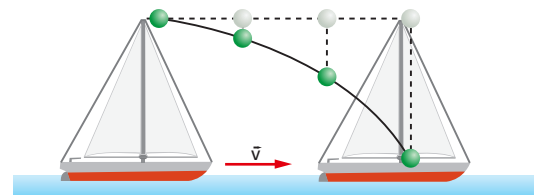


Figura 8.

Galileu e os projéteis

Galileu morreu no ano em que Newton nasceu (1642) e, portanto, não conhecia as leis de Newton. Porém ele percebeu que o movimento de um projétil poderia ser analisado considerando-se separadamente o movimento horizontal e o movimento vertical, pensando no experimento ilustrado na figura 9.



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

Figura 9.

Um barco move-se suavemente com velocidade constante em relação à Terra. Uma pessoa que está no alto do mastro do barco abandona uma bolinha e observa que ela cai verticalmente, isto é, para essa pessoa a trajetória da bolinha é um segmento de reta vertical enquanto para um observador fixo na margem a trajetória é uma linha curva (que mais tarde seria reconhecida como um arco de parábola). Isso significa que a bolinha acompanha o movimento do barco para a direita, isto é, para um observador fixo na margem a bolinha tem a mesma velocidade \vec{v} do barco. Quanto ao movimento vertical, Galileu já havia demonstrado que ele ocorre com aceleração constante (como vimos no capítulo 6) e, assim, compondo o movimento horizontal com o movimento vertical, analisou o movimento de um projétil.

O Princípio de Relatividade

Ao discutir o experimento do barco, Galileu chamou a atenção para um fato importante: qualquer experimento mecânico realizado dentro de um barco teria o mesmo resultado de um experimento realizado em terra firme. No caso analisado, uma pessoa deixou cair uma bolinha e observou que ela caiu verticalmente, com aceleração constante. Se ela fizesse o experimento em terra firme obteria o mesmo resultado. De modo semelhante, dentro do barco ela poderia jogar uma partida de pingue-pongue e peixinhos poderiam nadar dentro de um aquário, do mesmo modo que o fariam se o barco estivesse em repouso em relação à Terra. Isso significa que nenhum experimento mecânico realizado dentro do barco pode determinar se ele está em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme em relação à Terra.

Em linguagem moderna podemos dizer que todos os referenciais inerciais são equivalentes no que se refere às leis da Mecânica e isso é chamado de **Princípio de Relatividade da Mecânica** ou **Princípio de Relatividade de Galileu**.

Exercícios de Aplicação

1. No instante $t = 0$, uma partícula é lançada horizontalmente, com velocidade v_0 , cujo módulo é 40 m/s , de um ponto O situado 180 m acima do solo (suposto horizontal), numa região onde a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10 \text{ m/s}^2$. Despreze os efeitos do ar e adote um sistema de coordenadas de origem O , como mostra a figura.

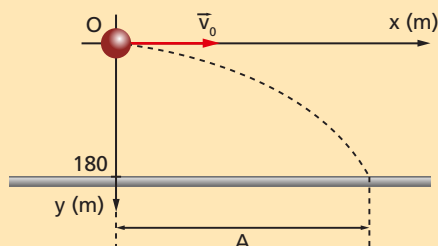


Figura a.

Determine:

- a) as equações horárias da abscissa x e da ordenada y da partícula;
- b) a equação horária da componente vertical da velocidade da partícula;
- c) as coordenadas da partícula no instante $t = 3,0 \text{ s}$;
- d) o módulo da velocidade da partícula no instante $t = 3,0 \text{ s}$;
- e) o ângulo formado pela velocidade vetorial da partícula com a direção horizontal, no instante $t = 3,0 \text{ s}$;
- f) o instante em que a partícula toca o solo;
- g) o alcance horizontal A ;
- h) a velocidade da partícula ao atingir o solo;
- i) a equação da trajetória.

Resolução:

- a) Na horizontal temos MU de posição inicial nula e velocidade $v_0 = 40$ m/s. Lembrando que a equação horária da posição do MU é do tipo $s = s_0 + vt$, temos:

$$x = 0 + vt$$

ou

$$x = 40t \quad (1)$$

com t em segundos e x em metros.

Na vertical temos MUV de posição inicial nula e velocidade inicial também nula ($v_{0y} = 0$). Como sabemos, a equação horária da posição do MUV é do tipo $s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$.

$$\text{Assim, } y = 0 + v_{0y} t + \frac{g}{2} t^2$$

Como $v_{0y} = 0$ e $g = 10$ m/s², vem:

$$y = 0 + 0(t) + \frac{10}{2} t^2$$

ou, ainda:

$$y = 5,0t^2 \quad (2)$$

com y em metros e t em segundos.

É óbvio que as equações obtidas valem apenas até o instante em que a partícula atinge o solo.

- b) Na vertical, temos MUV cuja equação horária da velocidade é do tipo $v = v_0 + at$. Assim, temos:

$$v_y = v_{0y} + gt$$

$$v_y = 0 + 10t$$

$$v_y = 10t \quad (3)$$

com t em segundos e v_y em m/s.

Essa equação só vale, obviamente, até o instante em que a partícula atinge o solo.

- c) Já vimos que $x = 40t$ e $y = 5,0t^2$. Assim, para $t = 3,0$ s temos:

$$\begin{cases} x = 40(3,0) = 120 \\ y = (5,0)(3)^2 = 45 \end{cases}$$

$$x = 120 \text{ m} \quad y = 45 \text{ m}$$

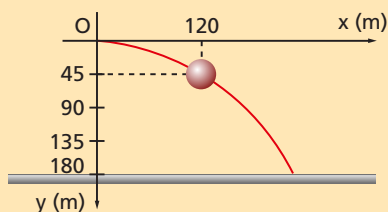


Figura b.

- d) A componente horizontal da velocidade é constante:

$$v_x = v_0 = 40 \text{ m/s}$$

A componente vertical, como vimos, tem equação horária $v_y = 10t$.

Assim, para $t = 3,0$ s, temos $v_y = 30$ m/s. Portanto, sendo \vec{v} a velocidade da partícula no instante $t = 3,0$ s, temos:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_y|^2 = 30^2 + 40^2$$

isto é: $|\vec{v}| = 50$ m/s

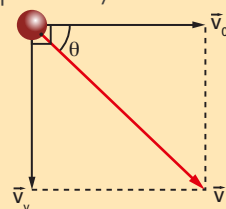


Figura c.

- e) Aproveitando a figura c, temos:

$$\text{tg } \theta = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}_0|} = \frac{30}{40} = 0,75$$

Consultando a tabela do CD, obtemos:

$$\theta \cong 37^\circ$$

- f) Quando a partícula atingir o solo teremos $y = 180$ m. Assim, da equação (2) obtemos:

$$\begin{cases} y = 5,0t^2 \\ y = 180 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow 180 = 5,0t^2 \Rightarrow t = 6,0 \text{ s}$$

- g) Substituindo $t = 6,0$ s na equação (1) obtemos o alcance

$$\begin{cases} x = 40t \\ t = 6,0 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow x = 40(6,0) \Rightarrow x = 240 \text{ m} \Rightarrow A = 240 \text{ m}$$

- h) Substituindo $t = 6,0$ s na equação (3) temos:

$$\begin{cases} v_y = 10t \\ t = 6,0 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow v_y = 60 \text{ m/s}$$

$$v^2 = v_0^2 + v_y^2$$

$$v^2 = 40^2 + 60^2$$

$$v^2 = 5200 = 400(13)$$

$$v = 20\sqrt{13} \text{ m/s}$$

- i) Na equação (1) isolamos t :

$$x = 40t \Rightarrow t = \frac{x}{40}$$

Substituímos na equação (2):

$$y = 5,0t^2 \Rightarrow y = (5,0)\left(\frac{x}{40}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{320} x^2 \quad (\text{para } 0 \leq x \leq 240 \text{ m})$$

Como aprenderemos nas aulas de Matemática, essa equação corresponde a um arco de parábola.

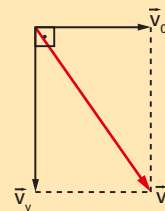
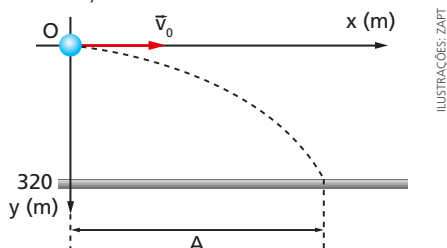


Figura d.

2. No instante $t = 0$, uma partícula é lançada horizontalmente, com velocidade \vec{v}_0 , cujo módulo é 60 m/s , de um ponto O situado 320 m acima do solo (suposto horizontal e plano), numa região em que a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.



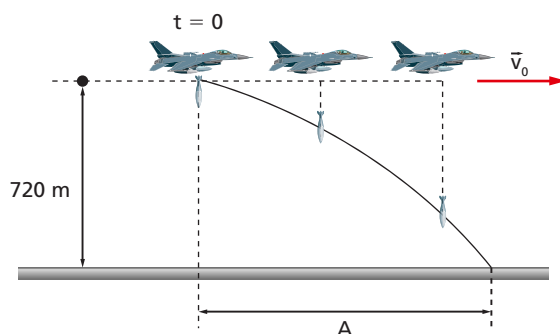
Desprezando os efeitos do ar e adotando um sistema de coordenadas de origem O , como mostra a figura, pedem-se:

- as equações horárias da abscissa x e da ordenada y da partícula;
- a equação horária da componente vertical da velocidade da partícula;
- as coordenadas da partícula no instante $t = 4,0 \text{ s}$;
- o módulo da velocidade da partícula no instante $t = 4,0 \text{ s}$;
- o ângulo formado pela velocidade vetorial da partícula com a direção horizontal, no instante $t = 4,0 \text{ s}$;
- o instante em que a partícula atinge o solo;
- o alcance horizontal A ;
- a velocidade da partícula ao atingir o solo;
- a equação da trajetória.

3. Para a situação do exercício anterior, pedem-se os seguintes gráficos:

- de x e y em função do tempo;
- dos componentes v_x e v_y da velocidade em função do tempo.

4. Um avião voa a uma altura de 720 m , com velocidade constante e horizontal, cujo módulo é $v_0 = 120 \text{ m/s}$, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. Num determinado instante, uma bomba é solta do avião.



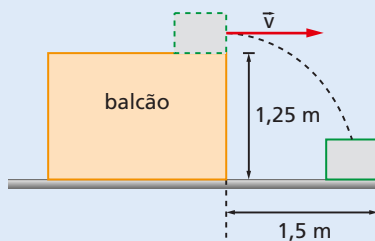
Desprezando os efeitos do ar e supondo o chão horizontal, responda:

- Depois de quanto tempo, após ser solta, a bomba atinge o solo?
- Qual o alcance horizontal A ?
- Em que instante o módulo da velocidade da bomba será igual a 130 m/s ?

Exercícios de Reforço

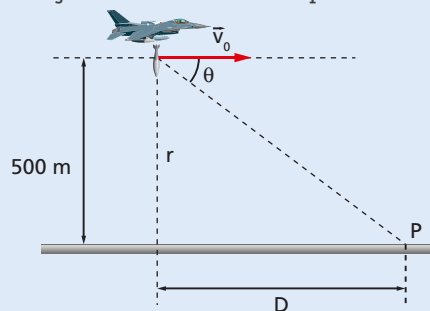
5. (UF-PE) Em uma revendedora de peças de automóveis, um vendedor lança uma pequena caixa sobre o balcão para ser recolhida por seu ajudante. Este, distraído, não vê o pacote, que escorrega para fora do balcão e atinge o chão a $1,5 \text{ m}$ da base do balcão, como mostra a figura. Se a altura do balcão é de $1,25 \text{ m}$, a velocidade com que o pacote deixou o balcão vale, em m/s :

- 2
- 1
- 3
- 4
- 6



6. Um avião voa a uma altitude de 500 m com velocidade \vec{v}_0 de módulo 200 m/s , numa região onde

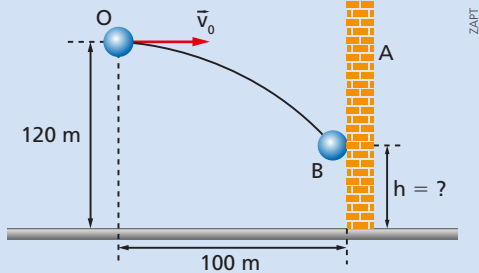
$g = 10 \text{ m/s}^2$. O piloto pretende soltar uma bomba que atinja um alvo situado no ponto P .



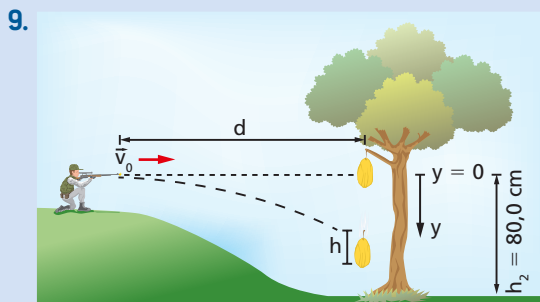
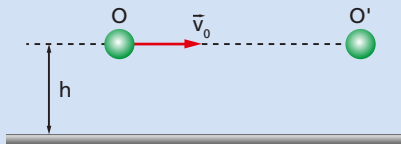
Determine:

- a distância D entre o ponto P e a reta vertical (r) que passa pelo avião no momento em que a bomba é solta;
- o ângulo θ segundo o qual o piloto enxerga o alvo no momento em que a bomba é solta.

7. Uma partícula é lançada com velocidade horizontal \vec{v}_0 , cujo módulo é $v_0 = 25 \text{ m/s}$, de um ponto O situado a 120 m acima do solo, numa região onde a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partícula atinge um muro vertical situado a 100 m do ponto O . Determine a altura h do ponto B onde a partícula atinge o muro. (Despreze os efeitos do ar.)



8. De um ponto O situado a uma altura h em relação ao solo, lança-se horizontalmente uma partícula A com velocidade \vec{v}_0 . No mesmo instante, de um ponto O' , situado à mesma altura h , abandona-se outra partícula, B (veja a figura). Desprezam-se os efeitos do ar. É possível que as partículas se choquem antes de atingirem o solo?



(UnB-DF) Especialistas em tiro ao alvo frequentemente treinam em alvos em movimento. A figura mostra um desses momentos. No instante em

que o atirador disparou o projétil, o alvo (fruta) desprende-se da árvore e ambos, alvo e projétil emitido pela arma, começaram a cair. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes, considerando-se que: a resistência do ar é desprezível, a aceleração gravitacional \vec{g} é constante e com módulo igual a 10 m/s^2 , a altura do alvo $h = 20 \text{ cm}$, a distância horizontal percorrida pelo projétil $d = 100 \text{ m}$ e o módulo da velocidade inicial horizontal do projétil $v_0 = 400 \text{ m/s}$. Despreze o tempo gasto pelo projétil ao se deslocar no interior da arma.

1. Após um intervalo de tempo T , o projétil percorrerá a mesma distância vertical que o alvo.
2. De acordo com os dados apresentados, o atirador acertou o alvo.
3. O tempo de queda T da fruta, na vertical, pode ser corretamente calculado pela relação

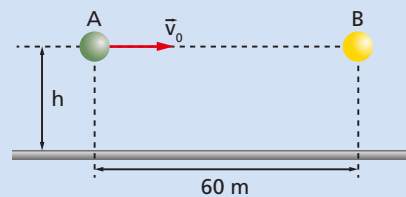
$$T = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}.$$

4. A distância percorrida pelo alvo até ser atingido pelo projétil vale 31,25 cm.

Somente está correto o que se afirmou em:

- a) 1, 2 e 4 c) 2 e 4 e) 1 e 3
b) 1 e 2 d) 3

10. Uma partícula A é lançada horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 de um ponto situado a uma altura h em relação ao solo. No mesmo instante, uma outra partícula, B , é abandonada de um outro ponto situado à mesma altura h , como mostra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $|\vec{v}_0| = 20 \text{ m/s}$. Para que valores de h as duas partículas chocam-se antes de atingirem o solo? (Despreze os efeitos do ar.)



3. Lançamento oblíquo

Consideremos uma partícula lançada de um ponto O sobre a superfície da Terra (suposta plana e horizontal) com velocidade \vec{v}_0 cuja direção não é horizontal nem vertical (fig. 10), desprezando os efeitos do ar. Como no caso do lançamento horizontal, a trajetória será um arco de parábola (em relação à Terra).

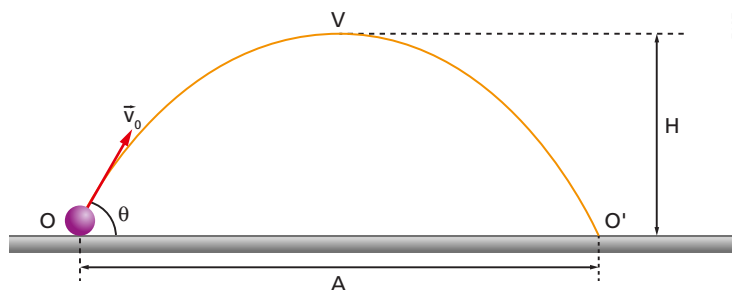


Figura 10.

Para este caso, damos as seguintes definições:

- **ângulo de tiro (θ):** é o ângulo formado por \vec{v}_0 com a direção horizontal;
- **vértice da trajetória (V):** é o ponto mais alto da trajetória;
- **alcance horizontal (A):** é a distância entre o ponto de lançamento (O) e o ponto onde a partícula atinge o solo (O').

Façamos a decomposição da velocidade em uma componente horizontal (\vec{v}_x) e uma componente vertical (\vec{v}_y), como fizemos no lançamento horizontal (fig. 11).

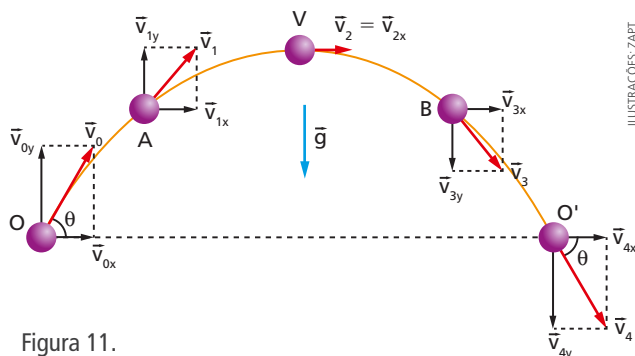


Figura 11.

A componente horizontal da velocidade se mantém constante:

$$\vec{v}_{0x} = \vec{v}_{1x} = \vec{v}_{2x} = \vec{v}_{3x} = \vec{v}_{4x}$$

À medida que a partícula sobe, a componente vertical \vec{v}_y tem seu módulo diminuído, até que no vértice ela se anula ($\vec{v}_{2y} = 0$). Daí em diante a partícula desce e o módulo \vec{v}_y vai aumentando.

Consideremos dois pontos da trajetória que estejam no mesmo nível, por exemplo, os pontos A e B da figura 11. De acordo com o que estudamos no lançamento vertical (capítulo 6), devemos ter $|\vec{v}_{1y}| = |\vec{v}_{3y}|$ e, portanto, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_3|$.

O mesmo ocorre com os pontos O e O' da figura 11:

$$|\vec{v}_{0y}| = |\vec{v}_{4y}| \quad \text{e} \quad |\vec{v}_0| = |\vec{v}_4|$$

De modo geral, em dois pontos da trajetória que estejam no mesmo nível horizontal, as velocidades são iguais em módulo.

As velocidades assinaladas na figura 11 foram representadas na figura 12 através de segmentos orientados de mesma origem; observemos que suas extremidades pertencem a uma mesma reta vertical r , pois $\vec{v}_{0x} = \vec{v}_{1x} = \vec{v}_{2x} = \vec{v}_{3x} = \vec{v}_{4x}$. Durante o movimento, a velocidade varia em módulo e direção; porém a aceleração (\vec{g}) é constante em módulo, direção e sentido.

Para obtermos as equações do movimento, adotemos um sistema de coordenadas Oxy, com o eixo Ox horizontal e o eixo Oy vertical, como mostra a figura 13.

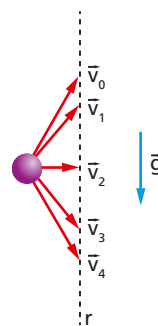


Figura 12.

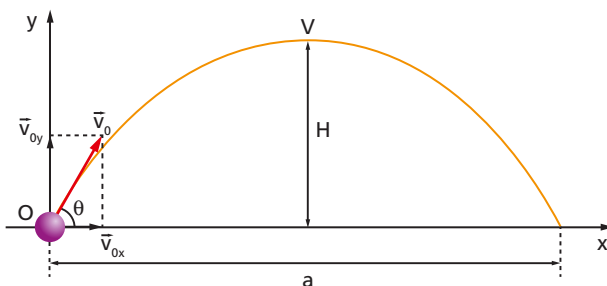


Figura 13.

Decompondo a velocidade \vec{v}_0 , obtemos:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$$

Na direção horizontal temos movimento uniforme. Assim, a equação horária da abscissa x é:

$$x = 0 + v_{0x}t \quad \text{ou} \quad x = v_{0x}t \quad (1)$$

Na direção vertical, temos movimento uniformemente variado de aceleração escalar $\alpha = -g$ (pois o eixo foi orientado para cima). Assim, as equações do movimento vertical são:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (3)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \quad (4)$$

Se quisermos obter o instante em que a partícula atinge a altura máxima, fazemos $v_y = 0$ na equação (3), obtendo assim o tempo de subida (t_{sub}). Se os pontos inicial e final estiverem no mesmo nível, o tempo de subida é igual ao de descida e o tempo total de voo é dado por:

$$t_{\text{voo}} = 2t_{\text{sub}}$$

Para obtermos o alcance, substituímos o valor de t_{voo} na equação (1).

Se quisermos a altura máxima H , poderemos proceder de dois modos:

1º) substituímos o valor de t_{sub} na equação (2);

2º) partimos da equação de Torricelli para o movimento vertical (equação (4)), e fazemos $v_y = 0$.

É importante destacar que as equações de (1) a (4) não precisam ser memorizadas. Elas podem ser obtidas, sempre que necessário, a partir das equações do MU e do MUV.

Relação entre as velocidades

Tanto no caso do lançamento horizontal como no do lançamento oblíquo, a componente vertical da velocidade inicial (v_{0y}) e a componente vertical da velocidade num outro ponto (v_y) estão relacionadas pela equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha(y - y_0)$$

sendo $\alpha = g$ se o eixo vertical estiver orientado para baixo e $\alpha = -g$ se o eixo vertical estiver orientado para cima. Se adicionarmos v_{0x}^2 aos dois membros da equação acima teremos:

$$\underbrace{v_{0x}^2 + v_y^2}_{v^2} = \underbrace{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}_{v_0^2} + 2\alpha(y - y_0)$$

ou:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(y - y_0) \quad (5)$$

A equação (5) pode ser generalizada. Sendo \vec{v}_1 a velocidade num ponto de ordenada y_1 e \vec{v}_2 a velocidade num ponto de ordenada y_2 (figs. 14a e 14b) temos:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\alpha(y_2 - y_1) \quad (6)$$

Podemos observar que a equação (6) tem forma semelhante à equação de Torricelli.

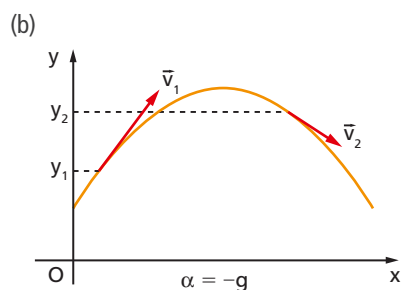
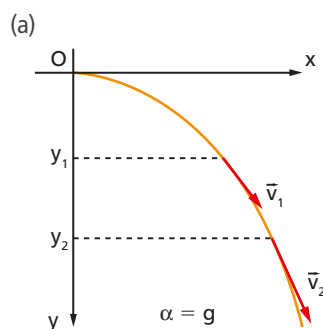


Figura 14.

Retomando o Princípio de Relatividade

No início do capítulo apresentamos o exemplo de Galileu para analisar o lançamento horizontal. Para analisar o lançamento oblíquo ele pensou num experimento semelhante ao ilustrado na figura 15, em que um indivíduo *B* está sobre um vagão que tem movimento retilíneo uniforme, com velocidade \vec{v} em relação à Terra (em vez de vagão, Galileu pensou num barco).

Suponhamos que o indivíduo *B* jogue uma bola para cima. A bola subirá e cairá novamente na sua mão (fig. 15a) do mesmo modo que o faria se o vagão estivesse em repouso em relação à Terra. Naturalmente, para um observador *A*, fixo em relação à Terra (fig. 15b), a trajetória da bola será um arco de parábola e a velocidade da bola, a cada instante, terá valores diferentes para os dois observadores. No entanto, para os dois observadores a aceleração da bola será a mesma (aceleração da gravidade), assim como a força resultante também o será (o peso).

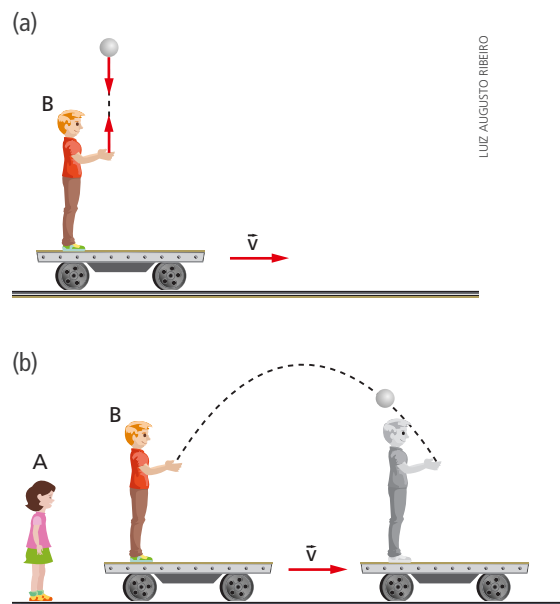


Figura 15.

Leitura

A imponderabilidade

No capítulo anterior vimos que, dentro de um elevador em queda livre, as pessoas sentem a **imponderabilidade** e, como veremos no capítulo 24, os astronautas nas naves espaciais também sentem esse efeito (fig. a).

No entanto, estar submetido à imponderabilidade durante longos intervalos de tempo provoca desconfortos fisiológicos, como, por exemplo, alguns órgãos de nosso abdômen, que não são fixos, ficam flutuando. Por isso, antes da viagem, os astronautas são submetidos a imponderabilidade durante algum tempo, para se acostumarem com a sensação e também treinarem a manipulação de objetos. Esse treinamento até poderia ser feito em um elevador, mas isso não é conveniente, pois não se consegue manter a queda livre durante um intervalo de tempo razoável.

Usa-se então outro procedimento. Os astronautas são colocados em um avião que atinge grande altitude. Quando o avião está com uma velocidade \vec{v}_0 previamente determinada, adquire a trajetória parabólica que seria seguida por uma partícula lançada com velocidade inicial \vec{v}_0 na ausência de resistência do ar (fig. b). Esse movimento, como sabemos, não depende da massa e, assim, todos os corpos dentro do avião descrevem uma parábola. Desse modo, consegue-se produzir imponderabilidade durante aproximadamente 20 segundos.



Figura a. Experiência de imponderabilidade em avião durante treinamento na Nasa, EUA.

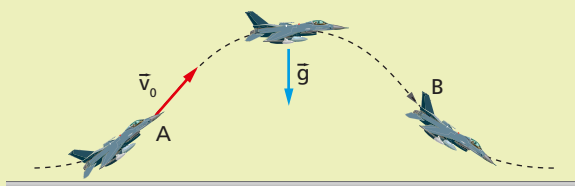


Figura b. De A até B a trajetória é parabólica.

Exercícios de Aplicação

11. No instante $t = 0$, uma partícula é lançada de um ponto O do solo (suposto plano e horizontal) com velocidade \vec{v}_0 formando ângulo θ com a horizontal. São dados $g = 10 \text{ m/s}^2$, $|\vec{v}_0| = 100 \text{ m/s}$, $\sin \theta = 0,6$ e $\cos \theta = 0,8$. Desprezam-se os efeitos do ar e adota-se um sistema de coordenadas com origem O , como mostra a figura a.

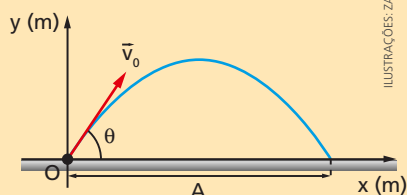


Figura a.

Determine:

- as equações horárias da abscissa x e da ordenada y da partícula;
- a equação horária da componente vertical da velocidade;
- as coordenadas da partícula no instante $t = 3,0 \text{ s}$ (supondo que nesse instante a partícula ainda não tenha atingido o solo);
- o módulo da velocidade no instante $t = 3,0 \text{ s}$;
- o ângulo formado pela velocidade da partícula com a direção horizontal, no instante $t = 3,0 \text{ s}$;
- o instante em que a partícula atinge o vértice da trajetória;
- o instante em que a partícula atinge o solo;
- o alcance horizontal;
- a altura máxima H atingida;
- o módulo da velocidade da partícula, no instante em que atinge o solo;
- o módulo da velocidade da partícula ao atingir o vértice da trajetória.

Resolução:

- a) Façamos a decomposição da velocidade inicial \vec{v}_0 nas direções horizontal e vertical:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta = 100(0,8) = 80$$

$$v_{0x} = 80 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta = 100(0,6) = 60$$

$$v_{0y} = 60 \text{ m/s}$$

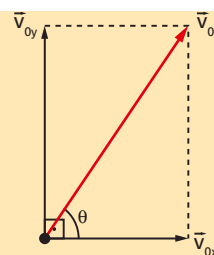


Figura b.

Na direção horizontal temos MU de posição inicial (x_0) nula. Assim:

$$x = x_0 + v_{0x}t = 0 + 80t$$

$$x = 80t \quad (1)$$

Na direção vertical temos MUV de posição inicial (y_0) nula, e aceleração escalar $\alpha = -g = -10 \text{ m/s}^2$, pois o eixo Oy foi orientado para cima. Assim,

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{\alpha}{2}t^2 = 0 + 60t - \frac{10}{2}t^2$$

$$y = 60t - 5,0t^2 \quad (2)$$

Para as duas equações estamos usando as coordenadas em metros e o tempo em segundos. Essas equações só valem, obviamente, até o instante em que a partícula atinge o solo.

- b) Na vertical temos MUV de velocidade escalar inicial $v_{0y} = 60 \text{ m/s}$ e a aceleração escalar $\alpha = -g = -10 \text{ m/s}^2$. Assim:

$$v_y = v_{0y} + \alpha t \Rightarrow v_y = 60 - 10t \quad (3)$$

com t em segundos e v_y em metros por segundo.

- c) Vimos que $x = 80t$ e $y = 60t - 5,0t^2$. Portanto, para $t = 3,0 \text{ s}$, temos:

$$x = 80(3,0) \Rightarrow x = 240 \text{ m}$$

$$y = 60(3,0) - 5,0(3,0)^2 \Rightarrow y = 135 \text{ m}$$

- d) $v_y = 60 - 10t = 60 - 10(3) \Rightarrow v_y = 30 \text{ m/s}$
Como $v_y > 0$, concluímos que nesse instante a partícula ainda está subindo.

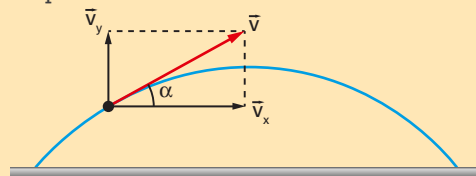


Figura c.

$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}_{0x}| = 80 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 = 80^2 + 30^2 = 7300$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{7300} = 10\sqrt{73}$$

$$|\vec{v}| = 10\sqrt{73} \text{ m/s}$$

e) Aproveitando a figura c, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}_x|} = \frac{30}{80} = 0,375$$

Consultando a tabela que você encontra no CD, obtemos: $\alpha \cong 21^\circ$

f) Quando a partícula atinge o ponto de altura máxima (vértice da trajetória) temos $v_y = 0$. Coloquemos esse valor na equação (3):

$$\left. \begin{array}{l} v_y = 60 - 10t \\ v_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 60 - 10t \Rightarrow t_{\text{sub}} = 6,0 \text{ s}$$

g) Neste caso o ponto inicial e o ponto final estão no mesmo nível e, assim, o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Portanto o tempo total (tempo de voo) é o dobro do tempo de subida:

$$t_{\text{voo}} = t_{\text{sub}} = 2(6,0 \text{ s}) \Rightarrow t_{\text{voo}} = 12 \text{ s}$$

h) O alcance horizontal (A) é obtido substituindo o tempo de voo na equação (1):

$$\left. \begin{array}{l} x = 80t \\ t = 12 \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 80(12) \Rightarrow x = 960 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 960 \text{ m}$$

i) Para calcular a altura máxima (H) podemos substituir o tempo de subida na equação (2).

$$\left. \begin{array}{l} y = 60t - 5t^2 \\ t = 6,0 \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 180 \Rightarrow H = 180 \text{ m}$$

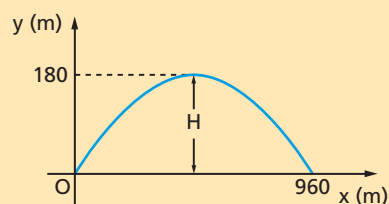


Figura d.

Outro modo é fazer $v_y = 0$ na equação de Torricelli para a componente vertical da velocidade:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha(y - y_0)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

$$0 = 60^2 - 2(10)(y - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 180 \text{ m}$$

j) No instante em que atinge o solo, a velocidade (\vec{v}) da partícula tem o mesmo módulo da velocidade de lançamento, pois os pontos inicial e final estão no mesmo nível.

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_0| = 100 \text{ m/s}$$

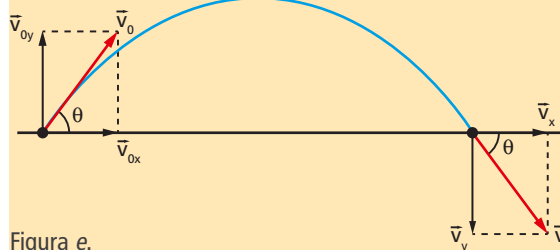


Figura e.

k) No vértice da trajetória, a componente vertical da velocidade é nula ($v_y = 0$). Assim, a velocidade é igual à componente horizontal de \vec{v}_0 .

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_{0x}| = 80 \text{ m/s}$$

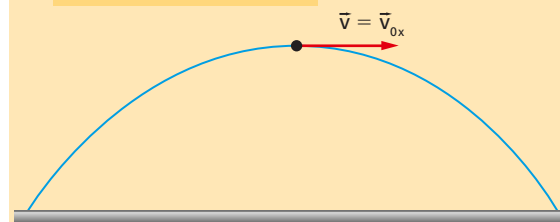
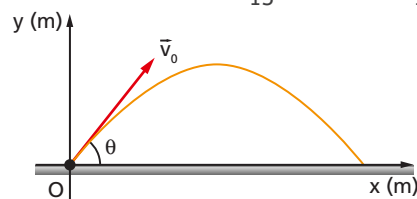


Figura f.

12. No instante $t = 0$, uma partícula é lançada de um ponto O do solo, com velocidade \vec{v}_0 formando um ângulo θ com a horizontal. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $|\vec{v}_0| = 130 \text{ m/s}$, $\text{sen } \theta = \frac{12}{13}$ e $\text{cos } \theta = \frac{5}{13}$.



Desprezando os efeitos do ar e adotando um sistema de coordenadas com origem em O, como mostra a figura, pedem-se:

- as equações horárias da abscissa x e da ordenada y da partícula;
- a equação horária da componente vertical da velocidade;
- as coordenadas da partícula no instante $t = 6,0 \text{ s}$;
- o módulo da velocidade da partícula no instante $t = 18 \text{ s}$: nesse instante a partícula está subindo ou descendo?
- o ângulo formado entre a velocidade e a direção horizontal no instante $t = 18 \text{ s}$;
- o instante em que a partícula atinge o vértice da trajetória;
- o instante em que a partícula atinge o solo;
- o alcance horizontal;

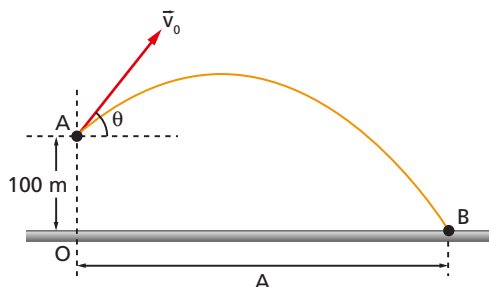
- i) a altura máxima H atingida;
- j) o módulo da velocidade da partícula, no instante em que atinge o solo;
- k) o módulo da velocidade da partícula ao atingir o vértice da trajetória;
- l) os gráficos das componentes horizontal e vertical da velocidade, em função do tempo;
- m) a equação da trajetória.

13. Para a situação da questão anterior, determine o módulo da velocidade da partícula quando passar por um ponto situado 665 m acima do solo. (Sugestão: use a equação (6) desenvolvida na teoria.)

14. Uma partícula foi lançada com velocidade \vec{v}_0 formando um ângulo de 30° com a direção horizontal, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Calcule $|\vec{v}_0|$, sabendo que a partícula atinge o vértice de sua trajetória 8,0 segundos após o lançamento. (Despreze os efeitos do ar.)

15. Numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, uma partícula é lançada com velocidade \vec{v}_0 cujo módulo é 125 m/s. Determine o ângulo de tiro sabendo que a partícula atinge o vértice da trajetória 5,0 segundos após o lançamento.

16. Uma partícula é lançada no instante $t = 0$ de um ponto A situado a 100 metros acima do solo, com velocidade inicial \vec{v}_0 formando ângulo θ com a direção horizontal. A partícula atinge o solo no ponto B. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $|\vec{v}_0| = 50 \text{ m/s}$, $\sin \theta = 0,80$ e $\cos \theta = 0,60$.



Desprezando os efeitos do ar, determine:

- a) o instante em que a partícula atinge a altura máxima;
- b) o valor da altura máxima;
- c) o instante em que a partícula atinge o solo;
- d) o alcance horizontal A;
- e) o módulo da velocidade da partícula quando atinge o solo.

17. (U. F. Uberaba-MG) Uma bola é chutada em uma direção que forma um ângulo de 45° com a horizontal. Desprezando-se os atritos com o ar, no ponto mais alto que a bola atinge, a intensidade de:

- a) sua velocidade é zero.
- b) sua aceleração é zero.
- c) sua velocidade é mínima, mas diferente de zero.
- d) sua aceleração é mínima, mas diferente de zero.
- e) sua velocidade e sua aceleração têm módulos iguais.

18. (UE-CE) Um projétil foi lançado a partir do solo com velocidade v_0 (em módulo) segundo um ângulo $\theta_0 \neq 0$, acima da horizontal. Desprezando o atrito com o ar, o módulo da velocidade do projétil no topo da sua trajetória é:

- a) $v = v_0 \cos \theta_0$
- b) $v = 0$
- c) $v = v_0 \sin \theta_0$
- d) $v = v_0$

19. (UF-PE) Um projétil é lançado obliquamente no ar, com velocidade inicial $v_0 = 20 \text{ m/s}$, a partir do solo. No ponto mais alto de sua trajetória, verifica-se que ele tem velocidade igual a metade de sua velocidade inicial. Qual a altura máxima, em metros, atingida pelo projétil? (Despreze a resistência do ar.)

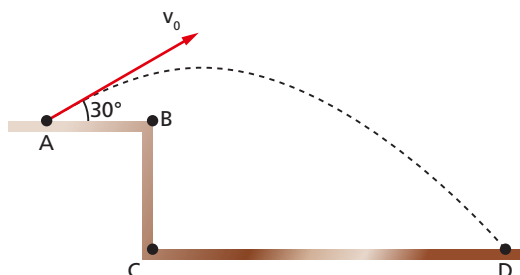
20. (U. F. São Carlos-SP) Um vagão hermeticamente fechado e à prova de som encerra em seu interior um homem e trafega em um trecho reto de estrada. O homem lança uma moeda verticalmente para cima (em relação a ele) deixando-a cair em seguida. A partir dessa experiência considere as sentenças:

- I. O homem não tem condições de descobrir se o trem está parado ou em movimento retilíneo uniforme porque, em ambas as hipóteses, a moeda descreve trajetória retilínea em relação ao vagão.
- II. O sentido do movimento do vagão não pode ser determinado pelo homem, caso o vagão se mova com velocidade constante.
- III. O homem tem condições de descobrir se o trem está acelerado.

Quais são as sentenças verdadeiras?

O enunciado a seguir refere-se às questões de números 21 e 22:

A figura representa um projétil, que é lançado do ponto A segundo um ângulo de 30° com a horizontal, com uma velocidade $v_0 = 100 \text{ m/s}$, atingindo o ponto D. (Dados: $AB = 40 \text{ m}$; $BC = 55 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\sin 30^\circ = 0,50$; $\cos 30^\circ = 0,866$.)



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

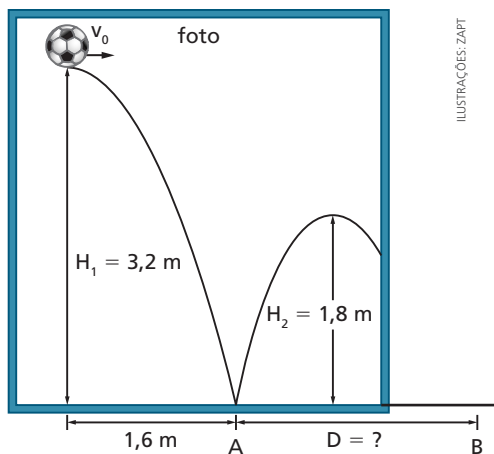
21. (UF-PA) O tempo que o projétil levou para atingir o ponto D , em segundos, vale:

- a) 5,3 b) 7,8 c) 11 d) 12,6 e) 16,2

22. (UF-PA) A distância CD , em metros, vale:

- a) 418,98 c) 692,86 e) 1051,16
b) 458,98 d) 912,60

23. (Fuvest-SP) Uma bola chutada horizontalmente de cima de uma laje, com velocidade v_0 , tem sua trajetória parcialmente registrada em uma foto, representada no desenho a seguir. A bola bate no chão, no ponto A , voltando a atingir o chão em B , em choques parcialmente inelásticos. (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

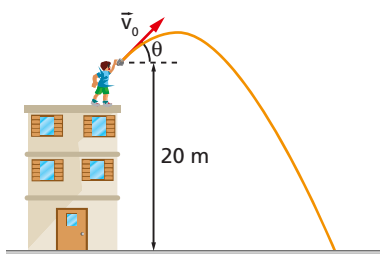


NOTE E ADOTE:

- Nos choques, a velocidade horizontal da bola não é alterada.
- Desconsidere a resistência do ar, o atrito e os efeitos de rotação da bola.

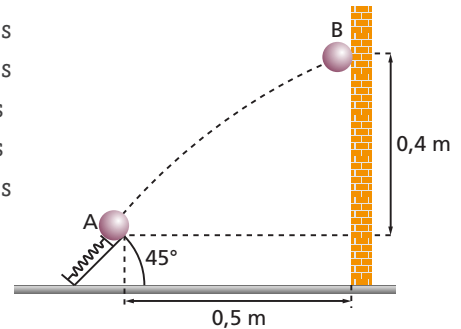
- a) Estime o tempo T , em s , que a bola leva até atingir o chão, no ponto A .
- b) Calcule a distância D , em metros, entre os pontos A e B .
- c) Determine o módulo da velocidade vertical da bola v_A , em m/s , logo após seu impacto com o chão no ponto A .

24. Numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, uma pessoa joga uma pedra do alto de um prédio, com velocidade inicial \vec{v}_0 , de módulo 15 m/s , como ilustra a figura. Calcule o módulo da velocidade com que a pedra atinge o solo.

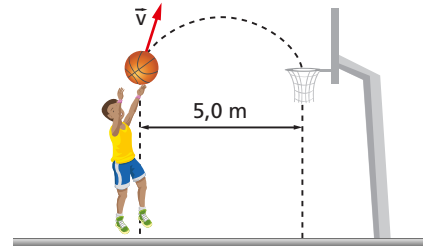


25. (UF-PR) Um jogo consiste em lançar uma bolinha com um dispositivo dotado de mola, cujo objetivo é atingir um ponto B , predefinido, na parede, como ilustrado na figura. O ponto A representa a posição da bolinha no momento imediatamente seguinte ao seu lançamento. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. Com base nesses dados, podemos afirmar que a velocidade de lançamento da bolinha deve ser:

- a) 5,0 m/s
b) 4,0 m/s
c) 10 m/s
d) 20 m/s
e) 3,0 m/s



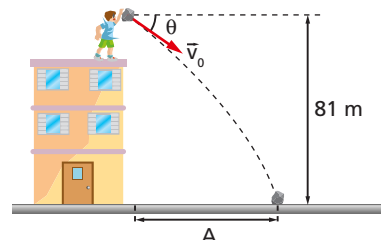
26. (UF-RJ) O cronômetro marcava 1,1 s para o término de uma partida de basquete do Brasil, quando Oscar, tendo saltado e flexionado o braço, arremessou a bola com uma força impulsora que atuou por 0,1 s. A bola, que estava a 5,0 m do centro da cesta, levou 1,0 s para chegar à mesma.



Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, que a massa da bola é 0,6 kg e considerando que, ao pular e arremessar a bola, a mão de Oscar estava na mesma altura que a cesta, calcule:

- a) o módulo da velocidade de lançamento para que Oscar converta o arremesso;
- b) o módulo da força média necessária ao lançamento.

27. Numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, uma pedra é lançada com velocidade inicial \vec{v}_0 , como ilustra a figura. São dados $v_0 = 15 \text{ m/s}$; $\sin \theta = 0,80$ e $\cos \theta = 0,60$.



- a) Depois de quanto tempo a pedra atinge o solo?
- b) Calcule o alcance horizontal A .

4. Estudo do alcance

Vamos fazer o estudo do alcance de um projétil para o caso em que o ponto inicial e o ponto final estão no mesmo nível, como ilustra a figura 16. Temos:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta \end{cases}$$

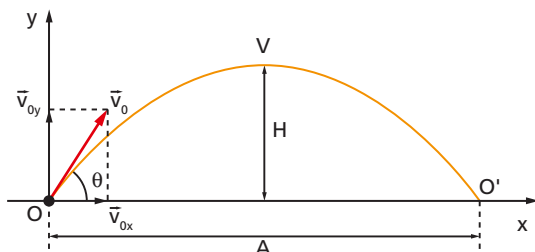


Figura 16.

Para a direção horizontal, temos:

$$s = s_0 + vt \Rightarrow x = v_{0x} \cdot t \Rightarrow x = (v_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot t \quad (1)$$

Para a direção vertical, temos:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v_y = v_{0y} - gt \Rightarrow v_y = (v_0 \cdot \sin \theta_0) - gt \quad (2)$$

O tempo de subida t_{sub} pode ser obtido fazendo-se $v_y = 0$ na equação (2):

$$0 = (v_0 \cdot \sin \theta_0) - gt_{\text{sub}} \Rightarrow t_{\text{sub}} = \frac{v_0 \cdot \sin \theta_0}{g}$$

O tempo total (t_T) do movimento é o dobro do tempo de subida:

$$t_T = 2t_{\text{sub}} = \frac{v_0 \cdot \sin \theta_0}{g}$$

Substituindo esse tempo na equação (1), obtemos o alcance:

$$A = (v_0 \cdot \cos \theta_0) \left(\frac{2v_0 \cdot \sin \theta_0}{g} \right) = \frac{v_0^2 (2 \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0)}{g} \quad (3)$$

Na Trigonometria aprendemos que: $2 \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 = \sin (2\theta_0)$.

Substituindo em (3):

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \sin (2\theta_0)}{g} \quad (4)$$

Mantendo fixo o valor de v_0 e variando o ângulo de tiro θ , vemos que o alcance será máximo quando $\sin 2\theta$ for máximo, isto é, quando $\sin 2\theta = 1$. Assim, o alcance máximo é:

$$A_m = \frac{v_0^2}{g}$$

E ocorre quando $\sin 2\theta = 1$, isto é, $2\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 45^\circ$.

Resumindo:

Mantendo fixo o valor de v_0 , o alcance máximo é $A_m = \frac{v_0^2}{g}$ e ocorre para $\theta = 45^\circ$.

No exercício 29 pediremos que você mostre que, na condição de alcance máximo, a relação entre o alcance máximo (A_m) e a altura máxima H é: $A_m = 4H$.

Ângulos de lançamento complementares

Consideremos duas partículas, A e B , lançadas de um mesmo ponto, com velocidade \vec{v}_A e \vec{v}_B , respectivamente, tais que $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B|$. Sejam θ e α os ângulos de tiro, respectivamente. Os alcances serão iguais para $\theta + \alpha = 90^\circ$, isto é, quando os ângulos de tiro forem complementares (fig. 17).

Demonstração:

Os alcances das partículas A e B são:

$$\begin{cases} A_A = \frac{v_A^2 \cdot \sin(2\theta)}{g} \\ A_B = \frac{v_B^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \end{cases}$$

Igualando os alcances, obtemos:

$$A_A = \frac{v_A^2 \cdot \sin(2\theta)}{g} = A_B = \frac{v_B^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \quad \text{ou} \quad \sin 2\theta = \sin 2\alpha,$$

pois $v_A = v_B$.

Portanto:

$$2\theta + 2\alpha = 180^\circ \quad \text{ou} \quad \theta + \alpha = 90^\circ$$

Assim, por exemplo, para $\alpha = 10^\circ$ e $\theta = 80^\circ$ obtemos o mesmo alcance (fig. 18), desde que v_0 seja o mesmo, pois $10^\circ + 80^\circ = 90^\circ$. Do mesmo modo, para $\alpha = 30^\circ$ e $\theta = 60^\circ$ obteremos o mesmo alcance (para um mesmo v_0), pois $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

É importante ressaltar que a propriedade do alcance máximo para $\theta = 45^\circ$ e a propriedade dos ângulos complementares valem apenas quando o ponto inicial e o ponto final estão no mesmo nível.

No caso real, em que há resistência do ar, a trajetória do projétil não é parabólica, e o alcance máximo é obtido para um ângulo menor que 45° (fig. 19).

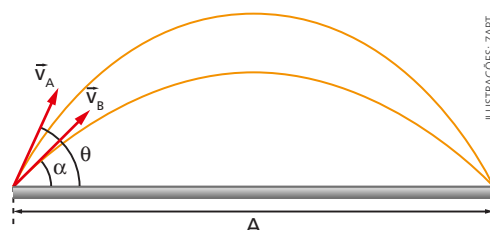


Figura 17.

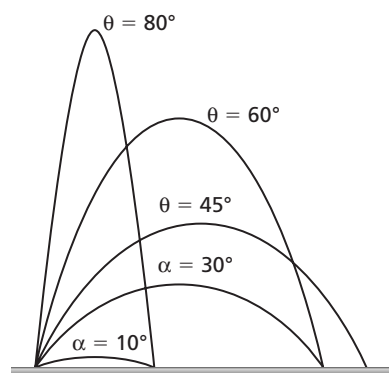


Figura 18.

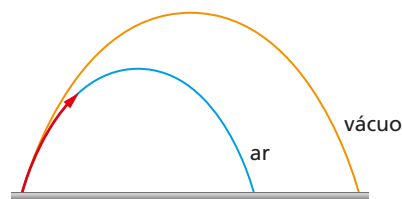


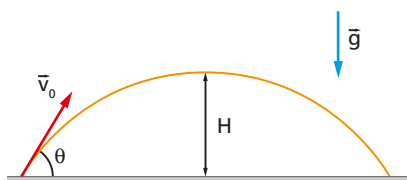
Figura 19.

Exercícios de Aplicação

28. Um canhão dispara projéteis com velocidade $v_0 = 200$ m/s. Desprezando os efeitos do ar e adotando $g = 10$ m/s², calcule:

- o alcance horizontal máximo;
- a altura máxima quando o alcance horizontal for máximo.

29. Uma partícula é lançada a partir do solo, com velocidade inicial \vec{v}_0 que forma ângulo θ com a horizontal.

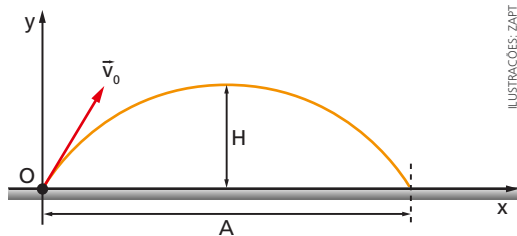


- Determine o valor da altura máxima H em função de v_0 , θ e g .
- Mostre que, quando o alcance for máximo (A_m), teremos $A_m = 4H$.

30. (U. F. ABC-SP) Em certa ocasião, enquanto regava um jardim, um profissional percebeu que, colocando a saída de água da mangueira quase na posição vertical e junto ao solo, se ele variasse a inclinação com a qual a água saía, ela atingia posições diferentes, mas nunca ultrapassava a distância horizontal de 9,8 m do ponto de partida. Com essa informação, adotando $g = 10$ m/s², desprezando a resistência do ar e sabendo que a água sai da mangueira com velocidade escalar constante, pode-se concluir que essa velocidade vale, aproximadamente, em m/s:

- 14
- 12
- 10
- 8
- 6

31. (Aman-RJ) Uma bola é lançada no vácuo, numa direção que faz um ângulo de 45° com a horizontal, conforme a figura.



A relação entre A e H vale:

- a) $A = \frac{\sqrt{2}}{2} H$ c) $A = 6 H$ e) $A = 2 H$
b) $A = \sqrt{2} H$ d) $A = 4 H$

32. (UF-AL) Um garoto sentado no chão lança uma bolinha de gude na direção de um buraco situado a 2 metros de distância, em um terreno horizontal. A bolinha parte do solo em uma direção que faz um ângulo de 45° acima da horizontal. Despreze a resistência do ar. Para que a bolinha caia dentro do buraco, o módulo da velocidade inicial de lançamento, em m/s, deve ser: (Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- a) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{40}$
b) $\sqrt{20}$ e) $\sqrt{50}$
c) $\sqrt{30}$

5. Equações vetoriais do movimento de um projétil

Para um movimento em que a aceleração escalar α é constante (MUV) sabemos que valem as seguintes equações escalares:

$$v = v_0 + \alpha t \quad (1) \quad \text{e} \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2)$$

Vetorialmente há equações análogas quando a aceleração vetorial é constante, como são os casos do movimento de um projétil (desprezando a resistência do ar) e do movimento vertical livre estudado no capítulo 6. Nos dois casos temos uma aceleração constante \vec{g} cuja direção é vertical e cujo sentido é para baixo.

Na figura 20 exemplificamos o caso do lançamento de um projétil. Sendo \vec{v}_0 a velocidade no instante inicial $t = 0$ e \vec{v} a velocidade no instante t , temos:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \quad (3)$$

Em correspondência com a equação escalar (2) temos a equação vetorial:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (4)$$

sendo \vec{p}_0 o vetor posição inicial e \vec{p} o vetor posição num instante t .

Sendo \vec{d} o vetor deslocamento entre o instante inicial e o instante t , temos:

$$\vec{d} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

e a equação (4) transforma-se em:

$$\vec{d} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (5)$$

como ilustra a figura 21, em que P é a posição do projétil no instante t .

O tratamento vetorial é particularmente útil quando temos que analisar os movimentos simultâneos de duas partículas cujas trajetórias estão contidas em um mesmo plano vertical (veja os Exercícios de Aprofundamento 49 a 55).

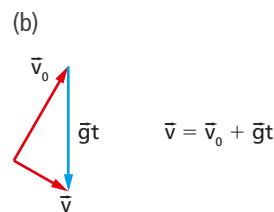
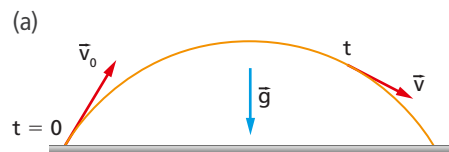


Figura 20.

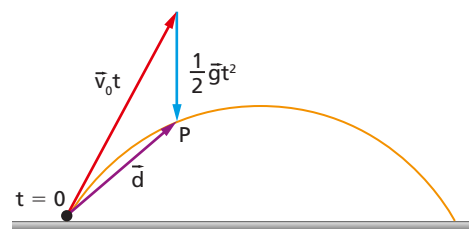


Figura 21.

Exercícios de Aplicação

33. Uma partícula é lançada a partir da origem de um sistema de coordenadas Oxy , com velocidade inicial \vec{v}_0 formando ângulo θ com o eixo Ox como mostra a figura. São dados: $v_0 = 50 \text{ m/s}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\sin \theta = 0,80$; $\cos \theta = 0,60$. Determine as coordenadas da partícula após 4,0 segundos.

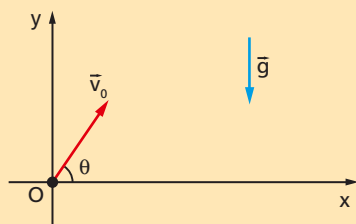


Figura a.

Resolução:

O deslocamento vetorial da partícula (\vec{d}) é dado por:

$$\vec{d} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

No instante $t = 4,0 \text{ s}$ temos:

$$|\vec{v}_0 t| = |\vec{v}_0| \cdot t = (50 \text{ m/s})(4,0 \text{ s}) = 200 \text{ m}$$

$$\left| \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right| = \frac{1}{2} |\vec{g}| t^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ m/s}^2)(4,0 \text{ s})^2 = 80 \text{ m}$$

Portanto, nesse instante a partícula estará no ponto Q da figura b, sendo:

$$OP = 200 \text{ m e } PQ = 80 \text{ m}$$

No triângulo retângulo OPR temos:

$$\cos \theta = \frac{OR}{OP} \Rightarrow 0,60 = \frac{OR}{200} \Rightarrow OR = 120 \text{ m}$$

$$\sin \theta = \frac{PR}{OP} \Rightarrow 0,80 = \frac{PR}{200} \Rightarrow PR = 160 \text{ m}$$

$$\text{Mas: } QR = PR - PQ = 160 \text{ m} - 80 \text{ m} = 80 \text{ m}$$

Portanto, as coordenadas do ponto Q são:

$$x = OR = 120 \text{ m} \quad \text{e} \quad y = QR = 80 \text{ m}$$

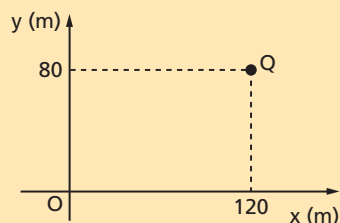


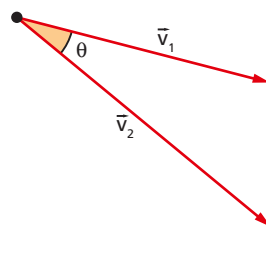
Figura c.

34. (Unicamp-SP) Até os experimentos de Galileu Galilei, pensava-se que, quando um projétil era arremessado, o seu movimento devia-se ao *impetus*, o qual mantinha o projétil em linha reta e com velocidade constante. Quando o *impetus* acabas-

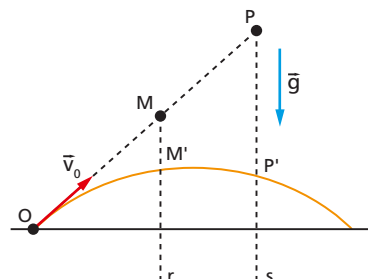
se, o projétil cairia verticalmente até atingir o chão. Galileu demonstrou que a noção de *impetus* era equivocada. Consideremos que um canhão dispara projéteis com uma velocidade inicial de 100 m/s , fazendo um ângulo de 30° com a horizontal. Dois artilheiros calcularam a trajetória de um projétil: um deles, Simplicio, utilizou a noção de *impetus*; o outro, Salviati, as ideias de Galileu. Os dois artilheiros concordavam apenas em uma coisa: o alcance do projétil. Considere $\sqrt{3} \approx 1,8$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$. Despreze o atrito com o ar.

- Qual é o alcance do projétil?
- Qual é a altura máxima alcançada pelo projétil, segundo os cálculos de Salviati?
- Qual é a altura máxima calculada por Simplicio?

35. Uma partícula é lançada horizontalmente, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sejam \vec{v}_1 e \vec{v}_2 as velocidades da partícula nos instantes t_1 e t_2 respectivamente (com $t_2 > t_1$). A figura representa \vec{v}_1 e \vec{v}_2 por segmentos orientados de mesma origem. Sabendo que $\cos \theta = \frac{11}{\sqrt{130}}$, $|\vec{v}_1| = 10\sqrt{5} \text{ m/s}$ e $|\vec{v}_2| = 10\sqrt{26} \text{ m/s}$, calcule o valor de $t_2 - t_1$. (Despreze os efeitos do ar.)



36. (Cesgranrio-RJ) Uma pedra é lançada do ponto O com velocidade inicial \vec{v}_0 . O ponto M é o ponto médio do segmento \overline{OP} . No instante em que a pedra cruza a reta vertical r , a distância MM' é igual a 2,0 metros. Desprezando a resistência do ar, quando a pedra cruzar a reta vertical s , qual o valor da distância PP' ?



6. Alcance máximo em geral

As conclusões sobre o alcance máximo, tiradas no item 4, valem apenas quando os pontos inicial e final estão no mesmo nível. Para uma situação como a da figura 22 iremos demonstrar adiante que o alcance máximo é dado por:

$$A_m = \frac{v_0 \cdot v}{g} \quad (1)$$

e ocorre quando θ for tal que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0}{v} \quad (2)$$

Como $v_0 < v$, temos $\frac{v_0}{v} < 1$ e da equação (2) tiramos $\operatorname{tg} \theta < 1$, o que acarreta $\theta < 45^\circ$.

Demonstração:

Na figura 23 representamos os vetores \vec{v}_0 e \vec{v} a partir da mesma origem R . Como

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

o segmento \vec{ST} tem módulo igual a $g \cdot t$, em que t é o tempo gasto entre a posição inicial e a posição final.

Apliquemos a Lei dos Senos ao triângulo RST:

$$\frac{gt}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{v}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (3)$$

Mas os ângulos φ e θ são complementares e, portanto, $\operatorname{sen} \varphi = \cos \theta$. Substituindo na equação (3):

$$\frac{gt}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{v}{\cos \theta}$$

donde:

$$(\cos \theta)t = \frac{v \operatorname{sen} \beta}{g}$$

Multiplicando os dois membros dessa equação por v_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{(v_0 \cos \theta)t}_{v_{0x}} &= \frac{v_0 v \operatorname{sen} \beta}{g} \\ v_{0x} \cdot t &= \frac{v_0 \cdot v \cdot \operatorname{sen} \beta}{g} \end{aligned}$$

Mas $v_{0x} \cdot t$ é o alcance A ; portanto:

$$A = \frac{v_0 \cdot v \cdot \operatorname{sen} \beta}{g}$$

Como vimos no item 3, para um dado h o valor de v está determinado. Assim, como v_0 , v e g são fixos, o alcance será máximo quando $\operatorname{sen} \beta$ for máximo, isto é:

$$\operatorname{sen} \beta = 1 \quad \text{e} \quad \beta = 90^\circ$$

Portanto, o alcance máximo é dado por:

$$A = \frac{v_0 v}{g}$$

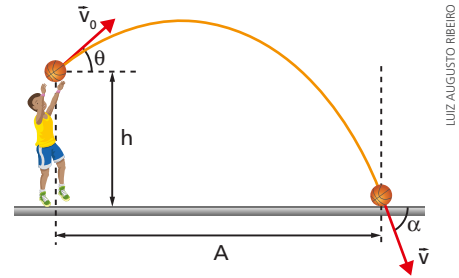


Figura 22.

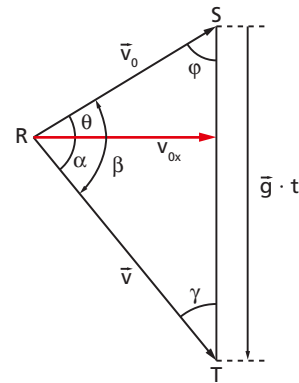


Figura 23.

Mas, se $\beta = 90^\circ$, $\theta + \alpha = 90^\circ$, donde concluímos que $\varphi = \alpha$ e $\gamma = \theta$ (fig. 24). Assim, do triângulo retângulo RST tiramos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{v_0}{v}$$

Para o caso de alcance máximo, o tempo de voo pode ser obtido aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo RST da figura 24:

$$(gt)^2 = v_0^2 + v^2$$

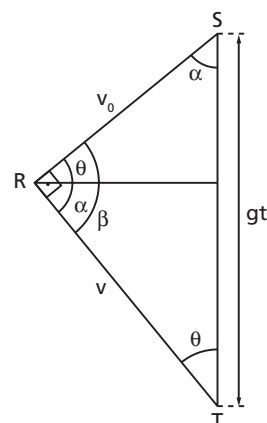


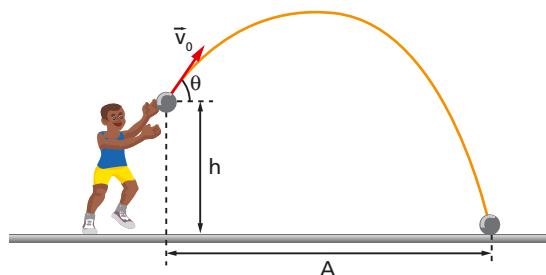
Figura 24.

Exercício de Aplicação

37. Um atleta olímpico consegue lançar o peso com uma velocidade inicial cujo módulo é aproximadamente $v_0 = 14 \text{ m/s}$. Suponha que ao sair da mão do atleta a altura da bola seja $h = 2,0 \text{ m}$ e que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Desprezando a resistência do ar, calcule:

- o alcance máximo do lançamento;
- o ângulo θ para o qual ocorre o alcance máximo;
- o tempo de voo na condição de alcance máximo.



7. Galileu, Newton e a Lei da Inércia

Ao ler os comentários que fizemos sobre Galileu e os projéteis, você poderá ser tentado a concordar com uma afirmação que é feita com frequência: “a Lei da Inércia é de Galileu”. Mas isso não é verdade. Galileu deu um passo importante em direção à Lei da Inércia, quando mostrou que, na direção horizontal, se não houver resistência do ar, a tendência é a de que o projétil mantenha sua velocidade.

Outro passo importante foi dado por meio dos experimentos dos planos inclinados. A figura 25 ilustra o aparato usado por Galileu. Ele abandonou uma bolinha, de uma altura h , sobre uma superfície inclinada (A) e muito lisa. A bolinha descia ganhando velocidade e logo a seguir subia pela superfície B até atingir aproximadamente a mesma altura h .

Em seguida, ele repetiu o experimento, variando a inclinação do segundo plano (C, D, etc.) e, em cada caso, a bolinha atingia praticamente a mesma altura h . A partir disso, concluiu que, se o segundo plano se tornasse horizontal (E), a bolinha, “tentando” atingir a altura h , nunca mais iria parar.

À primeira vista, pode parecer que, ao tirar essa conclusão, Galileu estivesse enunciando a Lei da Inércia de Newton, mas não é verdade.

Em primeiro lugar, Galileu achava que a trajetória da bolinha no plano horizontal E poderia ser considerada retilínea para “pequenas” distâncias em comparação com o tamanho da Terra. Ele acreditava que, se a Terra fosse perfeitamente redonda (sem montanhas nem buracos) e lisa, a tendência da bolinha seria dar a volta em torno da

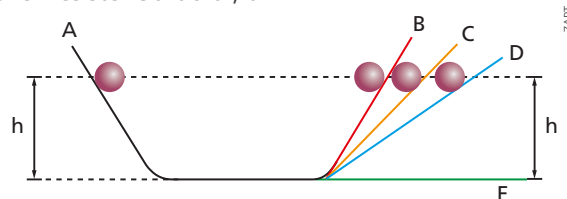
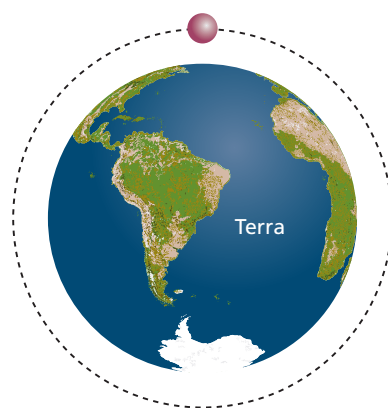


Figura 25. Ilustração do experimento de planos inclinados de Galileu.

Terra (fig. 26), descrevendo, portanto, um movimento circular. Galileu não percebeu que, na realidade, o movimento circular tinha aceleração centrípeta.

Em segundo lugar, Galileu também achava natural o movimento aproximadamente circular de um planeta em torno do Sol. Ele não associou esse movimento à existência de uma força e também não percebeu que essa força entre o Sol e o planeta era do mesmo tipo da força que provocava a queda dos corpos próximos à superfície da Terra. Na realidade, o conceito de **força de ação a distância** não era aceitável para a maioria dos cientistas daquela época. Newton teve muita dificuldade em fazer com que esse conceito fosse aceito; vários cientistas da época (principalmente os partidários de Descartes) o acusaram de introduzir “qualidades ocultas” na Física.

Portanto, podemos dizer que a Lei da Inércia, tal qual a conhecemos hoje, é de Newton, e não de Galileu, embora não haja dúvida de que Galileu forneceu uma fantástica pista para Newton.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Figura 26.

8. Trajetórias possíveis com força resultante constante

No capítulo 6 analisamos o movimento de uma partícula sob a ação exclusiva do peso, nas proximidades da superfície da Terra, de modo que o peso pode ser considerado constante durante o movimento. Vimos que, tanto no caso em que a partícula é abandonada como no caso em que ela é lançada com velocidade \vec{v}_0 , cuja direção é a do peso, a trajetória é retilínea e o movimento é uniformemente variado.

Neste capítulo analisamos o movimento de uma partícula lançada com velocidade inicial \vec{v}_0 , cuja direção é diferente da do peso, mas ainda supondo que o peso, além de ser a única força atuante na partícula, é constante. Vimos que, nesse caso, a trajetória da partícula é um arco de parábola.

De modo geral, toda vez que a resultante \vec{F} das forças que atuam numa partícula for constante (em módulo, direção e sentido) só haverá duas trajetórias possíveis para a partícula: retilínea ou parabólica, dependendo da velocidade inicial \vec{v}_0 .

Se \vec{v}_0 for nula ou de mesma direção de \vec{F} , a trajetória será retilínea e o movimento será uniformemente variado.

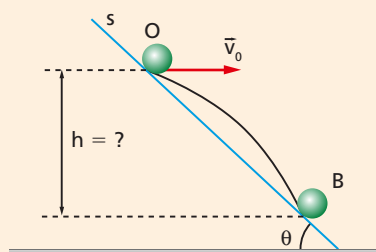
Se \vec{v}_0 tiver direção diferente de \vec{F} , a trajetória será parabólica.

Durante a Idade Média houve pouco progresso na ciência, embora tenha havido progresso técnico, com várias invenções interessantes. Porém, entre os séculos XVI e XVIII houve uma explosão de realizações na ciência e, em particular, na Física, com destaques para Galileu e Newton. Essa explosão de realizações ficou conhecida como “Revolução Científica”. Para saber mais sobre esse período, apresentamos algumas sugestões de leitura no final do capítulo.

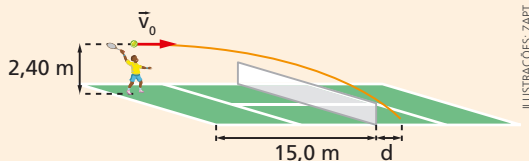
Exercícios de Aprofundamento

38. Consideremos uma superfície plana S , cuja inclinação em relação ao solo é $\theta = 37^\circ$. De um ponto O da superfície S uma partícula é lançada horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 cujo módulo é $v_0 = 40 \text{ m/s}$. Seja B o ponto onde a partícula atinge S . Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando os efeitos do ar, calcule:

- o desnível h entre O e B (veja a figura);
- o comprimento do segmento \overline{OB} .

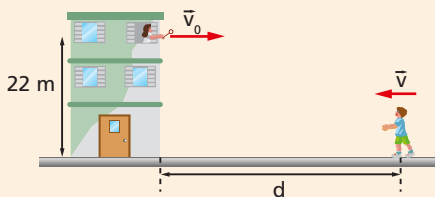


39. Um jogador de tênis atinge uma bolinha imprimindo-lhe uma velocidade inicial \vec{v}_0 cuja direção é horizontal. Despreze a resistência do ar, suponha $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a rede tem altura de 90 cm.



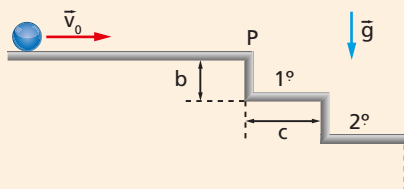
- Qual é o menor valor de $|\vec{v}_0|$ para o qual a bola consegue passar a rede?
- Para o valor de $|\vec{v}_0|$ obtido no item anterior, qual é a distância d entre a rede e o ponto onde a bola atinge o solo?

40. Uma senhora joga, pela janela de seu apartamento, a chave da porta para seu filho, que aguarda no solo. A chave é lançada com velocidade horizontal \vec{v}_0 cujo módulo é $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$ de um ponto situado 22 m acima do solo (veja a figura). No exato instante em que a chave é lançada, o filho começa a se movimentar com velocidade constante \vec{v} , de módulo $v = 5,0 \text{ m/s}$, em direção ao prédio. Com isso, consegue apanhar a chave em um ponto situado 2,0 m acima do solo.



Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando a resistência do ar, determine a distância d entre o filho e o prédio, no momento em que a chave foi lançada.

41. Numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, uma bolinha move-se inicialmente com velocidade constante \vec{v}_0 sobre uma superfície horizontal sem atrito. No ponto P atinge uma escada cujos degraus têm altura $b = 20 \text{ cm}$ e largura $c = 30 \text{ cm}$.

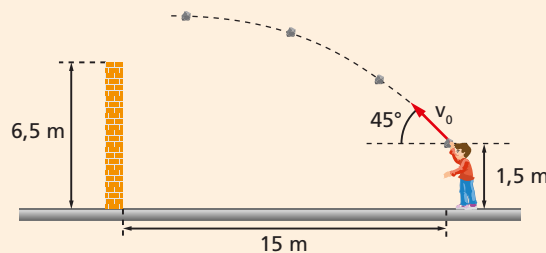


Sabendo que $v_0 = 5,0 \text{ m/s}$, determine qual degrau será atingido em primeiro lugar pela bolinha.

42. Um jogador de futebol baterá uma falta. A bola deverá ultrapassar a barreira formada 10 m à sua frente. Despreze os efeitos da resistência do ar e das dimensões da bola. Considere um ângulo de

lançamento de 45° , $g = 10 \text{ m/s}^2$ e velocidade inicial de lançamento igual a $5\sqrt{5} \text{ m/s}$. Determine qual é a altura máxima da barreira para que a bola a ultrapasse.

43. Um garoto de 1,5 m de altura, que está parado, em pé, a uma distância de 15 m em frente a um muro de 6,5 m de altura, lança uma pedra com um ângulo de 45° com a horizontal.



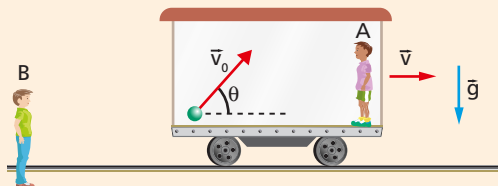
Com que velocidade mínima deve lançar a pedra para que esta passe por cima do muro? Despreze a resistência do ar. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 11 m/s
- 14 m/s
- 15 m/s
- 16 m/s
- 17 m/s

44. (FEI-SP) Um objeto voa numa trajetória retilínea, com velocidade $v = 200 \text{ m/s}$, a uma altura $h = 1500 \text{ m}$ do solo. Quando o objeto passa exatamente na vertical de uma peça de artilharia, esta dispara um projétil, num ângulo de 60° com a horizontal. O projétil atinge o objeto decorrido o intervalo de tempo Δt . Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e considere $\sqrt{3} = 1,73$.

- Calcular a velocidade de lançamento do projétil.
- Calcular o menor intervalo de tempo Δt em que o projétil atinge o objeto.

45. Dentro de um vagão de trem que se move horizontalmente com velocidade constante \vec{v} (veja a figura), uma partícula é lançada obliquamente a partir do piso do trem, de modo que, para um observador A , fixo dentro do vagão, a velocidade inicial é \vec{v}_0 e o ângulo de lançamento é $\theta = 60^\circ$. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $v = 20 \text{ m/s}$, $v_0 = 30 \text{ m/s}$.



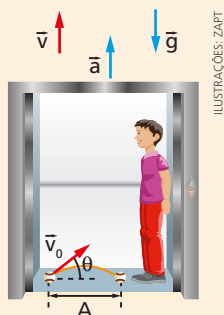
Para o observador B , que está parado no solo, determine:

- a velocidade inicial do lançamento;
- o ângulo de lançamento.

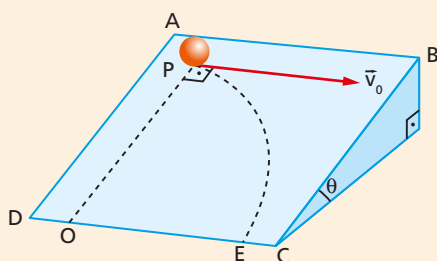
46. Para a situação da questão anterior, sejam a e b as alturas máximas da partícula, observadas por A e B, respectivamente. Podemos afirmar que:

- a) $a > b$ d) $a = \frac{3}{2}b$
 b) $a < b$ e) $a = \frac{2}{3}b$
 c) $a = b$

47. Dentro de um elevador que sobe com movimento acelerado de aceleração \vec{a} , uma bolinha é lançada do piso do elevador de modo que, para um observador dentro do elevador, a velocidade inicial é \vec{v}_0 e o ângulo de lançamento é θ . São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $a = 2,0 \text{ m/s}^2$; $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$; $\sin \theta = 0,60$; $\cos \theta = 0,80$. Determine o alcance A do lançamento.



48. Consideremos um prisma triangular apoiado sobre o solo (suposto plano e horizontal), como mostra a figura. A face ABCD do prisma forma ângulo θ com o solo. De um ponto P, pertencente à face ABCD, lança-se uma partícula com velocidade inicial \vec{v}_0 paralela à aresta \overline{CD} . São dados: $PO = 50 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $v_0 = 8,0 \text{ m/s}$ e $\sin \theta = 0,40$. Desprezando o atrito, calcule a distância OE.



49. Uma partícula A é lançada horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 de um ponto O situado 120 m acima do solo. No mesmo instante uma outra partícula B é lançada verticalmente para cima, com velocidade \vec{v}'_0 , de um ponto O' situado no solo, conforme indica a figura.

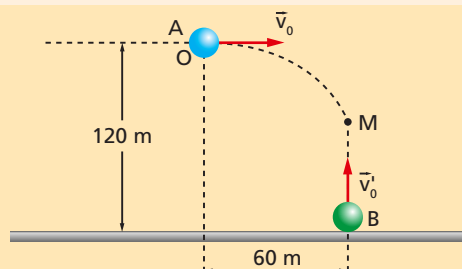


Figura a.

Sabe-se que as partículas vão se chocar em um ponto M. Suponha que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $|\vec{v}'_0| = 30 \text{ m/s}$. Desprezando os efeitos do ar, responda:

- a) A partir do instante de lançamento, depois de quanto tempo as duas partículas se chocam no ponto M?
 b) Qual o módulo de \vec{v}_0 ?
 c) Qual a altura do ponto M?

Resolução:

Vamos resolver este problema de dois modos. Em primeiro lugar, utilizando as equações escalares. Depois, utilizando as equações vetoriais.

1ª modo:

- a) Adotemos um sistema de coordenadas com origem em O, como mostra a figura b. Sejam x_A e y_A as coordenadas da partícula A (que foi lançada horizontalmente); sejam x_B e y_B as coordenadas da partícula B (que foi lançada verticalmente). As equações horárias de x_A e y_A são:

$$x_A = v_0 t \quad \text{e} \quad y_A = 5,0t^2$$

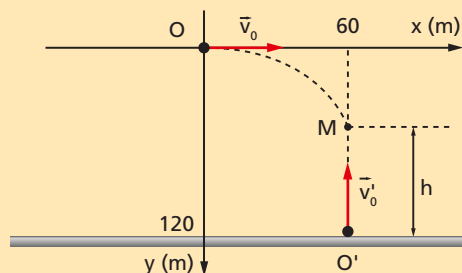


Figura b.

A abscissa x_B é constante: $x_B = 60 \text{ m}$.

A equação horária de y_B é:

$$y_B = 120 + v'_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

O sentido de \vec{v}'_0 é oposto ao do eixo Oy. Assim, $v'_0 = -30 \text{ m/s}$. Como o eixo Oy está orientado para baixo,

$$\alpha = +g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Portanto: } y_B = 120 - 30t + 5,0t^2$$

No instante em que as partículas se chocam, temos $y_A = y_B$; portanto:

$$5,0t^2 = 120 - 30t + 5,0t^2$$

Resolvendo esta última equação, obtemos o instante de encontro:

$$t = 4,0 \text{ s}$$

- b) No instante de encontro temos $t = 4,0 \text{ s}$ e $x_A = x_B = 60 \text{ m}$.

Substituindo na equação $x_A = v_0 t$, temos:

$$60 = v_0(4,0) \quad \text{ou} \quad v_0 = 15 \text{ m/s}$$

- c) Fazendo $t = 4,0 \text{ s}$ na equação $y_A = 5,0t^2$, temos:

$$y_A = 5,0(4,0)^2$$

$$\text{isto é: } y_A = 80 \text{ m}$$

Portanto, a altura do ponto M é:

$$h = 120 - 80 \Rightarrow h = 40 \text{ m}$$

2º modo:

- a) A partir do instante inicial ($t = 0$), os deslocamentos vetoriais de A e B num instante t são dados por:

$$\vec{d}_A = \vec{v}_0 t + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{g} t^2}_{\text{iguais}} \quad \text{e} \quad \vec{d}_B = \vec{v}_0' t + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{g} t^2}_{\text{iguais}}$$

O termo $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$ é o mesmo para as duas partículas. Assim, podemos resolver o problema como se fosse uma composição de movimentos, considerando em primeiro lugar os efeitos dos termos $\vec{v}_0 t$ e $\vec{v}_0' t$, como se não houvesse o termo $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$. Depois adicionaremos esse termo.

Se não houvesse o termo $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$, o encontro de A e B ocorreria no ponto N (fig. c).

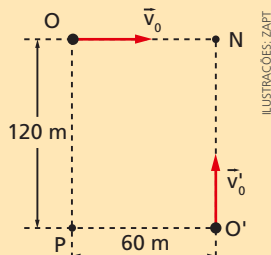


Figura c.

Além disso, A teria movimento uniforme ao longo de \vec{ON} e B teria movimento uniforme ao longo de $\vec{O'N}$. Sendo t o instante de encontro, temos:

$$t = \frac{O'N}{v_0} = \frac{120 \text{ m}}{30 \text{ m/s}} \Rightarrow t = 4,0 \text{ s}$$

- b) $v_0 = \frac{ON}{t} = \frac{60 \text{ m}}{4,0 \text{ s}} \Rightarrow v_0 = 15 \text{ m/s}$

- c) Para obtermos o ponto real de encontro (ponto M na fig. d) desenhamos, a partir de N , o vetor $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$.

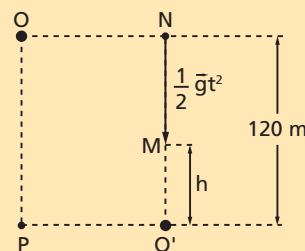


Figura d.

$$NM = \left| \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right| = \frac{1}{2} |\vec{g}| t^2$$

$$NM = \frac{1}{2} (10 \text{ m/s}^2)(4,0 \text{ s})^2 = 80 \text{ m}$$

Assim:

$$h = NO' - NM = 120 \text{ m} - 80 \text{ m}$$

$$h = 40 \text{ m}$$

Na figura e desenhamos os termos que compõem as duas equações vetoriais:

$$\vec{d}_A = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

$$\vec{d}_B = \vec{v}_0' t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

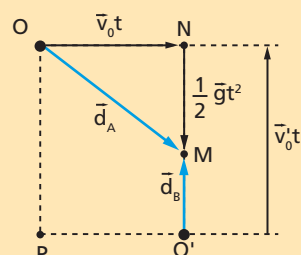
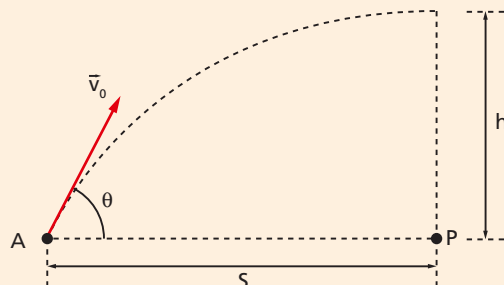


Figura e.

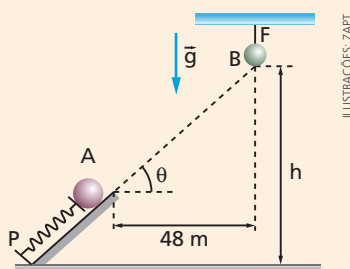
50. (FEI-SP) Num exercício de tiro ao prato, um prato é lançado verticalmente de um ponto P . Simultaneamente, uma arma é disparada de um ponto A , situado na mesma horizontal de P , à distância $s = 30 \text{ m}$ dele. Depois de $0,1$ segundo, o projétil atinge o prato numa altura $h = 15 \text{ m}$. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\text{tg } 27^\circ = 0,5$ e $\text{tg } 63^\circ = 2,0$.



Desprezando-se os efeitos do ar, pede-se:

- determine o ângulo θ que o cano da arma deve fazer com a horizontal;
- calcule o módulo da velocidade inicial (\vec{v}_0) do projétil.

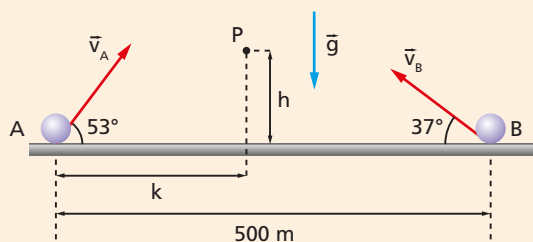
- 51.** Um jogo consiste em lançar uma bolinha A , por meio de um dispositivo dotado de uma mola comprimida como ilustra a figura. A velocidade de A , ao abandonar a plataforma P é 20 m/s. No exato instante em que A abandona a plataforma, o fio F se parte e a bolinha B cai. A bolinha A atingirá a bolinha B ? Se não, passará por baixo ou por cima de B ? (São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\sin \theta = 0,60$; $\cos \theta = 0,80$; $h = 50 \text{ m}$.)



- 52.** Para a situação da questão anterior, se houver encontro entre as bolinhas, determine:
- o tempo decorrido entre o instante em que as bolinhas são liberadas e o instante de encontro;
 - a altura do ponto de encontro.

- 53.** Voltando à situação do exercício 51, qual o valor mínimo de h para que haja encontro entre as bolinhas?

- 54.** Duas partículas A e B são lançadas simultaneamente a partir do solo, com velocidades iniciais \vec{v}_A e \vec{v}_B , respectivamente, como ilustra a figura. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $v_A = 60 \text{ m/s}$; $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ \approx 0,80$; $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ \approx 0,60$. Sabe-se que as partículas se chocam no ponto P assinalado na figura.



- A partir do instante dos lançamentos, depois de quanto tempo as partículas se chocam?
- Determine o valor de v_B .
- Determine os valores das distâncias k e h assinaladas na figura.
- No momento da colisão as partículas estavam subindo ou descendo?

- 55.** (ITA-SP) Considere hipoteticamente duas bolas lançadas de um mesmo lugar ao mesmo tempo: a bola 1, com velocidade para cima de 30 m/s, e a bola 2, com velocidade de 50 m/s formando um ângulo de 30° com a horizontal. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, assinale a distância entre as bolas no instante em que a primeira atinge sua máxima altura.

- $d = \sqrt{6250} \text{ m}$
- $d = \sqrt{7217} \text{ m}$
- $d = \sqrt{17100} \text{ m}$
- $d = \sqrt{19375} \text{ m}$
- $d = \sqrt{26875} \text{ m}$

SUGESTÕES DE LEITURA

MARICONDA, Pablo Rubén de; Vasconcelos, Júlio. *Galileu e a nova Física*. São Paulo: Odysseus, 2006.

- No terceiro capítulo é apresentada a teoria de Galileu sobre o movimento de um projétil.

HENRY, John. *A revolução científica e as origens da ciência moderna*. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

- Apresenta de modo sucinto as principais características da revolução científica que ocorreu na Europa nos séculos XVI, XVII e XVIII.

ROSSI, Paolo. *O nascimento da ciência moderna na Europa*. Bauru: Edusc, 2001.

- É um clássico que faz uma análise profunda dos antecedentes e da própria revolução científica entre os séculos XVI e XVIII.

JAPIASSÚ, Hilton. *A revolução científica moderna*. São Paulo: Letras & Letras, 1997.

- No capítulo 4 há uma excelente discussão das condições socioculturais que estiveram na base da revolução científica.

Forças de atrito

1. Atrito entre sólidos

Quando a superfície de um corpo desliza sobre a superfície de outro corpo, isto é, quando há movimento relativo entre as superfícies, cada um dos corpos exerce sobre o outro uma força tangente à superfície de contato que se opõe ao deslizamento. Forças desse tipo recebem o nome de **forças de atrito de deslizamento**. Há situações ideais em que desprezamos essas forças, como o fizemos nos capítulos anteriores. No entanto, na prática elas sempre existem, embora possam ser reduzidas, por exemplo, com o uso de lubrificantes.

Exemplo 1

Consideremos um bloco lançado com velocidade inicial \vec{v}_0 sobre a tampa horizontal de uma mesa, como mostra a figura 1.

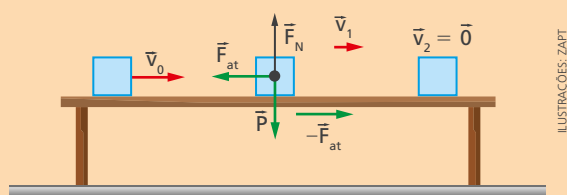


Figura 1.

Em geral, observamos que o bloco vai perdendo velocidade até parar. Isso significa que, durante o movimento, a superfície exerceu sobre o bloco uma força de atrito \vec{F}_{at} (além da força normal \vec{F}_N) de **sentido oposto ao do movimento**. Mas, pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco deve ter exercido sobre a mesa uma força de mesma intensidade e sentido contrário: é a força $-\vec{F}_{at}$ da figura 1. Assim que o bloco para, a força de atrito também se anula. A resultante de \vec{F}_{at} e \vec{F}_N (força \vec{F} na fig. 2) é a **força total feita pela superfície da mesa sobre o bloco** ou, simplesmente, a **força exercida pela mesa sobre o bloco**.

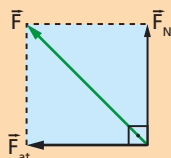


Figura 2.

As forças de atrito de deslizamento podem existir mesmo que não haja movimento relativo entre as superfícies em contato, como mostra o Exemplo 2.

1. Atrito entre sólidos
2. Origem das forças de atrito
3. Atrito de rolamento
4. Força de atrito dinâmico
5. Força de atrito estático
6. Resistência dos fluidos

Exemplo 2

Consideremos um bloco inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sob a ação apenas da força peso (\vec{P}) e da força normal (\vec{F}_N) exercida pela superfície (fig. 3).

Apliquemos então ao bloco uma força horizontal \vec{F} . Pode acontecer de, apesar da aplicação de \vec{F} , o bloco **não se mover** (é o que acontece, por exemplo, quando tentamos puxar um objeto muito “pesado”). Isso significa que, ao aplicarmos a força \vec{F} , a superfície passou a exercer no bloco uma força de atrito (\vec{F}_{at}), cujo sentido é **oposto** ao da “tendência de movimento” (fig. 4) e cujo módulo é igual ao de \vec{F} : $|\vec{F}_{at}| = |\vec{F}|$.

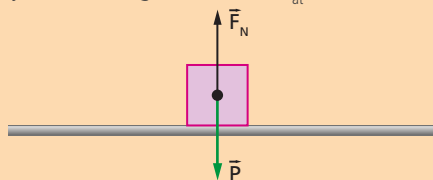


Figura 3.

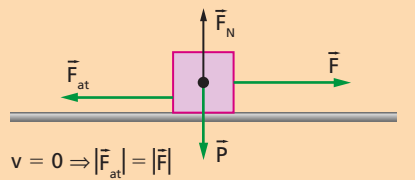


Figura 4.

Tendo em vista os Exemplos 1 e 2, podemos então dizer que as forças de atrito de deslizamento são tangentes às superfícies em contato e têm sentido oposto ao do movimento relativo ou ao da “tendência de movimento” **relativo** entre as **superfícies em contato**. Existem alguns casos em que a força de atrito tem o **mesmo sentido** do movimento **do corpo**, conforme veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3

Consideremos um bloco *A* apoiado sobre um bloco *B*, o qual, por sua vez, está apoiado sobre uma superfície plana horizontal (fig. 5). Suponhamos que de início o sistema esteja em repouso.

Apliquemos então uma força horizontal \vec{F} ao bloco *B*, como mostra a figura 6. Dependendo da intensidade de \vec{F} , pode acontecer de os dois blocos moverem-se juntos, isto é, sem que *A* escorregue sobre *B*. Isso significa que o bloco *B* aplica sobre o *A* uma força de atrito \vec{F}_{at} , cujo sentido é o **mesmo** do movimento. Outro modo de concluir isso é observar que, pela Lei da Inércia, se não houvesse atrito, o bloco *A* deveria ficar parado em relação ao solo, isto é, deveria mover-se para a **esquerda** em relação ao bloco *B*; portanto \vec{F}_{at} tem sentido **oposto** ao da “tendência de movimento” de *A* em relação a *B*.

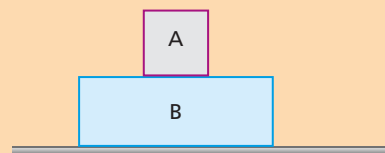


Figura 5.

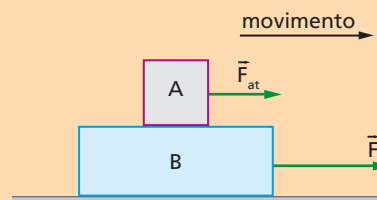


Figura 6.

Exemplo 4

A figura 7 representa um garoto andando em relação ao solo, para a direita. O pé do garoto aplica sobre o “chão” uma força $-\vec{F}_1$, cujo sentido é para a esquerda, e, pelo Princípio da Ação e Reação, o “chão” aplica sobre o pé do garoto uma força \vec{F}_1 , cujo sentido é para a direita. \vec{F}_1 e $-\vec{F}_1$ são forças de atrito. Se não houvesse atrito, o pé do garoto escorregaria para a esquerda; vemos, então, que a tendência de movimento do pé do garoto em relação ao solo é para a esquerda. Assim, a força de atrito \vec{F}_1 , que atua no pé do garoto, tem o **mesmo sentido** do movimento do garoto em relação ao solo, mas tem sentido oposto ao da “tendência de movimento” do seu pé em relação ao solo.

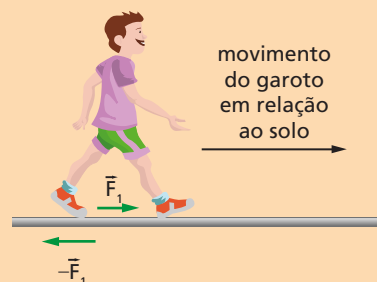


Figura 7.

Quando existe movimento relativo entre as superfícies em contato, a força de atrito é chamada de **força de atrito dinâmico** ou força de atrito cinético; é o caso do Exemplo 1. Quando não há movimento relativo entre as superfícies em contato, a força de atrito é chamada de **força de atrito estático**; é o caso dos Exemplos 2, 3 e 4.

Exemplo 5

Consideremos um automóvel de tração traseira **acelerando** em uma estrada plana horizontal (fig. 8). Dizer que a tração é traseira significa que apenas as rodas de trás são tracionadas pelo motor. Consideremos primeiramente uma das rodas de trás, a qual é tracionada pelo motor (fig. 9). Essa roda “empurra” o chão para trás, exercendo sobre ele a força $-\vec{F}_1$ (do mesmo modo que o pé do garoto, do exemplo anterior, empurra o chão para trás); pelo Princípio da Ação e Reação, o chão exerce sobre a roda a força \vec{F}_1 , que é a força que impulsiona o automóvel para a frente. Desde que a roda não derrape, \vec{F}_1 e $-\vec{F}_1$ são forças de **atrito estático**.



Figura 8.

Consideremos agora uma das rodas da frente, a qual não é tracionada pelo motor (fig. 10). Essa roda “empurra” o chão para a frente, exercendo sobre ele a força $-\vec{F}_2$; pelo Princípio da Ação e Reação, o chão exerce sobre a roda a força \vec{F}_2 . Desde que a roda não derrape, \vec{F}_2 e $-\vec{F}_2$ são forças de **atrito estático**. Em resumo, quando a roda é tracionada, a força de atrito sobre ela tem o mesmo sentido do movimento do automóvel (\vec{F}_1 na fig. 9), mas, quando a roda não é tracionada, a força de atrito sobre ela tem sentido oposto ao do movimento do automóvel (\vec{F}_2 na fig. 10).

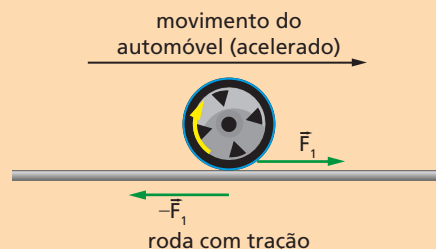


Figura 9.

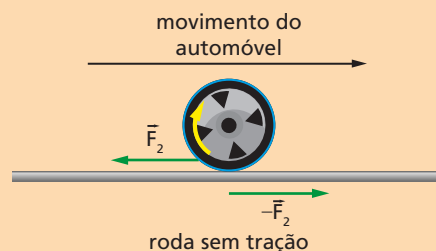


Figura 10.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

2. Origem das forças de atrito

Por mais liso que um corpo possa nos parecer, microscopicamente ele apresenta irregularidades. Consideremos, por exemplo, um bloco apoiado em uma mesa, como mostra a figura 11, e imaginemos ampliada a região limitada pela pequena circunferência.

Vemos que, na realidade, a **área real** de contato é menor do que a área da base do bloco, isto é, só há o contato em algumas pequenas regiões. As “pontas” e “depressões” das duas superfícies se interpenetram e isso dificulta o movimento de uma superfície em relação à outra. Essa é uma das causas do atrito, mas não é a única. Devemos considerar também as forças de adesão ou de coesão entre as moléculas dos dois corpos em contato. (A força é de **coesão** quando os dois corpos são feitos do mesmo material e é de **adesão** quando os materiais são diferentes.) Entre alguns pontos em contato formam-se verdadeiras soldas que precisam ser quebradas para que uma superfície deslize sobre a outra.

Tanto as forças de contato entre as irregularidades das superfícies quanto as forças de adesão e coesão são resultado das forças elétricas entre os elétrons dos átomos.

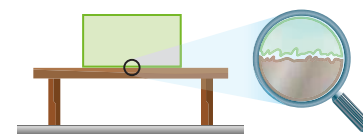


Figura 11.

3. Atrito de rolamento

Além do atrito de **deslizamento**, existe o atrito de **rolamento**, que se opõe ao rolamento de um corpo sobre outro, como é o caso do pneu de um automóvel. Essa oposição ao rolamento é devida ao pequeno achatamento que existe na região onde o pneu entra em contato com a superfície sobre a qual rola. O atrito de rolamento é maior no caso em que o material da roda é mais “mole”, como no caso do pneu, que é feito de borracha. Quando o material é mais duro (como, por exemplo, o aço), o atrito de rolamento é menor.

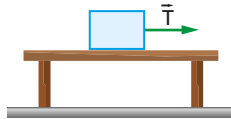
Não analisaremos o atrito de rolamento.



Figura 12.

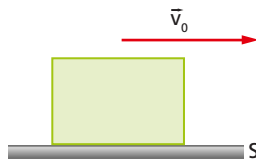
Exercícios de Aplicação

1. Um bloco de massa $2,0 \text{ kg}$ estava inicialmente em repouso sobre uma mesa. A partir de certo instante é aplicada ao bloco uma força horizontal \vec{T} , de intensidade 40 N , fazendo que o bloco se mova para a direita. Despreze a resistência do ar e suponha que haja atrito entre o bloco e a mesa, sendo constante a força de atrito durante o movimento. Calcule a intensidade da força de atrito atuante no bloco quando:



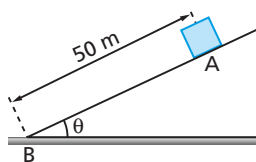
- o bloco move-se para a direita com aceleração $4,0 \text{ m/s}^2$;
- o bloco move-se para a direita com velocidade constante.

2. Um bloco de massa $2,0 \text{ kg}$ é lançado com velocidade inicial $v_0 = 10 \text{ m/s}$ sobre uma superfície horizontal S . Devido ao atrito, o bloco para após percorrer uma distância de 10 metros . Despreze a resistência do ar e suponha $g = 10 \text{ m/s}^2$. Supondo que a força de atrito tenha sido constante durante o deslizamento, pede-se:



- o módulo da força de atrito durante o movimento;
- o módulo da força total exercida pela superfície sobre o bloco durante o movimento.

3. Uma partícula de massa $2,0 \text{ kg}$ é abandonada com velocidade inicial nula no ponto A de uma rampa com atrito, como mostra a figura, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partícula atinge o ponto B da rampa, com velocidade 20 m/s .



Supondo que a força de atrito exercida pela rampa sobre a partícula tenha sido constante, calcule:

- o módulo da aceleração da partícula durante a descida;
- o módulo da força de atrito exercida sobre a partícula;
- o módulo da força exercida pela rampa sobre a partícula.

4. Um bloco A , de massa $4,0 \text{ kg}$, está apoiado sobre um bloco B , de massa $6,0 \text{ kg}$, o qual está apoiado em uma superfície plana horizontal. Há atrito entre os blocos A e B , mas não há atrito entre o bloco B e o solo. O sistema está inicialmente em repouso. Aplica-se então ao bloco B uma força horizontal \vec{F} de intensidade 50 N e observa-se que o sistema se move de modo que o bloco A tem o mesmo movimento de B , isto é, o bloco A não escorrega sobre B .
- Calcule o módulo da aceleração do sistema.
 - Calcule o módulo da força de atrito exercida por B sobre A .

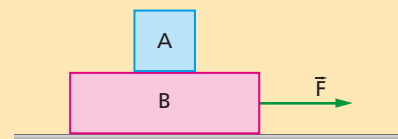


Figura a.

Resolução:

- a) Como o bloco A permanece em repouso em relação a B , podemos considerar os blocos A e B formando um único corpo de massa m (fig. b) tal que:

$$m = m_A + m_B = 4,0 + 6,0$$

$$m = 10 \text{ kg}$$

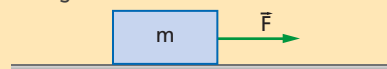


Figura b.

Apliquemos a Segunda Lei de Newton a esse corpo:

$$F = m \cdot a \Rightarrow 50 = 10 \cdot a \Rightarrow a = 5,0 \text{ m/s}^2$$

- b) Vamos agora representar as forças que atuam sobre cada bloco (sem considerar os pesos e as normais, pois eles se anulam). O bloco B, ao ser “puxado” por \vec{F} , exerce sobre A uma força de atrito \vec{F}_{at} (fig. c). Mas, pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco A exerce sobre B uma força de atrito \vec{F}'_{at} tal que $\vec{F}'_{\text{at}} = -\vec{F}_{\text{at}}$ ou $F'_{\text{at}} = F_{\text{at}}$. Podemos, então, adotar o esquema simplificado da figura d.

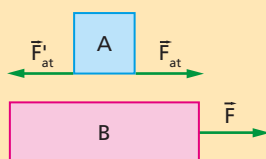


Figura c.

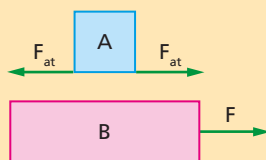


Figura d.

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao bloco A, temos:

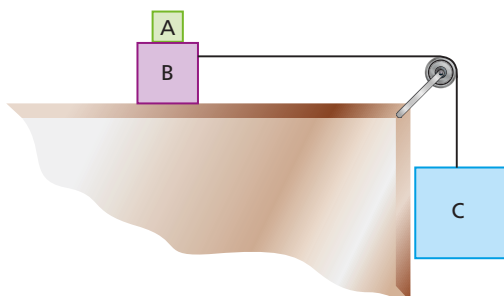
$$F_{\text{at}} = m_A \cdot a \Rightarrow F_{\text{at}} = 4,0 \cdot 5,0 \Rightarrow F_{\text{at}} = 20 \text{ N}$$

Poderíamos, também, ter aplicado a Segunda Lei de Newton ao bloco B:

$$F - F_{\text{at}} = m_B \cdot a \Rightarrow 50 - F_{\text{at}} = 6,0 \cdot 5,0$$

$$F_{\text{at}} = 20 \text{ N}$$

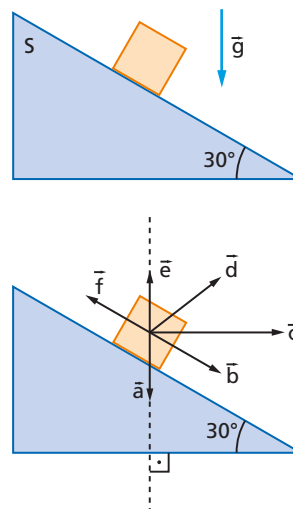
5. Abandona-se em repouso o sistema representado na figura. Observa-se, então, que o sistema entra em movimento, com o bloco A movendo-se juntamente com B, sem escorregar. O fio e a polia são ideais, há atrito entre A e B, mas não há atrito entre B e a superfície de apoio. Sabe-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que as massas de A, B e C são respectivamente iguais a 2,0 kg, 4,0 kg e 6,0 kg.



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

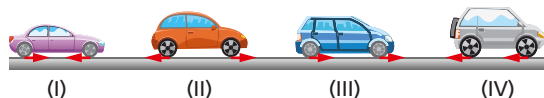
Após iniciar-se o movimento, calcule:

- o módulo da aceleração do bloco C;
 - o módulo da tração no fio;
 - o módulo da força de atrito exercida sobre o bloco A;
 - o módulo da força exercida pelo bloco B sobre o bloco A.
6. Ao se colocar um bloco de massa 8,0 kg sobre uma superfície inclinada S (figura abaixo), observa-se que o bloco fica em repouso.



Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a intensidade da força de atrito exercida pela superfície sobre o bloco;
 - a intensidade da força total \vec{F}_S exercida pela superfície S sobre o bloco;
 - qual dos vetores desenhados acima pode representar a força \vec{F}_S .
7. As figuras I, II, III e IV representam automóveis em movimento acelerado da esquerda para a direita. As flechas nas rodas representam os sentidos das forças de atrito que atuam sobre elas.



LUIS AUGUSTO RIBEIRO

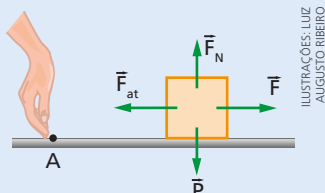
Para cada situação a seguir, escolha a figura correspondente.

- O automóvel tem tração apenas nas rodas traseiras.
- O automóvel tem tração nas quatro rodas.
- O automóvel tem tração apenas nas rodas dianteiras.
- O automóvel move-se em “ponto morto”, isto é, sem que nenhuma das rodas seja tracionada (neste caso, em movimento retardado).

Exercícios de Reforço

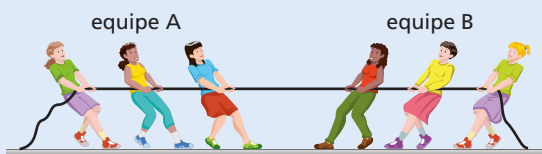
8. (F. U. Itaúna-MG) Um corpo é arremessado horizontalmente numa superfície também horizontal, com atrito. No ponto A assinalado, o corpo já abandonou a mão da pessoa. Um aluno representou as forças que atuam no corpo após sair da mão da pessoa.

\vec{F} : força aplicada pela pessoa
 \vec{F}_{at} : força de atrito
 \vec{P} : peso
 \vec{F}_N : normal



É **correto** afirmar que:

- \vec{P} e \vec{F}_N são forças de ação e reação, pois têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos contrários.
 - a força \vec{F} é maior do que \vec{F}_{at} , pois o corpo se move para a direita.
 - a figura está errada, pois não existe a força \vec{F} .
 - a resultante das forças que atuam no corpo é nula.
 - a força de atrito \vec{F}_{at} é maior que \vec{F} , pois \vec{F} mantém-se constante e não nula durante o movimento.
9. (U. F. ABC-SP) Considere duas equipes A e B, formadas por três garotas cada uma, numa disputa de cabo de guerra sobre uma superfície plana e horizontal, como mostra a figura.



A alternativa que mostra corretamente a força de tração aplicada pela corda nas mãos e a força de atrito aplicada pelo solo nos pés, respectivamente, de uma integrante da equipe B, durante a disputa, é:

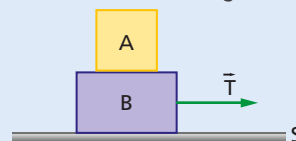
-
-

-
-
-

10. Em seu caderno, classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as seguintes afirmações:

- A força de atrito que atua em um corpo tem sempre sentido oposto ao do movimento do corpo.
- Quando um corpo desliza sobre uma superfície fixa S, a força de atrito exercida por S sobre o corpo tem sentido oposto ao do movimento.
- No caso do atrito estático, é possível que a força de atrito atuante em um corpo tenha o mesmo sentido do movimento do corpo.

11. Um bloco A de massa 4,0 kg está apoiado sobre um bloco B de massa 6,0 kg, como ilustra a figura. O sistema estava inicialmente em repouso, mas a partir de certo instante é aplicada sobre o bloco B uma força horizontal \vec{T} de intensidade 30 N. Não há atrito entre o bloco B e a superfície S, mas há atrito entre o bloco A e o bloco B, e, devido a esse atrito, o bloco A acompanha o movimento de B, sem escorregar.



- Qual é a aceleração do conjunto?
 - Calcule a intensidade da força de atrito exercida pelo bloco B sobre o bloco A.
 - O atrito entre os blocos é estático ou dinâmico?
12. (UF-SC) Um homem empurra uma mesa com uma força horizontal \vec{F} , da esquerda para a direita, movimentando-a neste sentido. Um livro solto sobre a mesa permanece em repouso em relação a ela.

esquerda direita



Análise as proposições a seguir e dê como resposta a soma dos números que antecedem as proposições verdadeiras.

- (01) Se a mesa deslizar com velocidade constante, atuarão somente as forças peso e normal sobre o livro.
- (02) Se a mesa deslizar com velocidade constante, a força de atrito sobre o livro não será nula.
- (04) Se a mesa deslizar com aceleração constante, atuarão sobre o livro somente as forças peso, normal e a força \vec{F} .

- (08) Se a mesa deslizar com aceleração constante, a força de atrito que atua sobre o livro será responsável pela aceleração do livro.
- (16) Como o livro está em repouso em relação à mesa, a força de atrito que age sobre ele é igual, em módulo, à força \vec{F} .
- (32) Se a mesa deslizar com aceleração constante, o sentido da força de atrito que age sobre o livro será da esquerda para a direita.

4. Força de atrito dinâmico

Como já dissemos, quando há movimento relativo entre as superfícies de contato de dois corpos, a força de atrito \vec{F}_{at} é denominada **força de atrito dinâmico** (ou **cinético**). A experiência mostra que o módulo de \vec{F}_{at} , nesse caso, é dado por:

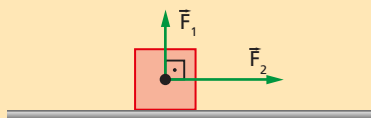
$$F_{at} = \mu_d \cdot F_N \quad \textcircled{1}$$

sendo F_N o módulo da força normal que um corpo exerce no outro e μ_d uma **constante** denominada **coeficiente de atrito dinâmico** (ou **cinético**). O valor de μ_d depende do material de que é feito cada corpo, bem como do estado de polimento e lubrificação das superfícies em contato, mas **não** depende da velocidade relativa nem da área da superfície em contato. Para a maioria dos casos, tem-se $\mu_d < 1$; no entanto, há casos em que $\mu_d \geq 1$. Observemos ainda que μ_d é o quociente das intensidades de duas forças ($\mu_d = \frac{F_{at}}{F_N}$), isto é, μ_d é o quociente de duas grandezas que têm a mesma unidade. Portanto, o coeficiente de atrito é uma grandeza sem unidade (adimensional).

Na realidade, tanto a fórmula $\textcircled{1}$ como a independência de μ_d em relação à área e à velocidade valem de modo aproximado. No caso da velocidade, por exemplo, nota-se uma diminuição de μ_d à medida que a velocidade aumenta; no entanto, essa diminuição é tão pequena que em geral é desprezada.

Exercícios de Aplicação

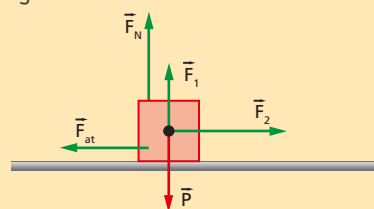
13. Um bloco de massa $m = 20 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal. A partir de certo instante, aplicamos ao bloco as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 (como mostra a figura), de intensidades $F_1 = 50 \text{ N}$ e $F_2 = 140 \text{ N}$.



A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0,40$. Calcule o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

Resolução:

O peso \vec{P} do bloco tem módulo dado por:
 $P = m \cdot g = 20 \cdot 10 \Rightarrow P = 200 \text{ N}$



Como $F_1 < P$, a força \vec{F}_1 não é suficiente para que o bloco perca o contato com a superfície horizontal. Por outro lado, como o bloco estava inicialmente em repouso, ao aplicarmos a força

\vec{F}_2 ele passa a ter movimento (ou tendência de movimento) para a direita; portanto, a força de atrito \vec{F}_{at} deve ter sentido para a esquerda.

Na figura está representada, também, a força normal \vec{F}_N exercida pela superfície horizontal sobre o bloco. Como não há movimento na vertical, temos:

$$F_N + F_1 = P \text{ ou } F_N + 50 = 200 \text{ ou, ainda, } F_N = 150 \text{ N}$$

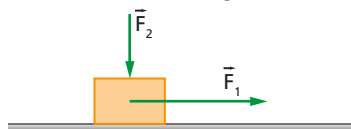
$$F_{at} = \mu_d \cdot F_N = (0,40) \cdot (150) \Rightarrow F_{at} = 60 \text{ N}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F_2 - F_{at} = m \cdot a \Rightarrow 140 - 60 = 20a$$

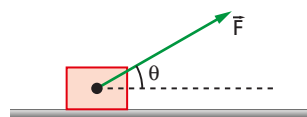
$$a = 4,0 \text{ m/s}^2$$

14. Uma partícula de massa $m = 6,0 \text{ kg}$ está parada, inicialmente, sobre uma superfície plana horizontal. A partir de determinado instante, aplicamos à partícula as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , de intensidades $F_1 = 120 \text{ N}$ e $F_2 = 40 \text{ N}$, como mostra a figura.



Sabe-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que o coeficiente de atrito dinâmico entre a partícula e a superfície horizontal é $\mu_d = 0,90$. Calcule o módulo da aceleração adquirida pela partícula.

15. Aplicamos uma força \vec{F} , como mostra a figura a seguir, a um bloco de massa $m = 40 \text{ kg}$ que estava em repouso sobre uma superfície plana horizontal. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $F = 200 \text{ N}$, sen $\theta = 0,60$ e cos $\theta = 0,80$.



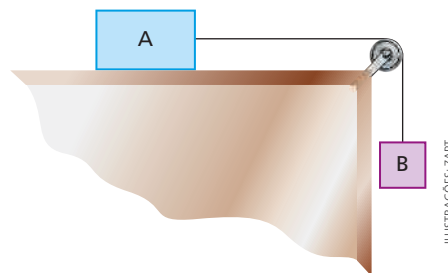
Sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0,50$, calcule a aceleração adquirida pelo bloco.

16. Um bloco de massa m é lançado com velocidade inicial \vec{v}_0 sobre uma superfície plana horizontal e com atrito, cujo coeficiente é μ_d , numa região onde a aceleração da gravidade tem módulo g .



Determine, em função de m , g , v_0 e μ_d :

- o módulo da aceleração do bloco durante o movimento;
 - a distância percorrida pelo bloco até sua parada.
17. Os blocos A e B representados na figura têm massas respectivamente iguais a $6,0 \text{ kg}$ e $4,0 \text{ kg}$. O fio e a polia são ideais e $g = 10 \text{ m/s}^2$. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco A e a superfície de apoio é $\mu_d = 0,50$.

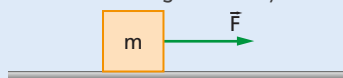


Sabendo que o sistema foi abandonado em repouso, calcule:

- o módulo da aceleração adquirida pelo bloco A;
- o módulo da tração no fio.

Exercícios de Reforço

18. (UF-MG) Um bloco de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ acha-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Uma força \vec{F} , paralela à superfície, é aplicada sobre o bloco (veja a figura). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu = 0,25$ e a aceleração da gravidade pode ser considerada como $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Determine a intensidade de \vec{F} para que o bloco se movimente com velocidade constante.

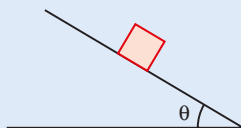
19. Um bloco é lançado com velocidade inicial 10 m/s sobre uma superfície plana, horizontal e com

atrito, percorrendo uma distância de 20 m até parar. Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine o valor do coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície.

20. (Fuvest-SP) Você empurra um livro sobre uma mesa horizontal comunicando-lhe uma certa velocidade inicial. Você observa que, depois de abandonado, o livro desliza aproximadamente 1 metro sobre a mesa até parar. Se a massa do livro fosse o dobro, e se você o empurrasse, comunicando-lhe a mesma velocidade inicial, ele deslizaria, até parar, aproximadamente:

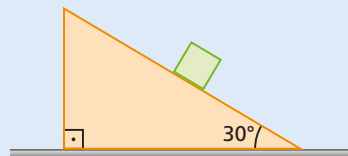
- $0,25 \text{ m}$
- $0,5 \text{ m}$
- 1 m
- $1,4 \text{ m}$
- 2 m

21. (Fatec-SP) Uma caixa desliza ao longo de um plano com atrito e inclinação θ em relação à horizontal. Ao ser aumentado o ângulo θ , a força de atrito:



- a) não se altera.
- b) aumenta de intensidade.
- c) muda de sentido mas não de intensidade.
- d) diminui de intensidade.
- e) inicialmente aumenta de intensidade e depois diminui.

22. (UF-SC) Um bloco de massa 5 kg está descendo um plano inclinado de 30° em relação a um plano horizontal. O coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície é $\frac{0,4}{\sqrt{3}}$ e a aceleração da gravidade é 10 m/s^2 . Calcule a aceleração do bloco.



5. Força de atrito estático

Quando não há movimento relativo entre as superfícies de contato de dois corpos, a força de atrito, desde que exista, é chamada **força de atrito estático**. Uma característica importante da força de atrito estático é que seu módulo é variável.

Exemplo 6

Consideremos um bloco inicialmente em repouso sobre uma superfície plana, horizontal e rugosa (fig. 13). As únicas forças que atuam no bloco são o peso \vec{P} e a força normal \vec{F}_N exercida pela superfície. Nessa situação a força de atrito é nula: $F_{at} = 0$.

Apliquemos ao bloco uma força horizontal \vec{F}_1 (fig. 14) e suponhamos que, apesar da ação de \vec{F}_1 , o bloco permaneça em repouso. Isso significa que, ao aplicarmos \vec{F}_1 , surgiu uma força de atrito \vec{F}_{at1} , de sentido oposto ao de \vec{F}_1 e de mesmo módulo de \vec{F}_1 , de modo que as forças se anulam e o bloco fica parado: $F_{at1} = F_1$.

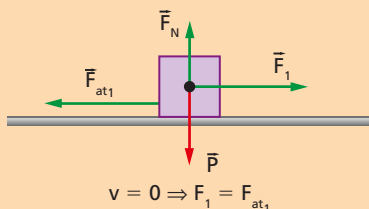


Figura 14.

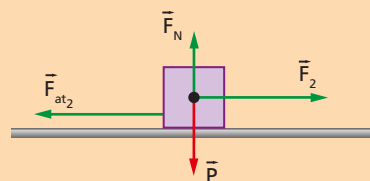


Figura 15.

Retiremos a força \vec{F}_1 e apliquemos ao bloco uma força horizontal \vec{F}_2 , tal que $F_2 > F_1$ (fig. 15). Pode acontecer que o bloco continue em repouso. Concluímos então que, ao aplicarmos \vec{F}_2 , surgiu uma força de atrito \vec{F}_{at2} , de mesmo módulo e sentido oposto ao de \vec{F}_2 . Assim, ao aumentarmos a força aplicada, a força de atrito também aumentará, desde que o bloco permaneça em repouso.

Como ilustrou o Exemplo 6, a força de atrito estático tem módulo variável. Mas a experiência mostra que essa variação tem um limite, isto é, existe um **valor máximo** para o módulo da força de atrito estático. Indicaremos essa força máxima por $\vec{F}_{at, \text{máx}}$. Assim, voltando ao caso do Exemplo 6, para tirar o bloco do repouso, devemos puxá-lo com uma força \vec{F}_3 tal que $F_3 > F_{at, \text{máx}}$.

Quando a força de atrito estático atinge o seu valor máximo, mas o bloco continua em repouso, dizemos que o bloco está na **iminência de movimento**.

A experiência mostra que o módulo da força máxima de atrito estático é dado por:

$$F_{\text{at, máx}} = \mu_e \cdot F_N \quad (2)$$

sendo F_N a intensidade da força normal exercida entre os corpos em contato e μ_e uma constante chamada **coeficiente de atrito estático**. O valor de μ_e depende do material de que é feito cada corpo em contato, bem como do estado de polimento e lubrificação, mas não depende (aproximadamente) da área da superfície de contato.

Podemos observar que a fórmula (2) é semelhante à fórmula que nos dá a força de atrito dinâmico ($F_{\text{at}} = \mu_d \cdot F_N$). No entanto, os coeficientes μ_e e μ_d em geral são diferentes. Mostra a experiência que, para cada par de corpos em contato, temos:

$$\mu_e > \mu_d$$

Porém, às vezes, a diferença entre eles é tão pequena que podemos considerá-los iguais e representar ambos por μ .

$$\mu_e = \mu_d = \mu \quad (\text{em alguns casos})$$

Na tabela apresentamos os valores de alguns coeficientes de atrito. Quando é dado apenas um coeficiente de atrito sem especificar se é estático ou dinâmico, admite-se que são iguais.

Materiais	μ_d	μ_e
aço sobre aço	0,57	0,74
gelo sobre gelo	0,03	0,1
alumínio sobre aço	0,47	0,61
cobre sobre aço	0,36	0,5
madeira sobre madeira	0,34	0,54
borracha sobre outros sólidos	1	1 – 4
Teflon sobre aço	0,04	0,04
aço sobre gelo	0,01	0,02

Tabela 1. Valores aproximados de alguns coeficientes de atrito cinético e estático.

Consideremos, por exemplo, um bloco de massa $m = 6,0 \text{ kg}$, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal com atrito, num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$ (fig. 16). Sejam $\mu_e = 0,40$ e $\mu_d = 0,30$ os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal. Na situação da figura 16, a força de atrito é nula. Apliquemos ao bloco uma força horizontal \vec{F} de intensidade crescente, a partir de zero (fig. 17).

Para $F > 0$, o bloco passa a sofrer a ação de uma força de atrito \vec{F}_{at} , de sentido oposto ao de \vec{F} . Para que o bloco saia do repouso, é necessário que F supere a máxima força de atrito estático ($F_{\text{at, máx}}$), a qual é dada por:

$$F_{\text{at, máx}} = \mu_e \cdot F_N$$

Mas:

$$F_N = P = m \cdot g = (6,0)(10) \Rightarrow F_N = 60 \text{ N}$$

Assim:

$$F_{\text{at, máx}} = \mu_e \cdot F_N = (0,40)(60)$$

$$F_{\text{at, máx}} = 24 \text{ N}$$

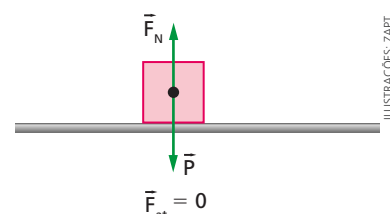


Figura 16.

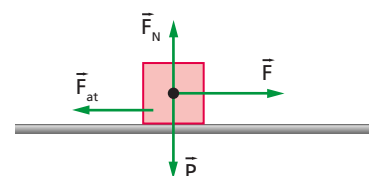


Figura 17.

Portanto, para que o bloco entre em movimento, devemos ter $F > 24 \text{ N}$. Suponhamos que $F = 6,0 \text{ N}$. Nesse caso, temos $F < F_{\text{at, máx}}$ e, portanto, o bloco não entra em movimento: $F = F_{\text{at}} = 6,0 \text{ N}$ (fig. 18). Suponhamos agora que $F = 12 \text{ N}$. Ainda temos $F < F_{\text{at, máx}}$ e, portanto, o bloco não entra em movimento: $F = F_{\text{at}} = 12 \text{ N}$ (fig. 19). Aumentemos a intensidade de \vec{F} para $F = 24 \text{ N}$. Nesse caso, temos $F = F_{\text{at, máx}}$ e, assim, o bloco permanece em repouso (fig. 20), mas está na **iminência de movimento**, isto é, qualquer aumento na intensidade de \vec{F} fará com que o bloco entre em movimento.

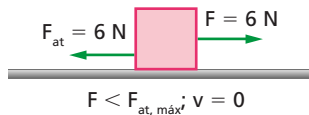


Figura 18.

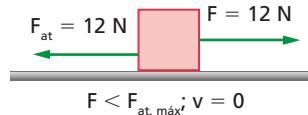


Figura 19.

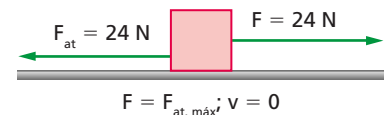


Figura 20. Bloco na iminência de movimento.

Podemos ver, então, que para $0 \leq F \leq 24 \text{ N}$, o bloco permanece em repouso e, em cada caso, $F_{\text{at}} = F$. Aumentemos a intensidade de \vec{F} para um valor $F > 24 \text{ N}$ (fig. 21). Agora o bloco entra em movimento e a força de atrito passa a ser a força de atrito dinâmico ($F_{\text{at, d}}$), dada por:

$$F_{\text{at, d}} = \mu_d \cdot F_N = (0,30)(60)$$

$$F_{\text{at, d}} = 18 \text{ N}$$

Para $F > 24 \text{ N}$, a força de atrito não varia mais, independentemente da velocidade. A figura 22 nos dá o gráfico do módulo de \vec{F}_{at} em função do módulo de \vec{F} , para este experimento.

Vemos então que, após iniciado o movimento, a força de atrito é menor que o máximo valor de \vec{F}_{at} , enquanto o bloco está em repouso; isso sempre ocorre quando $\mu_e > \mu_d$. Suponhamos que, após **iniciado o movimento**, diminuamos o valor de \vec{F} para $F = 21 \text{ N}$, por exemplo. Essa força não foi suficiente para **tirar o bloco do repouso**, mas é suficiente para **manter o movimento**, pois a força de atrito dinâmico vale apenas 18 N.

O fato de o coeficiente estático ser em geral maior que o cinético explica a recomendação de não se apertar o freio de um automóvel repentinamente e com violência, pois, ao se fazer isso, as rodas travam e os pneus deslizam (atrito cinético). Apertando os freios gradualmente, as rodas não deslizam, e o atrito é estático, de modo que a distância percorrida durante a freagem é menor do que o seria se as rodas deslizassem. Para evitar o travamento das rodas, hoje em dia muitos veículos dispõem de um tipo de freio chamado ABS (do alemão *Antiblockiest Bremssystem*), que faz com que as rodas continuem a girar durante a freagem, mas sem derrapar e na iminência de escorregamento.

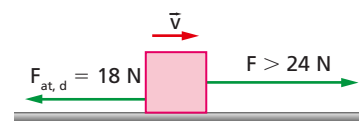


Figura 21. Para $F > F_{\text{at, máx}}$ temos $F_{\text{at}} = F_{\text{at, d}}$.

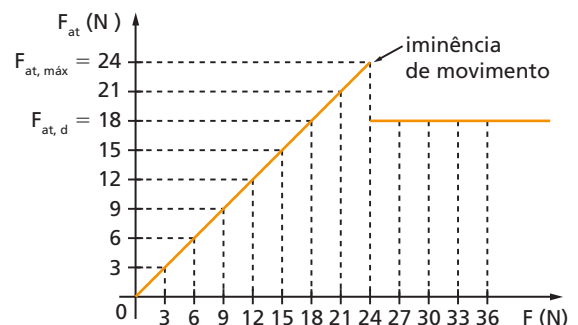


Figura 22.

Ângulo de atrito

Um modo simples de determinar o coeficiente de atrito estático entre os dois materiais é apoiar um bloco feito de um deles numa superfície inclinada S feita do outro material, como ilustra a figura 23a. Aumentando-se lentamente o ângulo θ , verificamos que, a partir de certo valor, o bloco escorrega.

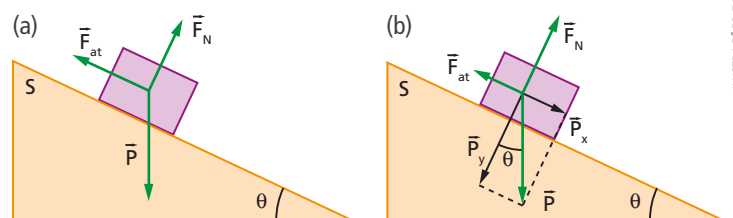


Figura 23.

Suponhamos, então, que se tenha aumentado o valor de θ até o valor máximo compatível com o repouso do bloco; nesse momento o bloco está na iminência de movimento, isto é, a força de atrito estático atingiu seu valor máximo e, portanto, é dada por:

$$F_{\text{at}} = \mu_e \cdot F_N = \mu_e \cdot P_y = \mu_e \cdot P \cdot \cos \theta \quad (1)$$

Por outro lado, como o bloco está em repouso, temos:

$$F_{\text{at}} = P_x = P \cdot \sin \theta \quad (2)$$

Das equações (1) e (2), temos:

$$\mu_e \cdot P \cdot \cos \theta = P \cdot \sin \theta$$

ou:

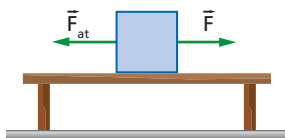
$$\mu_e = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

O valor de θ na iminência de deslizamento é chamado **ângulo de atrito**.

Exercícios de Aplicação

- 23.** Um bloco de massa $m = 8,0 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, com atrito, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_e = 1,2$, calcule a máxima intensidade de uma força horizontal \vec{F} que podemos aplicar ao bloco sem que ele saia do repouso.

- 24.** Consideremos um corpo de massa $m = 12 \text{ kg}$ inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal. Sabe-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o corpo e a mesa são respectivamente $\mu_e = 0,70$ e $\mu_d = 0,40$. Aplicamos ao corpo uma força horizontal \vec{F} .

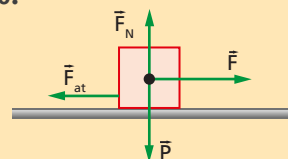


Calcule o módulo da força de atrito atuante no corpo e o módulo da aceleração do corpo após a aplicação de \vec{F} , nos seguintes casos:

- a) $F = 60 \text{ N}$ c) $F = 90 \text{ N}$
b) $F = 84 \text{ N}$

- 25.** Sobre uma superfície plana horizontal está inicialmente em repouso um bloco de massa $m = 20 \text{ kg}$. A aceleração local da gravidade é 10 m/s^2 . Aplica-se ao bloco uma força horizontal \vec{F} , de intensidade $F = 80 \text{ N}$, e observa-se que o bloco permanece em repouso. Calcule os possíveis valores do coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal.

Resolução:



$$F_N = P = m \cdot g = 20 \cdot 10 \Rightarrow F_N = 200 \text{ N}$$

Já que o bloco permanece em repouso, o atrito é estático e temos:

$$F_{\text{at}} = F = 80 \text{ N} \quad (1)$$

A máxima força de atrito estático é:

$$F_{\text{at, máx}} = \mu_e \cdot F_N = \mu_e \cdot 200 \quad (2)$$

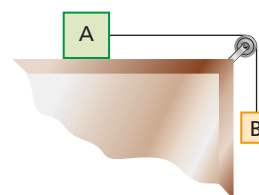
Podemos também escrever:

$$F_{\text{at}} \leq F_{\text{at, máx}} \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), temos:

$$80 \leq \mu_e \cdot 200 \text{ ou } \mu_e \geq 0,40$$

- 26.** O sistema esquematizado na figura é abandonado em repouso. A polia e o fio são ideais, a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a massa do bloco A é $m_A = 8,0 \text{ kg}$.

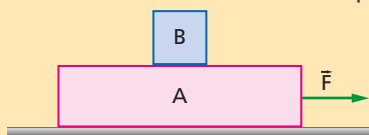


ILUSTRAÇÕES: ZAPFT

- a) Supondo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície de apoio seja $\mu_e = 0,75$, calcule os possíveis valores da massa do bloco B, de modo que o sistema fique em repouso.

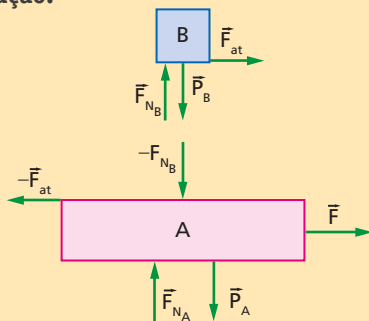
- b) Supondo que a massa de B seja $m_B = 3,2$ kg, determine os possíveis valores do coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície de apoio, de modo que o sistema fique em repouso.

27. Um bloco B de massa $m_B = 4,0$ kg está apoiado sobre uma tábua A de massa $m_A = 16$ kg, a qual está sobre uma superfície plana horizontal. A aceleração da gravidade é $g = 10$ m/s². Não há atrito entre a tábua A e a superfície horizontal, mas há atrito entre o bloco B e a tábua A , cujo coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0,25$.



Supondo que o sistema esteja inicialmente em repouso, determine a máxima intensidade de uma força horizontal \vec{F} que pode ser aplicada à tábua A , de modo que o bloco B acompanhe o movimento de A sem escorregar.

Resolução:



A figura representa as forças que atuam em cada corpo, analisados separadamente. Ao puxarmos a tábua para a “direita” (pela aplicação da força \vec{F}), a tendência de B é ficar “para trás” (pela Lei da Inércia); portanto, a força de atrito que A aplica em B (\vec{F}_{at}) tem sentido para a “direita”. Pelo Princípio da Ação e Reação, a força de atrito que B aplica em A ($-\vec{F}_{at}$) tem sentido para a “esquerda”. Temos:

$$F_{N_B} = P_B = m_B \cdot g = (4,0)(10) \Rightarrow F_{N_B} = 40 \text{ N}$$

A força \vec{F} tem intensidade máxima quando o bloco B está na iminência de escorregar sobre A . Assim,

$$F_{at} = F_{at, \text{máx}} = \mu_e \cdot F_{N_B} = (0,25)(40) \Rightarrow F_{at} = 10 \text{ N}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao bloco B , temos:

$$F_{at} = m_B \cdot a \Rightarrow 10 = (4,0)a \Rightarrow a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Aplicamos agora a Segunda Lei de Newton ao sistema formado pelos corpos A e B :

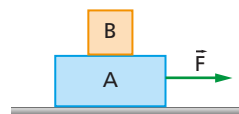
$$F = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$F = (4,0 + 16) \cdot (2,5)$$

$$F = 50 \text{ N}$$

Portanto, a máxima intensidade possível para \vec{F} (sem que o bloco B escorregue) é 50 N, e a máxima aceleração é 2,5 m/s². Se $F < 50$ N, teremos $a < 2,5$ m/s² e a força de atrito será inferior ao seu valor máximo.

28. Consideremos um bloco B , de massa 3,0 kg, apoiado sobre uma tábua A , de massa 7,0 kg, a qual está sobre uma superfície plana horizontal. Considere $g = 10$ m/s², despreze o atrito entre a tábua e a superfície horizontal e admita que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a tábua seja $\mu_e = 0,40$.

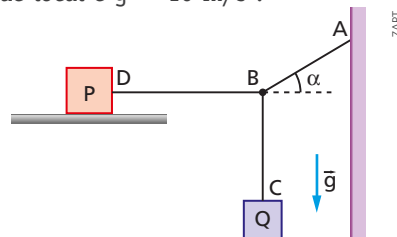


Supondo que o sistema esteja inicialmente em repouso, calcule a máxima intensidade de uma força horizontal \vec{F} que pode ser aplicada sobre a tábua, de modo que o bloco B acompanhe o movimento de A , sem escorregar.

29. Um caminhão está inicialmente em repouso, com uma caixa sobre sua carroceria também em repouso. Sabendo que $g = 10$ m/s² e que o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a carroceria do caminhão é $\mu_e = 0,20$, calcule a máxima aceleração que pode ser imprimida ao caminhão sem que a caixa escorregue.

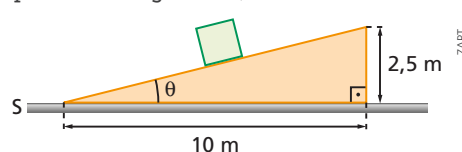


30. O sistema esquematizado está em equilíbrio, mas o corpo P de massa 10 kg está na iminência de movimentar-se. Sabe-se que a massa do corpo Q é 5,0 kg, que o coeficiente de atrito entre o corpo P e o plano onde se apoia é 0,60 e a aceleração da gravidade local é $g = 10$ m/s².



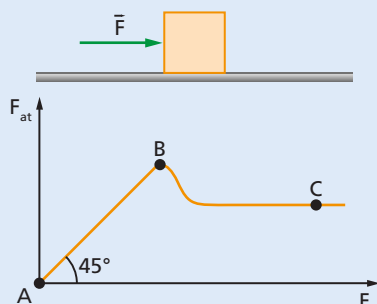
Determine a intensidade das trações nos fios ideais AB , BC e BD e o ângulo α .

31. Um bloco de massa 7,0 kg é abandonado sobre um plano inclinado, como mostra a figura. Sabe-se que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície S é igual a 0,32. O bloco deslizará?



Exercícios de Reforço

32. (Unama-PA) Um corpo inicialmente em repouso recebe a ação de uma força externa F crescente, conforme a figura. Abaixo desta, representamos graficamente a força de atrito entre o corpo e a superfície em função de F .

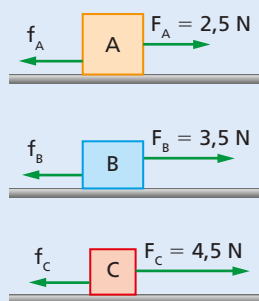


Acerca dessa situação, podemos dizer:

- I. No trecho AB o corpo move-se com aceleração constante, já que o atrito varia proporcionalmente à ação F .
- II. No trecho AB o corpo encontra-se em repouso.
- III. No ponto B, o corpo está na iminência de deslizamento.
- IV. No trecho BC o corpo se movimenta, mas a força de atrito independe da velocidade do corpo, pelo menos para valores pequenos desta.

Estão corretas as afirmativas:

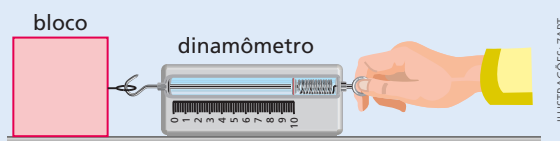
- a) I, II e IV.
 - b) II, III e IV.
 - c) I e IV.
 - d) II e IV.
 - e) apenas a II.
33. (Vunesp-SP) Os três blocos da figura, de mesmo material e mesma massa $m = 1,0$ kg, inicialmente em repouso sobre a superfície plana horizontal, estão submetidos às forças \vec{F}_A , \vec{F}_B , \vec{F}_C , que foram crescendo desde zero até os valores indicados. A aceleração da gravidade é $g = 9,8$ m/s² e os coeficientes de atrito estático e cinético são respectivamente iguais a 0,36 e 0,25.



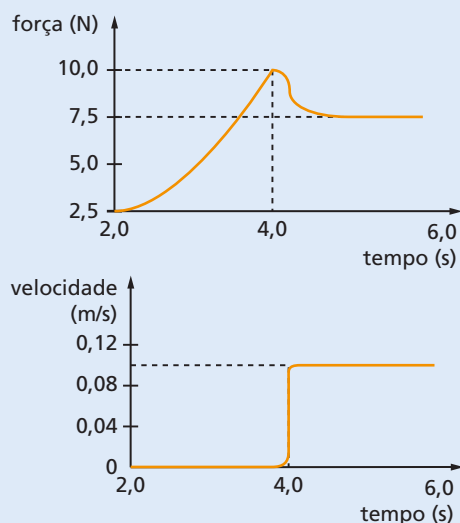
As forças de atrito \vec{f}_A , \vec{f}_B e \vec{f}_C têm intensidades iguais a:

- a) 3,5 3,5 2,5
- b) 3,5 3,5 3,5
- c) 2,5 2,5 2,5
- d) 2,5 2,5 3,5
- e) 2,5 3,5 2,5

34. (UF-MG) Um bloco de 5,0 kg está conectado a um dinamômetro, por meio de um fio. O dinamômetro é puxado sobre uma superfície plana e horizontal, para a direita, em linha reta.

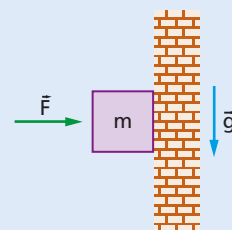


A força medida por esse dinamômetro e a velocidade do bloco, ambas em função do tempo, estão mostradas nestes gráficos.



Determine:

- a) o módulo da resultante das forças que atuam no bloco, nos instantes $t = 3,5$ s e $t = 5,0$ s;
 - b) o coeficiente de atrito estático entre a superfície e o bloco;
 - c) o coeficiente de atrito cinético entre a superfície e o bloco;
 - d) o valor aproximado da distância percorrida entre os instantes 2,0 s e 5,0 s. Dado: $g = 10$ m/s².
35. (UF-AL) Um corpo, de massa 0,20 kg, é comprimido contra uma parede vertical por meio de uma força horizontal \vec{F} de intensidade 8,0 N e fica, nessas condições, prestes a escorregar para baixo.



Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e calcule:

- o coeficiente de atrito estático entre o corpo e a parede;
- o valor da força de atrito se \vec{F} passa a ter intensidade de 16 N.

36. (UF-RN) Um caminhão de entrega de mercadorias saiu para entregar uma caixa. O caminhão está se movendo, em uma rua plana, com velocidade de 20 m/s quando o motorista avista o endereço em que deve entregar a mercadoria. Ele freia uniformemente e para em 4 segundos. O mínimo coeficiente de atrito entre a caixa e o piso do caminhão, de modo que a caixa não deslize, é:

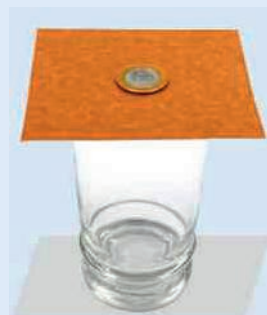
- a) 0,3 b) 0,4 c) 0,5 d) 0,6 e) 0,7

37. (Fuvest-SP) Uma locomotiva de massa M está ligada a um vagão de massa $\frac{2}{3}M$, ambos sobre trilhos horizontais e retilíneos. O coeficiente de atrito estático entre as rodas da locomotiva e os trilhos é μ , e todas as demais fontes de atrito podem ser desprezadas. Ao se pôr a locomotiva em movimento, sem que suas rodas patinem sobre os trilhos, a máxima aceleração que ela pode imprimir ao sistema formado por ela e pelo vagão vale:

- a) $\frac{3}{5} \mu g$ c) μg e) $\frac{5}{3} \mu g$
 b) $\frac{2}{3} \mu g$ d) $\frac{3}{2} \mu g$

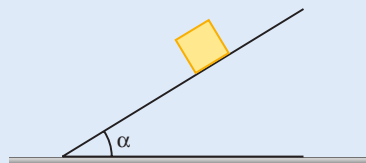
38. A figura representa uma demonstração que costuma ser usada para ilustrar a Lei da Inércia. Sobre uma mesa, temos um copo com a boca

tampada por um cartão, sobre o qual há uma moeda inicialmente em repouso. Puxando-se bruscamente o cartão com uma força horizontal \vec{F} , a moeda não acompanha o movimento do cartão e cai dentro do copo. Sendo g a aceleração da gravidade, m a massa da moeda, μ o coeficiente de atrito estático entre a moeda e o cartão e desprezando a massa do cartão, determine os valores de $|\vec{F}|$ de modo que o experimento dê certo.



FERNANDO FAVORETTO/CIAR IMAGEM

39. Um bloco é abandonado sobre um plano que forma com um plano horizontal um ângulo α , tal que $\sin \alpha = 0,60$ e $\cos \alpha = 0,80$. Verifique se o bloco permanece em repouso ou entra em movimento, sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano inclinado é $\mu_e = 0,70$.



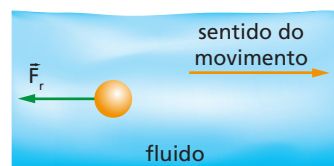
6. Resistência dos fluidos

Quando um corpo se move no interior de um fluido (líquido ou gás), sofre a ação de uma força (\vec{F}_r) que tem sentido oposto ao do movimento do corpo em relação ao fluido (fig. 24). Essa força pode ser chamada de **força de atrito fluido**, **força de atrito viscoso** ou, simplesmente, **força de resistência do fluido**. Experimentalmente, a sua intensidade é dada por:

$$F_r = k \cdot v^n$$

em que:

- v é o módulo da velocidade do corpo em relação ao fluido;
- n é uma constante que depende da ordem de grandeza da velocidade e do tamanho do corpo; para a maioria dos casos temos $n = 1$ ou $n = 2$;
- k é uma constante que depende da natureza do fluido (bem como de sua temperatura e densidade), do formato do corpo e da área A da maior seção reta do corpo, perpendicular à direção do movimento (quanto maior essa área, maior o valor de k).



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Figura 24.

Na figura 25 exemplificamos o modo de obter a área A .

Na figura 26a, a esquiadora se agacha para diminuir a área A e assim diminuir a resistência do ar. Já os paraquedistas da figura 26b ficam na posição indicada (e não na posição da fig. 26c) para aumentar a área e, assim, aumentar a resistência do ar. Para aumentar ainda mais a área A , podemos usar um paraquedas (fig. 26d).

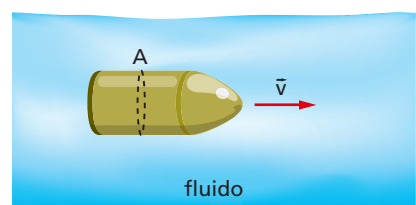


Figura 25.

(a)



(b)



(c)



(d)



Figura 26. Exemplos do uso esportivo da resistência do ar.

OBSERVAÇÃO

Quando um corpo está no interior de um fluido, além da força de atrito viscoso (que só existe quando o corpo está em movimento em relação ao fluido), o fluido aplica ao corpo uma outra força (que existe mesmo quando o corpo está parado), denominada **empuxo** (\vec{E}). Esse empuxo tem sentido oposto ao da aceleração da gravidade (fig. 27) e módulo dado por:

$$E = d \cdot V \cdot g$$

em que:

- g é o módulo da aceleração da gravidade;
- V é o volume do corpo;
- d é a densidade do fluido.

Assim, desde que a densidade do fluido seja pequena em comparação com a densidade do corpo, o empuxo pode ser desprezado; é o caso, por exemplo, de um corpo movendo-se no ar. No capítulo 25 faremos o estudo detalhado do empuxo. Por enquanto, vamos nos limitar a considerar exercícios em que o empuxo possa ser desprezado.

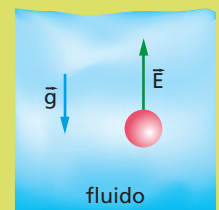


Figura 27.

Exemplo 7

Consideremos um bloco inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal e sem atrito (fig. 28). Apliquemos então ao bloco uma força horizontal \vec{F} de intensidade constante. Não havendo atrito com a superfície de apoio, o bloco entra em movimento. Porém, supondo que a experiência seja feita em presença do ar, assim que se inicia o movimento aparece uma força de resistência do ar, de sentido oposto ao de \vec{F} (fig. 29) e de módulo $F_r = k \cdot v^n$. Assim, à medida que v aumenta, F_r também aumenta. Há então um instante em que F_r torna-se igual a F (fig. 30). A partir desse instante, a resultante das forças que atuam no bloco torna-se nula e a velocidade fica constante. Essa velocidade é denominada **velocidade limite** ou **velocidade terminal** e é indicada por v_L .



Figura 28.

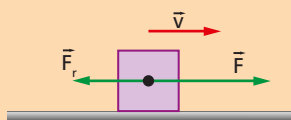


Figura 29.

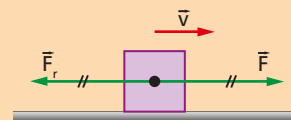


Figura 30.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

O gráfico do módulo v da velocidade em função do tempo tem o aspecto da figura 31. No instante em que a velocidade limite é atingida, temos $F_r = F$, isto é, $k \cdot v_L^n = F$, ou $v_L = \sqrt[n]{\frac{F}{k}}$.

Sendo a o módulo da aceleração do bloco, temos (pela Segunda Lei de Newton):

$$F - F_r = m \cdot a \quad \text{ou} \quad a = \frac{F - F_r}{m} = \frac{F - kv^n}{m}$$

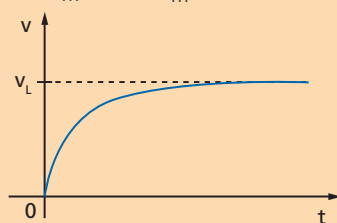


Figura 31.

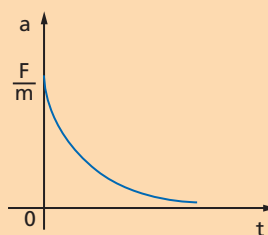


Figura 32.

Assim, o módulo de a é variável (pois F_r varia). No instante inicial de aplicação de \vec{F} , a velocidade é nula e, assim, $a = \frac{F}{m}$; no instante em que $F_r = F$, teremos $a = 0$, e o gráfico de a em função do tempo tem o aspecto da figura 32.

Exemplo 8

Suponhamos um caso em que a força de resistência de um fluido seja dada por $F_r = k \cdot v^2$. Vamos verificar qual é a unidade de k no Sistema Internacional de Unidades. De $F_r = k \cdot v^2$, tiramos $k = \frac{F_r}{v^2}$. No Sistema Internacional, a unidade de força é o newton (N) e a unidade de velocidade é o m/s. Assim:

$$\text{unidade de } k = \frac{\text{N}}{\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2} \quad (1)$$

Poderíamos dar a unidade de k de outro modo, lembrando que força = (massa) · (aceleração). Assim:

$$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Substituindo em (1), temos:

$$\text{unidade de } k = \frac{(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Exercícios de Aplicação

40. Um bloco de massa $m = 32 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal e sem atrito. No instante $t = 0$ aplica-se ao bloco uma força horizontal \vec{F} de intensidade $F = 128 \text{ N}$. O ar aplica sobre o bloco uma força resistente de intensidade $F_r = k \cdot v^2$, em que v é o módulo da velocidade e $k = 2,0 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$.



- Determine a velocidade limite atingida pelo bloco.
 - Esboce os gráficos dos módulos da velocidade e da aceleração do bloco em função do tempo.
41. Uma partícula de massa m é abandonada de grande altura, numa região onde a aceleração da gravidade tem módulo g . Desprezando o empuxo do ar e sabendo que a força de resistência do ar que atua na partícula tem módulo $F_r = k \cdot v^2$, determine o módulo da velocidade limite.

42. Consideremos dois objetos esféricos, A e B , de mesmo raio e massas respectivamente iguais a m_A e m_B , com $m_A > m_B$. Os dois objetos são abandonados simultaneamente de uma mesma altura em relação ao solo.

- Supondo que a experiência tenha sido feita no vácuo, qual dos dois objetos atinge o solo em primeiro lugar?
- Supondo que a experiência tenha sido feita em presença do ar, qual dos objetos atinge o solo em primeiro lugar?

43. Uma partícula de massa $m = 20 \text{ kg}$ é lançada verticalmente para baixo, com velocidade inicial de módulo $v_0 = 7,0 \text{ m/s}$, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. Despreze o empuxo do ar e admita que a força de resistência do ar que atua na partícula tem módulo $F_r = 8,0v^2$ (no Sistema Internacional). Analise o que ocorre com a velocidade da partícula.



Figura a.

Resolução:

Calculemos primeiramente a velocidade limite da partícula. Quando a partícula atinge a velocidade limite, devemos ter $F_r = P$, isto é,

$$8,0v_L^2 = m \cdot g$$

$$8,0v_L^2 = 20 \cdot 10$$

$$v_L = 5,0 \text{ m/s}$$

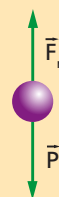


Figura b.

Percebemos, então, que a partícula foi lançada com velocidade v_0 maior que a velocidade limite v_L ($v_0 > v_L$). Isso significa que, inicialmente, teremos $F_r > P$ e o movimento é retardado. A velocidade deve ir diminuindo até atingir a velocidade limite (fig. c). A partir desse instante, a velocidade torna-se constante.

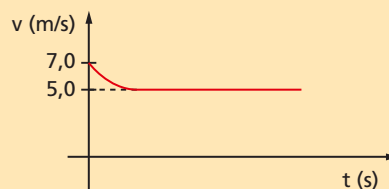
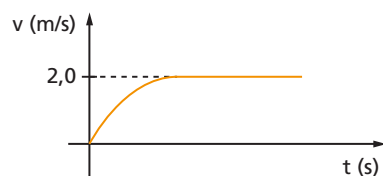


Figura c.

44. Uma gota de chuva cai verticalmente, a partir do repouso, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. A figura nos dá o módulo da velocidade da gota em função do tempo. A força de resistência que o ar aplica na gota é dada por $F_r = 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot v$ (no Sistema Internacional).



Desprezando o empuxo do ar, calcule a massa da gota.

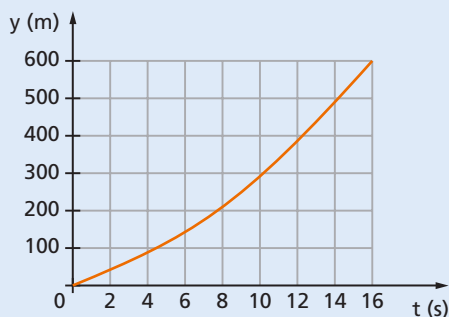
45. Um bloco de massa $m = 15 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal e com atrito, cujo coeficiente é $\mu = 0,80$. A aceleração local da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco uma força horizontal \vec{F} , de intensidade $F = 320 \text{ N}$.



Sabendo que a força de resistência do ar é dada por $F_r = 0,50 \cdot v^2$ (no Sistema Internacional), calcule a máxima velocidade atingida pelo bloco.

Exercícios de Reforço

46. (Fuvest-SP) O gráfico a seguir descreve a posição vertical y de um surfista aéreo de massa 75 kg, em função do tempo t . A origem $y = 0$ em $t = 0$ é tomada no ponto do salto. Nesse movimento a força de resistência do ar é dada por $F_r = k \cdot v^2$. A velocidade inicial do surfista é nula, cresce durante 10 s e tende para uma velocidade limite.



Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- o valor da velocidade limite;
 - o valor da constante k no SI;
 - a aceleração do surfista quando sua velocidade é metade da velocidade limite.
47. (Unifor-CE) Um corpo se move no ar e, num certo intervalo de tempo, sofre resistência de intensidade proporcional à sua velocidade, $F = k \cdot v$. No Sistema Internacional, a unidade da constante k é:

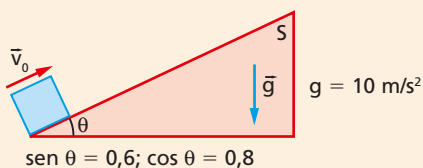
- kg
- kg/s
- kg/s²
- kg · s
- kg · s²

48. (Unifesp-SP) Em um salto de paraquedismo, identificam-se duas fases no movimento de queda do paraquedista. Nos primeiros instantes do movimento, ele é acelerado. Mas devido à força de resistência do ar, o seu movimento passa rapidamente a ser uniforme com velocidade v_1 , com o paraquedas ainda fechado. A segunda fase tem início no momento em que o paraquedas é aberto. Rapidamente, ele entra novamente em um regime de movimento uniforme, com velocidade v_2 . Supondo que a densidade do ar é constante, a força de resistência do ar sobre um corpo é proporcional à área sobre a qual atua a força e ao quadrado de sua velocidade. Se a área efetiva aumenta 100 vezes no momento em que o paraquedas se abre, pode-se afirmar que:

- $\frac{v_2}{v_1} = 0,08$
- $\frac{v_2}{v_1} = 0,1$
- $\frac{v_2}{v_1} = 0,15$
- $\frac{v_2}{v_1} = 0,21$
- $\frac{v_2}{v_1} = 0,3$

Exercícios de Aprofundamento

49. Um bloco de massa $m = 10 \text{ kg}$ é lançado com velocidade inicial $v_0 = 32 \text{ m/s}$ sobre uma superfície inclinada S , como mostra a figura, sendo $\mu = 0,25$ o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície. Devido ao atrito, durante a subida o bloco vai diminuindo sua velocidade até parar e, em seguida, desce, voltando ao ponto de partida.

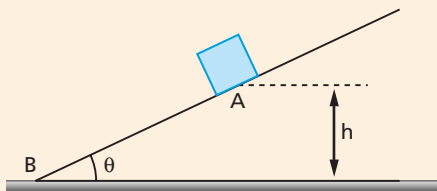


Calcule:

- o módulo da força normal exercida por S sobre o bloco;

- o módulo da força de atrito exercida sobre o bloco;
- o módulo da aceleração do bloco durante a subida;
- o módulo da aceleração do bloco durante a descida;
- o tempo de subida;
- a distância percorrida durante a subida;
- o tempo de descida.

50. Uma partícula de massa m é abandonada com velocidade inicial nula, no ponto A de um plano inclinado, como mostra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo g e o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano inclinado é μ . Suponhamos que, apesar do atrito, o bloco deslize para baixo.

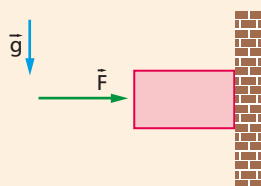


Calcule, em função de m , g , μ , h e θ :

- o módulo da aceleração do bloco durante a descida;
- o intervalo de tempo decorrido no percurso \overline{AB} , em que B é o ponto no qual o bloco atinge o solo.

- 51.** Um corpo de massa $8,0 \text{ kg}$ sobe um plano inclinado de 45° em relação a um plano horizontal, em movimento retilíneo e uniforme, puxado por uma força paralela ao plano inclinado e cuja intensidade é $60\sqrt{2} \text{ N}$. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o coeficiente de atrito entre o corpo e o plano inclinado.

- 52.** Um bloco de massa $8,0 \text{ kg}$ é mantido em repouso, encostado em uma parede vertical, aplicando-se a ele uma força horizontal \vec{F} , como mostra a figura. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

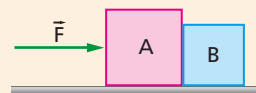


- Supondo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede seja igual a $0,40$, determine os valores possíveis para a intensidade de \vec{F} .
- Supondo que a intensidade de \vec{F} é 400 N , determine os valores possíveis para o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede.

- 53.** Uma caixa cai, de pequena altura, sobre uma esteira transportadora cujos pontos se movem com velocidade escalar $v = 2,0 \text{ m/s}$. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e o coeficiente de atrito dinâmico entre a caixa e a esteira é $\mu = 0,50$. Calcule o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que a caixa cai sobre a esteira até o instante em que a caixa para de escorregar sobre a esteira.



- 54.** Dois blocos, A e B , estão em repouso, encostados um no outro e apoiados sobre uma superfície plana horizontal, numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. As massas de A e B são respectivamente iguais a 14 kg e $6,0 \text{ kg}$ e o coeficiente de atrito dinâmico entre cada bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0,50$. A partir de determinado instante aplica-se ao bloco A (como mostra a figura) uma força horizontal \vec{F} , de módulo $F = 160 \text{ N}$.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Iniciado o movimento, calcule o módulo:

- da força de atrito exercida sobre o bloco A ;
- da força de atrito exercida sobre o bloco B ;
- da aceleração do conjunto;
- da força exercida pelo bloco A sobre o bloco B .

- 55.** (U. F. São Carlos-SP) Por ser o vestibular da UFSCar, a tarefa era de grande responsabilidade e o fiscal de prova precisava ainda levar ao fundo da sala toda uma fileira de carteiras. Exercendo sobre a primeira carteira da fila uma força horizontal de intensidade constante, acelera essa carteira a 1 m/s^2 . Observa então que, na medida em que uma carteira passa a empurrar a próxima, o conjunto todo tem sua aceleração diminuída, chegando a se tornar nula exatamente quando a fila contém seis carteiras. Enquanto lia as instruções da prova, pairava na mente do fiscal uma questão:

Qual deve ser a intensidade da força de atrito que ocorre entre uma carteira e o piso da sala?

Responda a questão do fiscal, considerando que:

As carteiras são idênticas, podendo ser consideradas pontos materiais que se movem em linha reta.

As intensidades das forças de atrito estático máximo e de atrito dinâmico são muito próximas, podendo ser consideradas iguais.

O piso da sala é plano e horizontal.

Cada carteira tem massa 25 kg .

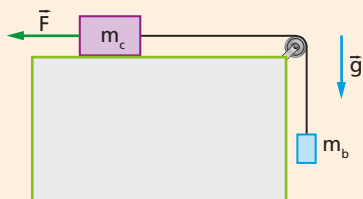
- 5 N
- 6 N
- 10 N
- 15 N
- 30 N

56. (UF-AL) Uma força F horizontal e de intensidade 30 N é aplicada num corpo A de massa 4,0 kg, preso a um corpo B de massa 2,0 kg que, por sua vez, se prende a um corpo C.

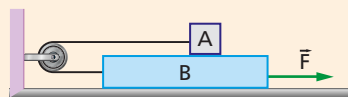


O coeficiente de atrito entre cada corpo e a superfície horizontal de apoio é 0,10 e verifica-se que a aceleração do sistema é, nessas condições, $2,0 \text{ m/s}^2$. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e analise as afirmações a seguir, dando como resposta a soma dos números que antecedem as afirmativas verdadeiras.

- (01) A massa do corpo C é 5,0 kg.
 (02) A tração no fio que une A e B tem módulo 18 N.
 (04) A força de atrito que age no corpo A tem módulo 4,0 N.
 (08) A tração no fio que une B e C tem módulo 8,0 N.
 (16) A força resultante no corpo B tem módulo 4,0 N.
57. (UF-PE) Uma caixa de massa $m_c = 10 \text{ kg}$ é ligada a um bloco de massa $m_b = 5,0 \text{ kg}$ por meio de um fio fino e inextensível que passa por uma pequena polia sem atrito como mostra a figura, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine o módulo da força horizontal \vec{F} que deve ser aplicada à caixa de modo que o bloco suba, com movimento acelerado, de aceleração $2,0 \text{ m/s}^2$. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso é 0,10.

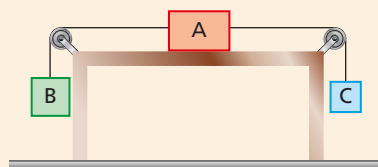


58. O sistema esquematizado na figura está inicialmente em repouso. O fio e a polia são ideais, $g = 10 \text{ m/s}^2$, a massa de A é 4,0 kg e a de B é 16 kg. Existe atrito entre A e B e entre B e a superfície de apoio, sendo o coeficiente de atrito dinâmico igual a 0,20 em ambos os casos. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco B uma força horizontal \vec{F} , como mostra a figura.

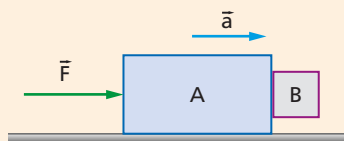


Calcule o módulo de \vec{F} nos seguintes casos:

- a) os blocos passam a mover-se com velocidade constante;
 b) os blocos passam a mover-se com aceleração constante de módulo $a = 3,0 \text{ m/s}^2$.
59. O sistema representado na figura é abandonado em repouso. As polias e os fios são ideais e as massas dos blocos A e B são respectivamente iguais a 5,0 kg e 7,0 kg. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e suponha que o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície de apoio é $\mu_e = 0,20$.



- a) Determine os valores possíveis para a massa do bloco C, de modo que o sistema fique em repouso.
 b) Para que valor da massa de C a força de atrito entre o bloco A e a superfície de apoio é nula?
60. Um bloco A, apoiado em uma superfície plana horizontal sem atrito, move-se em movimento acelerado de aceleração \vec{a} , empurrado por uma força horizontal \vec{F} . O bloco A, por sua vez, empurra um bloco B, como mostra a figura, de modo que B não caia. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e suponha que o coeficiente de atrito estático entre os blocos A e B seja igual a μ .



ILUSTRAÇÕES: ZAP

- a) Supondo $\mu = 0,40$, determine os valores possíveis para o módulo de \vec{a} .
 b) Supondo $\mu = 0,40$ e que as massas de A e B sejam $m_A = 8,0 \text{ kg}$ e $m_B = 2,0 \text{ kg}$, calcule os valores possíveis para a intensidade de \vec{F} .
 c) Supondo $|\vec{a}| = 20 \text{ m/s}^2$, calcule os valores possíveis de μ .

Força elástica

1. Lei de Hooke

Consideremos uma mola de comprimento natural L_0 , estando fixa uma de suas extremidades, como indica a figura 1a. Apliquemos à outra extremidade da mola uma força \vec{F} de mesma direção da mola, de modo que seu comprimento aumente para o valor L (fig. 1b).

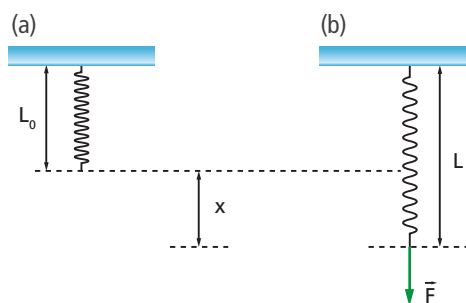


Figura 1.

A diferença x entre L e L_0 é denominada **deformação** da mola. A experiência mostra que, desde que x não seja muito grande em comparação com L_0 (e esse “muito grande” vai depender de cada mola), a intensidade de \vec{F} é proporcional a x , isto é:

$$F = k \cdot x$$

em que k é uma constante que depende da mola. Esse resultado é conhecido como **Lei de Hooke**.

A constante k é chamada **constante elástica da mola** (ou “constante de força da mola”), e sua unidade no SI é o newton por metro (N/m).

A Lei de Hooke vale também para o caso em que a mola é **comprimida**, como no caso da figura 2 (desde que x não seja “muito grande”).

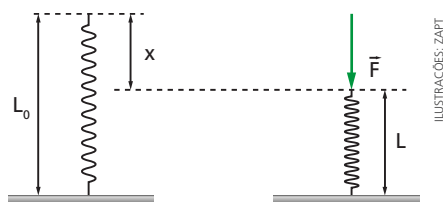


Figura 2.

Para a mola alongada ou comprimida, vale a equação:

$$F = k \cdot x$$

sendo o valor de k o mesmo tanto no alongamento como na compressão de uma mesma mola.

1. Lei de Hooke

Como $F = k \cdot x$, o gráfico de F em função de x deve ser retilíneo, como indica a figura 3.

Tanto no caso em que a mola é “esticada” quanto no caso em que é comprimida, ao retirarmos a força \vec{F} que causou a deformação, a **tendência** da mola é voltar ao seu comprimento inicial; em alguns casos pode acontecer de a mola voltar a um comprimento diferente, mas nós só consideraremos aqui os casos em que a mola volta rigorosamente ao seu comprimento inicial, ao ser retirada a força \vec{F} que causou a deformação x . Quando isso ocorre e é obedecida a Lei de Hooke, dizemos que a deformação x é **elástica**.

Quando uma força \vec{F} é aplicada na mola, provocando sua deformação, a mola reage com uma força \vec{F}_{el} , que é chamada de **força elástica** e está aplicada no “agente” que aplica a força \vec{F} ; pelo Princípio da Ação e Reação, \vec{F} e \vec{F}_{el} devem ter o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos.

Na figura 4 representamos um bloco B preso a uma das extremidades de uma mola, cuja outra extremidade está presa a um suporte S , estando a mola **não** deformada. Temos ainda um eixo cuja origem (0) corresponde à posição de uma das extremidades da mola; nessa posição temos uma situação de equilíbrio.

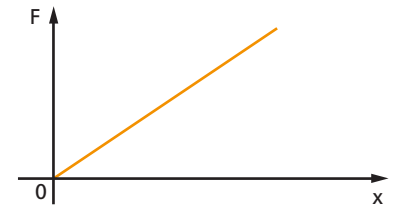


Figura 3.

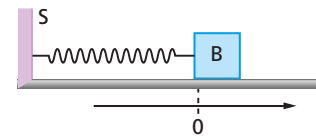


Figura 4.

Vamos tirar o bloco B da posição de equilíbrio puxando-o para a direita (fig. 5a), de modo que o comprimento da mola aumente, sendo x a deformação. Nessa posição, o bloco exerce sobre a mola uma força \vec{F} (fig. 5b) e a mola exerce a força \vec{F}_{el} sobre o bloco. A força \vec{F}_{el} tende a trazer o bloco B de volta a sua posição de equilíbrio e, por isso, costuma-se dizer que a força \vec{F}_{el} é uma força de **restauração**, isto é, ela procura restaurar a situação inicial de equilíbrio.

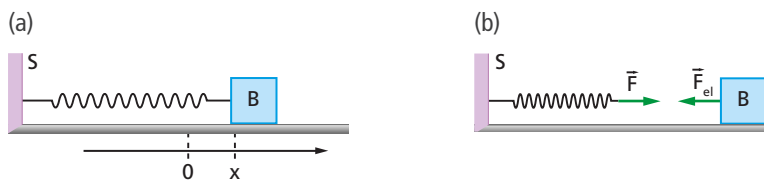


Figura 5.

Vamos agora deslocar o bloco de modo que a mola seja comprimida (fig. 6a); em relação ao eixo adotado, temos $x < 0$ e, portanto, a deformação nesse caso é $|x|$. Nessa posição, o bloco exerce sobre a mola uma força \vec{F} (fig. 6b) e a mola exerce sobre o bloco a força \vec{F}_{el} , que, novamente, tende a levar o bloco para a situação de equilíbrio, isto é, procura **restaurar** a posição de equilíbrio.

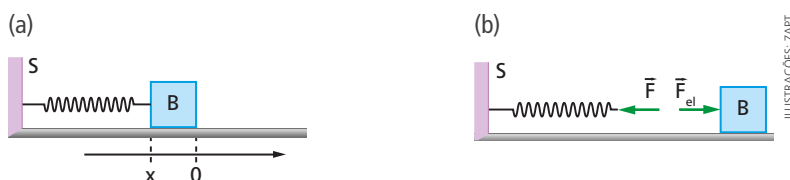


Figura 6.

Tanto no caso da figura 5 como no caso da figura 6, temos:

$$|\vec{F}_{el}| = k \cdot |x|$$

No entanto, às vezes pode ser útil atribuir um sinal à força elástica \vec{F}_{el} , convencionando que seu sinal é positivo quando tem o mesmo sentido do eixo e negativo quando tem sentido oposto. Desse modo, tanto no caso da figura 5 como no caso da figura 6 podemos escrever:

$$\vec{F}_{el} = -k \cdot x$$

A mola ideal

Consideremos uma mola disposta verticalmente, com sua extremidade superior presa a um suporte (fig. 7a). Apliquemos à mola uma força vertical \vec{F} (fig. 7b), de modo que o seu comprimento aumente. A mola exerce uma força \vec{F}_1 no suporte (fig. 7c) e este exerce uma força \vec{F}_2 na mola. Mas, pelo Princípio da Ação e Reação, devemos ter $F_1 = F_2$ (fig. 7d). Supondo que a mola esteja em equilíbrio e que sua massa seja desprezível, teremos $F_1 = F$ (fig. 7e).

Assim, quando escrevemos:

$$F = k \cdot x$$

F é a intensidade de cada uma das duas forças que atuam nas duas extremidades da mola (supondo que sua massa seja desprezível).

Chamamos **mola ideal** a uma mola de massa desprezível que obedeça à Lei de Hooke.

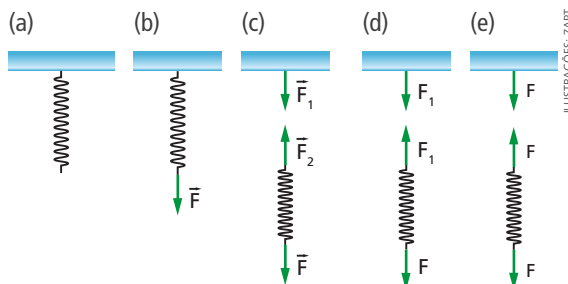


Figura 7.

Associação de molas

Às vezes ocorrem situações em que duas ou mais molas estão associadas, como nas figuras 8a e 8b.

PROCURE NO CD

Veja, no capítulo 16 do CD, o texto "Associação de molas".

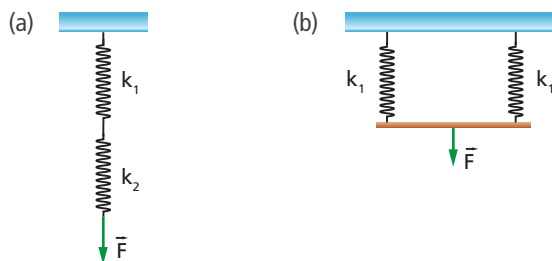


Figura 8.

Exercícios de Aplicação

1. Uma mola ideal, de comprimento natural $L_0 = 1,2$ m, é pendurada a um suporte (fig. a). Na extremidade inferior da mola prendemos um bloco de massa $m = 1,6$ kg, de modo que, na posição de equilíbrio, o novo comprimento da mola é $L = 1,4$ m (fig. b). Sabendo que a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10$ m/s², calcule a constante elástica da mola.

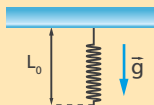


Figura a.

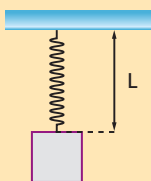


Figura b.

Resolução:

As forças que atuam no bloco são o seu peso (\vec{P}) e a força elástica \vec{F} exercida pela mola. Como o bloco está em equilíbrio, devemos ter:

$$F = P = m \cdot g = 1,6 \cdot 10 \Rightarrow F = 16 \text{ N}$$

A deformação x sofrida pela mola é dada por:

$$x = L - L_0 \Rightarrow x = 1,4 - 1,2$$

$$x = 0,2 \text{ m}$$

De acordo com a Lei de Hooke, temos:

$$F = k \cdot x \Rightarrow 16 = k (0,2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 80 \text{ N/m}$$

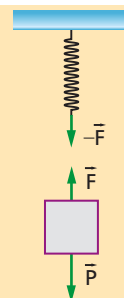
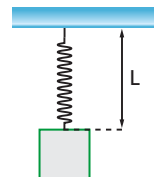
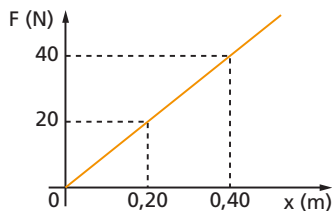


Figura c.

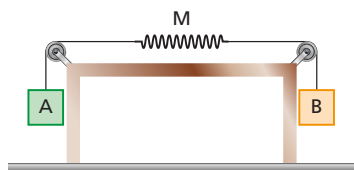
2. Consideremos uma mola ideal, de comprimento natural $L_0 = 0,70$ m. Pendemos uma das extremidades da mola a um suporte e na outra extremidade penduramos um bloco de massa $m = 0,60$ kg, como mostra a figura, de modo que, na posição de equilíbrio, o comprimento da mola seja $L = 0,80$ m. Calcule a constante elástica da mola, sabendo que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10$ m/s².



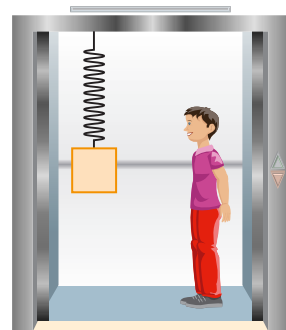
3. A figura nos dá o gráfico da intensidade da força \vec{F} exercida por uma mola ideal, em função da deformação x . Calcule a constante elástica da mola.



4. Uma mola ideal tem constante elástica $k = 60 \text{ N/m}$. Calcule a deformação da mola quando a força exercida por ela tem intensidade $F = 15 \text{ N}$.
5. Consideremos uma mola ideal de constante elástica $k = 4,0 \text{ kgf/cm}$. Calcule a deformação da mola quando a força exercida por ela tem intensidade $F = 12 \text{ kgf}$.
6. O sistema representado na figura é abandonado em repouso. Os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a $3,0 \text{ kg}$ e $7,0 \text{ kg}$. Os fios e a mola M são ideais, a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a constante elástica da mola é $k = 210 \text{ N/m}$. Calcule a deformação da mola durante o movimento.

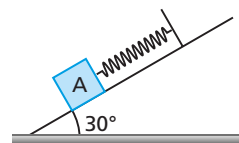


7. Uma mola de comprimento natural $L_0 = 1,3 \text{ m}$ e constante elástica $k = 260 \text{ N/m}$ está pendurada no teto de um elevador. Na extremidade inferior da mola está preso um bloco de massa $m = 4,0 \text{ kg}$. A aceleração local da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e o elevador está subindo em movimento acelerado, de aceleração $a = 3,0 \text{ m/s}^2$.



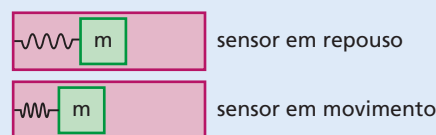
Calcule o comprimento da mola, sabendo que o bloco está em repouso para um observador situado dentro do elevador.

8. O sistema representado na figura está em equilíbrio. O bloco A tem massa $m = 4,0 \text{ kg}$, a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$, não há atrito e a mola é ideal. Determine a deformação da mola, sabendo que sua constante elástica é $k = 50 \text{ N/m}$.



Exercícios de Reforço

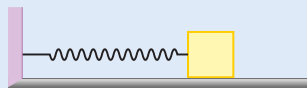
9. (UF-PA) Sistemas de navegação inercial são utilizados na aviação, em mísseis e submarinos. Particularmente em submarinos, onde a tecnologia GPS (Sistema de Posicionamento Global) não pode ser utilizada, esses sistemas são empregados para determinar o posicionamento. Fundamentalmente eles se baseiam em sensores que medem aceleração. A figura a seguir mostra um sistema massa-mola representando o sensor de um aparelho de navegação inercial, em duas configurações em que a massa m permanece imóvel dentro do sensor. Considere que não há atrito no movimento da massa ligada à mola dentro do invólucro, e o movimento ocorre sobre um trecho retilíneo.



Considerando, exclusivamente, este modelo, é correto afirmar que:

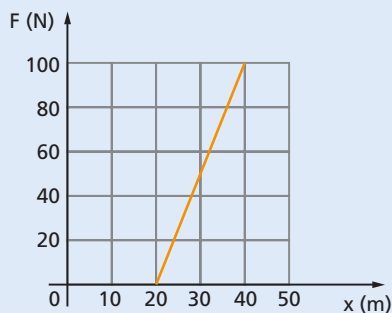
- o que permite medir a aceleração é o fato de ela ser diretamente proporcional ao quadrado da deformação da mola.
- a configuração indicada para o "sensor em movimento" ocorre se o sensor está sendo acelerado para a direita.
- a configuração de repouso é diferente da configuração de movimento uniforme.
- a deformação na mola independe da massa m do sensor.

10. (Mackenzie-SP) Um corpo de peso 30 N repousa sobre uma superfície horizontal de coeficiente de atrito estático 0,4. Por meio de uma mola de massa desprezível, de comprimento natural 20 cm e constante elástica $20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, prende-se esse corpo em uma parede como mostra a figura.



A máxima distância a que podemos manter esse corpo da parede e em equilíbrio será de:

- a) 26 cm d) 90 cm
b) 40 cm e) 100 cm
c) 80 cm
11. (Fuvest-SP) Uma mola pendurada num suporte apresenta comprimento igual a 20 cm. Na sua extremidade livre pendura-se um balde vazio, cuja massa é 0,50 kg. Em seguida coloca-se água no balde até que o comprimento da mola atinja 40 cm. O gráfico abaixo ilustra a força que a mola exerce sobre o balde, em função do seu comprimento. Pede-se a massa da água colocada no balde. (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



12. (Vunesp-SP) As figuras 1 e 2 representam dois esquemas experimentais utilizados para a determinação do coeficiente de atrito estático entre um bloco B e uma tábua plana, horizontal.



Figura 1.

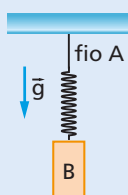
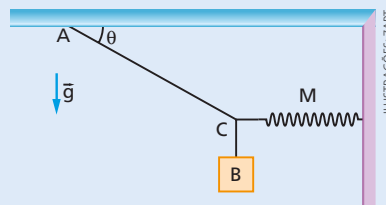


Figura 2.

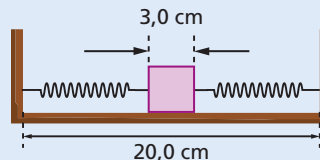
No esquema da figura 1, um aluno exerceu uma força horizontal no fio A e mediu o valor 2,0 cm para a deformação da mola, quando a força atingiu seu máximo valor possível, imediatamente antes que o bloco B se movesse. Para determinar a massa do bloco B, este foi suspenso verticalmente, com o fio A fixo no teto, conforme indicado na figura 2, e o aluno mediu a deformação da mola igual a 10,0 cm, quando o sistema estava em equilíbrio. Nas condições descritas, desprezando a resistência do ar, o coeficiente de atrito entre o bloco e a tábua vale:

- a) 0,1 d) 0,4
b) 0,2 e) 0,5
c) 0,3
13. No sistema em equilíbrio representado na figura, os fios e a mola M são ideais, a massa de B é 12 kg e a mola está alongada 5,0 cm.



Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$, determine:

- a) a tração no fio AC;
b) a constante elástica da mola.
14. (Cesesp-PE) Duas molas têm o mesmo comprimento de 10,0 cm quando em equilíbrio e com constantes elásticas k_1 e k_2 , respectivamente. Elas são usadas para fixar um pequeno cubo de aresta igual a 3,0 cm no fundo de uma caixa de largura igual a 20,0 cm, conforme indicado na figura.

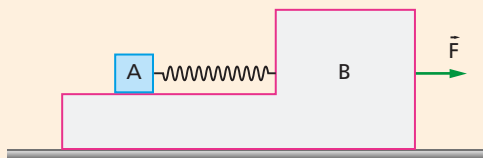


Se $k_1 = 2k_2$, os comprimentos das molas 1 e 2 após a montagem do sistema são, em centímetros, respectivamente:

- a) 9,0 e 8,0 d) 6,3 e 10,7
b) 5,7 e 11,3 e) 7,3 e 9,7
c) 10,3 e 6,7

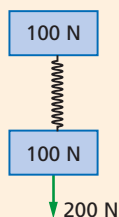
Exercícios de Aprofundamento

15. (FEI-SP) Os corpos A e B representados na figura possuem, respectivamente, massas $m_A = 2,0$ kg e $m_B = 4,0$ kg. A mola é ideal e tem constante elástica $k = 50$ N/m. Despreze os atritos. Aplicando-se ao conjunto uma força \vec{F} constante e horizontal, verifica-se que a mola experimenta deformação de 20 cm.



Calcule as intensidades:

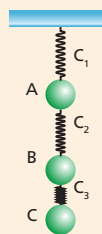
- da aceleração do conjunto;
 - da força \vec{F} .
16. (Fatec-SP) O conjunto dos blocos representados na figura está sujeito a uma força vertical para baixo, cuja intensidade é 200 N. A constante elástica da mola (ideal) que une os blocos vale 1 000 N/m e o movimento do sistema se dá na mesma linha vertical. Adote $g = 10$ m/s².



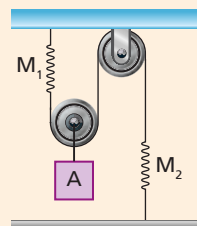
A deformação da mola, em centímetros, é:

- 10
 - 5
 - 0
 - 60
 - 6
17. (Mackenzie-SP) Sejam três molas com comprimentos naturais de 10 cm cada uma, sustentando os corpos A , B e C , de acordo com a figura. O sistema está em equilíbrio e cada corpo tem peso igual a 4 kgf. Sendo as constantes elásticas das molas iguais a 2 kgf/cm e desprezando os pesos das molas, os novos comprimentos C_1 , C_2 e C_3 das molas serão, em centímetros:

- $C_1 = 16$; $C_2 = 14$; $C_3 = 12$
- $C_1 = C_2 = C_3 = 16$
- $C_1 = C_2 = C_3 = 12$
- $C_1 = 12$; $C_2 = 14$; $C_3 = 16$
- $C_1 = C_2 = C_3 = 14$

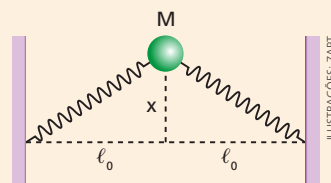


18. (FEI-SP) No sistema da figura, o corpo A tem peso 200 N, as molas M_1 e M_2 possuem constantes elásticas $k_1 = 10^3$ N/m e $k_2 = 2 \cdot 10^3$ N/m. As molas e as polias são ideais. As deformações produzidas nas molas M_1 e M_2 valem, respectivamente:



- 10 cm e 5 cm
- 20 cm e 0
- 20 cm e 10 cm
- 10 cm e 10 cm
- 5 cm e 5 cm

19. (ITA-SP) Sobre uma mesa sem atrito, uma bola de massa M é presa por duas molas alinhadas, de constante de mola k e o comprimento natural ℓ_0 , fixadas nas extremidades da mesa. Então, a bola é deslocada a uma distância x na direção perpendicular à linha inicial das molas, como mostra a figura, sendo solta a seguir.



Obtenha a aceleração da bola, usando a aproximação $(1 + a)^\alpha = 1 + \alpha a$.

- $a = \frac{-kx}{M}$
- $a = \frac{-kx^2}{2M\ell_0}$
- $a = \frac{-kx^2}{M\ell_0}$
- $a = \frac{-kx^3}{2M\ell_0^2}$
- $a = \frac{-kx^3}{M\ell_0^2}$

Movimento plano em trajetória curva

Estudamos até aqui as aplicações das Leis de Newton a corpos em repouso ou então em movimento retilíneo. Neste capítulo, vamos estudar as aplicações das Leis de Newton a corpos em movimentos em trajetória curva, porém plana, como, por exemplo, num movimento circular.

1. Os efeitos de uma força

A Segunda Lei de Newton nos ensina que o efeito de uma força é produzir aceleração, ou seja, uma variação da velocidade. Devemos entender, no entanto, que a força, a aceleração e a velocidade são grandezas vetoriais. Assim, considera-se como variação de velocidade a qualquer alteração do módulo, ou da direção ou do sentido. Evidentemente, pode haver variação de uma, ou de duas, ou das três características da velocidade vetorial.

Se uma partícula estiver em repouso e nela aplicarmos uma força (fig. 1), esta terá uma aceleração e adquirirá um movimento retilíneo acelerado. Consequentemente, sua velocidade passará a ter módulo variável.

Escreve-se:

$$\vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x$$

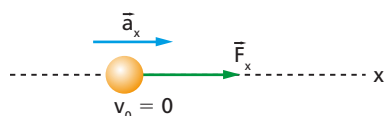


Figura 1.

ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Consideremos agora uma partícula que descreve, em relação a um referencial inercial, um movimento em trajetória curva, situada num plano α . Em cada posição em que estiver a partícula, sua velocidade é tangente à trajetória e terá o mesmo sentido em que ela se movimenta. Na figura 2, vamos representá-la em três posições e observar os vetores velocidade: \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 .

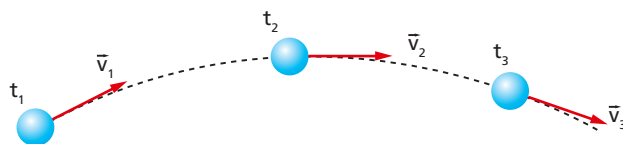


Figura 2. Uma partícula percorrendo uma trajetória curva.

Quanto ao módulo, esses vetores poderão ser iguais se o movimento for uniforme, mas serão diferentes para o movimento acelerado ou retardado. No entanto, a direção não é a mesma e, portanto, há uma aceleração. Consequentemente, há uma força atuando sobre a partícula.

Podemos escrever:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{e ainda:} \quad \vec{F} = m \vec{a}$$

1. Os efeitos de uma força
2. Componentes da força resultante
3. O movimento circular e uniforme
4. A força centrífuga

A força resultante também interfere na forma geométrica da trajetória, bem como na variação do módulo da velocidade vetorial. Na figura 3, mostramos, para um dado instante, a velocidade vetorial \vec{v} da partícula e a força resultante \vec{F} . Observemos que esta é voltada para o lado interno da curva da trajetória. A força \vec{F} puxou a partícula e encurvou a trajetória.

Vamos mostrar um último exemplo: o de um lançamento horizontal no vácuo (fig. 4). Como a única força atuante na partícula é a força peso \vec{P} , a qual se mantém constante e sua direção não é coincidente com a velocidade vetorial inicial \vec{v}_0 , concluímos que, para um referencial no solo, a trajetória é parabólica. Durante o movimento, o peso vai derrubando a partícula e encurvando a trajetória. Desse modo, a força resultante, o peso \vec{P} , continua apontando para o lado interno da curva.

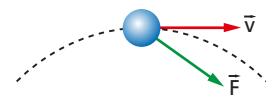


Figura 3. Trajetória curva apresentando os vetores velocidade e força.

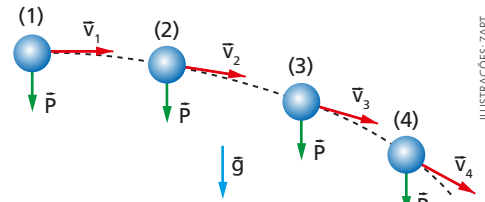


Figura 4. Lançamento horizontal de uma partícula.

2. Componentes da força resultante

Consideremos uma partícula que descreve, em relação a um referencial inercial, uma trajetória curva, como a mostrada anteriormente na figura 3. Para estudarmos os efeitos dessa força, vamos decompô-la nas direções tangencial e normal (fig. 5). A componente tangencial \vec{F}_t é denominada **resultante tangencial**, e a componente normal \vec{F}_c é a **resultante centrípeta**.

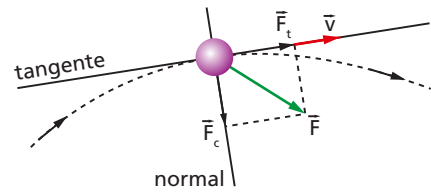


Figura 5. Componentes da força resultante.

A componente tangencial

A resultante tangencial \vec{F}_t produz uma aceleração tangencial \vec{a}_t e está atuando na direção da velocidade, portanto vai alterar o seu módulo. De acordo com a Segunda Lei de Newton, podemos escrever:

$$\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t$$

O movimento curvilíneo pode ser acelerado, retardado ou uniforme.

- No movimento acelerado, \vec{F}_t tem o mesmo sentido que a velocidade \vec{v} (fig. 6).
- No movimento retardado, \vec{F}_t tem o sentido oposto ao da velocidade \vec{v} (fig. 7).
- No movimento uniforme o módulo da velocidade vetorial fica constante e, portanto, $\vec{F}_t = \vec{0}$ (fig. 8).

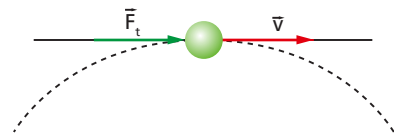


Figura 6. Movimento acelerado.

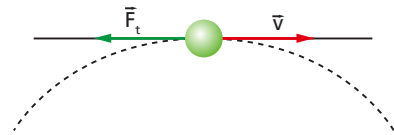


Figura 7. Movimento retardado.

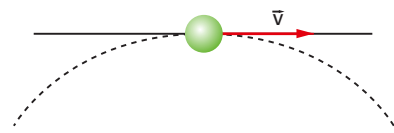


Figura 8. Movimento uniforme.

A resultante centrípeta

A resultante centrípeta \vec{F}_c é a componente de força responsável pelo encurvamento da trajetória. Ela modifica apenas a direção da velocidade vetorial v , mas não modifica o seu módulo, pois ambas são perpendiculares.

Havendo mudança na direção da velocidade, isso caracteriza uma variação da velocidade e, portanto, há uma aceleração. Esta é causada pela componente centrípeta que, de acordo com a Segunda Lei de Newton, se pode escrever:

$$\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c$$

Como estudamos no capítulo 9, para um movimento circular de raio R , a aceleração centrípeta tem módulo dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

em que v é o módulo da velocidade instantânea naquela posição.

No entanto, a equação da aceleração centrípeta também vale para uma curva genérica em que o raio de curvatura é convenientemente escolhido, como mostra a figura 9.

Assim, podemos escrever uma equação para o módulo da força resultante centrípeta:

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

A direção da força resultante é radial, e o seu sentido é sempre apontando para o centro da curva.

Para uma trajetória genérica, podemos tratar uma pequena porção da curva como se fosse um arco de circunferência de raio R .

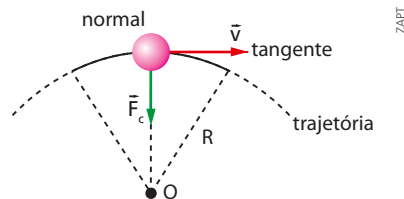


Figura 9. A força centrípeta \vec{F}_c .

0 módulo da força resultante

As componentes \vec{F}_t e \vec{F}_c são vetores e têm suas direções perpendiculares entre si. Isso nos permite escrever:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_t$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo colorido da figura 10, temos:

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_c|^2 + |\vec{F}_t|^2 \Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_c|^2 + |\vec{F}_t|^2}$$

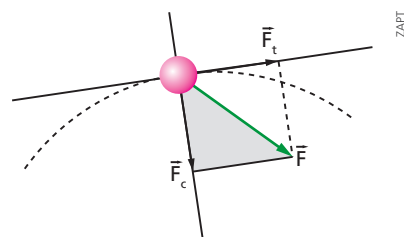


Figura 10.

3. 0 movimento circular e uniforme

Consideremos uma partícula de massa m que executa, em relação a um referencial inercial, um movimento circular uniforme de raio R , com velocidade de módulo v .

Como vimos, a componente tangencial da força resultante (\vec{F}_t) é nula. Assim, a força resultante é centrípeta.

Em cada posição ocupada pela partícula, desenhamos a resultante centrípeta apontando para o centro da trajetória (circunferência). A velocidade será sempre tangente à trajetória (fig. 11). Valem as seguintes considerações para cada posição:

$$|v_1| = |v_2| = |v_3| = |v_4| = v$$

$$|F_1| = |F_2| = |F_3| = |F_4| = |F_c| = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

No MCU o módulo da força resultante é constante e é igual ao módulo da força centrípeta.

Vamos examinar alguns exemplos de força centrípeta.

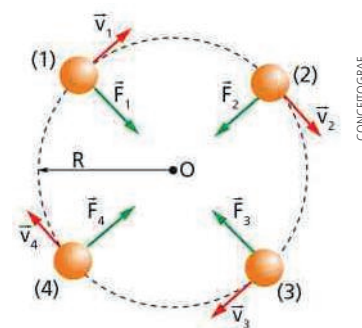


Figura 11. Partícula em MCU.

Assim como não se deve dizer que a velocidade permanece constante, também não se pode afirmar que a força centrípeta permanece constante, pois estamos trabalhando com vetores e a direção varia de posição para posição. Deve-se dizer que o módulo da velocidade, bem como o da força centrípeta, permaneceu constante.

Exemplo 1

A Lua está girando em torno da Terra. Vamos admitir que o seu movimento seja circular e uniforme. A tendência da Lua é sair pela tangente e abandonar a sua órbita. Mas por que isso não acontece?

A resposta a essa pergunta foi dada por Newton: a força gravitacional entre a Terra e a Lua mantém a órbita da Lua (fig. 12).

Devido à sua inércia, a tendência da Lua é escapar pela tangente e esse é o motivo pelo qual a Lua tem velocidade. A força gravitacional da Terra "faz o papel" de força centrípeta e segura a Lua em órbita. Supondo-se uma órbita praticamente circular, essa força será radial e não terá componente tangencial. Desse modo, o movimento tangencial é desprovido de força e o módulo da velocidade não se altera.

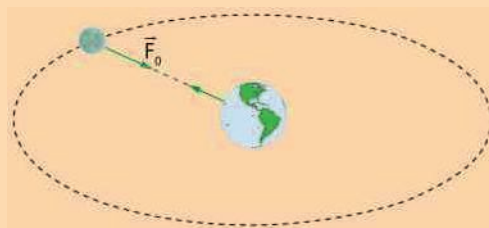


Figura 12. A Lua em órbita da Terra.

Exemplo 2

Quando um carro faz uma curva numa estrada, realizando um movimento circular e uniforme, a força de atrito atua sobre os pneus, impedindo-o de escapar pela tangente. Essa força é dirigida para o centro da trajetória e "faz o papel" da força centrípeta.

Nos dois exemplos acima, a força foi denominada centrípeta porque apontava para o centro da trajetória. O termo **centrípeta** é apenas um adjetivo. Observemos que a **força centrípeta** não é um novo tipo de força.

Na resolução dos exercícios de movimento circular, não devemos desenhar uma força centrípeta. Desenhemos todas as forças e analisamos as forças radiais, cuja resultante será centrípeta. Nos exercícios resolvidos poderemos perceber essa estratégia.

Inserindo a velocidade angular

No movimento circular uniforme vale a equação entre a velocidade linear (v) e a angular (ω):

$$v = \omega \cdot R$$

Voltando-se à equação da força centrípeta:

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow F_c = \frac{m \cdot (\omega \cdot R)^2}{R} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R^2}{R}$$

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Exercícios de Aplicação

1. Um carro de massa 500 kg, com velocidade escalar de 72 km/h, entra numa curva da estrada e mantém constante sua velocidade escalar. Sendo 50 m o raio da curva, determine a força de atrito necessária para que ele não derrape, saindo pela tangente.

Resolução:

A força de atrito deverá fazer o papel da força centrípeta e obedecerá à equação:

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

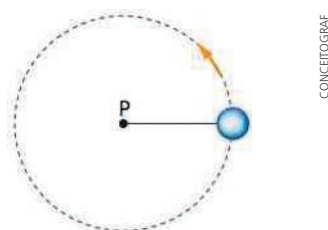
Assim sendo, devemos igualar o módulo da força de atrito ao módulo da força centrípeta.

Sendo: $m = 500$ kg; $R = 50$ m; $v = 72$ km/h = 20 m/s:

$$F_{at} = F_c = \frac{500 \cdot 20^2}{50} \Rightarrow F_{at} = 4000 \text{ N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{at} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ N}$$

2. Na figura vemos uma pequena esfera realizando um movimento circular uniforme sobre o tampo horizontal de uma mesa. A figura é vista de cima para baixo. Um fio ideal (inextensível e de massa desprezível) a mantém em movimento circular. Não há atrito entre a mesa e a esfera. Sabe-se que a intensidade máxima de tração suportada pelo fio é de 4,0 N e que o seu comprimento é 30 cm.



Sendo a massa da esfera igual a 300 g, determine o módulo da máxima velocidade para que o fio não arrebente.

3. Um carro de corrida está fazendo alguns testes numa pista onde o coeficiente de atrito estático entre o pneu e a pista é constante. Em toda a pista a força de atrito tem módulo máximo igual a 21,6 kN.

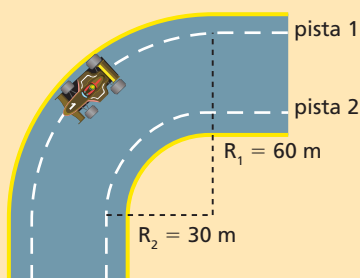


Figura a.

Sendo a massa do carro igual a 1,0 tonelada, determine a máxima velocidade escalar, sem que o carro derrape na curva:

- da pista 1;
- da pista 2.

Resolução:

Devemos fazer uma figura mostrando o móvel em sua trajetória e desenhar sobre ele os seguintes vetores:

\vec{v} = velocidade (tangente à trajetória)

\vec{F}_{at} = força de atrito (apontando para o centro)

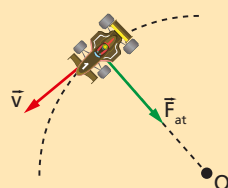


Figura b.

Por que a força de atrito deve apontar para o centro? Porque ela é a força resultante e o movimento é circular e uniforme. No MCU a força resultante deve ser centrípeta.

A máxima intensidade da força de atrito é 21,6 kN. Portanto: $F_{at} \leq 21,6 \text{ kN}$.

Estratégia: como a força de atrito está fazendo o papel de força centrípeta, igualamos as duas:

$$F_c = F_{at} \leq 21,6 \text{ kN}$$

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = F_{at} \leq 21,6 \text{ kN}$$

Pretendemos obter a máxima velocidade do carro na curva, portanto devemos impor a igualdade:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = 21,6 \text{ kN}$$

Vamos fazer os cálculos para cada pista:

- a) A pista 1 tem raio $R_1 = 60 \text{ m}$

$$m = 1,0 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$\frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot v_1^2}{60} = 21,6 \cdot 10^3$$

$$v_1^2 = 1296 \Rightarrow v_1 = 36 \text{ m/s}$$

- b) A pista 2 tem raio $R_2 = 30 \text{ m}$

$$\frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot v_2^2}{30} = 21,6 \cdot 10^3$$

$$v_2^2 = 648 \Rightarrow v_2 \approx 25,5 \text{ m/s}$$

4. Num departamento de testes de engenharia civil construiu-se a maquete de uma pista de skate com a finalidade de testar o projeto elaborado. A figura a mostra o modelo reduzido do que será construído: uma casca cilíndrica de raio $R = 1,0 \text{ m}$.

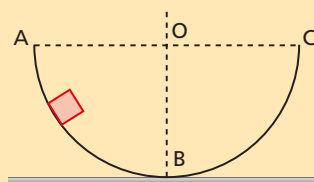
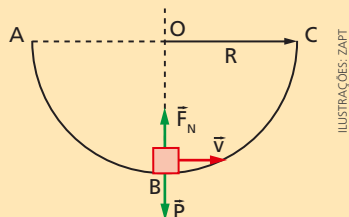


Figura a. Modelo reduzido da pista de skate.

Para simular o skatista, usou-se uma peça cúbica de massa $m = 500 \text{ g}$ e de dimensões irrelevantes ao problema. O cubo foi então abandonado em repouso no ponto A, deslizou sem tombar até B e por aí passou com velocidade de módulo 4,0 m/s. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a intensidade da força normal em B.

Resolução:

Quando o cubo estiver passando por *B*, estarão atuando sobre ele duas forças de direção vertical: o peso \vec{P} e a força normal \vec{F}_N , mostradas na figura *b*. Ambas são radiais (sua reta suporte passa pelo centro).

Figura *b*.

A força resultante entre a força normal \vec{F}_N e o peso \vec{P} deverá ser uma resultante centrípeta \vec{F}_c , o que nos leva a concluir que o módulo da força normal é maior que o da força peso.

$$F_{\text{res}} = F_N - P \quad (1)$$

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (2)$$

Devemos igualar as equações (1) e (2):

$$F_{\text{res}} = F_c \Rightarrow F_N - P = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

$$F_N = \frac{m \cdot v^2}{R} + P \Rightarrow F_N = \frac{m \cdot v^2}{R} + m \cdot g \quad (3)$$

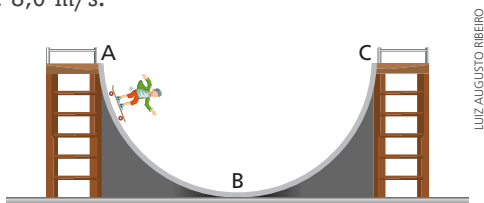
Foram dados: $m = 500 \text{ g} = 0,5 \text{ kg}$; $v = 4,0 \text{ m/s}$; $R = 1,0 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Substituindo-se na equação (3):

$$F_N = \frac{0,5 \cdot 4,0^2}{1,0} + 0,5 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = 8,0 \text{ N} + 5,0 \text{ N} \Rightarrow F_N = 13,0 \text{ N}$$

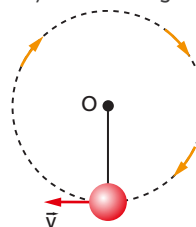
5. Na questão anterior, estudamos o modelo reduzido da pista de skate. Agora vamos estudar a pista pronta, mostrada na figura a seguir. É uma meia casca cilíndrica de diâmetro 20 m. No ponto mais baixo da pista os skatistas passam com velocidade de 8,0 m/s.



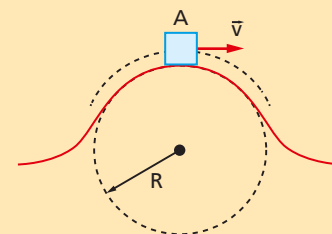
Sendo a massa de um dos seus usuários igual a 60 kg, determine a intensidade da força normal de apoio ao passar por *B*. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.

6. Uma esferinha de massa 250 g está presa à extremidade de um barbante e é posta a girar num plano vertical. Tendo o barbante um comprimento de 50 cm, determine a intensidade da força que traciona o fio quando ela passa pelo

ponto mais baixo da trajetória, com velocidade de módulo 2,0 m/s. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.



7. Um corpo de dimensões desprezíveis e de massa $m = 4,8 \text{ kg}$ desliza sobre uma lombada circular de raio $R = 1,60 \text{ m}$. A pista não tem atrito. Ao passar pelo ponto *A*, o mais alto da trajetória, sua velocidade tinha módulo igual a 2,0 m/s. Sabe-se que ele continuou a sua trajetória como indica a figura *a*. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Figura *a*.

Determine, na posição *A*:

- a) a intensidade da resultante centrípeta;
b) a intensidade da força normal.

Resolução:

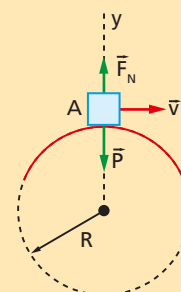
- a) A resultante centrípeta tem módulo dado por:

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (1)$$

$$F_c = \frac{4,8 \cdot 2,0^2}{1,6} \Rightarrow F_c = 12 \text{ N}$$

- b) A velocidade vetorial tangencia à trajetória e tem direção horizontal. Ela aponta no mesmo sentido do movimento.

A força normal \vec{F}_N e o peso \vec{P} são perpendiculares à velocidade vetorial e têm a direção vertical indicada por *y*.

Figura *b*.

A resultante entre as duas forças deve ser centrípeta, apontando para o centro da trajetória. Isso nos leva a concluir que o módulo do peso deve ser maior que o da força normal. Então:

$$F_{\text{res}} = P - F_N \quad (2)$$

O peso é dado por $P = m \cdot g = 4,8 \cdot 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P = 48 \text{ N}$$

$$F_{\text{res}} = 12 \text{ N}$$

Substituindo-se esses valores em (2), vem:

$$12 = 48 - F_N$$

$$F_N = 48 - 12 \Rightarrow F_N = 36 \text{ N}$$

8. Retome a questão anterior e determine a intensidade máxima de velocidade compatível com o movimento circular em torno da lombada, isto é, para que o corpo não decole no ponto mais alto A.

Resolução:

Vamos igualar as equações (1) e (2) obtidas no exercício anterior. Ignoremos o valor calculado para o módulo da força centrípeta, pois as condições mudaram.

$$F_{\text{res}} = F_c \Rightarrow P - F_N = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Sendo $P = m \cdot g$, vem:

$$m \cdot g - F_N = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

$$F_N = \frac{m \cdot v^2}{R} - m \cdot g$$

$$F_N = m \cdot g - \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (3)$$

A equação (3) nos mostra que aumentando a velocidade escalar v , aumenta a parcela da força centrípeta e, portanto, diminui o valor do módulo da força normal. Até onde podemos aumentar a velocidade sem que o corpo decole?

O limite será alcançado quando a força normal se anular.

Vamos retomar a equação (2) e fazer $F_N = 0$:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g - 0$$

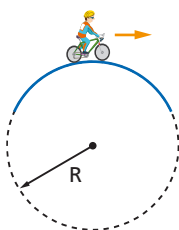
$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g$$

$$v^2 = R \cdot g \Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g}$$

Sendo $R = 1,6 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, vem:

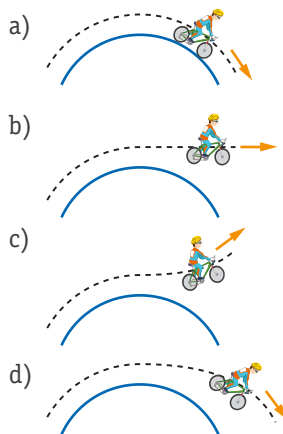
$$v = \sqrt{1,6 \cdot 10} \Rightarrow v_{\text{máx}} = 4,0 \text{ m/s}$$

9. Um ciclista atinge o pico da lombada circular de uma ciclovia, com velocidade de módulo $v = 9,8 \text{ m/s}$. Sabe-se que o raio de curvatura da lombada é $4,9 \text{ m}$, a massa total do ciclista com a bicicleta é 60 kg e a gravidade local tem módulo 10 m/s^2 .

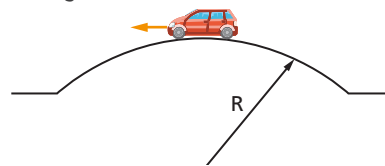


ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Indique qual é a figura que melhor representa a sua trajetória após ultrapassar o pico da lombada.

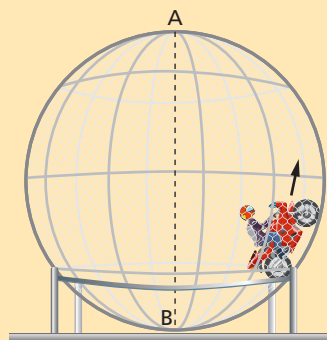


10. Um carro de dimensões desprezíveis, massa 200 kg , em movimento uniforme com velocidade escalar de 10 m/s , passa numa ponte em arco como mostra a figura.



Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e tendo o arco da ponte um raio $R = 14,4 \text{ m}$, determine:

- a intensidade da força normal sobre o carro quando ele estiver passando pelo pico do arco da ponte;
 - a máxima velocidade escalar com que um móvel pode passar sobre a ponte para que não decole no pico do arco.
11. Um motoqueiro está circulando no interior de um globo da morte. Seu movimento é vertical. Na subida o movimento é retardado e na descida é acelerado. Sendo R o raio do globo, M a massa total da moto e do motoqueiro e g o módulo da aceleração da gravidade, determine a menor velocidade escalar com que ele deve passar pelo ponto A para não despencar.



globo da morte

Figura a.

Resolução:

As forças atuantes no conjunto moto-motoqueiro, em relação a um referencial na Terra, são:

\vec{P} = peso total

\vec{F}_N = força normal da parede do globo contra a moto

A resultante dessas duas forças é centrípeta e temos:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{P} + \vec{F}_N \quad (1)$$

Temos também:

$$\vec{P} = M \cdot \vec{g}$$

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_c = \frac{M \cdot v^2}{R}$$

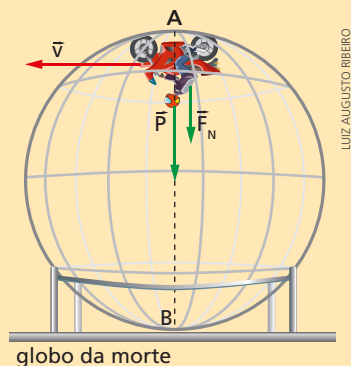


Figura b.

Substituindo na equação (1), obtemos:

$$\frac{M \cdot v^2}{R} = M \cdot g + F_N \Rightarrow F_N = \frac{M \cdot v^2}{R} - M \cdot g \quad (2)$$

Observando a equação (2), verificamos que, se diminuirmos a velocidade, vamos diminuir a

intensidade da força normal. No entanto, a força normal representa o contato dos pneus com a parede do globo. Se essa força desaparecer, significa que a moto perdeu contato com o teto do globo e está caindo.

Dizemos que, no instante em que a força normal se igualar a zero, os pneus ainda "osculam" (tangenciam) o teto e este será o nosso limite de velocidade.

Voltando na equação (2), façamos $F_N = 0$:

$$0 = \frac{M \cdot v^2}{R} - M \cdot g$$

$$\frac{M \cdot v^2}{R} = M \cdot g$$

$$v^2 = R \cdot g \Rightarrow v_{\text{min}} = \sqrt{R \cdot g}$$

Observemos que a massa M foi cancelada, o que significa que o resultado vale para qualquer massa. Até mesmo para uma bicicleta.

12. O globo da morte de um circo tem diâmetro de 8,1 m. Um motoqueiro se apresenta no globo com uma moto de 260 kg, sendo que a sua massa é 64 kg. Ele faz uma exibição de um movimento circular vertical, passando pelo teto com velocidade mínima e pelo ponto mais baixo com o dobro dessa velocidade. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- o módulo das velocidades no ponto mais alto e no mais baixo;
- a intensidade da força normal ao passar pelo ponto mais baixo.

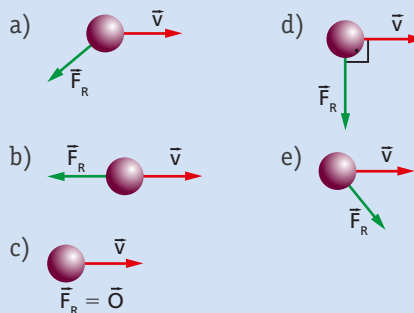
Exercícios de Reforço

13. (Vunesp-SP) A força centrípeta exercida sobre um satélite em órbita circular em torno da Terra é ocasionada pela força de atração que ela exerce sobre ele. Em relação a um referencial fixo no centro da Terra, essa força de atração provoca, sobre o satélite,

- diminuição do módulo da aceleração.
- aumento do módulo da aceleração.
- diminuição do módulo da velocidade.
- aumento do módulo da velocidade.
- mudança na direção da velocidade.

14. (UFF-RJ) Considere que a Lua descreve uma órbita circular em torno da Terra. Assim sendo, assinale a opção em que estão mais bem repre-

sentadas a força resultante (\vec{F}_R) sobre o satélite e a sua velocidade (\vec{v}).

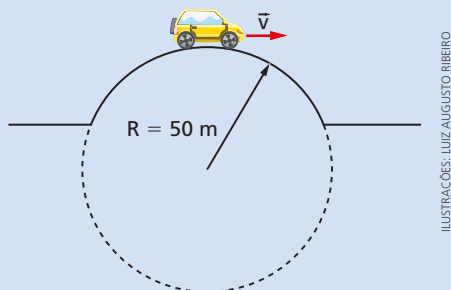


15. (UF-MG) Devido a um congestionamento aéreo, o avião em que Flávia viajava permaneceu voando em uma trajetória horizontal e circular, com velocidade de módulo constante.

Considerando-se essas informações, é correto afirmar que, em certo ponto da trajetória, a resultante das forças que atuam no avião é

- a) horizontal.
- b) vertical, para baixo.
- c) vertical, para cima.
- d) nula.

16. (Udesc-SC) Um carro de massa $m = 1,0 \text{ t}$ com velocidade escalar constante de 72 km/h trafega por uma pista horizontal quando passa por uma grande ondulação, conforme figura a seguir, e mantém a mesma velocidade escalar.



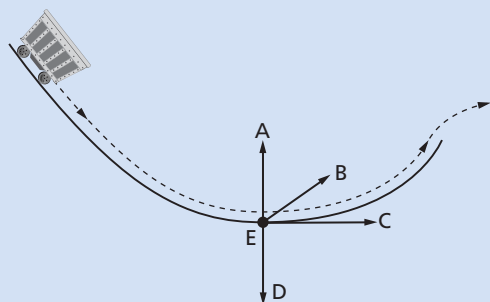
Considerando-se que essa ondulação tenha o formato de um arco de circunferência de raio $R = 50 \text{ m}$, calcule, no ponto mais alto da pista,

- a) a intensidade da resultante centrípeta no carro;
- b) a intensidade da força normal que a pista aplica no carro.

(Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

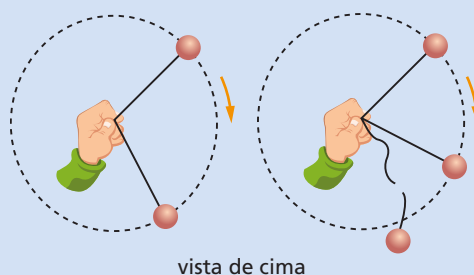
17. (UF-AC) Um caminhão transporta uma carga de $3,0$ toneladas em sua carroceria. Calcule a intensidade da força normal exercida pela carga sobre o piso da carroceria, quando ele passa, a 72 km/h , pelo ponto mais baixo de uma depressão circular com 400 m de raio. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze o efeito do ar.

18. (U. F. Juiz de Fora-MG) Um carrinho desliza sem nenhum tipo de atrito ao longo da rampa indicada na figura a seguir, cuja parte baixa é um arco de circunferência. No ponto mais baixo da rampa, a força resultante sobre o carrinho é mais bem representada por qual seta?



- a) seta A
- b) seta B
- c) seta C
- d) seta D
- e) seta E (Seta de comprimento nulo; a força resultante no ponto mais baixo é nula.)

19. (Unesp-SP) Uma bola de massa $0,5 \text{ kg}$ é presa ao final de uma corda de comprimento $1,5 \text{ m}$. Segurando na extremidade da corda oposta à bola, uma pessoa faz esta se mover em movimento circular no plano horizontal, como apresentado na figura. A corda suporta uma tensão máxima de 50 N .



vista de cima

- a) Qual a velocidade máxima da bola antes que a corda se rompa?
- b) Qual deve ser o comprimento mínimo dessa corda para que ela não se rompa antes de a bola atingir a velocidade de 20 m/s ?

20. Um dos brinquedos mais procurados nos grandes parques de diversões é o *looping*, em que o carrinho percorre um trilho horizontal com grande velocidade e penetra num anel vertical fazendo um *looping* de 360° saindo pelo lado oposto. Na figura o carrinho de massa total 100 kg penetra no anel, pelo ponto B, dá uma volta no sentido anti-horário e sai pelo trilho da direita. O anel tem um raio de 10 m e a gravidade local é $g = 10 \text{ m/s}^2$.

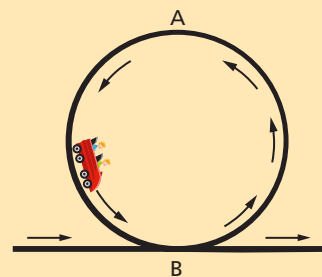


Figura a. Looping.

Determine:

- a) a intensidade da força normal que atua sobre o carrinho ao entrar no anel em B, sabendo que sua velocidade escalar nessa posição é de 30 m/s ;
- b) a mínima velocidade com que o carrinho deve passar pelo ponto A para não despençar.

Resolução:

- a) No ponto B as duas forças que atuam no carrinho são:

$$P = m \cdot g \text{ (peso do carrinho)}$$

F_N = força normal da parede do anel contra o carrinho

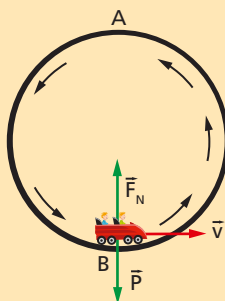


Figura b.

Essas duas forças têm sentidos opostos e F_N deve ter maior intensidade que o peso P , pois a resultante delas deve ser centrípeta, ou seja, deverá apontar para o centro do anel.

$$F_{\text{res}} = F_N - P \quad (1)$$

$$F_{\text{res}} = F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (2)$$

Dessas duas equações, tiramos:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = F_N - m \cdot g \Rightarrow F_N = \frac{m \cdot v^2}{R} + m \cdot g \quad (3)$$

Substituindo:

$$R = 10 \text{ m}; m = 100 \text{ kg}; v = 30 \text{ m/s}$$

$$F_N = \frac{100 \cdot 30^2}{10} + 100 \cdot 10 \Rightarrow F_N = 10000 \text{ N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N}$$

- b) No ponto A, as duas forças P e F_N apontam para o centro do anel. A resultante dessas duas forças é centrípeta e temos:

$$F_{\text{res}} = P + F_N \quad (1) \quad \text{Figura c.}$$

$$F_{\text{res}} = F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (2)$$

Substituindo na equação (1), obtemos:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g + F_N \Rightarrow F_N = \frac{m \cdot v^2}{R} - m \cdot g$$

Diminuindo a velocidade, vamos diminuir a intensidade da força normal. A mínima velocidade será obtida para $F_N = 0$.

$$0 = \frac{m \cdot v^2}{R} - m \cdot g$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g$$

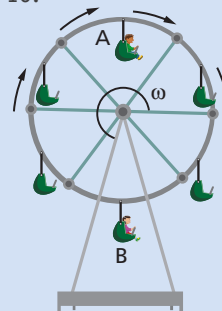
$$v^2 = R \cdot g \Rightarrow v_{\text{min}} = \sqrt{R \cdot g}$$

Temos: $R = 10 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$v_{\text{min}} = \sqrt{10 \cdot 10} = \sqrt{100} \Rightarrow v_{\text{min}} = 10 \text{ m/s}$$

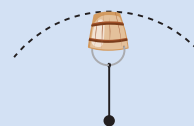
Observação: compare esse resultado literal com o cálculo da velocidade mínima obtida para o globo da morte do exercício 11.

21. Numa roda-gigante de diâmetro 50 m a velocidade angular é $\omega = \pi \text{ rad/min}$. Considere as duas cadeiras A e B onde se encontram duas pessoas de mesma massa 36 kg. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ o módulo da gravidade local, determine a intensidade da força normal sobre cada uma delas. Adote: $\pi^2 \approx 10$.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

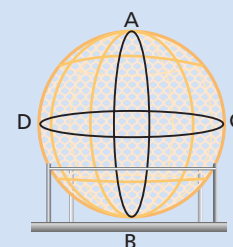
22. (UPE-PE) Uma corda é amarrada em um balde que contém água. O balde é colocado para girar, executando uma trajetória circular de raio 2,5 m, no plano vertical.



A velocidade mínima do balde no ponto mais elevado da trajetória circular, para que a água não caia do balde, vale, em m/s: (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- a) 4,0 b) 5,0 c) 7,0 d) 8,0 e) 9,0

23. (UF-PA) Num circo, na apresentação do número conhecido como globo da morte, um motociclista com sua moto descreveu no interior da esfera duas trajetórias circulares de raios 2,5 m, sendo uma horizontal e outra vertical, como na figura ao lado, ambas com a mesma velocidade escalar constante.



Sobre o fato, analise as afirmações:

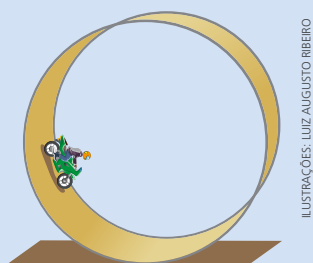
- A força exercida sobre as paredes do globo pela passagem da moto foi a mesma nos pontos A, B, C e D devido ao fato de as velocidades escalares terem sido iguais e constantes.
- Em qualquer ponto da trajetória horizontal, o peso conjugado da moto e motociclista é equilibrado pela força centrípeta.
- O valor mínimo da velocidade escalar da moto, necessário para a realização da trajetória vertical, é 5,0 m/s.

(Use, se necessário, módulo da aceleração da gravidade: $10,0 \text{ m/s}^2$.)

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s)

- a) II, apenas. d) II e III, apenas.
b) III, apenas. e) I e III, apenas.
c) I e II, apenas.

24. Um motoqueiro está realizando uma exibição muito perigosa num anel circular vertical, de raio $R = 4,0 \text{ m}$, num local onde se tem $g = 10 \text{ m/s}^2$. A massa total do motoqueiro e sua moto é 500 kg . Num dado instante ele passou no ponto mais alto com velocidade escalar mínima, sem acidentes, e no ponto mais baixo com velocidade escalar $5,0 \text{ m/s}$.



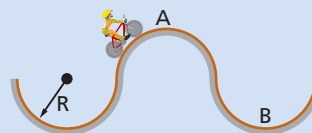
ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

A intensidade das forças de reação normal, no ponto mais alto e no ponto mais baixo, respectivamente, foi:

- a) 0 e 8125 N d) 5000 N e 8125 N
b) 0 e 1875 N e) 0 e 3125 N
c) 3125 N e 8125 N

25. A figura mostra o perfil de uma pista de *bicicross* sendo percorrida por um ciclista radical. A sua massa mais a da bicicleta somam 100 kg . No local a gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$. As três seções da

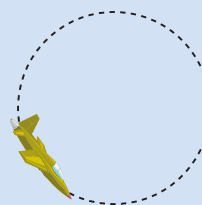
pista têm o mesmo raio de curvatura $R = 5,0 \text{ m}$. Ao passar pelo pico da trajetória, ponto A, o ciclista tem velocidade escalar de $14,4 \text{ km/h}$ e, ao atingir o ponto B, sua velocidade escalar é 72 km/h . Podemos desprezar as dimensões do ciclista e sua bicicleta.



A razão entre as intensidades das forças de reação normal em A e B, ou seja, $\frac{F_A}{F_B}$, vale aproximadamente:

- a) $9,7 \cdot 10^{-2}$ c) $7,6 \cdot 10^{-2}$ e) 10
b) 13 d) $1,5 \cdot 10^{-1}$

26. (UF-MG) Durante uma apresentação da Esquadrilha da Fumaça, um dos aviões descreve a trajetória circular representada nesta figura:



Ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória, a intensidade da força que o assento do avião exerce sobre o piloto é:

- a) nula.
b) menor que o peso do piloto.
c) maior que o peso do piloto.
d) igual ao peso do piloto.

Exercícios de Aplicação

A seguir, vamos estudar algumas situações-problema que, além de usarem conceitos vistos anteriormente, necessitam de alguma estratégia para a sua resolução.

1º caso: Movimento circular uniformemente variado

Neste caso adotamos dois eixos de projeção: um deles deve ser radial e o outro tangencial, obtendo-se assim uma resultante centrípeta e outra tangencial.

27. Uma partícula de massa $3,0 \text{ kg}$ percorre, sobre um plano horizontal, uma trajetória circular de raio $2,0 \text{ m}$. Seu movimento é uniformemente variado e

a posição da partícula é dada pela equação horária: $s = 2,0 - 8,0t + 3,0t^2$ (unidades SI). Determine, para o instante $t = 2,0 \text{ s}$, a intensidade:

- a) da resultante tangencial;
b) da resultante centrípeta;
c) da força resultante atuante na partícula.

Resolução:

- a) Sendo $\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t$, vem:

$$|\vec{F}_t| = m \cdot |\vec{a}_t|, \text{ com } |\vec{a}_t| = |\alpha|.$$

O cálculo da aceleração escalar α é feito a partir da equação horária do espaço:

$$s = 2,0 - 8,0t + 3,0t^2 \text{ (SI)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -8,0 + 6,0t \text{ (SI)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6,0 \text{ m/s}^2$$

Portanto:

$$|\vec{a}_t| = 6,0 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{F}_t| = m \cdot |\vec{a}_t|$$

$$|\vec{F}_t| = 1,0 \cdot 6,0$$

$$|\vec{F}_t| = 6,0 \text{ N}$$

b) Sendo $\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c$, vem:

$$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c|, \text{ com } |\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}.$$

De $v = -8,0 + 6,0t$ (SI), para $t = 2,0$ s, resulta:

$$v = -8,0 + 6,0 \cdot 2,0$$

$$v = 4,0 \text{ m/s}$$

Sendo $R = 2,0$ m, temos:

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$$

$$|\vec{a}_c| = \frac{(4,0)^2}{2,0}$$

$$|\vec{a}_c| = 8,0 \text{ m/s}^2$$

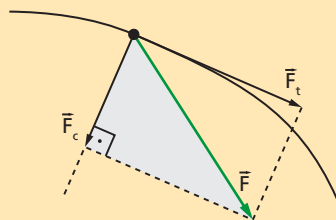
Portanto:

$$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c|$$

$$|\vec{F}_c| = 1,0 \cdot 8,0$$

$$|\vec{F}_c| = 8 \text{ N}$$

c) A resultante de todas as forças que agem no móvel tem intensidade dada por $|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_t|^2 + |\vec{F}_c|^2$, conforme se depreende da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo colorido.



Sendo $|\vec{F}_t| = 6,0 \text{ N}$ e $|\vec{F}_c| = 8,0 \text{ N}$, vem:

$$|\vec{F}|^2 = (6,0)^2 + (8,0)^2$$

$$|\vec{F}|^2 = 100$$

$$|\vec{F}| = 10 \text{ N}$$

28. Um carrinho de autorama, de massa 100 g, percorrendo uma pista plana e horizontal, realiza curva de raio 1,0 m. Sua posição sobre a

trajetória obedece à seguinte equação horária: $s = 1,0 - 2,0t^2$ (unidades SI). Determine, para o instante $t = 1,0$ s:

- a velocidade escalar e a aceleração escalar;
- a intensidade da resultante tangencial;
- a intensidade da resultante centrípeta;
- a intensidade da força resultante atuante na partícula.

2º caso: Sistemas mecânicos que empregam mola helicoidal

29. Um bloco de massa 1,0 kg descreve um movimento circular numa mesa horizontal lisa, preso a uma mola de constante elástica $1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. Sabendo-se que a mola não deformada tem comprimento 0,75 m, determine a deformação que a mola sofre, quando o bloco gira com velocidade escalar de 5,0 m/s.

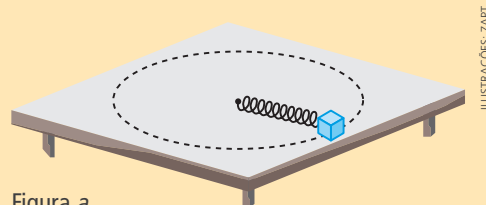


Figura a.

Resolução:

As forças que atuam no bloco são: peso \vec{P} , força normal \vec{N} e força elástica \vec{F}_{el} . Observe que \vec{P} e \vec{N} se equilibram e, portanto, a resultante das forças é \vec{F}_{el} . Essa resultante é centrípeta:

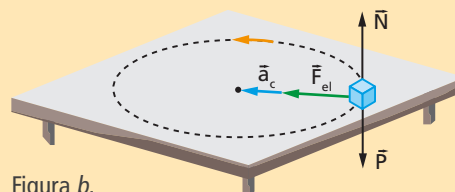


Figura b.

$$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c|$$

$$\vec{F}_{el} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Sendo $F_{el} = k \cdot x$ (Lei de Hooke), em que x é a deformação e k é a constante elástica da mola, e lembrando que o raio R da trajetória é a soma do comprimento ℓ da mola não deformada com a deformação x , vem:

$$k \cdot x = m \cdot \frac{v^2}{\ell + x}$$

Sendo $k = 1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$; $m = 1,0 \text{ kg}$; $v = 5,0 \text{ m/s}$; e $\ell = 0,75 \text{ m}$, vem:

$$1,0 \cdot 10^2 \cdot x = 1,0 \cdot \frac{(5,0)^2}{0,75 + x}$$

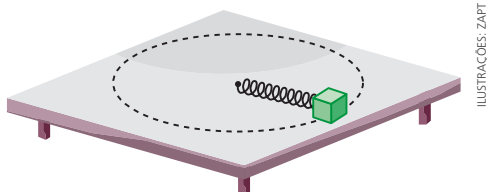
Portanto:

$$100x^2 + 75x - 25 = 0 \quad \text{ou} \quad 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

As raízes dessa equação são: $x = 0,25 \text{ m}$ e $x = -1,0 \text{ m}$.

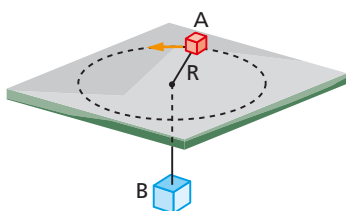
Obviamente serve a solução: $x = 0,25 \text{ m}$

30. Um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$, preso a uma mola, descreve um movimento circular numa mesa horizontal lisa. A mola, quando não deformada, tem comprimento $\ell = 0,50 \text{ m}$. Sabendo que, quando o bloco gira com velocidade escalar $v = 3,0 \text{ m/s}$, o raio da trajetória é $R = 0,90 \text{ m}$, determine a constante elástica k da mola.



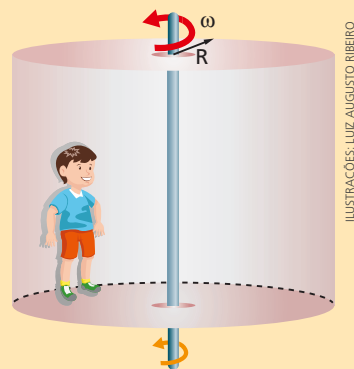
ILUSTRAÇÕES: ZAPT

31. Um pequeno bloco A de massa $1,0 \text{ kg}$ gira numa mesa horizontal sem atrito. O bloco A está ligado ao bloco B, de massa $3,0 \text{ kg}$, por meio de um fio que passa por um orifício existente na mesa. Sabendo que o bloco A descreve um movimento circular uniforme de velocidade escalar $6,0 \text{ m/s}$ e que o bloco B permanece em repouso, determine o raio R da trajetória. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.



3º caso: Movimento circular uniforme usando superfícies cilíndricas e verticais

32. O “rotor” é um brinquedo que existe em parques de diversões. Ele é constituído de um cilindro oco provido de um assoalho. As pessoas entram no cilindro e ficam em pé encostadas na parede interna. O cilindro começa a girar em torno de seu eixo vertical e, a partir de uma velocidade angular mínima, o assoalho é retirado e as pessoas ficam “presas” à parede do cilindro. Sendo $R = 2,0 \text{ m}$ o raio do cilindro, $g = 10 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade e $\mu = 0,20$ o coeficiente de atrito entre as pessoas e o cilindro, determine a velocidade angular mínima que o cilindro deve atingir para que as pessoas não escorreguem.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Figura a.

Resolução:

As forças que agem sobre cada pessoa são: o peso \vec{P} , a força de atrito que se opõe à tendência de escorregamento e a força normal \vec{F}_N que a parede exerce na pessoa. Essa força está orientada para o centro da trajetória. Ela é a resultante centrípeta:

$$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c|$$

$$F_N = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

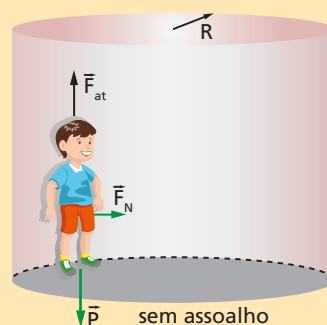


Figura b.

Para não haver escorregamento na vertical, devemos ter:

$$F_{at} = P \text{ com } F_{at} \leq \mu \cdot F_N$$

Portanto:

$$F_{at} \leq \mu \cdot F_N$$

$$P \leq \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$m \cdot g \leq \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu \cdot R}$$

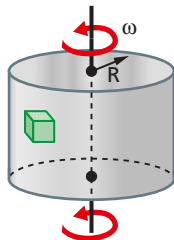
$$\omega_{\min}^2 = \frac{g}{\mu \cdot R}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu \cdot R}}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{10}{0,20 \cdot 2,0}}$$

$$\omega_{\min} = 5,0 \text{ rad/s}$$

33. Um cilindro oco, de raio $R = 2,0 \text{ m}$, gira em torno de seu eixo, que é vertical, com velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Um corpo gira juntamente com o cilindro, "preso" em sua superfície interna. Determine o menor coeficiente de atrito necessário para que não haja deslizamento do corpo na superfície do cilindro. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.



4º caso: Movimento circular em pistas cônicas

34. Na figura temos um cone invertido, de eixo vertical, oco, fixo no solo. No seu interior uma partícula se movimenta em uma trajetória plana, horizontal, circular de raio R (um anel), com velocidade escalar v , constante. As paredes internas são perfeitamente lisas. Sendo m a massa da partícula, g o módulo da aceleração da gravidade, determine o ângulo θ , através de uma função trigonométrica, para que a partícula se mantenha no anel em movimento circular uniforme.

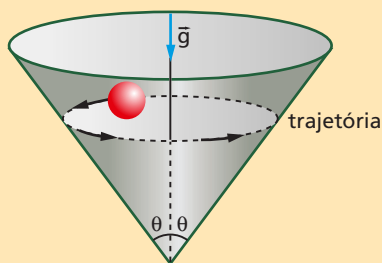


Figura a.

Resolução:

A trajetória é circular e, portanto, a força resultante é centrípeta.

Inicialmente vamos desenhar as duas únicas forças atuantes na partícula: o peso e a força normal. Esta é perpendicular à superfície (fig. b).

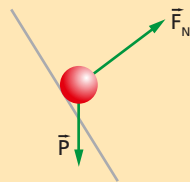


Figura b. Forças atuantes sobre o corpo.

Uma estratégia consiste em se usar dois eixos de projeção: um deles, o eixo x , passando pelo centro da trajetória, e o outro, o eixo y , perpendicular ao primeiro (fig. c).

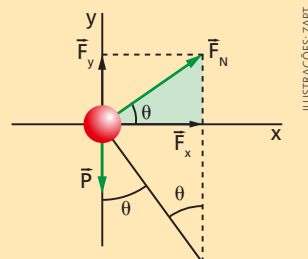


Figura c. Projeção da força normal sobre os eixos x e y .

Projetamos as forças sobre os eixos e impomos a condição de a resultante ser a força centrípeta.

No triângulo colorido temos:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{F_y}{F_N} \Rightarrow F_y = F_N \cdot \sin \theta \\ \cos \theta &= \frac{F_x}{F_N} \Rightarrow F_x = F_N \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Na direção x a força \vec{F}_x é a resultante, portanto, ela faz o papel da força centrípeta:

$$F_x = F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (2)$$

Na direção y as forças \vec{F}_y e \vec{P} se anulam:

$$F_y = P = m \cdot g \quad (3)$$

Dividindo-se a equação (2) pela (3), obtemos:

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{\frac{m \cdot v^2}{R}}{m \cdot g} \Rightarrow \frac{F_x}{F_y} = \frac{v^2}{R \cdot g} \quad (4)$$

Substituindo-se as equações (1) em (4):

$$\frac{F_N \cdot \cos \theta}{F_N \cdot \sin \theta} = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

Assim:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{R \cdot g}{v^2} \Rightarrow \tan \theta = \frac{R \cdot g}{v^2}$$

35. Um automóvel, de dimensões desprezíveis e de massa $m = 1000 \text{ kg}$, percorre com velocidade escalar constante de 10 m/s uma circunferência de raio 100 m , contida num plano horizontal. Esse movimento ocorre numa pista sobrelevada, isto é, a margem externa é mais elevada que a margem interna.

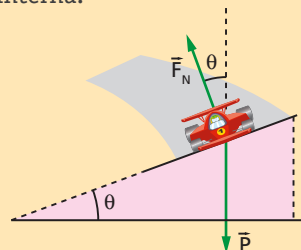


Figura a.

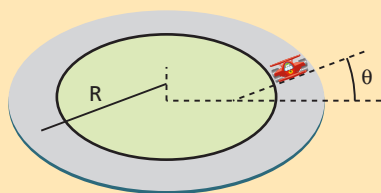


Figura b.

Determine o ângulo θ de sobrelevação da pista com a horizontal para que o automóvel consiga efetuar a curva independentemente da força de atrito. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$. O ângulo θ pode ser dado pela $\text{tg } \theta$.

Resolução:

Poderíamos usar a mesma estratégia do exercício anterior, projetando-se as forças no eixo radial e no eixo vertical. No entanto, vamos aprender uma nova estratégia: usaremos a regra do paralelogramo.

Vale lembrar que temos um MCU e, portanto, a força resultante é centrípeta. Ao desenharmos o paralelogramo, a resultante obtida será a força centrípeta.

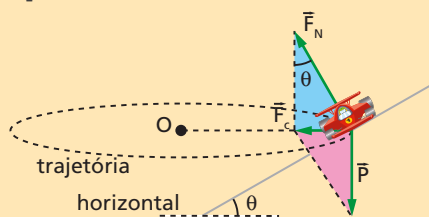


Figura c.

Da figura podemos obter:

$$\text{tg } \theta = \frac{m \cdot v^2}{R \cdot m \cdot g}$$

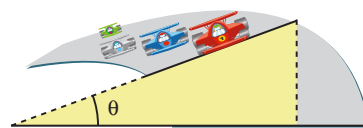
$$\text{tg } \theta = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

Sendo: $v = 10 \text{ m/s}$; $R = 100 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, teremos:

$$\text{tg } \theta = \frac{10^2}{100 \cdot 10}$$

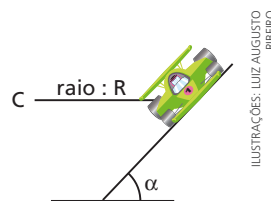
$$\text{tg } \theta = 0,10$$

36. Nas corridas de fórmula Indy é muito comum o uso de circuitos "ovais" com sobrelevação para permitir maior velocidade dos carros nas curvas. Numa dessas corridas chovia muito e o atrito praticamente desapareceu. Na curva da figura mostrada a seguir, o raio da trajetória é de 50 m e o ângulo de sobrelevação é 27° ($\text{tg } 27^\circ = 0,51$). Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:



- a máxima velocidade atingida pelo carro sem derrapar;
- a intensidade da força normal, estimando-se a massa do carro em 1500 kg.

37. (Unesp-SP) Curvas com ligeiras inclinações em circuitos automobilísticos são indicadas para aumentar a segurança do carro a altas velocidades, como, por exemplo, no Talladega Superspeedway, um circuito utilizado para corridas promovidas pela NASCAR (*National Association for Stock Car Auto Racing*). Considere um carro como sendo um ponto material percorrendo uma pista circular, de centro C , inclinada de um ângulo α e com raio R , constantes, como mostra a figura, que apresenta a frente do carro em um dos trechos da pista.



Se a velocidade do carro tem módulo constante, é correto afirmar que o carro:

- não possui aceleração vetorial.
- possui aceleração com módulo variável, direção radial e no sentido para o ponto C .
- possui aceleração com módulo variável e tangente à trajetória circular.
- possui aceleração com módulo constante, direção radial e no sentido para o ponto C .
- possui aceleração com módulo constante e tangente à trajetória circular.

5º caso: Pêndulo simples e pêndulo cônico

Pêndulo simples é aquele que oscila num plano vertical. Pêndulo cônico é aquele cuja esferinha realiza um movimento circular uniforme num plano horizontal e cuja figura de seu movimento se assemelha a um cone.

38. No esquema a seguir, temos um pêndulo simples de comprimento $\ell = 1,0 \text{ m}$ e com uma esfera de massa $m = 0,50 \text{ kg}$, oscilando entre os pontos A e B . A velocidade escalar da esfera ao passar pelo ponto C indicado é $v = 4,0 \text{ m/s}$.

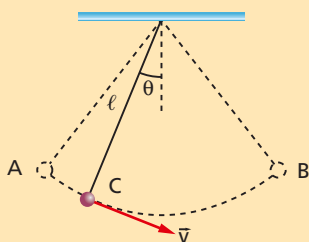


Figura a.

Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\sin \theta = 0,60$; $\cos \theta = 0,80$.

Determine:

- a intensidade da força que traciona o fio, quando a esfera passa pelo ponto C;
- o módulo da aceleração tangencial da esfera em C.

Resolução:

- As forças que agem sobre a esfera são o peso \vec{P} e a tração \vec{T} . A tração tem a direção da normal à trajetória e o peso foi decomposto nas direções da normal e da tangente à trajetória.

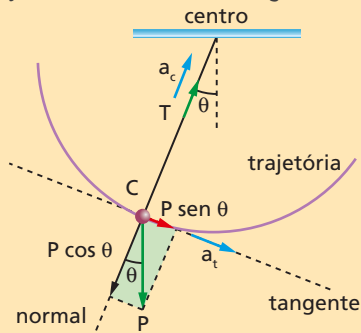


Figura b.

Nessas condições, a resultante centrípeta tem intensidade:

$$T - P \cdot \cos \theta$$

Sendo $|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c|$, vem:

$$T - P \cdot \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$T - m \cdot g \cdot \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

Sendo $m = 0,50 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\cos \theta = 0,80$, $v = 4,0 \text{ m/s}$ e $R = \ell = 1,0 \text{ m}$, vem:

$$T - 0,50 \cdot 10 \cdot 0,80 = 0,50 \cdot \frac{(4,0)^2}{1,0}$$

$$T = 12 \text{ N}$$

- A intensidade da resultante tangencial é:

$$P \cdot \sin \theta$$

Portanto:

$$|\vec{F}_t| = m \cdot |\vec{a}_t|$$

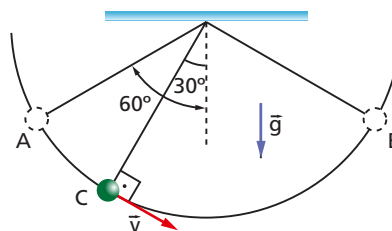
$$P \cdot \sin \theta = m \cdot |\vec{a}_t|$$

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot |\vec{a}_t|$$

$$|\vec{a}_t| = g \cdot \sin \theta \Rightarrow |\vec{a}_t| = 10 \cdot (0,60)$$

$$|\vec{a}_t| = 6,0 \text{ m/s}^2$$

- No esquema, temos um pêndulo simples de comprimento $\ell = 0,60 \text{ m}$ e com uma esfera de massa $m = 1,0 \text{ kg}$, oscilando entre os pontos A e B. A velocidade escalar da esfera ao passar pelo ponto C é $v = 6,0 \text{ m/s}$.



Determine a intensidade da força que traciona o fio e o módulo da aceleração tangencial nos pontos A e C. (Dados: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 0,50$; $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0,87$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- Uma pequena esfera, de massa $m = 0,40 \text{ kg}$, suspensa por um fio, descreve um movimento circular uniforme em torno do centro C, em um plano horizontal, constituindo o chamado pêndulo cônico. Sendo o raio da trajetória $R = 0,30 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$, determine a intensidade da força que traciona o fio e a velocidade escalar da esfera.

Figura a.

Resolução:

As forças que agem sobre a esfera são o peso \vec{P} e a tração \vec{T} do fio. Como a esfera realiza MCU, a resultante dessas forças é centrípeta. O triângulo colorido, que está redesenhado na figura b, permite calcular T e v:

$$\cos \theta = \frac{m \cdot g}{T}$$

$$0,80 = \frac{0,40 \cdot 10}{T}$$

$$T = 5,0 \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{m \cdot g}$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

$$v^2 = R \cdot g \cdot \tan \theta$$

Sendo $R = 0,30 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{0,60}{0,80}, \text{ vem:}$$

$$v^2 = 0,30 \cdot 10 \cdot \frac{0,60}{0,80}$$

$$v^2 = \frac{9,0}{4,0}$$

$$v = \frac{3,0}{2,0}$$

$$v = 1,5 \text{ m/s}$$

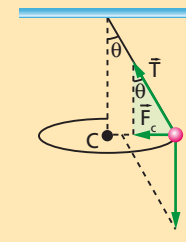


Figura b.

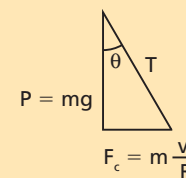
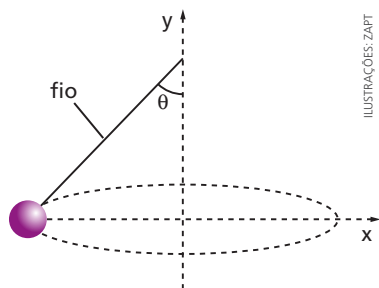


Figura c.

41. (UE-RJ) Uma pessoa gira uma bola presa a um fio. Por mais rápido que seja o movimento da bola, as duas extremidades do fio nunca chegam a ficar no mesmo plano horizontal. Considere o sistema de referência inercial.

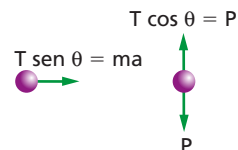
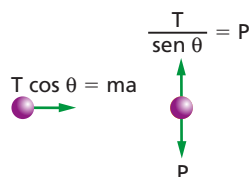


ILUSTRAÇÕES: ZAPT

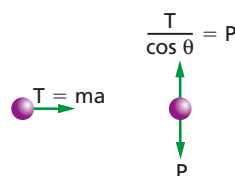
A partícula tem massa m e aceleração centrípeta com módulo a .

As projeções das forças T – tração no fio – e P – peso da bola – sobre os eixos x e y , respectivamente, estão melhor representadas em:

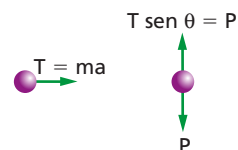
- a) $T \cos \theta = ma$ c) $T \sin \theta = ma$



- b) $T = ma$



- d) $T = ma$



4. A força centrífuga

Estudamos no capítulo 12 a força inercial em sistemas acelerados, porém em trajetórias retilíneas. Recordemos que as leis de Newton são válidas para referenciais inerciais e não funcionam em referenciais não inerciais.

Nos referenciais acelerados, isolamos o corpo e desenhamos uma força fictícia, chamada de força inercial, de sentido contrário ao da aceleração. Essa força somente é observada por um observador no referencial acelerado.

Movimento circular e uniforme

Vamos agora estudar um caso mais complexo: consideremos um corpo executando um movimento circular uniforme em relação ao solo (referencial inercial) e vamos observá-lo do referencial acelerado.

Para ilustrar, observemos a figura 13, na qual temos um sistema rotatório, inicialmente não em movimento. Dois observadores foram colocados:

- observador A fixo no solo;
- observador B fixo na trave superior do sistema.

Inicialmente, enquanto o sistema não estiver funcionando, ambos são observadores inerciais. Eles deverão observar o comportamento do bloco Q, pendurado por um fio na extremidade da trave.

Vamos imprimir uma rotação uniforme ao sistema, como nos mostra a figura 14. Seja ω a sua velocidade angular em relação ao solo. Verifica-se que o bloco Q se afasta do centro formando um ângulo θ com a vertical.

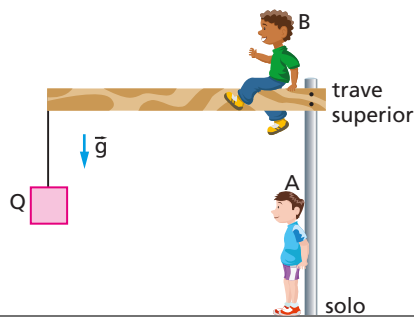


Figura 13. O sistema rotacional não está girando.

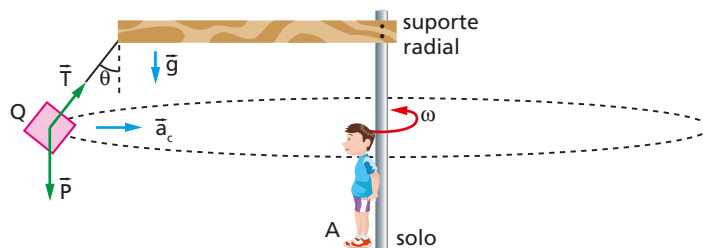


Figura 14. O sistema rotacional está girando com velocidade angular ω para o observador A, inercial.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Para o observador A, em repouso no solo, a trajetória do bloco Q é uma circunferência horizontal. Para ele só existem duas forças atuando no bloco Q: o peso \vec{P} e a força de tração no fio \vec{T} .

A resultante dessas forças é centrípeta e tem intensidade:

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

em que R é o raio da circunferência tracejada da figura 14.

O observador B, na trave superior do sistema rotatório, é um observador não inercial. Para ele, o bloco Q está afastado da vertical, mas está em repouso. Como justificar esse repouso? As forças \vec{P} e \vec{T} não se equilibram, falta-lhes uma força.

Introduzimos então uma força fictícia, a força de inércia \vec{F}_i , a qual deverá equilibrar o bloco Q. Ela é desenhada no sentido oposto ao da aceleração centrípeta. A força de inércia existe apenas no referencial não inercial do observador B, ou seja, fixo no próprio sistema rotatório. Como a força de inércia puxa o bloco Q para fora da trajetória, ela é chamada **força centrífuga**.

A força centrífuga tem módulo igual ao da resultante centrípeta, pois se equilibram:

$$F_i = \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Vejam algumas considerações sobre a força centrífuga:

1. A força centrífuga é uma força fictícia, que é desenhada apenas para o referencial inercial. No entanto, para uma pessoa que está nesse referencial, ela lhe parece bem real, como mostram os exemplos a seguir.
2. A força centrífuga não existe para um referencial inercial.
3. A força centrífuga sempre aponta no sentido oposto ao da aceleração centrípeta. Ela é radial e aponta para fora da curva.
4. As forças centrípeta e centrífuga **não constituem um par ação e reação**.
5. Ressaltemos que a força inercial não é aplicada por outro corpo, mas está ligada somente ao referencial acelerado, não existindo, portanto, uma força de reação a ela. Concluindo: a força centrífuga não obedece à Terceira Lei de Newton e não é uma força newtoniana.

Alguns exemplos de forças centrífugas

Exemplo 3

Quando somos passageiros de um carro, sentados no banco da frente, e o carro faz uma curva para a direita, somos jogados contra a porta do carro. Em relação ao carro, referencial acelerado, não inercial, sentimos a força centrífuga que nos joga para fora da curva. Em relação ao solo, referencial inercial, a porta nos aplica uma força normal que faz o papel de força centrípeta.

Exemplo 4

Na máquina de lavar roupa (fig. 17), o rotor enxuga a roupa por centrifugação. Quando o rotor gira, as peças de roupa são jogadas contra a parede do rotor e a água é expulsa pelos orifícios existentes em sua parede. Em relação a este, tomado como referencial não inercial, a força centrífuga jogou a roupa contra as paredes e expulsou a água.

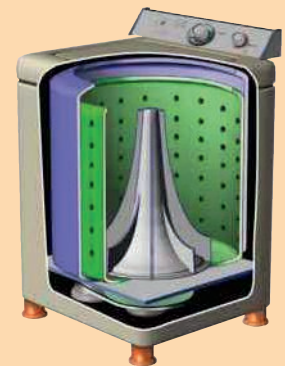


Figura 17.

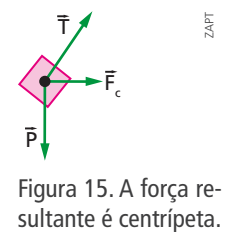


Figura 15. A força resultante é centrípeta.

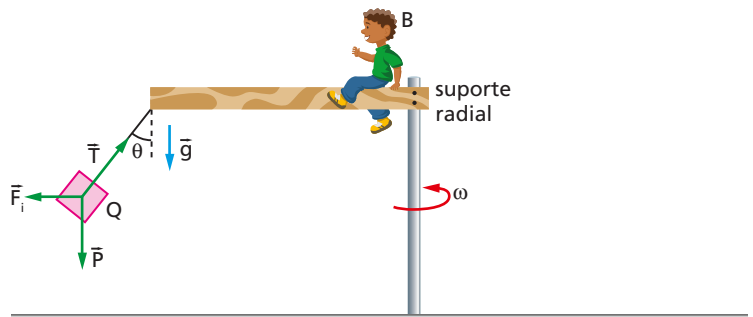


Figura 16. O sistema rotacional está girando com velocidade angular ω , e o observador B é não inercial. Ele vê o bloco em repouso.

Exemplo 5

Na figura temos uma plataforma circular horizontal girando em torno de um eixo vertical com movimento circular uniforme ω . Um observador A, no solo, observa o movimento do bloco cúbico C, amarrado a um fio. Na plataforma girante, um observador B faz a mesma coisa.

Para o observador A o cubo descreve um movimento circular uniforme. A força de tração do fio faz o papel de força centrípeta e temos:

$$T = F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Para o observador B o bloco cúbico está em repouso e, portanto, ao desenhar suas forças devemos acrescentar também a força de inércia que, por puxar o bloco na direção radial e para fora da curva, é uma força centrífuga (fig. 18). Como a força de inércia está equilibrando a força \vec{T} , então se pode escrever:

$$F_i = F_{cf} = T = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

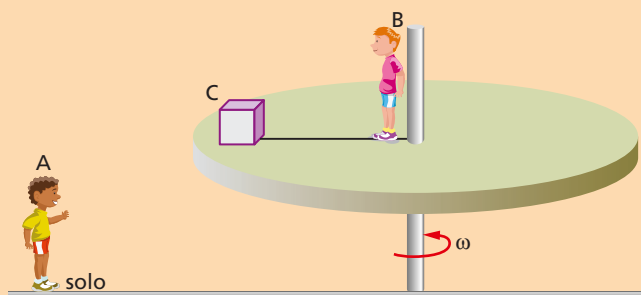


Figura 18.

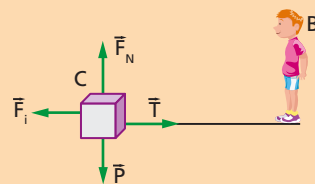


Figura 19. Referencial não inercial.

A força de Coriolis

Quando um corpo está em movimento em relação a um referencial que gira, além da força centrífuga há uma outra força fictícia sobre o corpo: é a **força de Coriolis**, que tem esse nome porque seu estudo foi feito pelo francês Gustave Gaspar Coriolis (1792-1843). Num referencial que gira, a força centrífuga existe tanto no caso em que o corpo está em repouso como no caso em que está em movimento, mas a força de Coriolis só aparece quando o corpo está em movimento. Não faremos o estudo matemático dessa força, pois sua complexidade está acima do nível do nosso curso, mas daremos um exemplo para que você perceba o seu efeito.

Na figura 20 representamos uma situação em que dois indivíduos, A e B, estão sobre uma plataforma que gira em relação ao solo, onde está o indivíduo C. Para simplificar, vamos supor que o indivíduo A esteja no centro da plataforma.

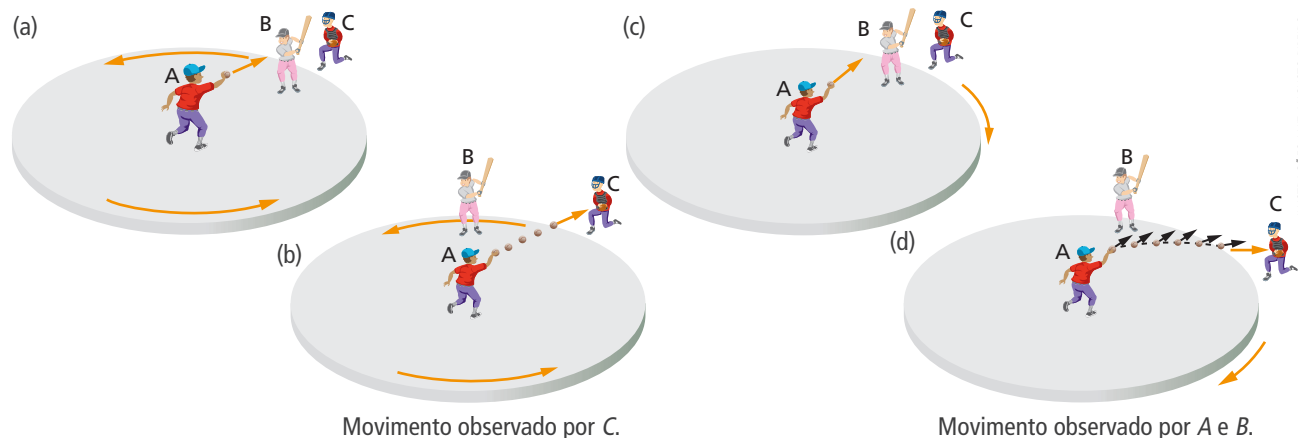


Figura 20.

O indivíduo A joga uma bola para B (fig. 20a). Porém, devido à rotação da plataforma, a bola não chega a B; quem a recebe é o indivíduo C. Nas figuras 20a e 20b, temos a trajetória da bola em relação ao observador C que está fixo no solo. Nas figuras 20c e 20d, representamos a trajetória da bola para os indivíduos A e B; para eles é o indivíduo C que está girando e a trajetória da bola é uma curva.

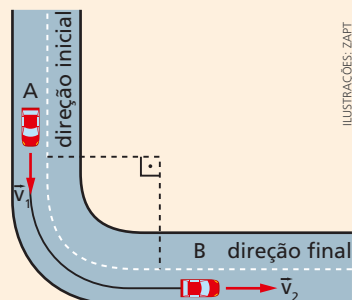
PROCURE NO CD

Veja, no capítulo 17 do CD, o texto "Força de Coriolis", em que este assunto é desenvolvido mais detalhadamente.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

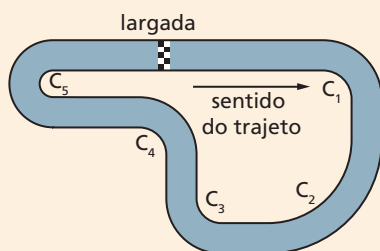
Exercícios de Aprofundamento

42. (UFPel-RS) Um estudante, indo para a faculdade em seu carro, desloca-se num plano horizontal, no qual descreve uma trajetória curvilínea de 48 m de raio, com uma velocidade constante em módulo. Entre os pneus e a pista, existe um coeficiente de atrito de 0,30.

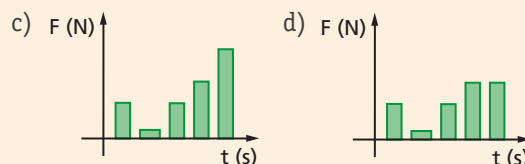
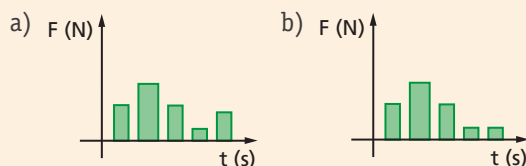


Considerando a figura, a aceleração da gravidade no local, com módulo de 10 m/s^2 , e a massa do carro de 1,2 t, faça o que se pede.

- Caso o estudante resolva imprimir uma velocidade de módulo 60 km/h ao carro, ele conseguirá fazer a curva? Justifique.
 - A velocidade escalar máxima possível, para que o carro possa fazer a curva, sem derrapar, irá se alterar se diminuirmos a sua massa? Explique.
 - O vetor velocidade apresenta variações neste movimento? Justifique.
43. (UFV-MG) Em um autódromo completamente plano e horizontal, um veículo parte da largada no instante $t = 0$ e percorre as curvas circulares C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 , conforme indicado na figura, com uma velocidade constante em módulo.



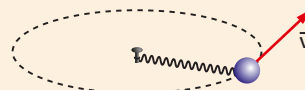
Sabendo-se que o raio de $C_2 > C_1 = C_3 > C_4 = C_5$, o gráfico que melhor representa a intensidade da força resultante que atua sobre o veículo ao percorrer o circuito é:



44. (Udesc-SC) Um engenheiro civil, trabalhando em um projeto de construção de estradas, faz algumas hipóteses: considera que um carro de massa de 1200 kg transita por uma estrada plana e horizontal e, ao realizar uma curva, descreve uma trajetória circular de raio igual a 100 m . A velocidade do carro é constante e tem módulo igual a $90,0 \text{ km/h}$, em toda a curva.

- Calcule o módulo da força centrípeta atuante sobre o carro.
- Considerando que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é de $0,80$, calcule o valor máximo da força de atrito estático que pode ser exercida pela estrada sobre o carro. O carro conseguirá fazer a curva nessa velocidade ($90,0 \text{ km/h}$), sem perigo de derrapagens? Justifique sua resposta. Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.
- Em dias de chuva, carros com pneus próprios para pista seca conseguem fazer a curva, sem derrapar, a uma velocidade escalar máxima igual a $72,0 \text{ km/h}$. Nessas condições, calcule o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista.

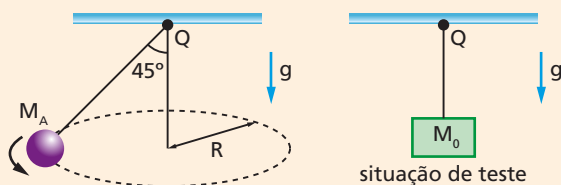
45. (Unesp-SP) Uma bola de massa $1,0 \text{ kg}$, presa à extremidade livre de uma mola esticada de constante elástica $k = 2000 \text{ N/m}$, descreve um movimento circular e uniforme de raio $r = 0,50 \text{ m}$ com velocidade $v = 10 \text{ m/s}$ sobre uma mesa horizontal e sem atrito. A outra extremidade da mola está presa a um pino em O , segundo a figura a seguir.



- Determine o valor da força que a mola aplica na bola para que esta realize o movimento descrito.
- Qual era o comprimento original da mola antes de ter sido esticada?

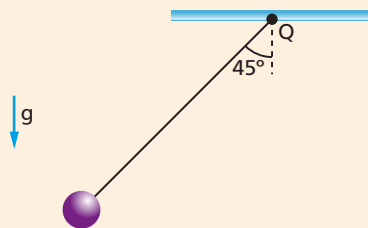
46. (Fuvest-SP) Um acrobata, de massa $M_A = 60 \text{ kg}$, quer realizar uma apresentação em que, segurando uma corda suspensa em um ponto Q fixo, pretende descrever um círculo de raio $R = 4,9 \text{ m}$, de tal forma que a corda mantenha um ângulo de 45° com a vertical. Visando garantir sua total seguran-

ça, há uma recomendação pela qual essa corda deva ser capaz de suportar uma tensão de, no mínimo, três vezes o valor da tensão a que é submetida durante a apresentação. Para testar a corda, com ela parada e na vertical, é pendurado em sua extremidade um bloco de massa M_0 , calculada de tal forma que a tensão na corda atenda às condições mínimas estabelecidas pela recomendação de segurança.



Nessa situação:

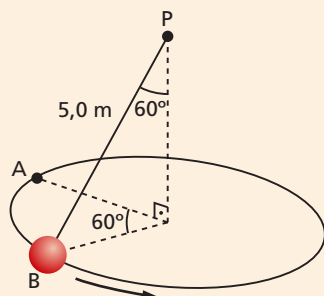
- Represente a direção e o sentido das forças que agem sobre o acrobata, durante sua apresentação, identificando-as, por meio de um desenho em escala aproximada.



- Estime o tempo t_A , em segundos, que o acrobata leva para dar uma volta completa em sua órbita circular.
- Estime o valor da massa M_0 , em kg, que deve ser utilizada para realizar o teste de segurança.

(Note e adote: força centrípeta $F_c = \frac{mv^2}{R}$; $\pi \approx 3$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

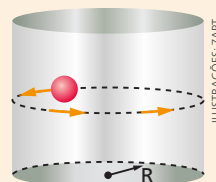
- (U. F. Triângulo Mineiro-MG) A figura mostra uma esfera de massa $0,5 \text{ kg}$ suspensa por um fio ideal de comprimento $5,0 \text{ m}$, preso no ponto P , e girando em movimento circular e uniforme, livre de qualquer resistência, numa trajetória contida num plano horizontal.



Sabendo que a esfera vai de A até B em $0,5 \text{ s}$ e adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\pi = 3$, determine:

- a frequência de rotação da esfera, em Hz ;
- a intensidade da força de tração no fio, em N .

- Uma partícula percorre em movimento uniformemente retardado o interior de uma casca cilíndrica de eixo vertical, fixa no solo. A sua trajetória é uma circunferência situada num plano imaginário horizontal (um anel horizontal). O coeficiente de atrito dinâmico entre a partícula e a superfície é μ_d e o estático é μ_e .



Sendo m a massa da partícula, g o módulo da aceleração da gravidade e R o raio da base do cilindro, determine:

- o menor valor da velocidade angular ω atingido pela partícula imediatamente antes de deixar o anel horizontal;
- a intensidade da resultante tangencial horizontal nas condições do item anterior.

- (Fuvest-SP) Um brinquedo consiste de duas pequenas bolas, A e B , de massa M , e um fio flexível: a bola B está presa na extremidade do fio e a bola A possui um orifício pelo qual o fio passa livremente. Para o jogo, um operador (com treino!) deve segurar o fio e girá-lo, de tal forma que as bolas descrevam trajetórias circulares, com o mesmo período T e raios diferentes. Nessa situação, como indicado na figura 1, as bolas permanecem em lados opostos em relação ao eixo vertical fixo que passa pelo ponto O . A figura 2 representa o plano que contém as bolas e gira em torno do eixo vertical, indicando os raios e os ângulos que o fio faz com a horizontal.

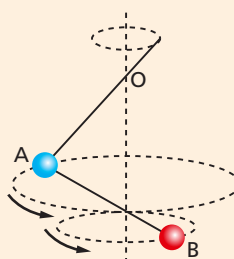


Figura 1.

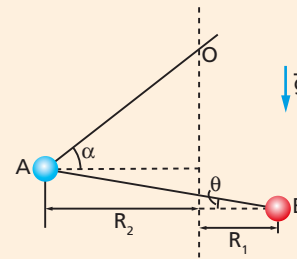


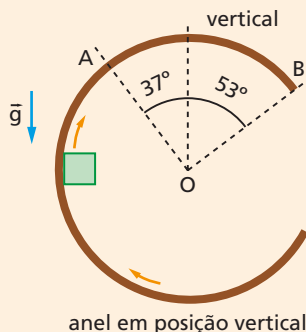
Figura 2.

Assim, determine:

- o módulo da força de tensão F , que permanece constante ao longo de todo o fio, em função de M e g .
- a razão $K = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$, entre os senos dos ângulos que o fio faz com a horizontal.
- o número N de voltas por segundo que o conjunto realiza quando o raio R_1 da trajetória descrita pela bolinha B for igual a $0,10 \text{ m}$.

(Note e adote: não há atrito entre as bolas e o fio. Considere $\sin \theta \approx 0,4$ e $\cos \theta \approx 0,9$; $\pi \approx 3$.)

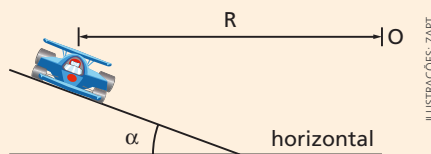
50. Um cubo de dimensões desprezíveis, massa 0,2 kg, desliza sem atrito sobre um anel circular de raio interno 0,2 m, em posição vertical, como mostra a figura. Ao passar pela posição A sua velocidade escalar é 2,0 m/s.



Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a intensidade da:

- força resultante na posição A;
 - força de reação normal de apoio na posição A;
 - aceleração do cubo imediatamente após ter abandonado o anel pela ranhura em B.
- (Adote: $\sin 37^\circ = 0,6$.)

51. (UF-RJ) Pistas com curvas de piso inclinado são projetadas para permitir que um automóvel possa descrever uma curva com mais segurança, reduzindo as forças de atrito da estrada sobre ele. Para simplificar, considere o automóvel como um ponto material.



- Suponha a situação mostrada na figura anterior, onde se representa um automóvel descrevendo uma curva de raio R , contida em um plano horizontal, com velocidade de módulo v tal que a estrada não exerça forças de atrito sobre o automóvel. Calcule o ângulo α de inclinação da curva, em função do módulo da aceleração da gravidade g e de v .
- Suponha agora que o automóvel faça a curva de raio R , com uma velocidade maior do que v . Faça um diagrama representando por setas as forças que atuam sobre o automóvel nessa situação. Nessa situação pode haver atrito.

52. Uma cunha triangular é fixada sobre a tampa giratória de uma mesa de tal modo que a extremidade inferior da cunha coincide com a linha que passa pelo centro da mesa (fig. a). A superfície da cunha possui um canaleta e, no interior deste, um pequeno bloco pode deslizar livremente. Observa-se que, quando a tampa gira com velocidade angular constante, o bloco permanece em equilíbrio sobre a cunha, estando seu centro de massa a uma altura $h = 0,4 \text{ m}$ em relação ao nível da tampa giratória (fig. b).

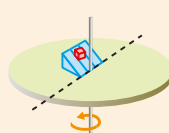


Figura a.

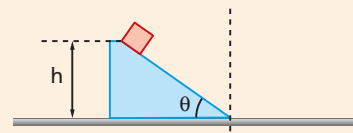
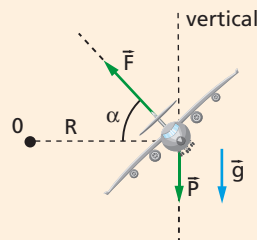


Figura b.

Sendo θ o ângulo de inclinação da cunha, determine a velocidade escalar do pequeno bloco:

- para um referencial fixo na tampa giratória;
- para um referencial fixo no solo.

53. (Mackenzie-SP) Um avião efetua uma curva em um plano horizontal, de forma que o ângulo entre esse plano e a força de sustentação (\vec{F}) é α .

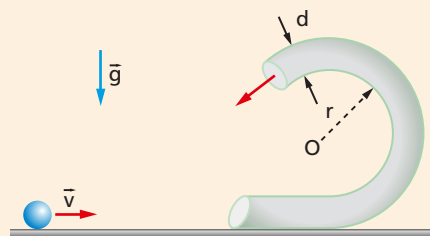


Sendo \vec{P} o peso do avião, R o raio da curva e g o módulo da aceleração da gravidade no local, a relação $\left(\frac{F}{P}\right)$, entre a intensidade da força de sustentação do avião e seu peso, é:

- $\frac{V^2}{Rg} \sec \alpha$
- $\frac{V^2}{Rg} \tan \alpha$
- $\frac{Rg}{V^2} \cos \sec \alpha$
- $\frac{V^2}{Rg} \sin \alpha$
- $\frac{V^2}{g} \cos \alpha$

54. Uma esfera lisa, de pequena dimensão, foi lançada na boca do tubo de diâmetro $d = 0,48 \text{ m}$, com uma velocidade escalar v_0 . Verificou-se que:

- quando a velocidade de lançamento fosse a máxima, a esfera atingiria o ponto mais alto com uma velocidade escalar $v_1 = 4,0 \text{ m/s}$ e receberia uma força de reação normal de 1,0 N.
- quando a velocidade de lançamento fosse a mínima, a esfera atingiria o ponto mais alto com uma velocidade v_2 , apoiar-se-ia na superfície inferior do tubo e receberia uma força normal de 1,0 N.



tubulação em posição vertical

Sendo dados $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $r = 0,8 \text{ m}$, determine:

- a massa da esfera;
- a velocidade v_2 .

Trabalho e energia cinética

Nos capítulos anteriores estudamos o movimento usando os conceitos de posição, velocidade, aceleração e força. No entanto, em nosso cotidiano nos deparamos com problemas cuja solução seria muito difícil usando apenas essas ferramentas. Vamos então abordar novos conceitos na Mecânica: o trabalho e a energia.

O conceito de energia é bastante amplo e não há como dar uma definição concisa para ele. No entanto, a sua compreensão intuitiva vai facilitar bastante a solução de diversos problemas. Vejamos alguns exemplos: um carro em movimento numa estrada tem energia; uma mola esticada tem energia; uma laranja atirada para cima tem energia, etc. A energia pode existir em diversas formas: energia mecânica, energia radiante, energia elétrica, energia térmica, energia nuclear, etc.

A força é uma grandeza vetorial, mas a energia e o trabalho, que ora vamos definir, são grandezas escalares. Serão, portanto, duas ferramentas mais fáceis de utilizar.

Neste capítulo vamos relacionar o trabalho com a energia cinética através do Teorema da Energia Cinética. No próximo capítulo estudaremos outras formas de energia mecânica: a energia potencial gravitacional e a energia elástica.

1. Energia cinética de uma partícula

A **energia cinética** de uma partícula de massa m , dotada de velocidade escalar v , muito menor que a velocidade da luz, é definida por:

$$E_{\text{cin}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Energia cinética é um tipo de energia mecânica, associada ao movimento do corpo. Trata-se de uma grandeza escalar, portanto ela é independente da direção da velocidade.

Equação dimensional e unidade de energia

Vamos partir da equação da energia cinética e obter a sua equação dimensional:

$$[E] = [m] \cdot [v]^2$$

Sendo $[m] = M$ e $[v] = L \cdot T^{-1}$, temos:

$$[E] = M \cdot (L \cdot T^{-1})^2 \Rightarrow [E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \quad \textcircled{1}$$

No SI a unidade de energia é o **joule**, simbolizado por **J** (maiúsculo). Assim:

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ J}$$

1. Energia cinética de uma partícula
2. Trabalho de uma força constante
3. Trabalho da força peso
4. Trabalho de uma força constante em trajetória curva
5. Trabalho de uma força variável
6. Teorema da energia cinética
7. Trabalho da força elástica
8. Trabalho de uma força variável em trajetória curva

OBSERVAÇÃO

No SI, a unidade de energia foi denominada **joule (J)** em homenagem ao físico inglês James Prescott Joule (1818-1889), pois sua obra foi muito importante para o estabelecimento do Princípio da Conservação da Energia.

Exemplo 1

- a) Um ponto material de massa 4,0 kg, dotado de velocidade escalar 5,0 m/s, possui uma energia cinética que assim se calcula:

$$E_{\text{cin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{4,0 \cdot 5,0^2}{2} = \frac{100}{2} \Rightarrow E_{\text{cin}} = 50 \text{ J}$$

- b) Se dobrarmos a velocidade escalar desse ponto material, o que ocorrerá com a sua energia cinética? Observemos que na definição acima a velocidade está elevada ao quadrado, o que significa que, ao dobrá-la, a energia cinética deverá quadruplicar. Vamos fazer as contas:

$$E_{\text{cin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{4,0 \cdot 10^2}{2} = \frac{400}{2} \Rightarrow E_{\text{cin}} = 200 \text{ J}$$

Sendo $200 \text{ J} = 4 \cdot 50 \text{ J}$, verificamos que realmente a energia cinética do ponto material quadruplicou.

Leitura

O que é energia

Até hoje ninguém conseguiu dar uma definição satisfatória de energia, porque, como já mencionamos na introdução deste capítulo, há várias formas de energia. Às vezes é possível dar uma definição que serve para alguns casos (como veremos mais adiante), mas não serve para todos. Ao longo do curso, você terá contato com essas várias formas de energia e, em cada caso, aprenderá a calculá-las. O fato de não se ter uma definição geral não aflige os físicos, como podemos constatar ao ler o trecho a seguir, extraído de um livro do físico americano Richard Philips Feynman:

É importante observar que hoje não sabemos o que é energia.
[...]

O que sabemos é que existe uma lei governando todos os fenômenos naturais conhecidos até hoje. Não existe nenhuma exceção conhecida a essa lei, que é conhecida pelo nome de Lei da Conservação da Energia. Ela estabelece que há uma certa quantidade, que nós chamamos energia, cujo valor não se altera, nas várias mudanças que ocorrem na natureza. Ela não é a descrição de um mecanismo ou de qualquer coisa concreta. É uma lei abstrata porque é um princípio matemático. Ela exprime o fato de que, quando calculamos um certo número (o valor da energia) no início e no fim de um processo, os resultados são iguais.

(*Lectures on Physics*, de R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. Massachusetts: Addison-Wesley, 1963. v. 1. Tradução do autor.)



Figura 1. Richard Philips Feynman (1918-1988), ganhador do prêmio Nobel em 1965, um dos físicos mais brilhantes do século XX.

2. Trabalho de uma força constante

Imaginemos que uma pessoa esteja empurrando com uma força \vec{F} um carrinho de supermercado e, durante um pequeno trecho retilíneo, ela o acelera. Sua velocidade aumentou e também a sua energia cinética. O carrinho ganhou energia, dada pela pessoa através da força \vec{F} . Dizemos que a pessoa realizou um trabalho sobre o carrinho, pois lhe transferiu energia.

Agora, vamos esticar uma mola, mas não muito, para não estragá-la. Estando a mola esticada, ela possui energia elástica. De onde veio essa energia? Através de nossa força, transferimos energia para a mola e, portanto, realizamos um trabalho sobre ela.

Uma terceira pessoa lança uma laranja para o alto, dando-lhe uma velocidade inicial e, portanto, uma energia cinética. Dizemos que essa pessoa realizou, através de uma força, um trabalho sobre a laranja.

Nesses três exemplos, houve deslocamento e, nos três casos, ocorreu realização de trabalho. A condição para que uma força realize um trabalho é que haja deslocamento de seu ponto de aplicação.

Mas, afinal, o que é o trabalho? O trabalho a que nos referimos é apenas a transferência de energia para um corpo, através de uma força. Somente haverá trabalho se houver deslocamento do ponto de aplicação da força, o que determina que está havendo transferência de energia.

Quando uma força realiza um trabalho sobre uma partícula, sua velocidade escalar se altera e, portanto, modifica a sua energia cinética. Convencionaremos que:

- se a energia da partícula aumentar, então o trabalho realizado pela força será **positivo**;
- se a energia da partícula diminuir, então o trabalho da força será **negativo**;
- se a energia da partícula permanecer constante, então o trabalho será **nulo**.

Trabalho de uma força constante – movimento retilíneo

Para medir a quantidade de energia transferida pela força, vamos definir uma equação para o trabalho realizado.

1º caso:

Consideremos um ponto material que se desloca numa trajetória retilínea, sob a ação de uma força \vec{F} constante que atua na direção e sentido do deslocamento (fig. 2). Sendo \vec{d} o deslocamento entre A e B, o trabalho realizado pela força \vec{F} é dado por:

$$\tau = F \cdot d$$

2º caso:

Consideremos agora um ponto material se deslocando na trajetória retilínea. Ele está sob a ação de uma força \vec{F} constante (que não é a resultante), porém de direção diferente da direção do deslocamento (fig. 3).

Nesse caso, devemos projetar a força no eixo x e teremos:

$$F_x = F \cdot \cos \theta$$

Usando-se a mesma definição anterior, o trabalho da força \vec{F} , no deslocamento de A até B, é dado por:

$$\tau = F_x \cdot d \Rightarrow \tau = (F \cdot \cos \theta) \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

Observemos, mais uma vez, que somente haverá trabalho se houver deslocamento do ponto de aplicação da força.

Como o trabalho é a medida de uma quantidade de energia, devemos também medi-lo em **joule (J)**. Adiante veremos sua equação dimensional.

VEJA BEM!

Quando uma força realiza um trabalho sobre um corpo, não aumenta o seu trabalho, mas sim a sua energia.

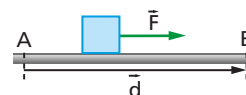


Figura 2.

OBSERVAÇÃO

A letra grega τ (tau) será usada para simbolizar o trabalho.

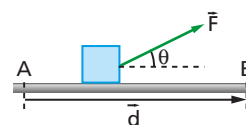


Figura 3.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Exemplo 2

Consideremos um ponto material sendo deslocado de A para B, sob a ação de uma força $F = 40 \text{ N}$, formando um ângulo de 60° com o vetor deslocamento, como nos mostra a figura 4. A distância entre A e B vale $4,0 \text{ m}$. O trabalho que a força \vec{F} realiza sobre o corpo assim se calcula:

$$\tau = F \cdot d \cdot \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = 40 \cdot 4,0 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = 160 \cdot 0,5 \Rightarrow \tau = 80 \text{ J}$$

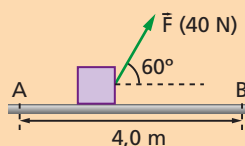


Figura 4.

CUIDADO!

Não se definiu o trabalho como sendo o produto da força pela distância. O termo correto é: deslocamento do ponto de aplicação da força.

3º caso:

Consideremos o ponto material percorrendo o eixo x e uma força \vec{F} de direção perpendicular ao deslocamento do móvel (fig. 5).

Nesse caso, aplicando-se a equação para o trabalho da força \vec{F} , temos:

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ$$

Como sabemos: $\cos 90^\circ = 0$.

Logo, o trabalho da força \vec{F} , nesse caso, é nulo: $\mathcal{W} = 0$.

É exemplo desse caso o trabalho da força que um garçom exerce sobre uma bandeja quando a carrega em movimento retilíneo e uniforme (MRU) dentro do restaurante, mantendo-a sempre na mesma altura (h), equilibrando copos e pratos (fig. 6).

Outro exemplo é o de uma carreta que realiza um MRU numa estrada horizontal, carregando uma pedra de algumas toneladas. O trabalho da força normal de apoio, exercido pela carroceria sobre a pedra, é nulo, bem como é nulo o trabalho da força peso, pois ambas as forças são perpendiculares ao deslocamento da carreta.

Um caso bastante interessante de trabalho nulo é o de um halterofilista que sustenta em **repouso** um haltere de 100 kg (fig. 7). As forças que ele aplica na barra do haltere não têm o seu ponto de aplicação deslocado e, portanto, não há realização de trabalho.

Quando empurramos uma parede, não realizamos nenhum trabalho sobre ela, pois não há deslocamento do ponto de aplicação da força. Quando empurramos uma mesa e esta não se desloca, o trabalho sobre a mesa é nulo.

Voltando ao exemplo do halterofilista, ele realizou um trabalho sobre o haltere quando o retirou do chão e o levou até a posição que sustenta agora. Nesse caso, a força aplicada teve seu ponto de aplicação deslocado na direção e sentido do movimento.

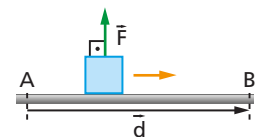


Figura 5.

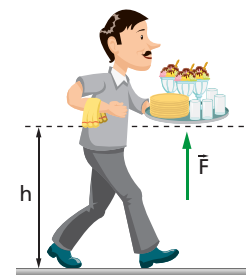


Figura 6.



Figura 7.

Equação dimensional e unidade do trabalho

Vamos partir da definição de trabalho da força \vec{F} :

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

A equação dimensional da força \vec{F} é dada por:

$$[F] = [m] \cdot [a] \Rightarrow [F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

O termo $\cos \theta$ é adimensional.

Escrevendo a equação dimensional do trabalho, temos:

$$[\mathcal{W}] = [F] \cdot [d]$$

$$[\mathcal{W}] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L \Rightarrow [\mathcal{W}] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \quad (2)$$

Se compararmos a equação (2) com a equação (1) (página 332) deduzida anteriormente, veremos que elas são idênticas, ou seja, o trabalho e a energia têm as mesmas dimensões e, por isso, têm a mesma unidade: o **joule (J)**.

Assim:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Exercícios de Aplicação

1. Um corpo de massa $m = 2 \text{ kg}$ escorrega num plano inclinado e sua velocidade passa de um valor $v_1 = 2 \text{ m/s}$ para um valor $v_2 = 6 \text{ m/s}$. Determine a variação de energia cinética do corpo entre as duas posições.

Resolução:

A energia cinética do corpo vale:

$$E_{\text{cin}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Na posição 1, temos:

$$E_1 = \frac{2 \cdot 2^2}{2} \Rightarrow E_1 = 4 \text{ J}$$

Na posição 2, temos:

$$E_2 = \frac{2 \cdot 6^2}{2} \Rightarrow E_2 = 36 \text{ J}$$

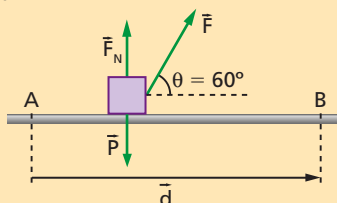
A variação de energia cinética é:

$$\Delta E_{\text{cin}} = E_2 - E_1$$

$$\Delta E_{\text{cin}} = 36 \text{ J} - 4 \text{ J} \Rightarrow \Delta E_{\text{cin}} = 32 \text{ J}$$

2. Numa quadra de tênis, a bolinha passou sob a rede com uma velocidade escalar de 30 m/s e chegou à raquete do outro jogador com velocidade de 20 m/s , antes de ser rebatida. Sendo de 60 g a sua massa, determine a energia cinética inicial, a energia cinética final e a variação de energia cinética.

3. Um bloco de massa $m = 4,0 \text{ kg}$ está sendo arrastado sobre um plano horizontal sem atrito por uma força $F = 50 \text{ N}$.



Sendo o módulo do deslocamento $d = 2,0 \text{ m}$, determine o trabalho desde A até B:

- da força \vec{F} sobre o bloco;
- do peso \vec{P} e da força normal \vec{F}_N sobre o bloco.

Resolução:

- O trabalho da força \vec{F} sobre o bloco é calculado pela equação:

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

Sendo $F = 50 \text{ N}$; $d = 2,0 \text{ m}$ e $\cos \theta = \cos 60^\circ = 0,5$, obtemos:

$$\mathcal{W} = 50 \cdot 2,0 \cdot 0,5 \text{ (unidades do SI)}$$

$$\mathcal{W} = 50 \text{ J}$$

- O trabalho do peso \vec{P} também se calcula pela mesma equação:

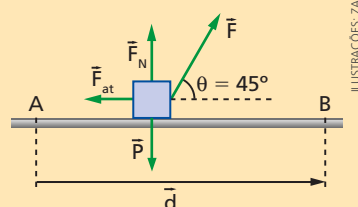
$$\mathcal{W}_p = P \cdot d \cdot \cos \theta$$

Sendo o deslocamento horizontal, a força peso é perpendicular ao deslocamento: $\theta = 90^\circ$.

$$\cos \theta = \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \mathcal{W}_p = 0$$

Do mesmo modo, é nulo o trabalho da força normal, pois ela também é perpendicular ao deslocamento: $\mathcal{W}_N = 0$

4. Um bloco está sendo arrastado sobre um plano horizontal com atrito. Sua trajetória é retilínea e sobre ele atuam apenas as quatro forças mostradas na figura. São dados os módulos do peso \vec{P} , força \vec{F} e força de atrito \vec{F}_{at} : $P = 40 \text{ N}$; $F = 18\sqrt{2} \text{ N}$; $F_{\text{at}} = 12 \text{ N}$.



O bloco é deslocado em 30 cm , indo de A até B. Considerando o deslocamento AB, determine o trabalho:

- da força \vec{F} ;
- da força de atrito \vec{F}_{at} ;
- do peso \vec{P} e da força normal \vec{F}_N ;
- da resultante de todas as forças.

Resolução:

- Para calcular o trabalho usaremos a equação vista na teoria:

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

São dados: $F = 18\sqrt{2} \text{ N}$; $d = 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$ (este é o deslocamento do bloco e também do ponto de aplicação da força \vec{F}).

$$\theta = 45^\circ \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathcal{W}_F = 18\sqrt{2} \cdot 0,30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (unidades SI)}$$

$$\mathcal{W}_F = 5,4 \text{ J}$$

- b) A força de atrito se opõe ao movimento do bloco e, portanto, forma com o vetor deslocamento um ângulo de 180° :

$$\mathcal{W}_{at} = F_{at} \cdot d \cdot \cos 180^\circ$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\mathcal{W}_{at} = 12 \cdot 0,30 \cdot (-1) \text{ (unidades do SI)}$$

$$\mathcal{W}_{at} = -3,6 \text{ J}$$

- c) Do mesmo modo como vimos no exercício 3, no deslocamento horizontal o peso \vec{P} e a força normal \vec{F}_N têm trabalho nulo.

$$\mathcal{W}_P = \mathcal{W}_N = 0$$

- d) O trabalho total ou trabalho resultante é o somatório algébrico dos trabalhos de todas as forças:

$$\mathcal{W}_{res} = \mathcal{W}_F + \mathcal{W}_{at} + \mathcal{W}_P + \mathcal{W}_N$$

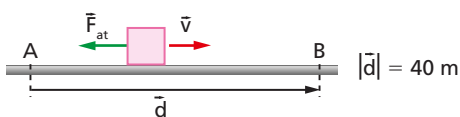
Substituindo-se os valores encontrados nos itens anteriores:

$$\mathcal{W}_{res} = +5,4 \text{ J} + -3,6 \text{ J} + 0 + 0$$

$$\mathcal{W}_{res} = +1,8 \text{ J}$$

Observação: tendo resultado um trabalho positivo, significa que o corpo recebeu trabalho, o que deverá aumentar sua energia cinética. Se tivéssemos calculado a força resultante e a seguir determinado o trabalho por ela realizado, teríamos chegado ao mesmo resultado anterior.

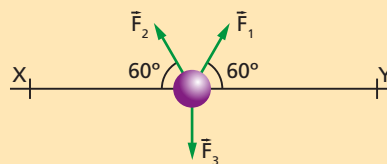
5. Um corpo de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ foi lançado em A com determinada velocidade inicial deslizando sobre o plano horizontal com atrito e parando em B. Sabendo que o módulo da força de atrito é de 20 N , determine o trabalho desta força sobre o corpo, desde o instante de lançamento até o repouso do bloco.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

6. Uma partícula está se deslocando numa trajetória retilínea sob a ação de três forças, \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , como mostra a figura a seguir. A partícula é deslocada desde a posição X até a Y.

São dados: $F_1 = 8,0 \text{ N}$; $F_2 = 6,0 \text{ N}$; $F_3 = 9,0 \text{ N}$; $XY = 2,5 \text{ m}$.

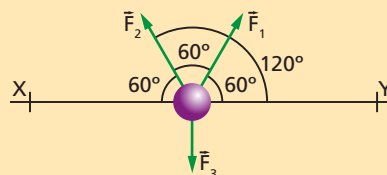


Determine:

- a) o trabalho de cada uma das forças;
b) o trabalho total ou resultante.

Resolução:

- a) Inicialmente observemos a marcação de ângulos com a reta XY. Eles serão úteis para o cálculo do trabalho de cada uma das forças.



Sabemos que:

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

$$\mathcal{W}_1 = F_1 \cdot d \cdot \cos 60^\circ$$

$$\mathcal{W}_1 = 8,0 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \Rightarrow \mathcal{W}_1 = +10 \text{ J}$$

$$\mathcal{W}_2 = F_2 \cdot d \cdot \cos 120^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5$$

$$\mathcal{W}_2 = 6,0 \cdot 2,5 \cdot (-0,5) \Rightarrow \mathcal{W}_2 = -7,5 \text{ J}$$

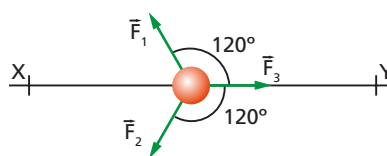
Observemos que a força \vec{F}_3 é perpendicular ao deslocamento e seu trabalho é nulo: $\mathcal{W}_3 = 0$.

- b) O trabalho resultante ou trabalho total é o somatório algébrico dos trabalhos de todas as forças:

$$\mathcal{W}_{res} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$$

$$\mathcal{W}_{res} = +10 \text{ J} - 7,5 \text{ J} + 0 \Rightarrow \mathcal{W}_{res} = +2,5 \text{ J}$$

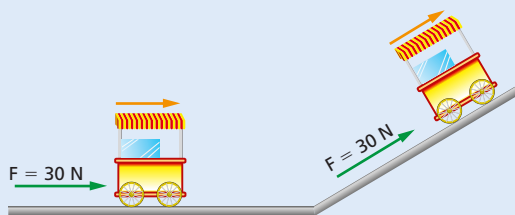
7. A figura nos mostra uma partícula sob a ação de três forças de mesma intensidade $4,0 \text{ N}$, sendo deslocada para a direita (de X para Y).



Determine o trabalho de cada uma delas num deslocamento de $4,0 \text{ mm}$. A seguir, determine o trabalho resultante.

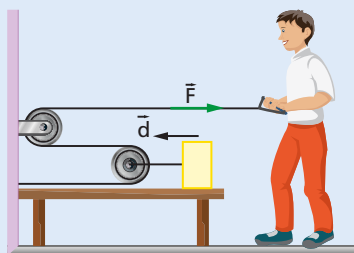
Exercícios de Reforço

8. (FGV-SP) Contando que ao término da prova os vestibulandos da GV estivessem loucos por um docinho, o vendedor de churros levou seu carrinho até o local de saída dos candidatos. Para chegar lá, percorreu 800 m, metade sobre solo horizontal e a outra metade em uma ladeira de inclinação constante, sempre aplicando sobre o carrinho uma força de intensidade 30 N, paralela ao plano da superfície sobre a qual se deslocava e na direção do movimento.



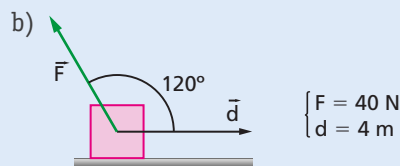
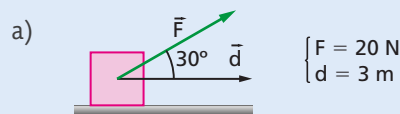
Levando em conta o esforço aplicado pelo vendedor sobre o carrinho, considerando todo o traslado, pode-se dizer que:

- na primeira metade do trajeto, o trabalho exercido foi de 12 kJ, enquanto, na segunda metade, o trabalho foi maior.
 - na primeira metade do trajeto, o trabalho exercido foi de 52 kJ, enquanto, na segunda metade, o trabalho foi menor.
 - na primeira metade do trajeto, o trabalho exercido foi nulo, assumindo, na segunda metade, o valor de 12 kJ.
 - tanto na primeira metade do trajeto como na segunda metade, o trabalho foi de mesma intensidade, totalizando 24 kJ.
 - o trabalho total foi nulo, porque o carrinho parte de um estado de repouso e termina o movimento na mesma condição.
9. Usando-se um conjunto de polias, como se indica na figura, uma pessoa arrasta um bloco sobre uma mesa horizontal. A força \vec{F} aplicada pela pessoa tem intensidade de 100 N e o bloco foi deslocado 0,5 m de sua posição original.

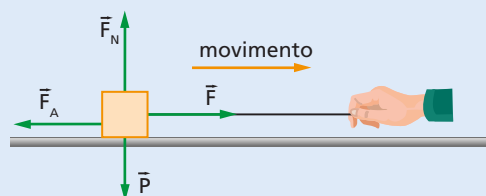


O trabalho da força \vec{F} da pessoa sobre o bloco, vale:

- 25 J
 - 50 J
 - 100 J
 - 200 J
 - 400 J
10. A energia cinética de uma partícula vale 100 J e sua velocidade é igual a 5,0 m/s. Uma força \vec{F} acelerou a partícula e sua velocidade escalar passou a ser 10 m/s. Sua energia cinética passou a ser igual a:
- 50 J
 - 200 J
 - 400 J
 - 600 J
 - 800 J
11. Em cada caso representado abaixo calcule o trabalho realizado pela força \vec{F} durante o deslocamento \vec{d} .



12. Um bloco apoiado numa superfície horizontal é puxado para a direita pela aplicação de uma força \vec{F} de intensidade $F = 30$ N. Além dessa força, o bloco está sob ação de outras três forças: o peso \vec{P} , a força normal \vec{F}_N e a força de atrito \vec{F}_A , cuja intensidade é $F_A = 10$ N.



ILUSTRAÇÕES: ZAPPT

Para um deslocamento \vec{d} de módulo $d = 5,0$ m, calcule o trabalho:

- de \vec{F} ;
- de \vec{F}_N ;
- de \vec{P} ;
- de \vec{F}_A ;
- total;
- da força resultante.

3. Trabalho da força peso

Movimento vertical

Conforme vimos nos exemplos anteriores, nos deslocamentos horizontais o trabalho do peso é nulo.

Vamos então considerar um movimento vertical num eixo y . Para facilitar o raciocínio, consideremos um corpo em queda livre a partir de uma altura h , como na figura 8. Calculemos o trabalho do peso até que ele atinja o solo:

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

Vamos substituir:

$$F = P = m \cdot g; d = h; \theta = 0^\circ$$

pois o peso tem o mesmo sentido do deslocamento:

$$\mathcal{W}_p = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 0^\circ \Rightarrow \mathcal{W}_p = +m \cdot g \cdot h$$

O sinal positivo do trabalho significa que o peso transfere uma energia ($m \cdot g \cdot h$) para o corpo, aumentando a sua energia cinética.

Vamos agora considerar um novo movimento vertical: o corpo é arremessado verticalmente para cima e atinge o pico da trajetória (A) com velocidade nula (fig. 9).

O trabalho do peso ficará:

$$\mathcal{W}_p = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 180^\circ \Rightarrow \mathcal{W}_p = m \cdot g \cdot h \cdot (-1) \Rightarrow \mathcal{W}_p = -m \cdot g \cdot h$$

O trabalho é negativo, pois durante a subida o corpo teve sua velocidade diminuída, isto é, perdeu energia cinética. Isso significa que a força peso removeu uma parte de energia ($m \cdot g \cdot h$) da energia cinética do corpo.

Resumindo, o trabalho da força peso no movimento vertical será:

- $+m \cdot g \cdot h$, quando o movimento for de cima para baixo;
- $-m \cdot g \cdot h$, quando o movimento for de baixo para cima.

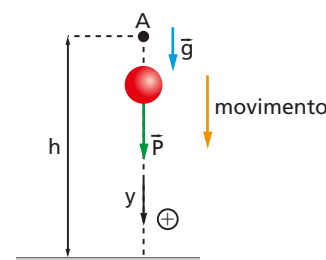


Figura 8.

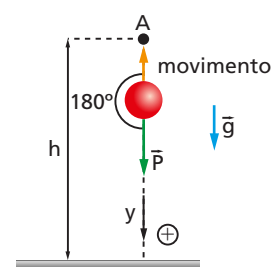


Figura 9.

Movimento retilíneo e oblíquo

Consideremos um pequeno bloco deslocando-se num plano inclinado desde A até B (fig. 10). Calculemos o trabalho do peso no deslocamento AB.

Usando a definição de trabalho:

$$\mathcal{W} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

Façamos $F = P = m \cdot g$ e $d = AB$:

$$\mathcal{W}_p = m \cdot g \cdot d \cdot \cos \theta \quad (1)$$

Vamos calcular o $\cos \theta$ pelo triângulo ABC:

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{h}{d} \quad (2)$$

Substituindo a equação (2) em (1), temos:

$$\mathcal{W}_p = m \cdot g \cdot d \cdot \frac{h}{d} \Rightarrow \mathcal{W}_p = m \cdot g \cdot h$$

Conclusão: o trabalho do peso não depende do deslocamento nem da inclinação do plano. Ele depende do desnível h entre a posição inicial A e a posição final B. Se o bloco tivesse sido arrastado para cima, o trabalho seria negativo.

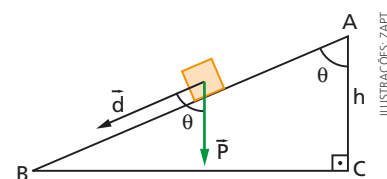


Figura 10.

Combinando um movimento retilíneo horizontal com um movimento vertical

Façamos agora um terceiro caso: uma pessoa retira da mesa A uma caixa. Carrega-a em movimento horizontal até uma posição B e baixa-a em movimento vertical até a posição C. A figura 11 mostra a trajetória da caixa (omitimos a pessoa) durante as duas etapas do movimento (AB e BC). Vamos calcular o trabalho do peso desde A até C.

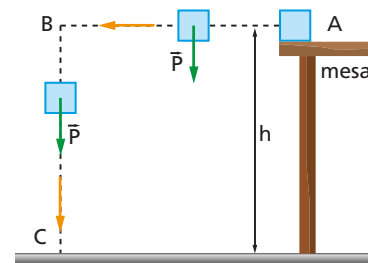


Figura 11.

1º) No movimento horizontal AB o trabalho do peso é nulo, pois a força peso se mantém perpendicular à trajetória horizontal: $\mathcal{W}_{AB} = 0$.

2º) No movimento vertical para baixo o trabalho do peso vale:

$$\mathcal{W}_{BC} = +m \cdot g \cdot h$$

O trabalho do peso desde a posição A até a posição C é calculado pelo somatório dos dois trabalhos:

$$\mathcal{W}_{AC} = \mathcal{W}_{AB} + \mathcal{W}_{BC}$$

$$\mathcal{W}_{AC} = 0 + m \cdot g \cdot h \Rightarrow \mathcal{W}_{AC} = +m \cdot g \cdot h$$

Observemos que o resultado foi idêntico ao obtido no caso anterior. Isso nos leva a concluir que o trabalho do peso não dependeu da trajetória. Ele depende do desnível h entre a posição inicial e a posição final. A demonstração que fizemos foi para trajetórias retilíneas. No próximo item vamos aprender a calcular o trabalho do peso para trajetórias curvas.

4. Trabalho de uma força constante em trajetória curva

Consideremos uma partícula sendo deslocada numa superfície curva sob a ação de uma força \vec{F} , constante. Apenas para simplificar o nosso raciocínio, vamos supor que essa força tenha direção horizontal. Como estamos supondo que \vec{F} seja constante, sua direção e seu sentido não vão se alterar durante o percurso da partícula, desde a posição A até a posição B.

Sabemos calcular o trabalho em trajetórias retilíneas, mas não em curvas. Para tanto será necessário dividirmos a trajetória em pequenos trechos tal que cada um deles venha a ser um pequeno segmento de reta. Temos então, em cada um desses trechos, uma situação semelhante a um plano inclinado, como mostra o destaque da figura 13.

Em cada plano inclinado mostrado no destaque, em vez de usarmos a hipotenusa (rampinha), calculamos o trabalho da força \vec{F} , constante e horizontal, como se a partícula fosse transportada pelos catetos d_i e h_i do triângulo retângulo:

$$\mathcal{W}_i = F \cdot d_i + F \cdot h_i \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow \mathcal{W}_i = F \cdot d_i + 0 \Rightarrow \mathcal{W}_i = F \cdot d_i$$

O trabalho de \vec{F} desde a posição A até a posição B será dado pelo somatório de todos os trabalhos parciais realizados em cada trecho:

$$\mathcal{W}_{AB} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 + \dots \mathcal{W}_n$$

$$\mathcal{W}_{AB} = F \cdot d_1 + F \cdot d_2 + F \cdot d_3 + \dots F \cdot d_n$$

Colocando-se \vec{F} em evidência:

$$\mathcal{W}_{AB} = F(d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n)$$

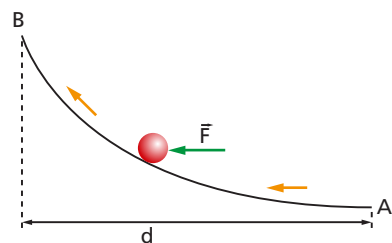


Figura 12.

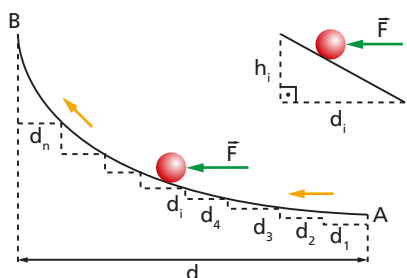


Figura 13.

No entanto:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = d$$

Então o trabalho de \vec{F} será:

$$\mathcal{W}_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Do mesmo modo que usamos uma força \vec{F} constante de direção horizontal, poderíamos ter usado uma força de direção vertical e o trabalho ficaria:

$$\mathcal{W}_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{h}$$

em que h é a medida do deslocamento vertical da partícula.

Resumindo:

O trabalho de uma força constante \vec{F} não depende da trajetória da partícula, mas depende apenas do seu módulo e do deslocamento medido na mesma direção de \vec{F} .

Dizemos que uma força constante é uma **força conservativa**, pois o seu trabalho não depende da trajetória da partícula.

Trabalho do peso em uma trajetória qualquer

Uma aplicação imediata do que acabamos de demonstrar é o cálculo do trabalho do peso quando o corpo é levado de uma posição para outra, em níveis diferentes, seguindo uma trajetória curva.

Como o peso é uma força de direção vertical, medimos o deslocamento vertical h , como se indica na figura 14.

$$\mathcal{W}_p = P \cdot h \Rightarrow \mathcal{W}_p = +m \cdot g \cdot h$$

Esse é o mesmo resultado obtido quando o corpo foi deslocado de um nível para outro em trajetória retilínea e vertical, estudado no item 3 (página 337).

Resumindo:

O trabalho do peso entre as posições A e B não depende da trajetória seguida pelo corpo, mas apenas do desnível h entre elas.
O peso é uma força conservativa.

Na figura 15 ilustramos algumas possibilidades: seja pela trajetória 1 ou pela 2 ou pela curva 3, o trabalho do peso é o mesmo: mgh . Se porventura invertermos o sentido do movimento, o trabalho será negativo: $-mgh$.

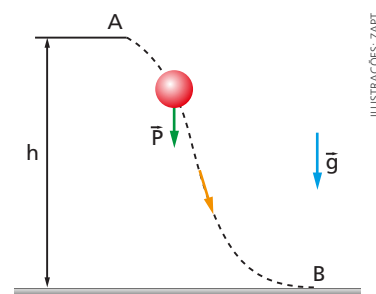


Figura 14.

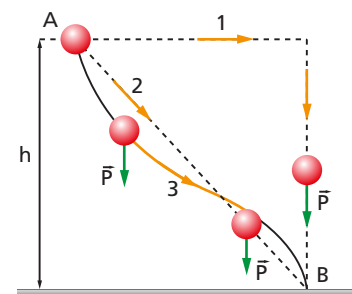
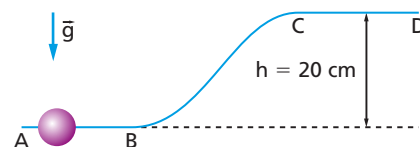


Figura 15. $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = mgh$.

Exercícios de Aplicação

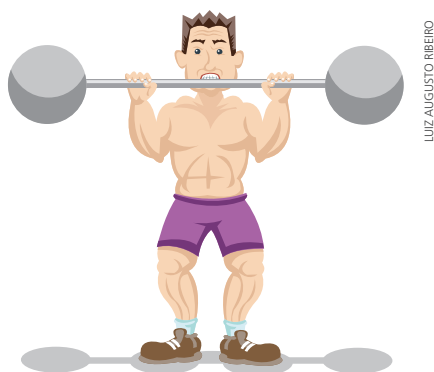
13. A figura ao lado mostra o perfil vertical de uma rampa de acesso que liga duas pistas horizontais sem atrito. Uma partícula de massa $m = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$ foi deslocada desde A até D. Os trechos AB e CD são retilíneos e horizontais, sendo o desnível entre eles igual a 20 cm. O trecho BC é uma curva desconhecida.



Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine o trabalho da força peso:

- a) nos trechos AB e CD; b) no trecho BC.

14. Um halterofilista ergue o seu haltere de massa $m = 120 \text{ kg}$ junto à sua cabeça deixando-o a $1,80 \text{ m}$ do chão.

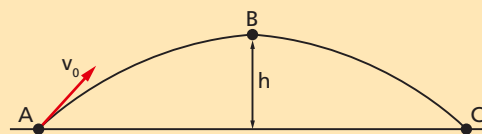


Por 2 min ele o mantém em repouso e depois o repõe no chão. Admita que para erguê-lo ele fez uma força constante de módulo praticamente igual ao peso do haltere.

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine o trabalho:

- da força peso, durante a subida;
 - da força do halterofilista, durante a subida;
 - resultante, levando em conta as duas forças, durante a subida;
 - da força do halterofilista enquanto mantinha o haltere em repouso, junto à sua cabeça.
15. Um ponto material, de massa $m = 0,30 \text{ kg}$, é lançado obliquamente de um ponto A descrevendo a trajetória indicada. A altura máxima obtida é $h = 5,0 \text{ m}$. Considere a aceleração da gravidade constante e de módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine

o trabalho do peso nos deslocamentos de A para B , B para C e A para C .



Resolução:

Trabalho do peso de A para B :

$$\mathcal{W}_{AB} = -m \cdot g \cdot h$$

$$\mathcal{W}_{AB} = -0,30 \cdot 10 \cdot 5,0 \Rightarrow \mathcal{W}_{AB} = -15 \text{ J}$$

Trabalho do peso de B para C :

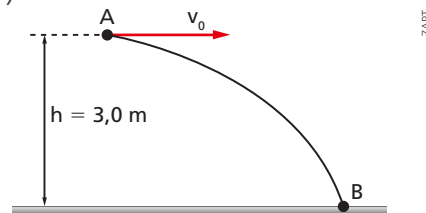
$$\mathcal{W}_{BC} = +m \cdot g \cdot h$$

$$\mathcal{W}_{BC} = +0,30 \cdot 10 \cdot 5,0 \Rightarrow \mathcal{W}_{BC} = +15 \text{ J}$$

Trabalho do peso de A para C :

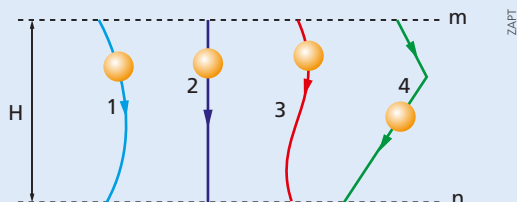
$$\mathcal{W}_{AC} = 0, \text{ pois o desnível entre } A \text{ e } C \text{ é nulo.}$$

16. Um ponto material, de massa $m = 0,20 \text{ kg}$, é lançado horizontalmente de um ponto A situado a $3,0 \text{ m}$ do solo. Considere a aceleração da gravidade constante e de módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine o trabalho do peso no deslocamento de A para B (ponto onde o ponto material atinge o solo).



Exercícios de Reforço

17. Uma mesma partícula de massa m foi transportada entre duas posições por quatro caminhos diferentes, como se indica na figura. As retas m e n são horizontais e o desnível entre elas é H .



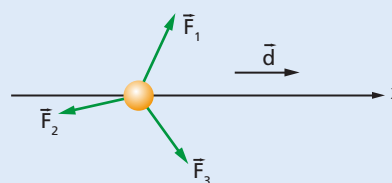
Considere as afirmações a seguir a respeito do trabalho do peso da partícula nas trajetórias 1, 2, 3 ou 4:

- O trabalho do peso é igual em qualquer uma das quatro trajetórias.
- O trabalho do peso é maior na trajetória 4, pois o ponto de aplicação da força peso sofreu o maior deslocamento.

III. Em cada uma das trajetórias teremos um valor diferente do trabalho da força peso, porém, certamente, pela trajetória 1 teremos o menor trabalho.

Está correto apenas o que se afirma em:

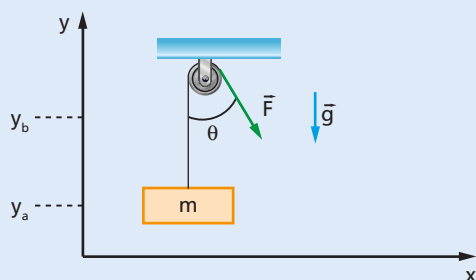
- I
 - II
 - III
 - II e III
 - I e III
18. Uma partícula é deslocada sobre uma trajetória retilínea em movimento uniforme, sob a ação de três forças, como se indica na figura.



A respeito da força resultante e do trabalho que ela realiza, são feitas as afirmações que se seguem:

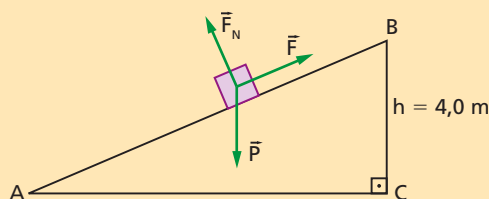
- I. A força resultante tem, certamente, a direção e o sentido do movimento da partícula.
 - II. A força resultante é nula.
 - III. O trabalho da força resultante é positivo.
 - IV. O trabalho da força resultante é nulo.
- Está correto somente o que se afirma em:
- a) I e III
 - b) II e IV
 - c) I e IV
 - d) II e III
 - e) I, III e IV

19. (Fuvest-SP) Usando um sistema formado por uma corda e uma roldana, um homem levanta uma caixa de massa m , aplicando na corda uma força \vec{F} que forma um ângulo θ com a direção vertical, como mostra a figura.



O trabalho realizado pela *resultante* das forças que atuam na caixa – peso e força da corda –, quando o centro de massa da caixa é elevado, com velocidade constante v , desde a altura y_a até a altura y_b , é:

- a) nulo
 - b) $F(y_b - y_a)$
 - c) $mg(y_b - y_a)$
 - d) $F \cos(\theta)(y_b - y_a)$
 - e) $mg(y_b - y_a) + \frac{mv^2}{2}$
20. Um bloco de massa 2,0 kg desliza num plano inclinado, partindo de A e chegando a B, tendo se deslocado 9,0 m. Uma força \vec{F} , de intensidade 12 N, atua sobre o bloco, no sentido de seu deslocamento. A figura nos mostra todas as forças que atuam no bloco.



No local, a gravidade tem módulo 10 m/s^2 . Considerando as dimensões do plano inclinado, determine o trabalho:

- a) da força \vec{F} ;
- b) do peso \vec{P} ;
- c) da força normal \vec{F}_N ;
- d) da força resultante.

Resolução:

- a) A força \vec{F} atua na direção e no sentido do deslocamento. O trabalho de \vec{F} sobre o bloco vale:

$$\mathcal{W}_F = F \cdot d$$

$$\mathcal{W}_F = 12 \cdot 9,0 \Rightarrow \mathcal{W}_F = 108 \text{ J}$$

- b) O trabalho do peso é negativo, pois o bloco está sendo arrastado para cima.

$$\mathcal{W}_P = -m \cdot g \cdot h$$

$$\mathcal{W}_P = -2,0 \cdot 10 \cdot 4,0$$

$$\mathcal{W}_P = -80 \text{ J}$$

- c) A força normal \vec{F}_N é perpendicular ao deslocamento e, portanto, seu trabalho é nulo.

$$\mathcal{W}_N = 0$$

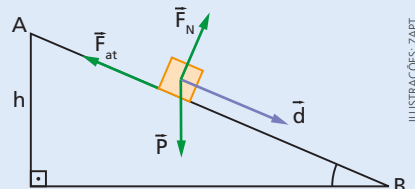
- d) O trabalho da força resultante é igual à soma algébrica dos trabalhos parciais e assim se escreve:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = \mathcal{W}_F + \mathcal{W}_P + \mathcal{W}_N$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = +108 \text{ J} - 80 \text{ J} + 0$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = +28 \text{ J}$$

21. Numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, um bloco de massa 20 kg é abandonado no alto de um plano inclinado de comprimento $AB = 20 \text{ m}$, como mostra a figura. Durante a descida atuam no bloco três forças: o peso, a força normal e uma força de atrito de intensidade 40 N. Dado $h = 5,0 \text{ m}$.



Para o deslocamento de 20 m, determine o trabalho:

- a) do peso \vec{P} ;
- b) da força de atrito \vec{F}_{at} ;
- c) da força normal \vec{F}_N ;
- d) da força resultante.

5. Trabalho de uma força variável

Movimento em uma dimensão

Consideremos uma partícula que se movimenta sobre o eixo x , sob a ação de uma força \vec{F} que tem a direção e o sentido do movimento, mas cujo módulo não é constante (fig. 16).

Para calcularmos o trabalho de \vec{F} , a equação que usamos até agora ($\mathcal{W} = F \cdot d$) não poderá ser usada, pois \vec{F} tem módulo variável. A rigor, esse problema, algebricamente, só terá solução com o uso do cálculo integral.

Para resolver esse impasse, vamos usar o gráfico do módulo da força (F) pela posição (x). Apenas para nos familiarizar, vamos fazer dois casos:

1º caso:

Se \vec{F} tivesse módulo constante, o trabalho poderia ser calculado por: $\mathcal{W} = F \cdot d$.

Observemos a figura 17, que nos dá o gráfico de \vec{F} constante, em função da posição x .

A área do retângulo sombreado entre as posições x_1 e x_2 é numericamente igual ao trabalho, pois:

$$\text{área} = \text{base} \cdot \text{altura} \stackrel{N}{=} d \cdot F = \mathcal{W}$$

Esse raciocínio é válido para \vec{F} constante.

2º caso:

A força tem módulo variável, e o gráfico da figura 18 nos dá a intensidade de \vec{F} em função da posição x . Para calcular o trabalho vamos dividir o intervalo (x_1 ; x_2) em pequenos intervalos (Δx_i) em que se supõe que a força tenha seu módulo constante (\vec{F}_i), como nos mostra a figura 19.

A figura 19 está dividida em retângulos elementares, cuja área é o produto ($F_i \cdot \Delta x_i$), que corresponde ao trabalho nesse deslocamento elementar.

Considerando o intervalo (x_1 ; x_2), o trabalho será, aproximadamente, igual à área constituída pelo somatório de todos os retângulos elementares.

$$\mathcal{W}_{AB} \cong \Sigma \text{ áreas dos retângulos}$$

Colocamos aproximadamente igual à área, porque o sombreado não cobriu perfeitamente a curva, formando "degraus".

Se fizermos o limite, para (Δx) tendendo a zero, aumentaremos a quantidade de retângulos elementares e os "degraus" desaparecerão. Poderemos então dizer que o trabalho da força \vec{F} será numericamente igual à área sombreada na figura 20.

$$\mathcal{W} \stackrel{N}{=} \text{área sombreada}$$

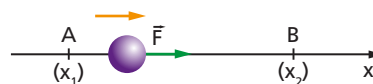


Figura 16.

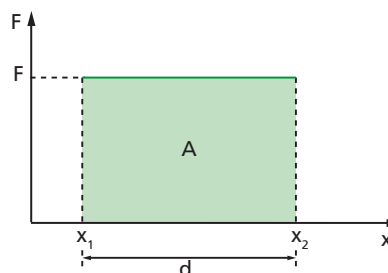


Figura 17.

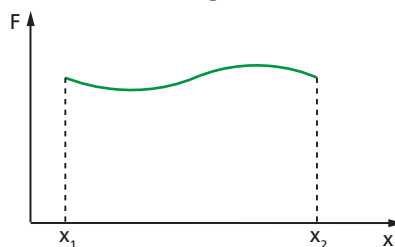


Figura 18.

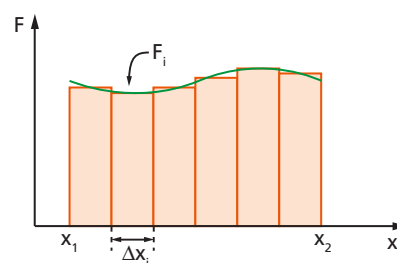


Figura 19.

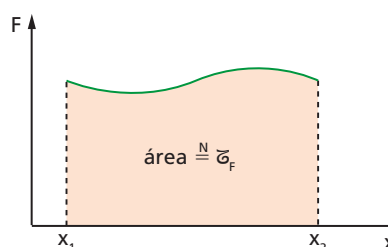


Figura 20.

Se, porventura, a força \vec{F} não tiver a mesma direção do movimento, como na figura 21, basta fazer a sua projeção sobre o eixo x e trabalhar no gráfico de F_x em função da posição x . A área calculada será igual ao trabalho de \vec{F} (fig. 22).

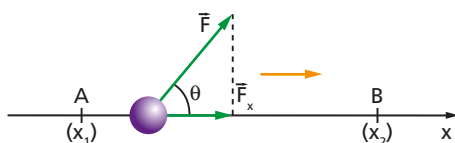


Figura 21.

No caso de a força \vec{F} atuar em sentido oposto ao deslocamento o seu trabalho será negativo. Nesse caso pode-se desenhar um gráfico do valor algébrico da força em função do deslocamento. O gráfico ficaria invertido, isto é, no quarto quadrante. Nos exercícios esse caso será explorado.

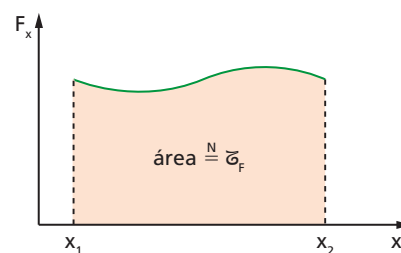
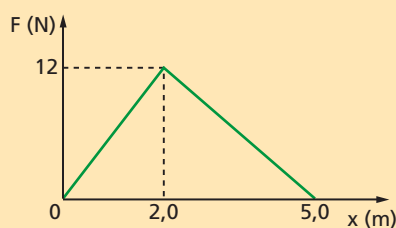


Figura 22.

Exercícios de Aplicação

22. Uma partícula desloca-se no eixo x sob a ação exclusiva da força \vec{F} , de direção e sentido constantes, porém de intensidade variando com a posição da partícula, como mostra o gráfico. Determine o trabalho da força \vec{F} sobre a partícula entre os deslocamentos $x = 0$ e $x = 5,0$ m.



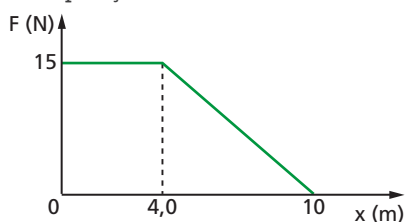
Resolução:

Como vimos na teoria, o trabalho de uma força variável, que tem a direção do deslocamento, pode ser calculado pela área da figura abaixo do gráfico.

$$W \stackrel{N}{=} \text{área do triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$W \stackrel{N}{=} \frac{5,0 \cdot 12}{2} \Rightarrow W = 30 \text{ J}$$

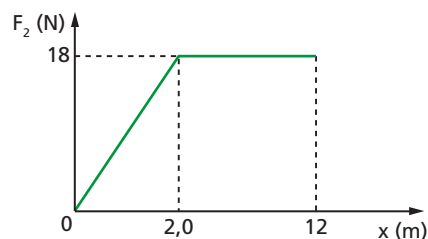
23. Sobre um móvel em movimento retilíneo está atuando uma única força \vec{F} na direção do deslocamento. O gráfico indica a intensidade de \vec{F} em função da posição do móvel.



Determine o trabalho de \vec{F} sobre o móvel entre as posições:

- a) $x = 4,0$ e $x = 10$ m; b) $x = 0$ e $x = 10$ m.

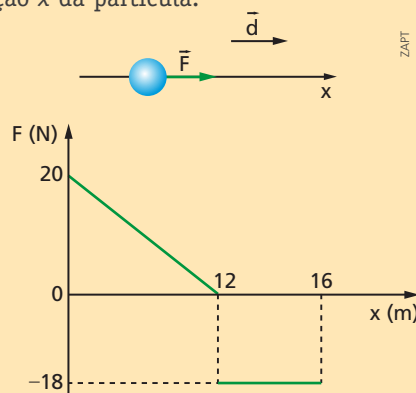
24. Um ponto material desloca-se numa trajetória retilínea e sobre ele atuam duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , ambas na direção e sentido do seu deslocamento. A força \vec{F}_1 tem módulo constante igual a 12 N e a força \vec{F}_2 tem intensidade variável de acordo com o gráfico de seu módulo pela posição do móvel.



Para um deslocamento entre as posições $x = 0$ e $x = 12$ m, determine:

- a) o trabalho de \vec{F}_1 ;
b) o trabalho de \vec{F}_2 ;
c) o trabalho líquido resultante de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

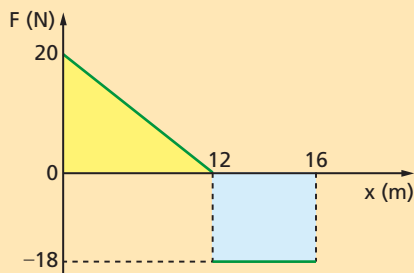
25. A força \vec{F} é a resultante das forças que atuam num ponto material cuja trajetória é retilínea. Sua intensidade, no entanto, tem valor algébrico variável, como nos mostra o gráfico de \vec{F} com a posição x da partícula.



Determine o trabalho realizado pela força \vec{F} sobre o ponto material e interprete o sinal entre as seguintes posições:

- a) $x = 0$ e $x = 12$ m;
b) $x = 12$ m e $x = 16$ m;
c) $x = 0$ e $x = 16$ m.

Resolução:



Inicialmente vamos interpretar o sinal do valor algébrico da força \vec{F} :

- $F > 0$ significa que a força \vec{F} tem o mesmo sentido do eixo x .
- $F < 0$ significa que a força \vec{F} tem o sentido oposto ao do eixo x .

a) O trabalho entre as posições $x = 0$ e $x = 12$ m é numericamente igual à área sombreada do triângulo em amarelo. Ele será positivo, pois \vec{F} favorece o deslocamento do móvel. O corpo está ganhando energia cinética.

$$\mathcal{W} \stackrel{N}{=} \text{área do triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\mathcal{W} \stackrel{N}{=} \frac{12 \cdot 20}{2} \Rightarrow \mathcal{W} = +120 \text{ J}$$

b) O trabalho entre as posições $x = 12$ m e $x = 16$ m é numericamente igual à área do retângulo sombreada em azul. Ele será nega-

tivo, pois o sentido da força \vec{F} é oposto ao deslocamento inicial e, portanto, o móvel está perdendo energia cinética.

$$\mathcal{W} \stackrel{N}{=} \text{área do retângulo} = b \cdot h$$

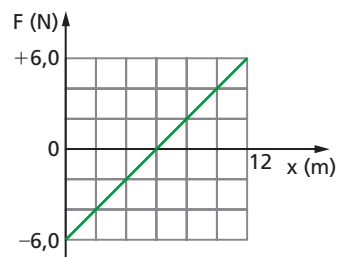
$$\mathcal{W} \stackrel{N}{=} (16 - 12) \cdot (-18) \Rightarrow \mathcal{W} = -72 \text{ J}$$

c) Entre as posições $x = 0$ e $x = 16$ m o trabalho total da força resultante é dado pela soma algébrica dos dois trabalhos:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = (+120 \text{ J}) + (-72 \text{ J}) \Rightarrow \mathcal{W}_{\text{res}} = +48 \text{ J}$$

26. Sobre uma partícula, em movimento retilíneo sobre o eixo x , atua uma força \vec{F} na direção de seu deslocamento.

No entanto, a sua intensidade é variável e o gráfico nos mostra o seu valor algébrico em função da posição ocupada sobre o eixo x .

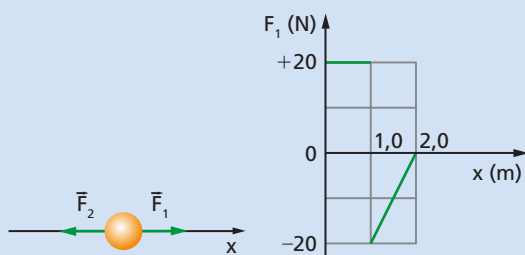


Determine o trabalho resultante entre as posições:

- $x = 0$ e $x = 6,0$ m;
- $x = 2,0$ m e $x = 8,0$ m;
- $x = 0$ e $x = 12$ m.

Exercícios de Reforço

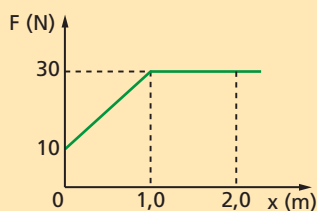
27. As forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 de direções coincidentes com o eixo x são as únicas responsáveis pelo movimento da partícula. Durante o movimento, a força \vec{F}_2 manteve-se sempre no mesmo sentido e com módulo $F_2 = 5,0$ N; no entanto, a força \vec{F}_1 manteve apenas direção constante e o seu valor algébrico é variável de acordo com a posição ocupada pela partícula, como nos mostra o gráfico. Os valores positivos significam que o sentido é igual ao do eixo x e os negativos significam sentido oposto ao do eixo x .



Considerando o deslocamento entre as posições $x = 0$ e $x = 2,0$ m, determine o trabalho realizado:

- pela força \vec{F}_1 ;
- pela força \vec{F}_2 ;
- pela força resultante de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

28. Um bloco de massa $m = 10$ kg é arrastado ao longo de uma canaleta perfeitamente lisa, sob a ação de uma força resultante \vec{F} , cuja direção e sentido não se alteram, porém sua intensidade varia com a posição do bloco, como nos mostra o gráfico (força \times posição) abaixo.

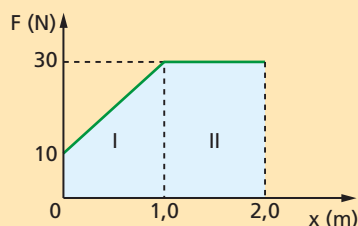


Para o deslocamento entre $x = 0$ e $x = 2,0$ m, calcule:

- o trabalho da força \vec{F} ;
- a intensidade média dessa força.

Resolução:

- Como o módulo da força é variável, o trabalho é calculado pela área sob o gráfico, entre as abscissas $x = 0$ e $x = 2,0$ m, sombreada na figura.



$$A_I = \frac{(b + B) \cdot h}{2} = \frac{(10 + 30) \cdot 1,0}{2} = 20$$

$$\mathcal{W}_I \stackrel{N}{=} \text{área } (A_I) = 20 \text{ J}$$

$$A_{II} = b \cdot h = 1,0 \cdot 30 = 30$$

$$\mathcal{W}_{II} \stackrel{N}{=} \text{área } (A_{II}) = 30 \text{ J}$$

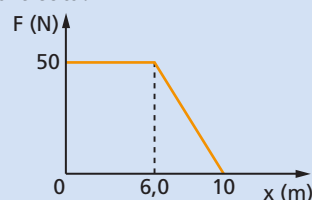
$$\mathcal{W}_F = \mathcal{W}_I + \mathcal{W}_{II} = 20 \text{ J} + 30 \text{ J} \Rightarrow \mathcal{W}_F = 50 \text{ J}$$

- Entende-se força média (\vec{F}_m) como sendo uma força de intensidade constante que, no deslocamento entre $x = 0$ e $x = 2,0$ m, realiza o mesmo trabalho que a força \vec{F} .

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{W}_F &= 50 \text{ J} \\ \mathcal{W}_{F_m} &= F_m \cdot (\Delta x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_m \cdot \Delta x &= 50 \\ F_m \cdot 2,0 &= 50 \end{aligned}$$

$$F_m = 25 \text{ N}$$

29. Uma partícula de massa 3,0 kg desloca-se sobre um eixo x sob a ação exclusiva de uma força \vec{F} de intensidade variável com a posição, porém de direção e sentido constantes. O gráfico a seguir nos dá o valor de seu módulo em função da posição da partícula.



Determine, para o deslocamento entre $x = 0$ e $x = 10$ m:

- o trabalho da força \vec{F} ;
- a intensidade da força média.

6. Teorema da energia cinética

Quando uma partícula se desloca sob a ação de uma força resultante \vec{F}_{res} , esta realiza um trabalho sobre a partícula e sua energia cinética poderá ser aumentada ou diminuída ou até mesmo ficar constante, dependendo do valor numérico desse trabalho.

- $\mathcal{W}_{\text{res}} > 0 \Rightarrow$ aumento da energia cinética da partícula.
- $\mathcal{W}_{\text{res}} < 0 \Rightarrow$ diminuição da energia cinética da partícula.
- $\mathcal{W}_{\text{res}} = 0 \Rightarrow$ mantém a energia cinética da partícula constante.

Isso nos sugere que há uma relação entre a variação da energia cinética e o trabalho da força resultante.

Vamos determinar essa relação para um caso particular: o de uma partícula que se movimenta no eixo x sob a ação de uma força resultante \vec{F}_{res} , constante, atuando na direção do eixo (fig. 23).

Como a força resultante é constante, a aceleração também é constante e podemos usar as equações do movimento uniformemente variado.

Considerando que a partícula tenha passado pela posição x_1 com velocidade escalar v_1 e pela posição x_2 com velocidade escalar v_2 , podemos aplicar a equação de Torricelli entre as duas posições:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a \cdot (x_2 - x_1)$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a \cdot d \Rightarrow 2a \cdot d = v_2^2 - v_1^2$$

$$a \cdot d = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

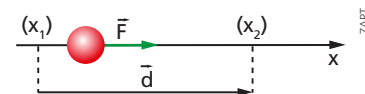


Figura 23.

Multiplicando-se todos os termos pela massa m , obtemos a equação ①:

$$m \cdot a \cdot d = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} \quad \text{①}$$

O trabalho da força resultante \vec{F}_{res} entre as duas posições é:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = F_{\text{res}} \cdot d$$

Sendo $F_{\text{res}} = m \cdot a$, temos:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = m \cdot a \cdot d \quad \text{②}$$

Substituindo-se ① em ②, vem:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}$$

ou então:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = E_{\text{cin2}} - E_{\text{cin1}}$$

É bastante intuitivo que essa variação de energia cinética da partícula seja igual ao trabalho da força resultante. Está de acordo com o conceito de trabalho.

Essa equação é conhecida como **Teorema da Energia Cinética (TEC)** e se constitui numa poderosíssima ferramenta para resolução de exercícios. Assim se enuncia:

O trabalho da força resultante realizado sobre uma partícula, entre duas posições da trajetória, é igual à variação da energia cinética da partícula nesse trecho.

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = \Delta E_{\text{cin}}$$

OBSERVAÇÕES

1. A validade do TEC se estende para qualquer tipo de movimento da partícula.
2. O teorema não está restrito ao formato da trajetória, basta que a conheçamos.
3. O teorema refere-se ao trabalho da força resultante, que é o equivalente ao somatório dos trabalhos de todas as forças que atuam sobre a partícula no referido trecho em estudo.
4. Mesmo que haja atrito na pista por onde desliza a partícula, o teorema pode ser aplicado; basta incluir o trabalho da força de atrito.

Leitura

Air bags

Quando um carro está em movimento e sofre uma colisão, parando bruscamente, o seu motorista continua com a velocidade anterior do veículo: é o Princípio da Inércia.

Se não houver um *air bag* nem um cinto de segurança eficaz, ele sofrerá um impacto de sérias consequências, devido à força do volante sobre o seu peito (em geral no osso esterno).



Figura a. Automóvel na iminência de colidir com um obstáculo fixo.



Figura b. Air bag inflado com o boneco de teste próximo a ele.



Figura c. O boneco de teste é amortecido pelo air bag.

As almofadas denominadas *air bags* têm a finalidade de amortecer esse choque brusco aumentando o deslocamento dessa força, consequentemente diminuindo a sua intensidade média.

Do ponto de vista dos princípios da Física, vejamos como funciona. Imaginemos um carro a 36 km/h, ou seja, a 10 m/s, que sofra uma colisão contra uma parede de pedras. Ele para imediatamente e o corpo do passageiro é projetado para a frente a 10 m/s. Com ou sem *air bag* ele deve parar, colidindo contra o volante ou contra a almofada do *air bag*.

Em ambos os casos a variação de energia cinética é a mesma:

$$\Delta E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

No nosso exemplo temos $v_0 = 10$ m/s e $v = 0$ (pois o corpo deve parar). Não vamos fazer as contas, é apenas para ilustrar.

$$\Delta E_c = 0 - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = -\frac{m \cdot v_0^2}{2} \quad (1)$$

Usando-se o Teorema da Energia Cinética (TEC):

$$\mathcal{W}_F = \Delta E_c$$

Mas o trabalho da força média é dado por:

$$\mathcal{W}_F = -F_m \cdot \Delta x \dots (2)$$

Podemos igualar (1) e (2) e temos:

$$F_m \cdot \Delta x = \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

$$F_m = \frac{m \cdot v_0^2}{2 \cdot \Delta x}$$

Observemos que a intensidade da força média é inversamente proporcional ao deslocamento Δx de seu ponto de aplicação.

Sem a almofada do *air bag*, o impacto é diretamente contra a direção, e o deslocamento do ponto de aplicação da força é muito pequeno (alguns milímetros). Desse modo, a intensidade da força média é elevadíssima.

Com o *air bag*, o motorista afunda o peito na almofada, aumentando o deslocamento do ponto de aplicação da força, que se desloca cerca de 15 cm pelo menos. Como mostra a nossa equação, isso reduz a intensidade da força média a um centésimo do valor anterior ou até mesmo a um valor ainda menor.

Na prática, o uso obrigatório do cinto de segurança, combinado com o uso do *air bag*, tem salvado a vida das pessoas em cerca de 40% dos acidentes.

Exercícios de Aplicação

30. Um corpo de massa $m = 10$ kg, inicialmente em repouso, é posto em movimento sob ação de uma força resultante \vec{F} e adquire, após certo instante, uma velocidade escalar de 10 m/s. Determine o trabalho realizado pela força \vec{F} nesse intervalo de tempo.

Resolução:

Pelo Teorema da Energia Cinética (TEC), temos:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo $m = 10$ kg, $v_0 = 0$ e $v = 10$ m/s, vem:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = \frac{10 \cdot 10^2}{2} - 0$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = 500 \text{ J}$$

31. Um ponto material, sob a ação de uma força constante \vec{F} de intensidade 10 N, move-se sobre uma reta r . As energias cinéticas do ponto material, em dois pontos A (anterior) e B (posterior) da trajetória, são iguais a 5,0 J e 20 J, respectivamente. Determine a distância entre A e B.

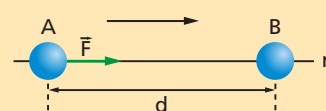
Resolução:

Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = E_{c_B} - E_{c_A}$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = 20 - 5,0$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = 15 \text{ J}$$



Da definição de trabalho, sendo \vec{F} a força resultante, temos:

$$\mathcal{E}_{\text{res}} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

$$15 = 10 \cdot d \cdot \cos \theta$$

Sendo $\cos \theta = 1$, vem:

$$15 = 10 \cdot d$$

$$d = 1,5 \text{ m}$$

32. Qual o trabalho realizado pela força resultante que age sobre um corpo de massa 1,0 kg, cuja velocidade escalar variou de 2,0 m/s para 6,0 m/s?

33. Um bloco, de massa $m = 5,0 \text{ kg}$, sob ação de uma força resultante constante \vec{F} , move-se sobre uma reta conforme a figura. Ao passar pelo ponto A, sua velocidade escalar é de 10 m/s e pelo ponto B, 12 m/s. Sendo de 2,0 m a distância entre A e B, determine a intensidade de \vec{F} .



34. Um bloco está sendo empurrado por uma única força \vec{F} , de direção horizontal, e se desloca sobre uma canaleta sem atrito (fig. a). Essa força, no entanto, tem módulo variável e o gráfico nos dá sua intensidade em função da posição do bloco (fig. b).

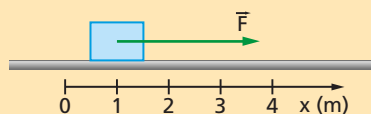


Figura a.

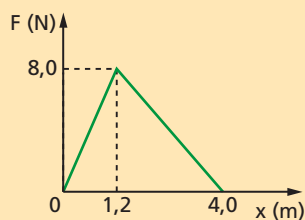


Figura b.

Sabemos que a massa do bloco é 2,0 kg e que ele estava em repouso na posição $x = 0$. Determine:

- o trabalho da força \vec{F} no deslocamento de $x = 0$ até $x = 4,0 \text{ m}$;
- a velocidade escalar do bloco na posição $x = 4,0 \text{ m}$.

Resolução:

- O trabalho da força \vec{F} é dado pela área sob o gráfico:

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{N}}{=} \text{área do triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{N}}{=} \frac{4,0 \cdot 8,0}{2} \Rightarrow \mathcal{E} = 16 \text{ J}$$

- Para se relacionar o trabalho com a velocidade do bloco, usamos o Teorema da Energia Cinética entre as duas posições: $x = 0$ e $x = 4,0 \text{ m}$.

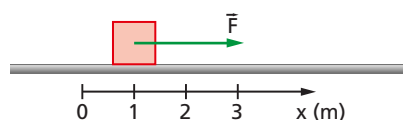
$$\mathcal{E} = E_{\text{cin } f} - E_{\text{cin } 0}$$

$$\mathcal{E} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

$$16 = \frac{2,0 \cdot v^2}{2} - \frac{2,0 \cdot 0^2}{2}$$

$$v^2 = 16 \Rightarrow v = 4,0 \text{ m/s}$$

35. Um bloco de 6,0 kg desliza numa canaleta horizontal sem atrito sob a ação de uma força de direção e sentido constantes, mas de módulo variável, como nos mostra o gráfico. Sabemos que na posição $x = 0$ o bloco estava em repouso e que na posição $x = 3,0 \text{ m}$ sua velocidade escalar é 5,0 m/s. Determine o módulo F_0 da força que atuou no bloco entre as posições 0 e 1,0 m.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Figura a.

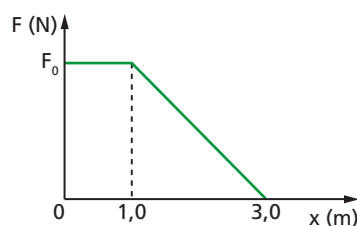
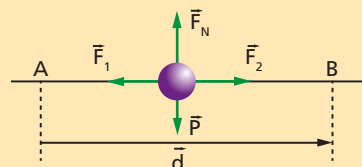


Figura b.

36. Uma partícula desliza em uma canaleta horizontal sob a ação de quatro forças constantes, como mostra a figura. São conhecidos os módulos de $\vec{F}_1 = 5,0 \text{ N}$ e $\vec{F}_2 = 13 \text{ N}$. A massa da partícula é 2,0 kg e a aceleração da gravidade local tem módulo 10 m/s^2 . As forças \vec{P} e \vec{F}_N são, respectivamente, o peso e a normal.



Sendo o deslocamento AB igual a 0,80 m, determine:

- o trabalho da força resultante;
- a velocidade escalar da partícula ao passar pela posição B, sabendo que ela passou por A com velocidade escalar $v_1 = 3,1 \text{ m/s}$.

Resolução:

- a) O trabalho da força resultante é igual ao somatório algébrico dos trabalhos das forças aplicadas sobre a partícula.

$$\mathcal{W}_1 = F_1 \cdot d \cdot \cos 180^\circ$$

$$\mathcal{W}_1 = 5,0 \cdot 0,80 \cdot (-1) \Rightarrow \mathcal{W}_1 = -4,0 \text{ J}$$

$$\mathcal{W}_2 = F_2 \cdot d = 13 \cdot 0,80 \Rightarrow \mathcal{W}_2 = +10,4 \text{ J}$$

$$\mathcal{W}_p = P \cdot d \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow \mathcal{W}_p = 0$$

$$\mathcal{W}_N = F_N \cdot d \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow \mathcal{W}_N = 0$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_p + \mathcal{W}_N$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = (-4,0 \text{ J}) + (+10,4 \text{ J}) + 0 + 0$$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = +6,4 \text{ J}$$

- b) Vamos usar o Teorema da Energia Cinética entre as posições A e B:

$$E_{\text{cinA}} = \frac{m \cdot v_1^2}{2} \Rightarrow E_{\text{cinA}} = \frac{2,0 \cdot (3,1)^2}{2} \cong 9,6 \text{ J}$$

$$E_{\text{cinB}} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} \Rightarrow E_{\text{cinB}} = \frac{2,0 \cdot v_2^2}{2} = 1,0v_2^2$$

Usando o TEC:

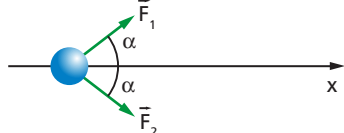
$$\mathcal{W}_{\text{res}} = E_{\text{cinB}} - E_{\text{cinA}}$$

$$+6,4 = 1,0v_2^2 - 9,6$$

$$1,0v_2^2 = 16$$

$$v_2 = \sqrt{16} \Rightarrow v_2 = 4,0 \text{ m/s}$$

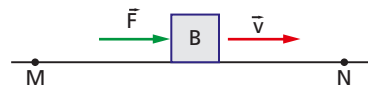
37. Uma partícula, inicialmente em repouso, foi submetida à ação de duas forças de mesmo módulo, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , tendo adquirido um movimento retilíneo uniformemente acelerado ao longo do eixo x. A partícula tem massa $m = 200 \text{ g}$ e as forças têm intensidade de 150 N .



Sabendo-se ainda que $\sin \alpha = 0,6$ e que o deslocamento foi de $0,50 \text{ m}$, determine:

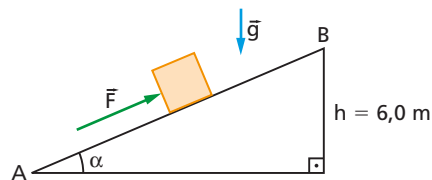
- a) o trabalho de cada uma das forças sobre a partícula;
b) o trabalho da força resultante;
c) a velocidade escalar adquirida.

38. O bloco B, de massa $4,0 \text{ kg}$, desliza sobre um plano horizontal com atrito, sendo empurrado de M para N por uma força \vec{F} constante de módulo $15,2 \text{ N}$ e de direção paralela ao deslocamento. A intensidade da força de atrito é $9,2 \text{ N}$ e o deslocamento de $3,0 \text{ m}$.



Determine:

- a) o trabalho da força resultante sobre o bloco B;
b) a velocidade escalar na posição M, sabendo que ele passa por N com velocidade escalar de $5,0 \text{ m/s}$.
39. Um bloco de tamanho desprezível está sendo empurrado, em movimento retilíneo uniforme, no plano inclinado sem atrito desde A até B. A força \vec{F} que empurra o bloco se mantém constante. São dados: aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a massa do bloco $m = 0,20 \text{ kg}$.



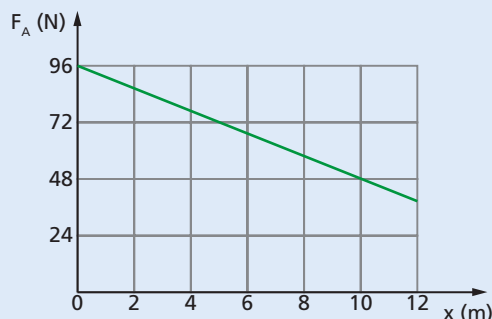
Considerando o deslocamento AB, determine:

- a) o trabalho resultante sobre o bloco;
b) o trabalho da força peso;
c) o trabalho da força \vec{F} .

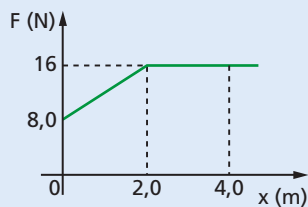
Observação: o ângulo α de inclinação do plano não é conhecido.

Exercícios de Reforço

40. (U. F. Ouro Preto-MG) Um corpo de massa 10 kg está em movimento retilíneo horizontal, sob a ação de uma força de atrito, cujo módulo varia de acordo com o gráfico ao lado, sendo x a abscissa do corpo na trajetória. Calcule a velocidade desse corpo em $x = 10 \text{ m}$, sabendo-se que, em $x = 0$, $v_0 = 20 \text{ m/s}$.



41. É dado o gráfico da intensidade da força resultante \vec{F} , aplicada num corpo, em função da posição x . A massa do corpo é 2,0 kg e a sua velocidade é 5,0 m/s, quando $x = 0$. Considerando a trajetória retilínea, determine:

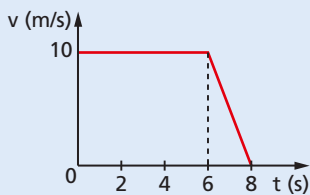


- a) a energia cinética do corpo, quando $x = 2,0$ m;
b) a velocidade escalar do corpo, quando $x = 4,0$ m.

42. (ITA-SP) Uma partícula, sujeita a uma força constante de módulo 2,0 N, move-se sobre uma reta. A variação da energia cinética da partícula, entre dois pontos A e B, é igual a 3,0 J. Calcular a distância entre A e B.

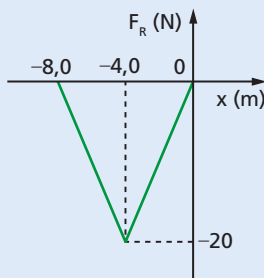
- a) $x = 1,0$ m d) $x = 2,5$ m
b) $x = 1,5$ m e) $x = 3,0$ m
c) $x = 2,0$ m

43. (Fuvest-SP) O gráfico velocidade contra tempo, mostrado abaixo, representa o movimento retilíneo de um carro de massa $m = 600$ kg numa estrada molhada. No instante $t = 6$ s o motorista vê um engarrafamento à sua frente e pisa no freio. O carro então, com as rodas travadas, desliza na pista até parar completamente. Despreze a resistência do ar.



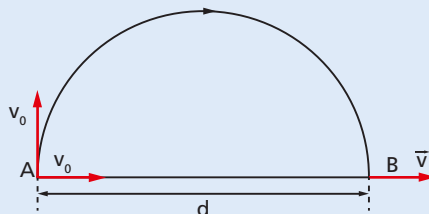
- a) Qual é o coeficiente de atrito entre os pneus do carro e a pista?
b) Qual o trabalho, em módulo, realizado pela força de atrito entre os instantes $t = 6$ s e $t = 8$ s? É dado que $g = 10$ m/s².

44. (UE-PI) No instante $t = 0$, uma partícula de massa 2,0 kg que se move ao longo do eixo x se encontra na origem e tem velocidade escalar $v_0 = -10$ m/s (o sinal negativo denota que o vetor velocidade, nesse instante, aponta no sentido negativo do eixo x). O gráfico ao lado ilustra a força resultante na direção x atuando sobre essa partícula em função da sua posição. Quando a partícula atingir a posição $x = -8,0$ m, a sua energia cinética, em joules, será:



- a) 20 b) 80 c) 100 d) 180 e) 200

45. (UF-CE) Um corpo de massa m desloca-se da posição A para a posição B, seguindo a trajetória semicircular mostrada na figura a seguir. Em outro instante, o mesmo corpo desloca-se da posição A para a posição B, seguindo a trajetória retilínea, de comprimento d , indicada na figura. Essas trajetórias localizam-se sobre uma mesa (considere a mesa plana e horizontal). O módulo da velocidade inicial, em ambos os casos, é v_0 e a velocidade final no trajeto semicircular é zero. O coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a mesa, em ambos os casos, é μ . Determine o módulo da velocidade final, v , em função de v_0 , quando a partícula segue a trajetória retilínea.



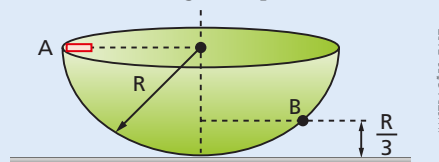
46. (Unifor-CE) A pista AB, contida num plano vertical, é a quarta parte de uma circunferência de raio 1,8 m e não oferece atrito para um corpo que por ela escorrega, desde o repouso no ponto A. O trecho plano BC apresenta coeficiente de atrito 0,25 com o corpo. Adote $g = 10$ m/s².



A distância máxima BC percorrida pelo corpo a partir do ponto B é, em metros:

- a) 1,8 b) 2,4 c) 3,6 d) 5,4 e) 7,2

47. (UF-BA) Um pequeno bloco de massa m é largado, a partir do repouso, do ponto A, como mostrado na figura. O bloco desliza, com atrito, dentro de uma semicalota esférica de raio R até o ponto B, onde atinge o repouso.

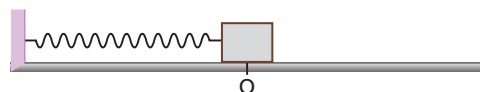


Considerando g a aceleração da gravidade, calcule o trabalho realizado pela força peso do bloco, ao longo do percurso AB.

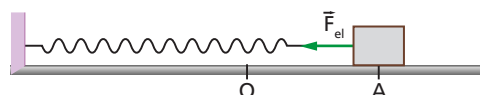
- a) $-\frac{mgR}{3}$ c) $\frac{mgR}{3}$ e) mgR
b) 0 d) $\frac{2mgR}{3}$

7. Trabalho da força elástica

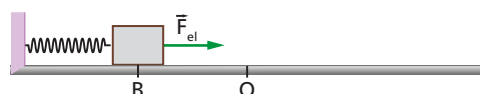
Considere o sistema elástico constituído de uma mola e um bloco, na posição de equilíbrio (fig. 24a). Ao ser distendida (fig. 24b) ou comprimida (fig. 24c), a mola exerce no bloco a força elástica \vec{F}_{el} , que tende a trazer o bloco para a posição de equilíbrio.



(a) Forma inicial (mola não deformada): posição de equilíbrio (O).



(b) Mola distendida.



(c) Mola comprimida.

Figura 24.

Sabemos, ainda, que a intensidade da força elástica é diretamente proporcional à deformação x :

$$F_{el} = k \cdot x$$

em que k é a constante elástica da mola. Desse modo, como a força elástica é variável, para o cálculo de seu trabalho devemos utilizar o gráfico de \vec{F}_{el} em função de x (fig. 25).

A área A do triângulo indicado em amarelo na figura 25 fornece numericamente o valor absoluto do trabalho de força elástica na deformação x :

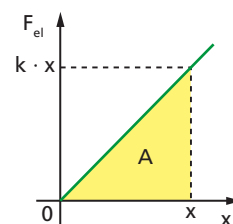


Figura 25.

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \stackrel{N}{=} \frac{x \cdot k \cdot x}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

Portanto:

$$|\mathcal{W}| = \frac{kx^2}{2} \text{ ou } \mathcal{W} = \pm \frac{kx^2}{2}$$

Quando o bloco estiver se deslocando para a posição de equilíbrio, **o trabalho da força elástica é positivo**: deslocamento de A para O, na figura 24b, e de B para O, na figura 24c. Quando o bloco estiver se afastando na posição de equilíbrio, **o trabalho da força elástica é negativo**: deslocamento de O para A, na figura 24b, e de O para B, na figura 24c.

A força elástica, a exemplo do peso, é uma força conservativa. Seu trabalho não depende da trajetória. Assim, por exemplo, considere um anel ligado a uma mola e que desliza ao longo de uma guia circular (fig. 26). O trabalho da força elástica, ao longo da trajetória ACB, é igual ao trabalho ao longo de ADB.

$$\mathcal{W}_{ACB} = \mathcal{W}_{AC} + \mathcal{W}_{CB} = \left(\frac{kx_C^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2} \right) + \left(\frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_C^2}{2} \right) = \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2} \quad (1)$$

$$\mathcal{W}_{ADB} = \mathcal{W}_{AD} + \mathcal{W}_{DB} = \left(\frac{kx_D^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2} \right) + \left(\frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_D^2}{2} \right) = \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2} \quad (2)$$

Comparando-se (1) e (2), concluímos que:

$$\mathcal{W}_{ACB} = \mathcal{W}_{ADB}$$

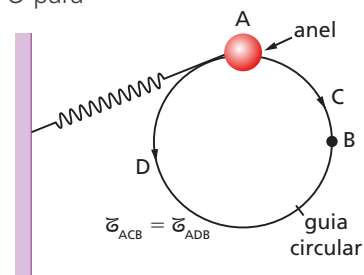
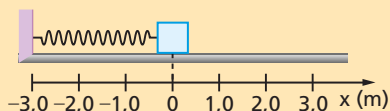


Figura 26.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Exercícios de Aplicação

48. A mola da figura, de constante elástica $k = 100 \text{ N/m}$, encontra-se não deformada.



Calcule o trabalho da força elástica nos deslocamentos de:

- a) 0 a 2,0 m c) 0 a -3,0 m
b) 2,0 m a 0 d) 1,0 m a 3,0 m

Resolução:

- a) De 0 a 2,0 m, o bloco se afasta da posição de equilíbrio e, portanto, a força elástica realiza trabalho negativo:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= -\frac{kx^2}{2} \\ \mathcal{W} &= -\frac{100 \cdot (2,0)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{W} = -200 \text{ J}$$

- b) De 2,0 m a 0, o bloco se desloca para a posição de equilíbrio e, portanto, o trabalho da força elástica é positivo:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= +\frac{kx^2}{2} \\ \mathcal{W} &= +\frac{100 \cdot (2,0)^2}{2} \end{aligned}$$

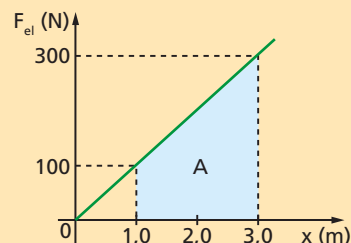
$$\mathcal{W} = +200 \text{ J}$$

- c) De 0 a -3,0 m, o bloco se afasta da posição de equilíbrio e a força elástica realiza trabalho negativo:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= -\frac{kx^2}{2} \\ \mathcal{W} &= -\frac{100 \cdot (3,0)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{W} = -450 \text{ J}$$

- d) De 1,0 m a 3,0 m, o bloco se afasta da posição de equilíbrio e o trabalho da força elástica é negativo. Observe agora que não podemos usar, diretamente, a expressão do trabalho dos itens anteriores, pois ela vale somente nas deformações de zero a x e de x a zero (no gráfico F_{el} em função de x o trabalho corresponde à área do triângulo). Neste caso (de 1,0 m a 3,0 m), o trabalho será calculado pela área do trapézio indicado na figura:



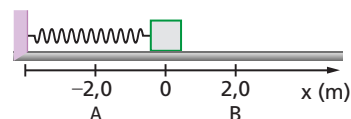
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(300 + 100)}{2} \cdot (3,0 - 1,0) = 400$$

Portanto:

$$|\mathcal{W}| = 400 \text{ J} \Rightarrow \mathcal{W} = -400 \text{ J}$$

49. Um bloco, preso a uma mola de constante elástica 20 N/m , oscila entre as posições A (-2,0 m) e B (+2,0 m).



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

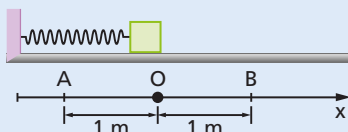
Calcule o trabalho realizado pela força elástica nos deslocamentos de:

- a) -2,0 m a zero c) -2,0 m a +2,0 m
b) zero a +2,0 m

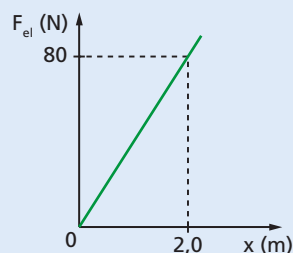
Exercícios de Reforço

50. Um bloco, preso a uma mola de constante elástica $k = 10 \text{ N/m}$, oscila entre as posições A e B. Calcule o trabalho realizado pela força elástica nos deslocamentos:

- a) de B para O;
b) de O para A;
c) de A para B.



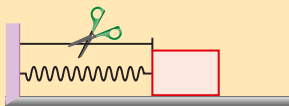
51. O gráfico fornece a intensidade da força elástica que uma mola exerce num bloco.



Determine:

- a constante elástica da mola;
- o trabalho da força elástica quando o bloco se desloca de $x = 0$ a $x = 1,0$ m;
- o trabalho da força elástica quando o bloco se desloca de $x = 1,0$ m a $x = 2,0$ m.

- 52.** Na figura a mola está comprimida e segura por um fio. Ao se cortar esse fio a mola vai impulsionar o bloco, o qual ganhará energia cinética. São dados: massa do bloco: $m = 2,0$ kg; constante elástica da mola: $k = 800$ N/m; comprimento natural da mola: $L_0 = 30$ cm; comprimento do fio que segura a mola: $L = 20$ cm. Não há atrito no plano horizontal em que se realiza o experimento. Cortando-se o fio, determine a velocidade escalar do bloco após ser totalmente impulsionado pela mola.



Resolução:

Cortando-se o fio, a mola vai distender-se e realizar trabalho sobre o bloco. Temos:

$$\mathcal{G}_{\text{mola}} = \Delta E_{\text{cin}} \text{ (do bloco)}$$

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$kx^2 = mv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{kx^2}{m} \quad (1)$$

Temos também:

$$x = L_0 - L$$

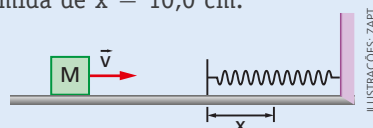
$$x = 30 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m}$$

Voltando-se a (1):

$$v^2 = \frac{800 \cdot (10^{-1})^2}{2,0} = 400 \cdot 10^{-2} = 4,0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{4,0} \text{ m/s} \Rightarrow v = 2,0 \text{ m/s}$$

- 53.** (UF-TO) Suponha que o corpo de massa $M = 5,0$ kg da figura se desloca sobre uma superfície horizontal sem atrito, com velocidade inicial horizontal de $2,0$ m/s. Este corpo colide e comprime uma mola de constante K . No instante em que a velocidade do corpo se anula, observa-se que a mola foi comprimida de $x = 10,0$ cm.



Marque a opção que melhor se aproxima do valor de K .

- 1,3 kN/m
- 7,2 kN/m
- 3,8 kN/m
- 5,0 kN/m
- 2,0 kN/m

- 54.** (Unesp-SP) A tabela relaciona as massas que foram dependuradas na extremidade de uma mola e os diferentes comprimentos que ela passou a ter, devido à deformação que sofreu.

Massas (g)	Comprimento da mola (cm)
0	12
100	17
200	22
300	27

Determine o trabalho, em joules, realizado pela força elástica da mola quando deformada de 20 cm. Considere a mola ideal e admita a aceleração da gravidade igual a 10 m/s².

8. Trabalho de uma força variável em trajetória curva

Consideremos uma partícula que se movimenta numa trajetória curva, sob a ação de uma força \vec{F} variável, a qual não precisa ser a força resultante (fig. 27).

A força \vec{F} é dita variável desde que se altere, durante o deslocamento da partícula, pelo menos uma de suas três características: o módulo ou a direção ou o sentido.

A partícula está sendo deslocada de uma posição A , de abscissa x_A , até uma posição B , de abscissa x_B .

A definição de trabalho da força \vec{F} vista anteriormente não pode ser aplicada neste caso, pois teremos o módulo variando e também o ângulo de \vec{F} com o deslocamento. Para o cálculo do trabalho devemos dividir a trajetória em pequenos trechos de modo que possamos considerá-los retilíneos de tal forma que a força \vec{F} permaneça constante em cada um deles (fig. 28). Vamos nomeá-los e calcular o trabalho trecho a trecho.

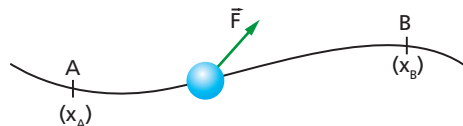


Figura 27.

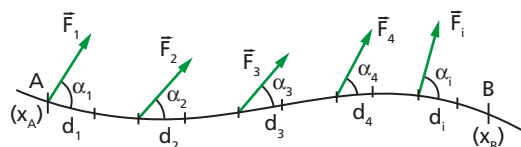


Figura 28.

Sendo d_i o deslocamento e F_i a força no trecho de ordem i , o trabalho neste trecho é:

$$\mathcal{W}_i = F_i \cdot d_i \cdot \cos \alpha_i$$

Então o trabalho de A até B será o somatório de todos os trabalhos parciais \mathcal{W}_i .

No entanto, o produto $(F_i \cdot \cos \alpha_i)$ é igual à componente tangencial da força \vec{F} em cada trecho:

$$F_{ti} = F_i \cdot \cos \alpha_i \Rightarrow \mathcal{W}_i = F_{ti} \cdot d_i$$

Logo:

$$\mathcal{W}_1 = F_{t1} \cdot d_1$$

$$\mathcal{W}_2 = F_{t2} \cdot d_2$$

$$\mathcal{W}_3 = F_{t3} \cdot d_3$$

$$\mathcal{W}_4 = F_{t4} \cdot d_4$$

⋮

⋮

$$\mathcal{W}_n = F_{tn} \cdot d_n$$

O somatório de todas as parcelas nos dá o trabalho de \vec{F} , desde A até B.

Esse difícil processo nos leva ao mesmo caso visto para o movimento retilíneo, com força variável, apenas modificando o gráfico para força tangencial.

Em resumo: para calcular o trabalho da força variável \vec{F} , basta usar o gráfico da componente tangencial de \vec{F} em função da posição e calcular a área, desde a posição A até B (fig. 29).

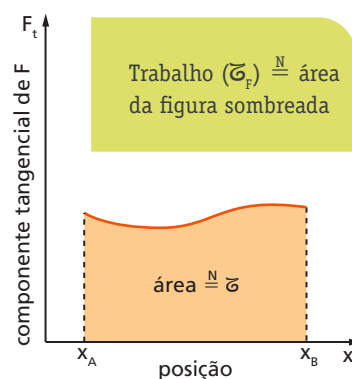


Figura 29.

Trabalho de uma força centrípeta

Consideremos uma partícula que percorre uma trajetória circular. Num dado instante t_1 a sua velocidade é v_1 e a força centrípeta que nela atua é \vec{F}_{c1} ; num outro instante t_2 a velocidade é v_2 e a força centrípeta é \vec{F}_{c2} (fig. 30).

A força centrípeta é uma força variável, pelo menos em direção, como se observa entre as duas posições citadas. Assim, para calcularmos o seu trabalho devemos dividir a circunferência em pequenos trechos e admitir que os pequenos arcos sejam praticamente retilíneos e ainda admitir que o módulo, a direção e o sentido da força centrípeta permaneçam constantes. Assim, podemos calcular o trabalho em cada um deles. Ocorre que a força centrípeta é perpendicular ao vetor velocidade e, portanto, em cada pequeno trecho ela é perpendicular ao deslocamento. Logo, concluímos que o trabalho da força centrípeta é sempre nulo.

Escrevemos então:

$$\mathcal{W}_{fc} = 0$$

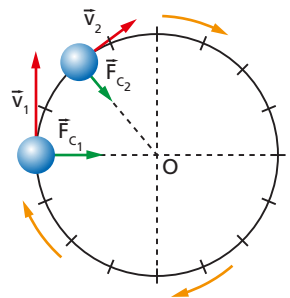


Figura 30.

Trabalho da força normal sobre um corpo que se desloca em superfície curva

Consideremos um corpo que desliza sobre a superfície de uma plataforma fixa (fig. 31). Nos trechos planos, em que o movimento é retilíneo, o trabalho da força normal é nulo, como já vimos anteriormente.

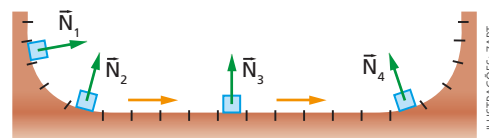


Figura 31. Bloco deslizando em plataforma fixa.

ILUSTRAÇÕES: ZAPET

Nos trechos curvos, para calcular o trabalho da força normal devemos dividir a trajetória em pequenos trechos e calcular o trabalho em cada um deles. No entanto, a força normal é perpendicular ao vetor deslocamento em cada um desses trechos e, portanto, o seu trabalho também é nulo: $\mathcal{W}_N = 0$.

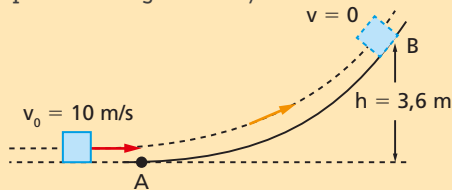
Caso a plataforma não estivesse fixa, ela poderia escorregar em sentido contrário ao do movimento inicial do bloco, e o trabalho da força normal, nos trechos curvos, deixaria de ser nulo.

Quando um carrinho desliza pelos trilhos de uma montanha russa, o trabalho da força normal é sempre nulo, pois os trilhos são fixos no solo.

Quando um elevador está subindo, ou descendo, com carga no seu piso, a força normal realiza trabalho, pois há um deslocamento de seu ponto de aplicação.

Exercícios de Aplicação

- 55.** Um corpo de 0,50 kg se move horizontalmente com velocidade escalar constante de 10 m/s, num plano sem atrito. Encontra uma rampa e sobe até uma altura máxima de 3,6 m, onde para, para retornar. Só houve atrito a partir do ponto A, no início da subida da rampa. Qual foi o trabalho realizado pela força de atrito na subida da rampa? É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Resolução:

Sobre o corpo estão atuando: o peso \vec{P} , a força normal \vec{F}_N e a força de atrito \vec{F}_{at} .

$$\mathcal{W}_{res} = \Delta E_{cin}$$

$$\mathcal{W}_P + \mathcal{W}_{at} + \mathcal{W}_N = E_{cin_f} - E_{cin_i} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Temos:

$$\mathcal{W}_N = 0$$

$$v = 0$$

$$-m \cdot g \cdot h + \mathcal{W}_{at} + 0 = 0 - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

$$\mathcal{W}_{at} = -\frac{m \cdot v_0^2}{2} + m \cdot g \cdot h$$

Substituindo-se os valores dados, temos:

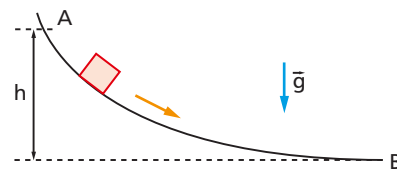
$$\mathcal{W}_{at} = -\frac{0,50 \cdot 10^2}{2} + 0,50 \cdot 10 \cdot 3,6$$

$$\mathcal{W}_{at} = -25 \text{ J} + 18 \text{ J}$$

$$\mathcal{W}_{at} = -7,0 \text{ J}$$

- 56.** Um bloquinho de massa 2,0 kg foi abandonado em repouso na posição A e deslizou até B, onde chegou com velocidade escalar de 8,0 m/s. A rampa não é perfeitamente lisa, havendo atrito, dissipando parte da energia do bloco.

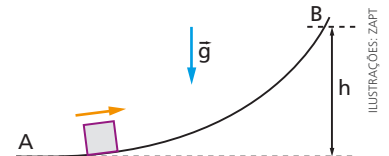
No local em que se realizou o experimento a aceleração da gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Sendo a altura da posição A dada por $h = 12 \text{ m}$, determine o trabalho sobre o corpo realizado:

- a) pelo peso; c) pela força de atrito.
b) pela força normal;

- 57.** Lançamos um bloquinho de massa 500 g numa rampa de skate e este atinge a posição B, de altura $h = 4,0 \text{ m}$, com velocidade escalar $v = 4,0 \text{ m/s}$. No local a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo-se que o bloquinho foi lançado com velocidade escalar $v_0 = 8,0 \text{ m/s}$, determine o trabalho da força de atrito sobre o bloco.



- 58.** A respeito do trabalho realizado por algumas forças, foram feitas algumas afirmativas:
- O trabalho da força centrípeta é sempre nulo.
 - Quando um corpo desliza numa rampa sem atrito a força aplicada pela rampa sobre o corpo não realiza trabalho.
 - Quando um corpo desliza numa rampa com atrito, o trabalho da força de atrito não é nulo.
 - Não é nulo o trabalho da força de uma superfície horizontal sobre um corpo que nela desliza, se houver atrito.

É correto apenas o que se afirma em:

- a) I e II c) II, III e IV e) I, II, III e IV
b) I, III e IV d) I, II e III

Exercícios de Aprofundamento

59. Um bloco de massa 2,0 kg é deslocado sobre um plano inclinado sem atrito. Ele está sendo empurrado para cima por uma força \vec{F} de módulo variável com a posição do bloco, como nos mostra o seu gráfico. O bloco partiu do repouso em A e a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. Ele foi deslocado desde A até B, percorrendo 10 m.

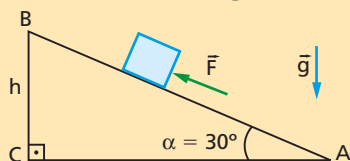


Figura a.



Figura b.

Determine:

- o trabalho realizado pela força \vec{F} sobre o bloco;
- o trabalho do peso e da força normal;
- o trabalho líquido resultante sobre o bloco;
- a velocidade escalar com que o bloco atinge o ponto B.

Resolução:

Antes de resolvermos o que se pede, vamos desenhar as outras duas forças atuantes sobre o bloco: o peso e a força normal (fig. c).

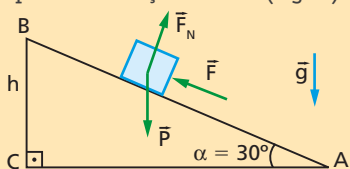


Figura c.

Desse modo, verificamos que são três as forças que realizam trabalho sobre o bloco: \vec{F} , \vec{P} e \vec{F}_N .

- O trabalho da força \vec{F} se calcula pela área sombreada em amarelo do gráfico da figura d.

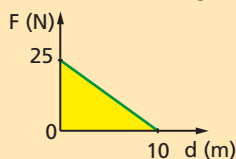


Figura d.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_F &\stackrel{N}{=} \text{área} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \mathcal{W}_F = \frac{10 \cdot 25}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{W}_F &= 125 \text{ J} \end{aligned}$$

- No triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{BC}{AB} \\ \sin 30^\circ &= \frac{h}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 5,0 \text{ m} \\ \mathcal{W}_P &= -mgh \\ \mathcal{W}_P &= -2,0 \cdot 10 \cdot 5,0 \Rightarrow \mathcal{W}_P = -100 \text{ J} \end{aligned}$$

$\mathcal{W}_N = 0$, pois a força normal se mantém perpendicular ao deslocamento AB.

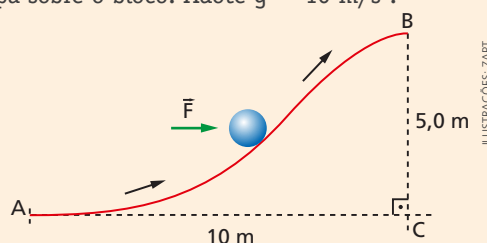
- $\mathcal{W}_{\text{res}} = \mathcal{W}_F + \mathcal{W}_P + \mathcal{W}_N$

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = +125 - 100 \text{ J} - 0 \Rightarrow \mathcal{W}_{\text{res}} = +25 \text{ J}$$

- Aplicando o TEC:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{res}} &= E_{\text{cinB}} - E_{\text{cinA}} \Rightarrow \mathcal{W}_{\text{res}} = \frac{m \cdot v^2}{2} - 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 25 &= \frac{2,0 \cdot v^2}{2} \Rightarrow v^2 = 25 \Rightarrow v = 5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

60. Uma esfera de massa 20 kg partindo do repouso em A é deslocada ao longo de uma rampa curva até B, como mostra a figura. A rampa é perfeitamente lisa e, portanto, não há atrito. Sob o corpo estão atuando uma força \vec{F} constante, de intensidade 500 N, o seu peso e a força normal de apoio exercida pela rampa sobre o bloco. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

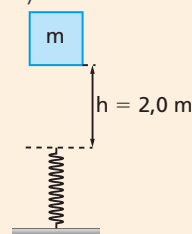


- Determine o trabalho exercido sobre o bloco:

- pelo peso \vec{P} ;
- pela força constante \vec{F} ;
- pela força normal \vec{F}_N ;
- pela força resultante.

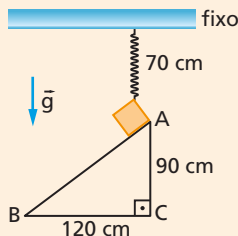
- Determine a velocidade escalar ao atingir B.

61. Um corpo de massa $m = 500$ gramas é abandonado, a partir do repouso, de uma altura de 2,0 m diretamente acima de uma mola não deformada, cuja constante elástica vale 100 N/m. O efeito do ar é desprezível e não há perda de energia mecânica na colisão entre o bloco e a mola elástica. A massa da mola é desprezível. Considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, a máxima deformação que o corpo provocará na mola após atingi-la, em centímetros, vale:



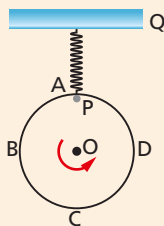
- a) 60 b) 55 c) 50 d) 45 e) 40

62. Um bloco de massa $m = 30 \text{ kg}$ está preso a uma mola ideal como indica a figura, podendo deslizar no plano inclinado fixo e sem atrito. Inicialmente, estando a mola não distendida, abandona-se o bloco a partir do repouso na posição A e ele começa a deslizar até B, distendendo a mola. Admita que esta não perca suas características elásticas e continue a obedecer à Lei de Hooke. São conhecidos da mola: o comprimento natural, 70 cm, e a sua constante elástica, $K = 50 \text{ N/m}$, e ainda o módulo da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$. Admita também que o plano não se mova durante o deslocamento do bloco.



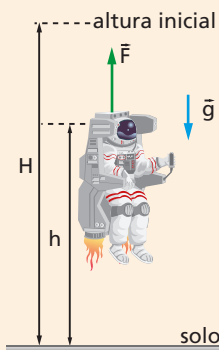
- Durante o movimento de A até B, a força normal atuante sobre o bloco permaneceu constante? Analise: módulo, direção e sentido.
- Determine o trabalho da força elástica.
- Determine a velocidade escalar do bloco em B.

63. Uma mola ideal tem uma extremidade fixa no ponto Q e a outra extremidade está articulada a um pino P de um disco horizontal. O disco é colocado em rotação, em movimento uniforme em torno de seu centro O, em baixa frequência. São conhecidos: o raio do disco R e a constante elástica da mola K. Determine o trabalho da força elástica sobre o pino P quando o disco:



- realiza meia-volta, com o pino P saindo de A e ocupando a posição final C;
- realiza uma volta completa, com o pino saindo de A e voltando a A;
- realiza meia-volta, com o pino saindo de B e chegando a D.

64. (ITA-SP) Equipado com um dispositivo a jato, o homem-foguete da figura cai livremente do alto de um edifício até uma altura h , onde o dispositivo a jato é acionado. Considere que o dispositivo forneça uma força vertical para cima de intensidade constante \vec{F} . Determine a altura h para que o homem pouse no solo com velocidade nula. Expresse sua resposta como função da altura h , da força \vec{F} , da

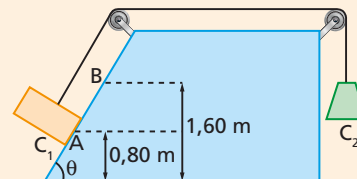


LUIS AUGUSTO RIBEIRO

massa m do sistema homem-foguete e da aceleração da gravidade g , desprezando a resistência do ar e a alteração da massa m no acionamento do dispositivo.

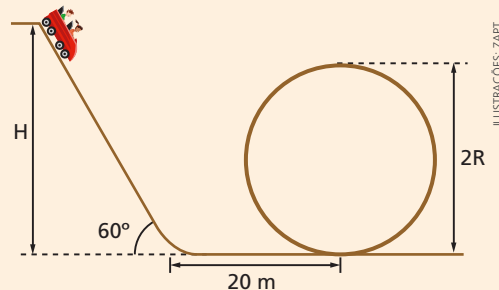
65. (Mackenzie-SP) Com relação à rampa de apoio, os corpos C_1 e C_2 estão em repouso e na iminência de movimento. Ao abandonar-se o conjunto, o corpo C_1 sobe a rampa, com a qual existe atrito cinético de coeficiente $\mu = 0,2$. Considerando-se os dados da tabela abaixo e fios e polias ideais, o ganho de energia cinética do corpo C_2 , durante o deslocamento do corpo C_1 , do ponto A ao ponto B, é de:

- 20 J
- 2,0 J
- 1,6 J
- 0,80 J
- 0,60 J



Massa do corpo $C_1 = 2,0 \text{ kg}$
 Massa do corpo $C_2 = 2,0 \text{ kg}$
 $\sin \theta = 0,80$
 $\cos \theta = 0,60$
 $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$

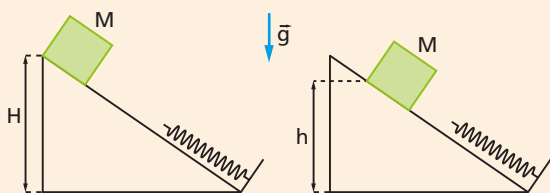
66. (ITA-SP) A partir do repouso, um carrinho de montanha-russa desliza de uma altura $H = 20\sqrt{3} \text{ m}$ sobre uma rampa de 60° de inclinação e corre 20 m num trecho horizontal antes de chegar a um loop circular, de pista sem atrito. Sabendo que o coeficiente de atrito da rampa e do plano horizontal é $\frac{1}{2}$, assinale o valor do raio máximo que pode ter esse loop para que o carrinho faça todo o percurso sem perder o contato com a sua pista.



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

- $R = 8\sqrt{3} \text{ m}$
- $R = 4(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$
- $R = 8(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$
- $R = 4(2\sqrt{3} - 1) \text{ m}$
- $R = \frac{40(\sqrt{3} - 1)}{3} \text{ m}$

67. (F. M. Jundiaí-SP) Um bloco de massa M é abandonado do alto de um plano inclinado de altura H e, após chocar-se com uma mola ideal na parte mais baixa da rampa, volta a subir atingindo uma altura h , onde para instantaneamente.



Sabendo que nesse movimento pode-se considerar desprezível a resistência do ar, indique a alternativa que mostra corretamente o trabalho realizado pela força de atrito desde a partida na altura H até a parada na altura h .

- a) $M \cdot g \cdot (h - H)$ d) $2 \cdot M \cdot g \cdot h$
b) $M \cdot g \cdot (H - h)$ e) $(M + m) \cdot g \cdot (h - H)$
c) $\frac{(M \cdot g \cdot H)}{2}$

68. Retome a questão anterior e determine o trabalho da mola (trabalho da força elástica). Dê a resposta exclusivamente em função de: M , H , h e g . (Sugestão: use o TEC.)

69. Uma corda homogênea de comprimento $L = 2b$ foi colocada em repouso sobre uma mesa horizontal com metade dela pendurada (fig. a) e começou imediatamente a deslizar. Sabe-se que o coeficiente de atrito entre a corda e a mesa é $\mu = 0,5$ e que a aceleração da gravidade local é g . Determine o módulo da velocidade v com que a corda escapa completamente da mesa (fig. b).

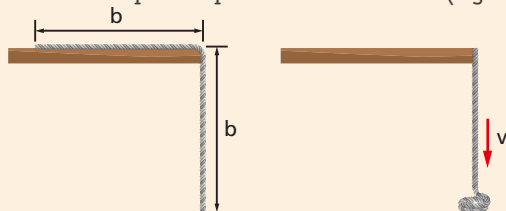
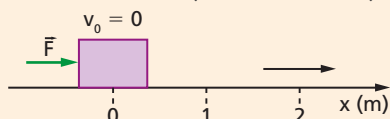


Figura a.

Figura b.

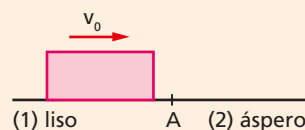
70. Sobre um bloco de massa $2,0 \text{ kg}$, que se encontra inicialmente em repouso na posição $x = 0$, aplica-se uma força \vec{F} cuja direção e sentido permanecem constantes, mas sua intensidade é variável com a posição x do bloco segundo a equação: $F = 48 - 5x$ (em unidades SI).



Sendo $\mu_d = 0,4$ o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o solo e sendo também $g = 10 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade local, determine:

- a) a posição do bloco quando a sua velocidade for máxima;
b) o trabalho líquido (resultante) sobre o bloco, desde a posição inicial até a posição anterior;
c) o módulo da velocidade máxima atingida pelo bloco.

71. Na figura temos um bloco alongado de massa M e comprimento $L = 40 \text{ cm}$, percorrendo o trecho 1 de sua trajetória, o qual é totalmente liso. Nesse trecho sua velocidade escalar é v . No ponto A indicado na figura, inicia-se o trecho 2, áspero, em que o coeficiente de atrito entre o bloco e o chão é $\mu = 0,1$. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Determine:

- a) a intensidade da máxima força de atrito que atua no bloco;
b) a mínima velocidade escalar para que o bloco penetre totalmente na superfície áspera.

Sugestão: esboce um gráfico da F_{at} em função da posição do bloco. Adote um ponto P no bloco como referência.

72. Uma mola de constante elástica $K = 400 \text{ N/m}$ encontra-se na posição vertical, como mostra a figura a. A seguir, coloca-se sobre a sua extremidade superior um bloco de massa $m = 4,0 \text{ kg}$, o que deforma a mola de um comprimento x_0 , como mostra a figura b. Finalmente, uma pessoa aplica no bloco uma força vertical constante de intensidade \vec{F} , deformando lentamente a mola em mais 10 cm , como mostra a figura c. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.

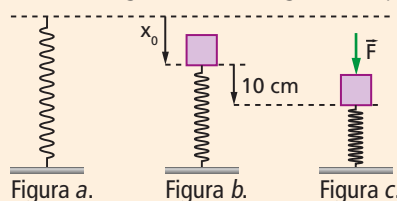


Figura a.

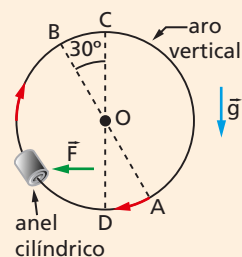
Figura b.

Figura c.

Determine:

- a) a deformação x_0 ; b) o trabalho da força \vec{F} .

73. Na figura vemos um aro vertical, fixo em sua base D , e um pequeno anel cilíndrico que o percorre lentamente sob a ação de uma força horizontal \vec{F} constante (módulo, direção e sentido). O aro tem raio de 50 cm , o anel tem massa $0,50 \text{ kg}$ e a força \vec{F} tem intensidade 15 N . A aceleração da gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$. Considere que a velocidade escalar tenha sido mantida constante e que o anel tenha sido deslocado de A para B .



Determine:

- a) o trabalho da força \vec{F} ;
b) o trabalho do peso;
c) o trabalho da força de atrito.

Energia e potência

No capítulo anterior estudamos a energia cinética, a qual está relacionada com a velocidade do corpo. Neste capítulo vamos apresentar uma outra forma de energia: a energia potencial, a qual está relacionada com a posição do corpo. Essas duas formas de energia, a cinética e a potencial, fazem parte da energia mecânica.

Nos capítulos anteriores tivemos como estratégia de resolução de situações-problema o uso das forças atuantes em cada parte do sistema, bem como a Segunda Lei de Newton. Apresentamos o conceito de trabalho, mas assim mesmo estávamos dependentes da força. Neste capítulo vamos estudar o Princípio da Conservação da Energia Mecânica, o qual se constitui numa das maiores ferramentas da Mecânica.

1. Forças conservativas e não conservativas

Como já definimos no capítulo 17, forças conservativas são aquelas em que o trabalho realizado sobre uma partícula no deslocamento entre dois pontos não depende da trajetória da partícula.

Neste volume, vamos trabalhar somente com duas forças conservativas: a força gravitacional e a força elástica. No volume 3 vamos apresentar a força elétrica, que é também uma força conservativa.

Para uma força conservativa, vale a seguinte propriedade:

O trabalho realizado sobre uma partícula que percorre uma trajetória fechada, voltando ao ponto inicial de partida, vale zero.

Demonstremos, usando a figura 1:

$\mathcal{W}_{A12B} = \mathcal{W}_{A34B}$ (o trabalho de A até B não depende da trajetória)

$$\mathcal{W}_{A12B} - \mathcal{W}_{A34B} = 0 \quad (1)$$

Fazendo o caminho inverso:

$$\mathcal{W}_{B43A} = -\mathcal{W}_{A34B} \quad (2)$$

Substituindo-se (2) na equação (1):

$$\mathcal{W}_{A12B} + \mathcal{W}_{B43A} = 0 \quad (3)$$

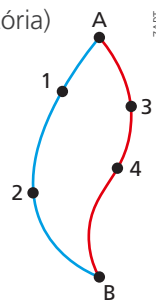


Figura 1.

Interpretando o resultado: a somatória dos trabalhos realizados por uma força conservativa para percorrer a trajetória fechada A12B43A é igual a zero. Isso demonstra a propriedade.

1. Forças conservativas e não conservativas
2. Energia potencial
3. Energia potencial gravitacional
4. Energia potencial elástica
5. Energia mecânica – conservação da energia mecânica
6. Dissipação de energia mecânica
7. Potência
8. A conservação de energia
9. Rendimento de uma máquina

Forças não conservativas

Uma força não conservativa é aquela cujo trabalho realizado ao longo de um caminho fechado (fig. 1) não é zero. Por exemplo, se empurrarmos um móvel de um local para outro e depois retornamos com ele ao mesmo local, o trabalho que realizamos não será zero, mas positivo. A força que aplicamos é não conservativa. A força de atrito realizou um trabalho negativo, dissipando energia mecânica e convertendo-a em térmica.

Algumas forças não conservativas são também chamadas **forças dissipativas**, como, por exemplo, a força de atrito de escorregamento, as forças de resistência do ar nos movimentos, etc., pois dissipam energia mecânica do sistema.

Citemos o caso do atrito cinético de um bloco de ferro deslizando sobre um piso metálico; a força de atrito realiza um trabalho negativo, o qual é convertido em energia térmica, aquecendo o bloco e o piso. Experimentalmente se verifica que esta energia térmica não pode ser mais revertida, isto é, reconvertida em energia mecânica. Daí o uso do adjetivo **dissipativa**.

2. Energia potencial

Se um corpo *A* e um corpo *B* estiverem trocando forças entre si, dizemos que há uma interação entre eles. Em alguns casos essa troca de forças pode resultar em movimento. Por exemplo, se duas pessoas, em repouso, se empurrarem mutuamente num ringue de patinação, essa interação resultará no movimento de ambas. Nesse caso, as pessoas adquirem energia cinética, proveniente de seus esforços físicos.

Vamos nos habituar com esse conceito: a energia cinética é sempre proveniente de outra forma de energia. Ela não pode aparecer do “nada”. Essa é uma exigência do Princípio da Conservação da Energia.

Quando as forças de interação do sistema são conservativas, a energia cinética é decorrente de uma outra forma de energia a qual denominamos **energia potencial**. Citaremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 1

Um caso muito conhecido do nosso cotidiano é o da queda de um objeto. Imaginemos que, por algum motivo, o corpo que estava sobre a mesa (fig. 2) tenha sido derrubado no chão. Entre o corpo e a Terra houve uma interação, através da força gravitacional que os atraiu. Durante a queda o corpo adquiriu energia cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, que foi crescendo à medida que ele se aproximava do chão.

Mas restou uma dúvida: de onde veio essa energia cinética?

A resposta é simples: estando ainda o corpo sobre a mesa, o sistema Terra-corpo já possuía uma energia. Essa energia é denominada **energia potencial**.

Podemos falar em energia potencial do sistema Terra-corpo ou simplesmente energia potencial do corpo em relação à superfície (solo).

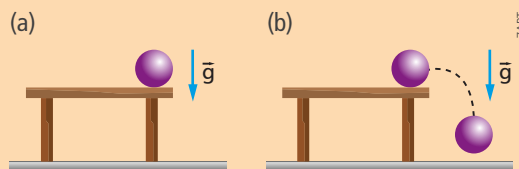


Figura 2.

O adjetivo **potencial** atribuído à energia tem o mesmo significado usado em nosso dia a dia: energia potencial é aquela que está guardada, pronta para ser usada. Na Mecânica usamos a energia potencial para obter movimento entre as partes de um sistema. Ela é convertida em energia cinética de uma ou mais partes do sistema.

Vejam os mais um exemplo de interação entre dois corpos e vamos identificar no sistema uma energia potencial.

Exemplo 2

Temos um sistema bloco-mola. O bloco é lançado por um operador com velocidade v contra a mola. Não existe atrito e a mola é ideal. Identifiquemos, passo a passo, as transferências de energia entre os dois corpos desse sistema.

- Inicialmente o bloco possui **energia cinética** e vai colidir com a mola (fig. 3).
- Durante a fase de compressão da mola, o bloco vai transferindo sua energia cinética para a mola, que a vai armazenando ao comprimir seus anéis.
- O bloco acaba parando (fig. 4) e, nesse instante, toda sua energia cinética foi transferida para a mola, que a armazenou sob a forma de **energia potencial elástica**. Observemos que a energia potencial elástica da mola é proveniente da energia cinética do bloco.
- Logo em seguida, o bloco inverte o sentido de seu movimento, pois a força elástica ainda é para a esquerda. A partir desse instante a energia potencial elástica da mola passa a ser transferida para o bloco.
- A força elástica afasta o bloco da mola, “expulsando-o” para a esquerda. Desacoplado da mola, o bloco possui energia cinética (fig. 5). Essa energia cinética é proveniente da energia potencial elástica da mola.

Neste caso, a interação entre o bloco e a mola se deu por meio de uma força elástica, que é conservativa.

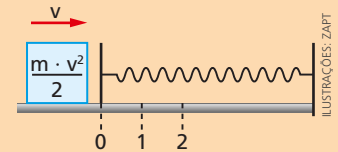


Figura 3. O bloco se aproxima da mola.

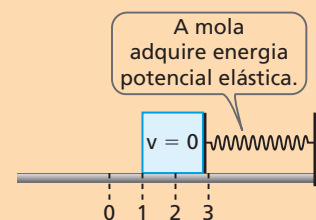


Figura 4. O bloco parou e a mola adquiriu energia potencial elástica.

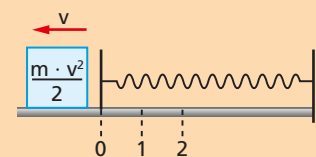


Figura 5. O bloco se afasta da mola.

Exemplo 3

Vamos dar uma espiadinha no volume 3 e tirar de lá um exemplo de energia potencial que não pertence à Mecânica. Trata-se de um caso muito simples envolvendo a carga elétrica: na figura 6 temos duas partículas eletrizadas, fixas, que se atraem ou se repelem conforme o sinal de suas cargas elétricas.



(a) Duas cargas elétricas positivas se repelem.

Figura 6.



(b) Duas cargas elétricas de sinais contrários se atraem.

Independentemente de haver atração ou repulsão entre as duas partículas, se as deixarmos livres, haverá um movimento relativo entre elas: na figura 6a elas se afastam e na figura 6b elas se aproximam. Isso mostra que há uma energia potencial elétrica em cada um dos pares de cargas das figuras. Com as cargas livres, essa energia potencial se converte em energia cinética. A força elétrica é uma força conservativa.

Não devemos nos preocupar neste momento com o estudo de interações elétricas; isso será estudado no volume 3 desta Coleção.

OBSERVAÇÃO

Nos Exemplos 1, 2 e 3, a força gravitacional (peso), a força elástica da mola e a força elétrica entre as cargas são exemplos de força conservativa. Essa é uma condição necessária para que se possa atribuir energia potencial ao sistema. Na Mecânica vamos estudar apenas dois casos de energia potencial: a **gravitacional** e a **elástica**.

3. Energia potencial gravitacional

Consideremos inicialmente uma partícula de massa m , abandonada em repouso numa posição de altura h acima do solo (fig. 7). A partícula entra em movimento de queda livre e, à medida que se aproxima do solo, vai ganhando energia cinética. Usando-se o Teorema da Energia Cinética (TEC):

$$\mathcal{E}_p = E_{cf} - E_{c0}$$

Como a partícula partiu do repouso, a energia cinética inicial é nula e temos:

$$\mathcal{E}_p = E_{cf} \Rightarrow E_{cf} = m \cdot g \cdot h$$

Mas, como sabemos, essa energia cinética é decorrente da energia potencial gravitacional (E_p) da partícula em repouso na posição de altura h . Então podemos escrever:

$$E_p = E_{cf} \Rightarrow E_p = m \cdot g \cdot h \quad (1)$$

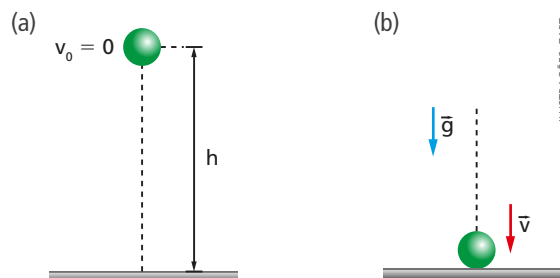


Figura 7. Partícula de massa m em queda livre.

Nível de referência ou plano horizontal de referência

Adotamos, na dedução da equação anterior, o nível do solo como nível de referência (NR). No entanto, podemos usar outros níveis, desde que sejam planos horizontais. Chamamos a atenção para o seguinte: uma vez adotado o nível de referência, este não poderá ser mudado durante a resolução de um problema. Observemos as quatro figuras a seguir: em cada uma delas se indica a altura e o cálculo da energia potencial da partícula.

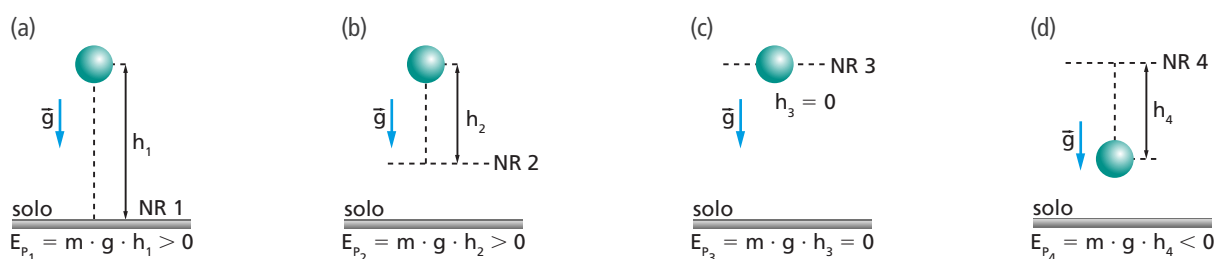


Figura 8. Níveis de referência e o cálculo da energia potencial gravitacional em cada caso.

Se o centro de gravidade do corpo estiver acima do nível de referência, a energia potencial é positiva (figs. 8a e 8b). Se ele estiver no nível de referência, a energia potencial é nula (fig. 8c). Estando o centro de gravidade abaixo do nível de referência, a energia potencial será negativa (fig. 8d).

Variação de energia potencial gravitacional

A variação de energia potencial gravitacional não depende do nível de referência fixado.

Vamos mostrar essa propriedade usando o seguinte exemplo: uma partícula, sob a ação exclusiva do peso, está posicionada em A e é deslocada para B.

Como nos mostra a figura 9, temos:

- em A: $E_{pA} = m \cdot g \cdot h_A$
- em B: $E_{pB} = m \cdot g \cdot h_B$

A variação de energia potencial é:

$$\Delta E_p = E_{pB} \text{ (final)} - E_{pA} \text{ (inicial)}$$

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h_B - m \cdot g \cdot h_A = m \cdot g (h_B - h_A)$$

$$\Delta E_p = -m \cdot g \cdot \Delta h$$

Portanto, a variação de energia potencial depende da diferença de níveis (Δh) entre A e B, mas não depende das alturas em relação ao nível de referência (NR) adotado.

Lembrando que o trabalho do peso de A até B é:

$$\mathcal{W}_p = +m \cdot g \cdot \Delta h$$

poderemos escrever ainda que:

$$\mathcal{W}_p = -\Delta E_p$$

O trabalho do peso é igual à variação da energia potencial com o sinal trocado.

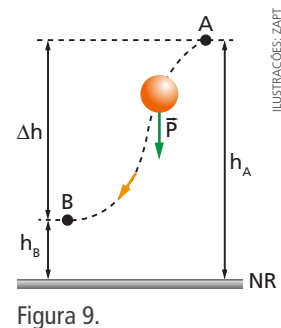


Figura 9.

Centro de massa (CM)

Vamos dar uma espiadinha no capítulo 22 e antecipar um conceito simples: **centro de massa de um corpo extenso**. Não vamos nos aprofundar agora nele, apenas usá-lo num caso particular.

O centro de massa de um corpo extenso é um ponto geométrico no qual supomos estar concentrada toda a massa do corpo. No caso particular dos corpos com distribuição de massa homogênea e que apresentam uma geometria regular, esse ponto coincide com o centro geométrico do corpo. Se você suspender a sua régua de 30 cm com um único dedo sob o número 15 (ponto médio), observará que ela ficará em equilíbrio.

Na figura 11, apresentamos algumas figuras regulares, nas quais o centro de massa coincide com o centro geométrico.

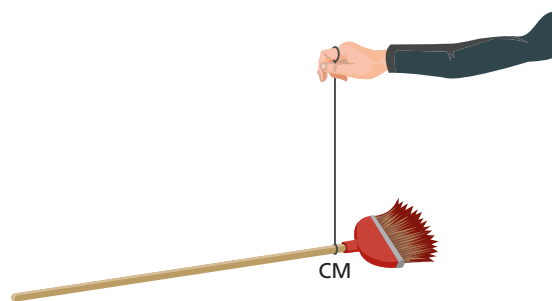
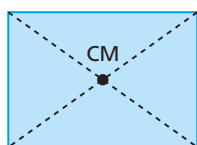


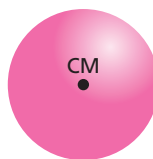
Figura 10. Uma vassoura suspensa pelo seu CM fica em equilíbrio. Leia mais sobre o assunto no capítulo 22.



(a) Uma chapa homogênea retangular tem o CM coincidindo com o centro geométrico do retângulo.



(b) O CM de um cilindro regular está localizado sobre o seu eixo, no ponto médio entre as duas bases.



(c) O CM de uma esfera regular coincide com o centro geométrico dessa esfera.



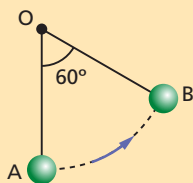
(d) O CM de um haltere está localizado no ponto médio de sua haste.

Figura 11.

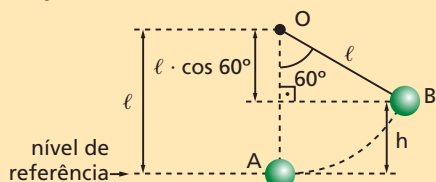
O **centro de gravidade CG** de um corpo extenso é o ponto geométrico onde se aplica a força gravitacional, o peso. No capítulo 24 estudaremos esse ponto com mais detalhes. Para corpos extensos pequenos, o CM e o CG coincidem. No caso dos corpos da figura 11, esses dois pontos coincidem também com o centro geométrico do corpo. Assim, poderemos usar para corpos pequenos, indistintamente, o CM ou o CG.

Exercícios de Aplicação

1. Uma pequena esfera de massa igual a 10 kg, suspensa na extremidade de um fio de peso desprezível, é deslocada da posição de equilíbrio A até uma nova posição B que forma com a vertical um ângulo de 60° . O comprimento do fio é de 1,0 m, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\cos 60^\circ = 0,50$. Determine a energia potencial gravitacional da pequena esfera nas posições A e B , em relação a um plano horizontal de referência que passa por A .



Resolução:



Na posição A , a energia potencial gravitacional da esfera é nula, pois esta se encontra no plano horizontal de referência:

$$h = 0 \rightarrow E_{p_A} = 0$$

Para o cálculo da energia potencial gravitacional da esfera na posição B (E_{p_B}), devemos determinar a altura h indicada na figura:

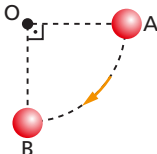
$$h = l - l \cdot \cos 60^\circ$$

$$h = 1,0 - 1,0 \cdot 0,50 \Rightarrow h = 0,50 \text{ m}$$

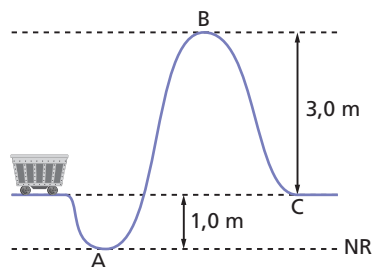
$$E_{p_B} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{p_B} = 10 \cdot 10 \cdot 0,50 \Rightarrow E_{p_B} = 50 \text{ J}$$

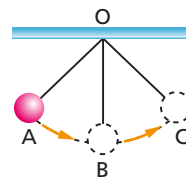
2. Uma pequena esfera de massa igual a 5,0 kg, suspensa por um fio de peso desprezível, é abandonada da posição A . O comprimento do fio é de 0,80 m e $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine a energia potencial gravitacional da pequena esfera nas posições A e B , em relação a um plano horizontal de referência que passa por B .



3. Um carrinho, de massa igual a 2,0 kg, move-se ao longo de um trilho, cujo perfil está representado a seguir. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a energia potencial gravitacional do carrinho nas posições A , B e C , em relação a um plano horizontal de referência que passa por A .

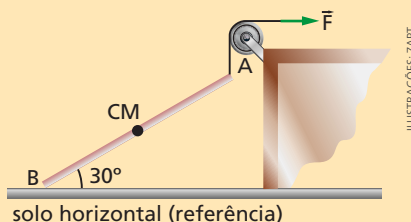


4. (OBF-Brasil) Um pêndulo simples (como indicado na figura) oscila periodicamente entre os pontos A e C . No ponto B o pêndulo está alinhado com a vertical.



- Em qual(is) ponto(s) a energia cinética do pêndulo é máxima?
- Em qual(is) ponto(s) a energia potencial gravitacional do pêndulo é máxima?

5. Uma barra homogênea de comprimento 2,0 m e espessura desprezível foi erguida em uma de suas extremidades por um sistema mecânico, como nos mostra a figura a seguir.

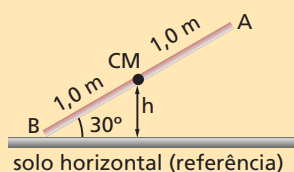


Estando a barra inclinada de 30° com a horizontal, determine:

- a altura do seu centro de massa (CM) em relação ao solo;
- a energia potencial da barra sabendo que a massa é $m = 200 \text{ kg}$ e a aceleração da gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução:

- a) Usando o triângulo retângulo formado com a metade da barra e o solo:



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{1,0} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{1,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 0,5 \text{ m} \text{ (altura do CM em relação ao solo)}$$

b) $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$

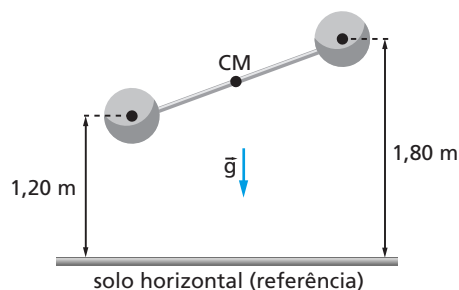
Nesse caso usamos a altura do CM, pois o corpo é extenso.

$$E_{\text{pot}} = (200 \text{ kg}) \cdot (10 \text{ m/s}^2) \cdot (0,5 \text{ m})$$

$$E_{\text{pot}} = 1000 \text{ J} = 1,0 \text{ kJ}$$

(energia potencial em relação ao solo)

6. As esferas de um haltere têm massa de 9,0 kg cada uma e a sua haste, 2,0 kg. Um halterofilista deixa cair esse aparelho, como nos mostra a figura (em que o halterofilista foi omitido). O módulo da aceleração da gravidade é 10 m/s^2 .



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

No instante mostrado, a energia potencial do haltere, relativa ao solo, é de:

- a) 300 J d) 135 J
b) 3,0 kJ e) 30 J
c) 270 J

4. Energia potencial elástica

Já vimos no item 2 que uma mola comprimida armazena energia potencial elástica. O mesmo acontece para a mola distendida. Mas como calcular a quantidade de energia potencial elástica da mola?

Um modo simples é aplicar nela uma força \vec{F} , através de um operador externo, e alongá-la ou comprimi-la.

Na figura 12 temos uma mola de constante elástica k sendo alongada pela mão de um operador que aplica na sua extremidade uma força \vec{F} .

Seja x a alongação obtida, como indica a figura 12b. Nesse caso, vale a Lei de Hooke:

$$F = k \cdot x$$

Essa equação nos permite desenhar o gráfico da intensidade F da força \times alongação x . A função é linear, como nos mostra o gráfico da figura 13.

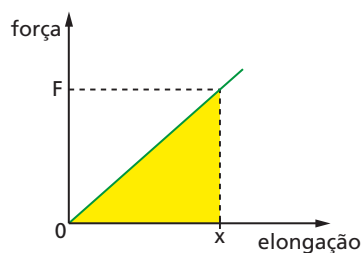


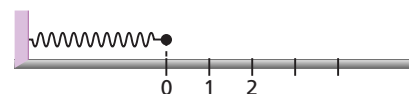
Figura 13.

O trabalho da força \vec{F} é dado pela área sombreada em amarelo sob o gráfico.

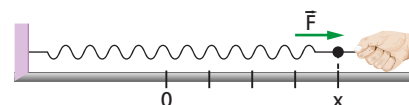
$$\mathcal{W} = \frac{F \cdot x}{2} \Rightarrow \mathcal{W} = \frac{(k \cdot x) \cdot x}{2} \Rightarrow \mathcal{W} = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

Mas o trabalho da força \vec{F} é a energia transferida à mola pelo operador. Esta é armazenada sob a forma de energia potencial elástica (E_{PE}). Logo:

$$E_{\text{PE}} = \mathcal{W} \Rightarrow E_{\text{PE}} = \frac{k \cdot x^2}{2} \quad (2)$$



(a) Mola sem alongação.



(b) Mola esticada por um operador externo.

Figura 12.

OBSERVAÇÃO

No capítulo 18 já obtivemos uma equação para o cálculo do trabalho da força elástica a qual, em módulo, era igual à equação (2) anterior. Essa igualdade nos mostra que a capacidade de realizar trabalho de uma mola está diretamente ligada à energia potencial elástica que ela armazena. Vamos voltar ao segundo exemplo do item 2, precisamente às figuras 3 e 4. Qual é a quantidade de energia potencial elástica armazenada? Basta ler o valor da alongação e usar a equação (2).

Sistema bloco-mola

Um segundo modo de se deduzir a equação ② da página 367 é usando um sistema constituído por um bloco de massa m e por uma mola de constante elástica k . Inicialmente a mola está comprimida e o bloco está travado, em repouso. Entre o bloco e a mola não há nenhum vínculo, ou seja, ele não está acoplado a ela. No plano horizontal não existe atrito.

Na figura 14 a deformação da mola, em relação ao seu comprimento natural, é x .

Retiramos a trava que prende o bloco e, assim que ele se solta da mola, adquire um movimento retilíneo uniforme e possui energia cinética que recebeu da mola (fig. 15).

Portanto, a força elástica realizou um trabalho sobre o bloco.

$$\mathcal{W}_{\text{elást}} = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

A energia potencial elástica da mola é a sua capacidade de realizar trabalho. Logo:

$$E_{\text{PE}} = \mathcal{W}_{\text{elást}} \Rightarrow E_{\text{PE}} = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

Variação da energia potencial elástica

Do mesmo modo que se demonstrou para a energia potencial gravitacional, também aqui se demonstra que o trabalho da força elástica, entre duas posições A e B , é igual à variação de energia potencial elástica da mola com o sinal trocado.

$$\mathcal{W}_{\text{elást}(A, B)} = -\Delta E_{\text{PE}}$$

Deixamos a cargo do leitor essa demonstração.

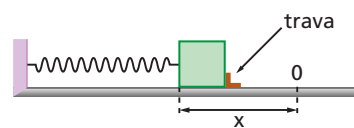


Figura 14. Mola comprimida.

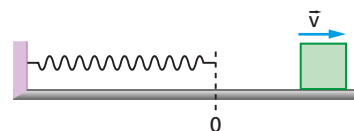


Figura 15. A mola volta ao comprimento natural e o bloco ganha energia cinética.

OBSERVAÇÃO

É muito comum, nos textos e enunciados de exercícios, denominar-se o sistema bloco-mola por **sistema massa-mola**.

Exercícios de Aplicação

7. Quando deformada de 0,30 m, a mola helicoidal da figura exerce no bloco uma força elástica de intensidade 30 N.



Determine:

- a constante elástica da mola;
- a energia potencial elástica armazenada pelo sistema, quando a mola estiver deformada de 0,60 m.

Resolução:

- A intensidade da força elástica é dada por: $F_{\text{el}} = k \cdot x$, em que k é a constante elástica da mola.

Sendo $F_{\text{el}} = 30 \text{ N}$ e $x = 0,30 \text{ m}$, vem:

$$30 = k \cdot 0,30$$

$$k = 100 \text{ N/m}$$

- A energia potencial elástica armazenada pelo sistema, em relação à posição natural, é dada por:

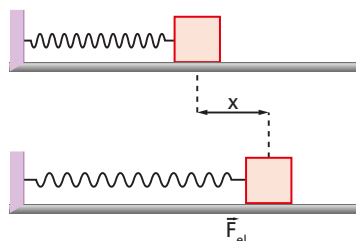
$$E_{\text{PE}} = \frac{kx^2}{2}$$

Para $k = 100 \text{ N/m}$ e $x = 0,60 \text{ m}$, resulta:

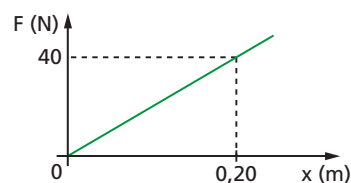
$$E_{\text{PE}} = \frac{100 \cdot (0,60)^2}{2}$$

$$E_{\text{PE}} = 18 \text{ J}$$

8. O gráfico representa a intensidade da força elástica que a mola helicoidal da figura exerce no bloco, em função de sua deformação.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

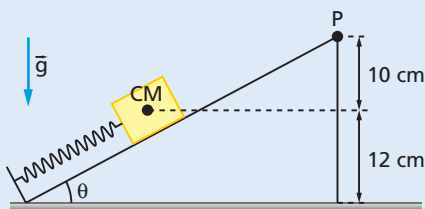


Determine:

- a constante elástica da mola;
- a energia potencial elástica armazenada para $x = 0,20$ m;
- a energia elástica armazenada para $x = 0,40$ m, ou seja, o dobro da elongação anterior.

Exercícios de Reforço

9. (UF-AL) A figura mostra um bloco de peso 10 N em equilíbrio contraindo uma mola ideal de constante elástica 100 N/m. Não existe atrito entre o bloco e o plano inclinado e sabe-se que $\sin(\theta) = 0,8$ e $\cos(\theta) = 0,6$. Considere que a energia potencial elástica é nula quando a mola não está nem contraída nem distendida, e que a energia potencial gravitacional é nula no nível do ponto P, situado a uma altura de 10 cm acima do centro de massa do bloco.



Nesse contexto, pode-se afirmar que a soma das energias potenciais elástica da mola e gravitacional do bloco na situação da figura vale:

- 0,68 J
 - 0,32 J
 - zero
 - 0,32 J
 - 0,68 J
10. (Fuvest-SP) Um corpo está preso nas extremidades de duas molas idênticas, não deformadas, de constante elástica 100 N/m, conforme ilustra a figura.



Quando o corpo é afastado de 1,0 cm do ponto central:

- qual a intensidade da resultante das forças que as molas exercem sobre ele?
- qual a energia armazenada nas molas?

11. (ITA-SP) A variação da energia cinética de uma partícula em movimento, num dado referencial inercial, entre dois pontos distintos P e Q, é sempre igual:

- à variação da energia potencial entre esses dois pontos.
 - ao trabalho da resultante das forças aplicadas à partícula para deslocá-la entre esses dois pontos.
 - à variação da energia potencial entre esses dois pontos, com exceção do sinal, quando a força resultante aplicada à partícula for conservativa.
- Somente I é correta.
 - I e II são corretas.
 - Somente III é correta.
 - II e III são corretas.
 - Somente II é correta.

5. Energia mecânica – conservação da energia mecânica

A energia mecânica de uma partícula é a soma de sua energia cinética com a energia potencial.

$$E_M = E_C + E_P$$

Vejamos o exemplo a seguir.

Vamos considerar uma partícula submetida a um conjunto de várias forças conservativas e vamos supor que ela seja deslocada de uma posição A para outra posição B (fig. 16). Não nos importa a trajetória.

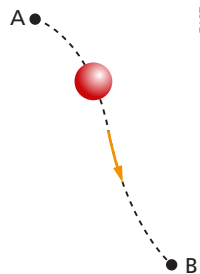


Figura 16.

Como as forças são conservativas:

$$\mathcal{W}_{AB} = E_{PA} - E_{PB} \quad (1)$$

Usando o Teorema da Energia Cinética entre A e B :

$$\mathcal{W}_{AB} = E_{CB} - E_{CA} \quad (2)$$

Igualando-se (1) e (2), temos:

$$E_{PA} + E_{CA} = E_{PB} + E_{CB} \quad (3)$$

O lado esquerdo da equação (3) é a soma da energia cinética com a potencial da partícula quando estava na posição A , ou seja, é a energia mecânica em A .

O lado direito da equação (3) é a soma das energias cinética e potencial para a partícula na posição B . Portanto:

$$E_{MA} = E_{MB}$$

Esse resultado se constitui no Princípio da Conservação da Energia Mecânica.

OBSERVAÇÕES

- 1ª) O enunciado foi dado para uma única partícula, porém pode ser generalizado para um sistema de partículas.
- 2ª) Para o caso de um corpo, devemos verificar se ele pode ser convertido em ponto material. Nesse caso a aplicação do Princípio da Conservação da Energia Mecânica é imediata. Caso se trate de corpo extenso, trabalhamos com o seu centro de gravidade.
- 3ª) Quando uma partícula é deslocada de uma posição A para outra posição B , a energia cinética e a energia potencial, de um modo geral, variam. No entanto a energia mecânica, que é a soma das duas, permanece constante.

Exemplo 4

Uma partícula $m = 2,0$ kg desliza num plano inclinado sem atrito. Sua velocidade escalar num dado instante é $4,0$ m/s e sua altura em relação ao nível do solo, tomado do referencial, é $4,0$ m. Sendo $g = 10$ m/s², temos:

- Energia potencial em relação ao solo:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E_p = 2,0 \cdot 10 \cdot 4,0 \Rightarrow E_p = 80 \text{ J}$$

- Energia cinética:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$E_c = \frac{2,0 \cdot 4,0^2}{2} \Rightarrow E_c = 16 \text{ J}$$

- Energia mecânica da partícula:

$$E_M = E_c + E_p$$

$$E_M = 16 \text{ J} + 80 \text{ J} \Rightarrow E_M = 96 \text{ J}$$

Estratégia para aplicação do Princípio da Conservação da Energia Mecânica

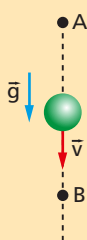
- As forças de interação entre as partes envolvidas no sistema mecânico devem ser conservativas: peso e elástica.
- Podemos ter no sistema a presença de forças não conservativas, porém que não estejam realizando trabalho.
- Não devemos ter a presença de forças dissipativas que realizem trabalho: atrito cinético, resistência do ar, resistência de fluidos em geral.

- Caso se tenha uma única partícula se deslocando, escolha duas posições de sua trajetória e aplique a equação (3). Lembre-se de que a energia potencial pode ser gravitacional e elástica. Se houver as duas, some-as.
- Caso haja duas partículas ou mais, devemos somar as energias cinéticas, bem como somar as energias potenciais em cada posição e escrever:

$$\Sigma(E_{p_A}) + \Sigma(E_{c_A}) = \Sigma(E_{p_B}) + \Sigma(E_{c_B})$$

Exercícios de Aplicação

- 12.** Um corpo de pequenas dimensões é abandonado em queda livre a partir do repouso no ponto A. Nessa posição sua energia potencial em relação ao solo vale 200 J. Ao passar pela posição B a energia cinética é de 120 J.



Determine:

- a energia mecânica total do corpo;
- a energia potencial na posição B.

Resolução:

- a) Em A temos:

$$v_A = 0 \Rightarrow E_{c_A} = 0 \Rightarrow E_M = E_c + E_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_M = 0 + 200 \text{ J} \Rightarrow E_M = 200 \text{ J}$$

- b) Vamos aplicar o Princípio da Conservação da Energia Mecânica (PCEM) que acabamos de aprender. Entre A e B a energia mecânica se conserva, e escrevemos:

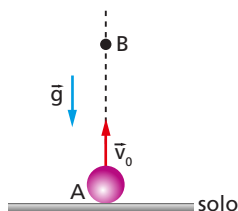
$$E_{M_A} = E_{M_B}$$

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$0 + 200 \text{ J} = 120 \text{ J} + E_{p_B}$$

$$200 \text{ J} - 120 \text{ J} = E_{p_B} \Rightarrow E_{p_B} = 80 \text{ J}$$

- 13.** Uma bolinha de borracha, de massa $m = 200 \text{ g}$, é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 20 m/s a partir do solo. No local a aceleração da gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Desprezando-se o trabalho de qualquer força dissipativa e adotando o solo como referencial:

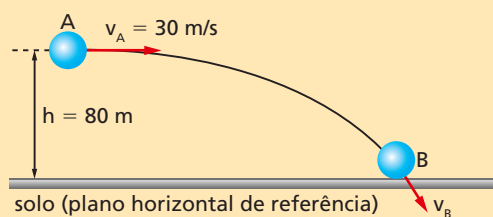
- determine a energia mecânica da bolinha no instante do lançamento e também no instante em que chega ao pico da trajetória;
- ao passar pelo ponto B de sua trajetória, a energia potencial valia 30% da energia mecânica. Determine a energia cinética e a potencial nesse ponto.

- 14.** Uma bola é lançada, horizontalmente, com velocidade escalar de 30 m/s de um ponto situado a 80 m acima do solo, suposto horizontal. Adote aceleração da gravidade 10 m/s^2 e despreze a resistência do ar. Determine a velocidade da bola ao atingir o solo.

Resolução:

Sendo o peso a única força que age na bola e sendo uma força conservativa, podemos aplicar entre as posições A (inicial) e B (final) a conservação da energia mecânica:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$



Adotando-se o solo como plano horizontal de referência, para medida de energia potencial, vem:

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} + m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0$$

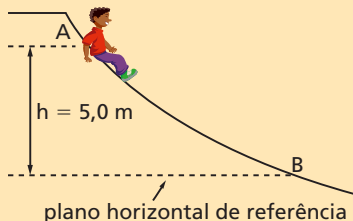
$$\frac{v_A^2}{2} + g \cdot h = \frac{v_B^2}{2}$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gh$$

Sendo $v_A = 30 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 80 \text{ m}$, vem:

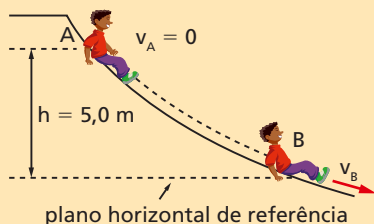
$$v_B^2 = 30^2 + 2 \cdot 10 \cdot 80 \Rightarrow v_B = 50 \text{ m/s}$$

15. No escorregador mostrado na figura, uma criança com 25 kg de massa, partindo do repouso em A, desliza até B. Adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando-se os atritos e quaisquer outras forças dissipativas, determine o módulo da velocidade da criança ao chegar a B.



Resolução:

As forças que agem sobre a criança são: o peso, que é força conservativa, e a força normal, que realiza trabalho nulo. Podemos, então, aplicar o Princípio da Conservação da Energia Mecânica. Adotamos o plano horizontal de referência passando por B.



$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

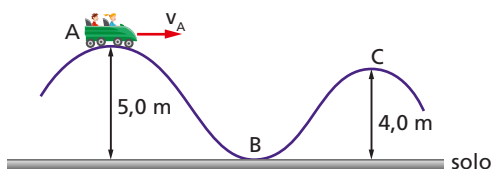
$$0 + m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 5,0 \text{ m}$, vem:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5,0} \Rightarrow v_B = 10 \text{ m/s}$$

16. Numa montanha-russa, um carrinho com 300 kg de massa é abandonado do repouso de um ponto A que está a 5,0 m de altura.

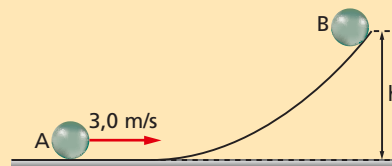


Supondo que o atrito seja desprezível, e adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

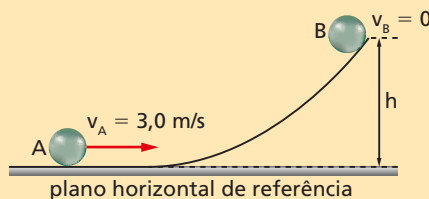
- o valor da velocidade do carrinho no ponto B;
- a energia cinética do carrinho no ponto C, que está a 4,0 m de altura.

17. Um corpo desloca-se sobre um plano horizontal sem atrito com velocidade de módulo 3,0 m/s e

em seguida sobe uma rampa, também sem atrito. Sabendo que a massa do corpo é de 2,0 kg, determine a altura máxima (h) que o corpo atinge na rampa. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Resolução:



Ao atingir a altura máxima h , a velocidade do corpo se anula ($v_B = 0$). A conservação da energia mecânica fornece:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

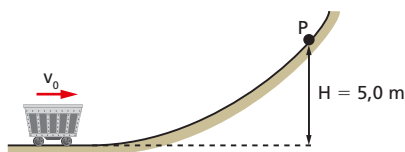
Em relação ao plano horizontal adotado na figura, temos:

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} + 0 = 0 + m \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{v_A^2}{2} = g \cdot h$$

Sendo $v_A = 3,0 \text{ m/s}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, vem:

$$\frac{(3,0)^2}{2} = 10 \cdot h \Rightarrow h = 0,45 \text{ m}$$

18. Um carrinho desliza sobre o plano horizontal com velocidade escalar v_0 e atinge a parte curva de subida da rampa de skate, onde para em P e retorna para a rampa horizontal. Não há atrito e a resistência do ar é desprezível.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, podemos concluir que:

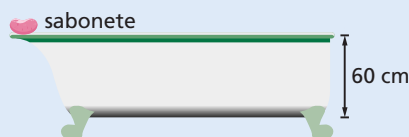
- o trabalho das forças dissipativas sobre o carrinho é nulo.
- $v_0 = 10 \text{ m/s}$
- nos movimentos de ida e volta houve conservação da energia mecânica.

Está correto apenas o que se disse em:

- I
- II
- I e II
- I e III
- I, II e III

Exercícios de Reforço

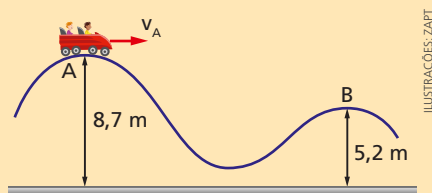
19. (U. F. São Carlos-SP) Ideia para a campanha de redução de acidentes: enquanto um narrador exporia fatores de risco nas estradas, uma câmera mostraria o trajeto de um sabonete que, a partir do repouso em um ponto sobre a borda de uma banheira, escorregaria para o interior da mesma, sofrendo um forte impacto contra a parede vertical oposta.



Para a realização da filmagem, a equipe técnica, conhecendo a aceleração da gravidade (10 m/s^2) e desconsiderando qualquer atuação de forças contrárias ao movimento, estimou que a velocidade do sabonete, momentos antes de seu impacto contra a parede da banheira, deveria ser um valor, em m/s , mais próximo de:

- a) 1,5 b) 2,0 c) 2,5 d) 3,0 e) 3,5

20. Num trecho de montanha-russa, um carrinho de massa $m = 100 \text{ kg}$ passa pela posição A com velocidade escalar $v_A = 10 \text{ m/s}$. Pode-se desprezar a energia dissipada por atrito ou pela resistência do ar. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

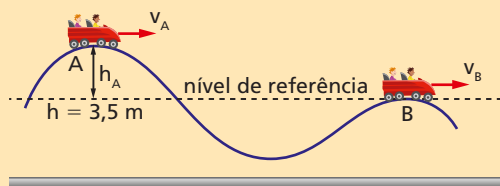


Determine:

- a) para um plano de referência que passa por B, as energias potenciais do carrinho nas posições A e B;
b) a velocidade do carrinho ao passar pela posição B.

Resolução:

- a) Para o referencial adotado, observemos na figura o cálculo das alturas:



Para o ponto A:

$$h_A = 8,7 \text{ m} - 5,2 \text{ m} = 3,5 \text{ m}$$

Para o ponto B:

$$h_B = 0$$

$$E_{pA} = m \cdot g \cdot h_A$$

$$E_{pA} = 100 \cdot 10 \cdot 3,5 \Rightarrow E_{pA} = 3500 \text{ J}$$

$$E_{pB} = m \cdot g \cdot h_B \Rightarrow E_{pB} = 0$$

- b) As forças que atuam no carrinho são: o peso, que é uma força conservativa, a força normal, que não realiza trabalho, e o atrito, que não realiza trabalho também. Portanto, o sistema é conservativo. Vamos aplicar o PCEM:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

$$m \cdot g \cdot h_A + \frac{m \cdot v_A^2}{2} = m \cdot g \cdot h_B + \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

Observemos que podemos dividir todos os termos pela massa m , ou seja, a conservação da energia mecânica não depende da massa m :

$$g \cdot h_A + \frac{v_A^2}{2} = g \cdot h_B + \frac{v_B^2}{2}$$

Temos:

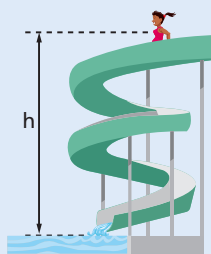
$$h_A = h = 3,5 \text{ m}; v_A = 10 \text{ m/s}; h_B = 0; g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Substituindo-se esses valores na equação acima:

$$10 \cdot 3,5 + \frac{10^2}{2} = 0 + \frac{v_B^2}{2}$$

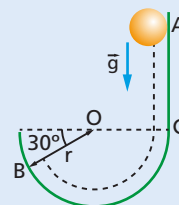
$$v_B^2 = 170 \Rightarrow v_B = \sqrt{170} \Rightarrow v_B \approx 13 \text{ m/s}$$

21. (UnB-DF) A figura mostra uma criança descendo em um tobogã. Admitindo-se que ela é liberada do topo, a uma altura $h = 8,0 \text{ m}$ em relação à base, com velocidade inicial igual a zero, que a aceleração da gravidade tem módulo igual a 10 m/s^2 e desconsiderando-se as forças de atrito, então o módulo da velocidade da criança na parte mais baixa do tobogã será mais próximo de:



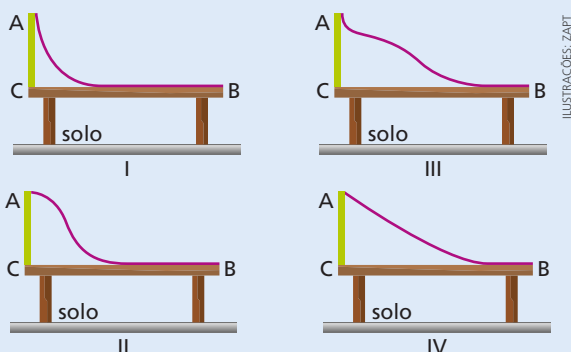
- a) 13 m/s c) 24 m/s e) 30 m/s
b) 18 m/s d) 27 m/s

22. Uma pequena esfera de massa m é abandonada na posição A junto à parede vertical de uma rampa de skate-radical. Não há atrito e a esfera deslizará. São dados: $AC = 4r$ e o módulo da aceleração da gravidade g . Com que velocidade ela passará pela posição B?



- a) $2rg$ b) $2\sqrt{rg}$ c) $3\sqrt{rg}$ d) $3rg$ e) $\sqrt{4,5rg}$

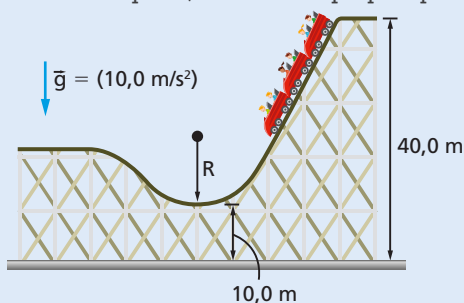
23. (UE-RJ) Os esquemas mostram quatro rampas AB, de mesma altura \overline{AC} e perfis distintos, fixadas em mesas idênticas, nas quais uma pequena pedra é abandonada, do ponto A, a partir do repouso.



Após deslizar sem atrito pelas rampas I, II, III e IV, a pedra toca o solo, pela primeira vez, a uma distância do ponto B respectivamente igual a d_I , d_{II} , d_{III} e d_{IV} . A relação entre essas distâncias está indicada na seguinte alternativa:

- a) $d_I > d_{II} = d_{III} > d_{IV}$ c) $d_{II} > d_{IV} = d_I > d_{III}$
b) $d_{III} > d_{II} > d_{IV} > d_I$ d) $d_I = d_{II} = d_{III} = d_{IV}$

24. (UF-PE) A figura representa um trecho de uma montanha-russa na qual os carrinhos foram projetados para que cada ocupante não experimente uma força normal contra seu assento com intensidade maior que 3,5 vezes seu próprio peso.

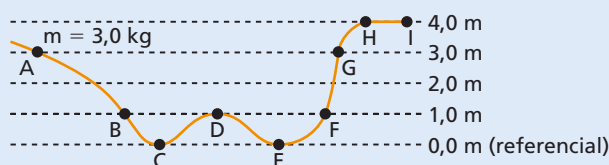


Considerando-se que os carrinhos tenham velocidade de módulo 5,0 m/s no início da descida e que os atritos e o efeito do ar sejam desprezíveis, o menor raio de curvatura R que o trilho deve ter no seu ponto mais baixo vale:

- a) 3,5 m c) 10,0 m e) 40,0 m
b) 5,0 m d) 25,0 m

Adote: $g = 10 \text{ m/s}^2$

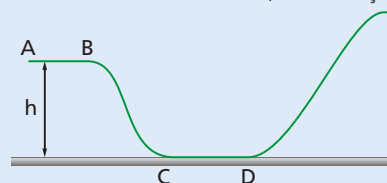
25. (OBF-Brasil) Um corpo de massa $m = 3,0 \text{ kg}$ movimenta-se numa trajetória posicionada na vertical, partindo do repouso no ponto A.



- a) Determine a velocidade do corpo no ponto E.
b) Qual deve ser a velocidade mínima que o corpo necessita ter no ponto A para que ele possa chegar até o ponto H?

(Sugestão dos autores: admita que não há perda de energia mecânica e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

26. (Fuvest-SP) Um esquetista treina em uma pista cujo perfil está representado na figura abaixo. O trecho horizontal AB está a uma altura $h = 2,4 \text{ m}$ em relação ao trecho, também horizontal, CD. O esquetista percorre a pista no sentido de A para D. No trecho AB, ele está com velocidade constante, de módulo $v = 4 \text{ m/s}$; em seguida, desce a rampa BC, percorre o trecho CD, o mais baixo da pista, e sobe a outra rampa até atingir uma altura máxima H, em relação a CD.

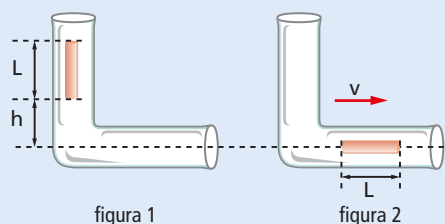


A velocidade do esquetista no trecho CD e a altura máxima H são, respectivamente, iguais a:

- a) 5 m/s e 2,4 m d) 8 m/s e 2,4 m
b) 7 m/s e 2,4 m e) 8 m/s e 3,2 m
c) 7 m/s e 3,2 m

(Observação dos autores: não existe atrito na pista. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

27. (Fuvest-SP) A figura 1 mostra um tubo de vidro de seção uniforme que contém uma coluna de mercúrio, de comprimento L, mantida parada no trecho vertical por uma membrana colocada na altura h. Num certo instante, a membrana se rompe e a coluna de mercúrio inicia um movimento de queda livre. Depois de algum tempo, já no trecho horizontal, seu movimento, com velocidade constante de módulo v, é indicado na figura 2.

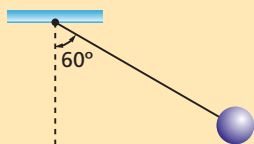


Desprezando-se os efeitos do atrito e denotando-se por g o módulo da aceleração da gravidade, v é dado por:

- a) $\sqrt{2gh}$ c) $\sqrt{2g(h + L)}$ e) $\sqrt{2g\left(h + \frac{L}{2}\right)}$
b) $\sqrt{2gL}$ d) $\sqrt{2g\left(\frac{h}{2} + L\right)}$

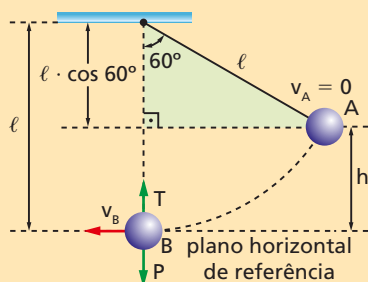
Exercícios de Aplicação

28. Um corpo de massa igual a 0,10 kg, suspenso por um fio de 1,0 m de comprimento, constitui um pêndulo que oscila num plano vertical, partindo do repouso na posição indicada na figura.



Sabendo que $\cos 60^\circ = 0,50$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a intensidade da força de tração no fio, quando o corpo passa pela posição mais baixa. Despreze a resistência do ar.

Resolução:



Vamos, inicialmente, calcular a altura h do ponto A, em relação ao plano horizontal de referência:

$$h = \ell - \ell \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow h = \ell - \ell \cdot 0,50 \Rightarrow \\ \Rightarrow h = 1,0 - 1,0 \cdot 0,50 \Rightarrow h = 0,50 \text{ m}$$

A conservação da energia mecânica entre as posições A e B permite-nos achar a velocidade v_B :

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \\ 0 + mgh = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 \Rightarrow gh = \frac{v_B^2}{2}$$

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 0,50$, vem:

$$10 \cdot 0,50 = \frac{v_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{10} \text{ m/s}$$

Para o cálculo da intensidade T da força de tração, aplicamos a Segunda Lei de Newton na posição B:

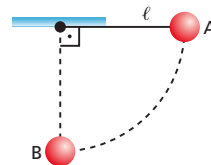
$$T - P = m \cdot \frac{v_B^2}{R} \Rightarrow T - m \cdot g = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

Sendo $m = 0,10 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $v_B = \sqrt{10} \text{ m/s}$ e $R = \ell = 1,0 \text{ m}$, resulta:

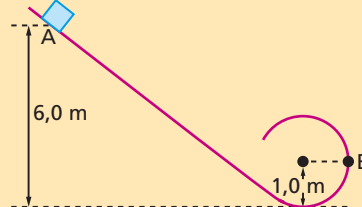
$$T - 0,10 \cdot 10 = 0,10 \cdot \frac{(\sqrt{10})^2}{1,0}$$

$$T = 2,0 \text{ N}$$

29. O fio ideal da figura tem comprimento ℓ e a esfera tem massa m . A esfera é abandonada na posição A. Sendo g a aceleração da gravidade e desprezando-se a resistência do ar, determine a intensidade da força de tração no fio, em função de m e g , quando a esfera passa pela posição B.



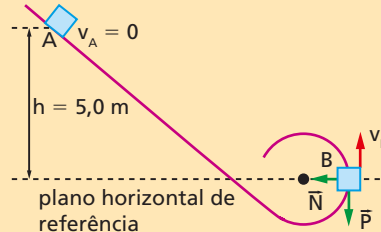
30. O bloco da figura, de massa 5,0 kg, é abandonado no ponto A. Considere a inexistência de atrito. Determine a intensidade da força normal que o trilho de apoio exerce sobre o bloco, quando este passa pelo ponto B. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Resolução:

Para o cálculo da velocidade do bloco ao passar pelo ponto B, vamos aplicar o Princípio da Conservação da Energia Mecânica entre os pontos A e B. Vamos adotar o plano horizontal por B como referencial.



$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \\ 0 + mgh = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 \Rightarrow gh = \frac{v_B^2}{2}$$

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 5,0 \text{ m}$, vem:

$$10 \cdot 5,0 = \frac{v_B^2}{2} \Rightarrow v_B = 10 \text{ m/s}$$

As forças que agem sobre o bloco são: o peso e a força normal (resultante centrípeta), quando o bloco passa por B:

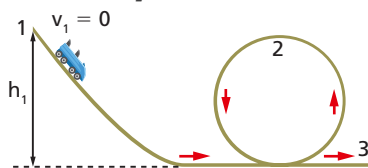
$$N = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

Sendo $m = 5,0 \text{ kg}$, $R = 1,0 \text{ m}$ e $v_B = 10 \text{ m/s}$, resulta:

$$N = 5,0 \cdot \frac{(10)^2}{1,0}$$

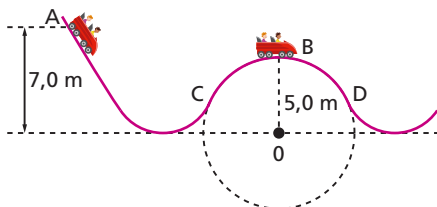
$$N = 5,0 \cdot 10^2 \text{ newtons}$$

31. Um carrinho de massa 2,0 kg é abandonado na rampa inclinada de um aparelho experimental do laboratório de mecânica de uma escola de engenharia. A figura mostra o aparelho na posição vertical. Em toda a pista do experimento não existe atrito. Verificou-se que, para uma determinada altura h_1 , o carrinho passava pelo ponto 2 do loop na iminência de cair. Abaixo dessa altura mínima ele despencava antes de atingir o ponto 2 e para alturas maiores o experimento tinha sucesso total e o carrinho chegava até a posição 3, do lado direito. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e o raio do arco do loop $R = 2,0 \text{ m}$.



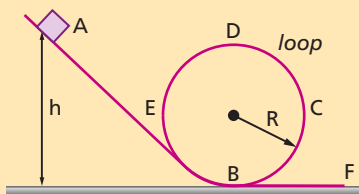
Determine:

- a velocidade mínima do carrinho na posição 2, para que ele não despenque;
 - a altura mínima h_1 , para que o experimento tenha sucesso, e também a velocidade v_3 na saída do loop.
32. A figura representa um trecho de montanha-russa. Na posição A, o carrinho de massa 50 kg possui velocidade escalar 3,0 m/s.



Determine a intensidade da força normal que age sobre o carrinho, no ponto B, sabendo que o trecho CBD é um arco de circunferência de raio 5,0 m. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze os atritos.

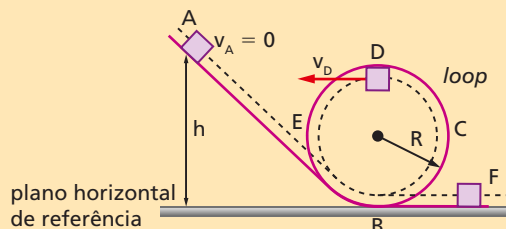
33. Um pequeno bloco de massa m parte do repouso em A e desliza, sem atrito, ao longo do trilho ABCDEF. Determine, em função do raio R , a menor altura h para que o bloco não perca contato com o trilho.



Resolução:

O ponto crítico da trajetória é o ponto D. O menor valor de h corresponde ao menor valor da velocidade no ponto D. A velocidade mínima que o corpo deve ter ao passar pelo ponto D é $v_{D_{\min}} = \sqrt{R \cdot g}$.

Aplicando-se o Princípio da Conservação da Energia Mecânica entre as posições A e D e para o referencial horizontal indicado na figura, vem:



$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cD} + E_{pD}$$

$$0 + mgh = \frac{m \cdot v_D^2}{2} + m \cdot g \cdot 2R$$

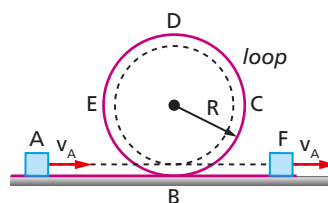
$$gh = \frac{v_D^2}{2} + g \cdot 2R \Rightarrow h = \frac{v_D^2}{2g} + 2R$$

Para h mínimo, devemos ter v_D mínimo:

$$h_{\min} = \frac{(v_{D_{\min}})^2}{2g} + 2R$$

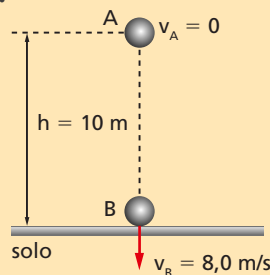
$$h_{\min} = \frac{(\sqrt{Rg})^2}{2g} + 2R \Rightarrow h_{\min} = 2,5R$$

34. Um pequeno objeto é lançado horizontalmente do ponto A e deseja-se que ele percorra a trajetória ABCDEF. A aceleração da gravidade tem módulo g e o raio da circunferência indicada é R . Desprezando os atritos, prove que a mínima velocidade v_A , com que o objeto deve ser lançado para percorrer a trajetória indicada, é $v_A = \sqrt{5Rg}$.



35. Uma esfera de massa igual a 0,40 kg é abandonada a partir do repouso de uma altura de 10 m e atinge o solo com velocidade de 8,0 m/s. Determine a quantidade de energia mecânica transformada em energia térmica durante a queda. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução:



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

A energia mecânica transformada em térmica é dada pela diferença entre a energia mecânica inicial (em A) e a energia mecânica (em B).

Adotando o solo como referencial para a medida de energia potencial, temos:

$$E_{M_A} = E_{C_A} + E_{P_A} \Rightarrow E_{M_A} = 0 + m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{M_A} = 0,40 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow E_{M_A} = 40 \text{ J}$$

$$E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B} \Rightarrow E_{M_B} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{M_B} = \frac{0,40 \cdot (8,0)^2}{2} \Rightarrow E_{M_B} = 12,8 \text{ J}$$

Portanto, a energia mecânica transformada em térmica é igual a:

$$E_T = E_{M_A} - E_{M_B}$$

$$E_T = 40 \text{ J} - 12,8 \text{ J} \Rightarrow E_T = 27,2 \text{ J}$$

A transformação de energia mecânica em térmica é devida à resistência do ar. O mesmo resultado pode ser obtido pela aplicação do Teorema da Energia Cinética (TEC). A energia térmica é igual ao módulo do trabalho realizado pela força de resistência do ar:

$$\mathcal{W}_{\text{res}} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

$$\mathcal{W}_P + \mathcal{W}_{F_{\text{ar}}} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

$$m \cdot g \cdot h + \mathcal{W}_{F_{\text{ar}}} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

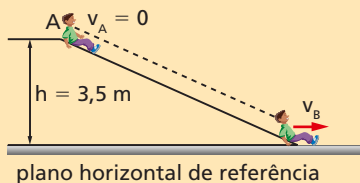
$$0,40 \cdot 10 \cdot 10 + \mathcal{W}_{F_{\text{ar}}} = \frac{0,40 \cdot (8,0)^2}{2} - 0$$

$$\mathcal{W}_{F_{\text{ar}}} = -27,2 \text{ J} \Rightarrow E_T = |\mathcal{W}_{F_{\text{ar}}}| \Rightarrow E_T = 27,2 \text{ J}$$

36. Uma criança se encontra a 3,5 m do solo, em repouso, num escorregador. Começa a escorregar e durante a queda há uma perda de 30% da energia mecânica inicial. Calcule a velocidade da criança ao chegar ao solo. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução:

Se, durante a queda, há uma perda de 30% da energia mecânica inicial (E_{M_A}), significa que a energia mecânica final (E_{M_B}) é 70% da inicial:



$$E_{M_B} = 70\% E_{M_A}$$

$$E_{C_B} + E_{P_B} = 0,70(E_{C_A} + E_{P_A})$$

$$\frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 = 0,70(0 + mgh)$$

$$v_B^2 = 1,4 \cdot g \cdot h$$

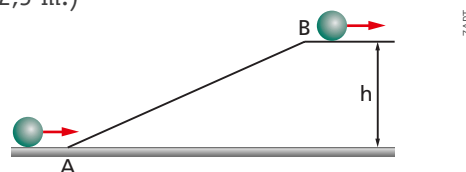
Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 3,5 \text{ m}$, vem:

$$v_B^2 = 1,4 \cdot 10 \cdot 3,5$$

$$v_B = 7,0 \text{ m/s}$$

37. Uma pedra de massa igual a 0,60 kg é lançada verticalmente para baixo com velocidade de 10 m/s, de uma altura de 20 m do solo. Sabendo que a pedra atinge o solo com velocidade de 20 m/s, determine a quantidade de energia mecânica transformada em térmica, durante a descida. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

38. Com que velocidade a esfera da figura deve passar pelo ponto A para chegar a B com velocidade de 5,0 m/s? No percurso \overline{AB} houve uma perda de 25% de energia mecânica. (Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 2,5 \text{ m}$.)



39. Na figura, os planos horizontais AB e CD e o plano inclinado BC são perfeitamente lisos. Duas pequenas esferas, dotadas de velocidades iguais $v_1 = 4,0 \text{ m/s}$, deslocam-se sobre o plano AB separadas por uma distância $d_1 = 2,0 \text{ m}$. Após descenderem o plano inclinado BC, as esferas passam a se deslocar no plano CD com velocidade v_2 e separadas por uma distância d_2 . Calcule v_2 e d_2 . (Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 1,0 \text{ m}$.)

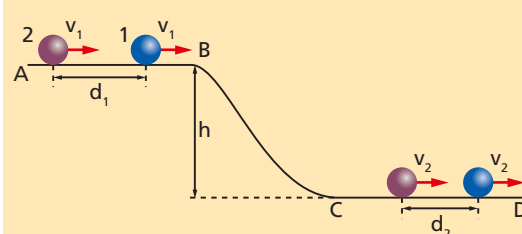


Figura a.

Resolução:

Para o cálculo da velocidade v_2 , aplicamos o Princípio da Conservação da Energia Mecânica, para uma das esferas, adotando o plano CD como plano de referência:

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} + mgh = \frac{m \cdot v_2^2}{2}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh$$

Sendo $v_1 = 4,0 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 1,0 \text{ m}$, vem:

$$v_2^2 = (4,0)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1,0 \Rightarrow v_2 = 6,0 \text{ m/s}$$

Cálculo da distância d_2 :

Considere a situação da figura b. À medida que a esfera 1 desce o plano inclinado, sua velocidade vai aumentando. A velocidade da esfera 2 permanece constante, e igual a v_1 , durante o intervalo de tempo $\Delta t = \frac{d_1}{v_1} = \frac{2,0 \text{ m}}{4,0 \text{ m/s}} = 0,50 \text{ s}$.

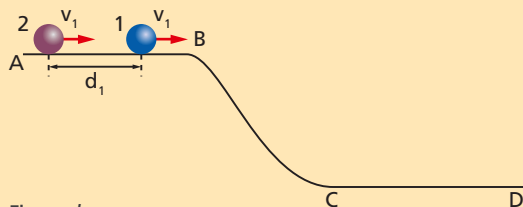


Figura b.

A partir daí, a esfera 2 atinge o ponto B e sua velocidade começa a aumentar. Quando a esfera 1 atinge o plano CD, sua velocidade passa a ser constante igual a v_2 . Como os intervalos de tempo de queda das esferas ao longo do plano inclinado são iguais, concluímos que, quando a esfera 2 atinge o plano CD, a esfera 1 já se deslocou uma distância d_2 , durante o intervalo de tempo $\Delta t = 0,50 \text{ s}$, anteriormente calculado. Assim:

$$d_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

$$d_2 = 6,0 \cdot 0,50 \Rightarrow d_2 = 3,0 \text{ m}$$

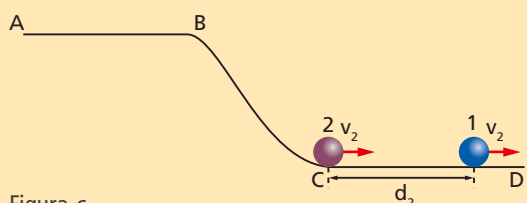
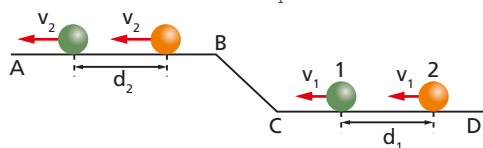


Figura c.

40. Os planos horizontais AB e CD e o plano inclinado BC são perfeitamente lisos. Duas esferas, dotadas de velocidades iguais a v_1 caminham sobre o plano CD separadas por uma distância d_1 . A velocidade v_1 é suficiente para fazê-las subir o plano inclinado e continuar em movimento no plano AB. Nesse plano as esferas se deslocam separadas por uma distância d_2 . Responda: d_2 é maior, menor ou igual a d_1 ? Justifique.



41. Considere a seção transversal de um semicilindro de raio R . Uma partícula é abandonada no ponto A e, ao atingir o ponto B, perde contato com o cilindro. Determine o valor do ângulo θ que define a posição do ponto B. Despreze os atritos.

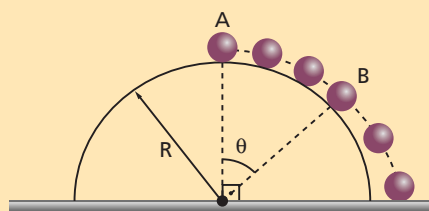


Figura a.

Resolução:

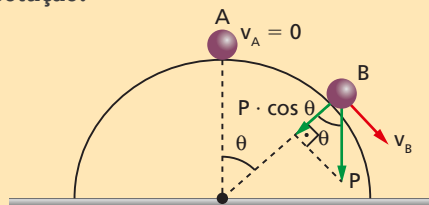


Figura b.

No ponto B, onde a partícula perde contato com o cilindro, a normal se anula. Assim, nesse ponto a resultante sobre a partícula é o seu peso \vec{P} . A resultante centrípeta tem intensidade $P \cdot \cos \theta$. Portanto:

$$P \cdot \cos \theta = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

$$m \cdot g \cdot \cos \theta = m \cdot \frac{v_B^2}{R} \Rightarrow g \cdot \cos \theta = \frac{v_B^2}{R} \quad (1)$$

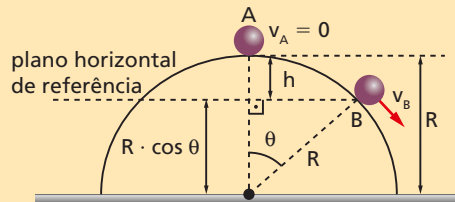


Figura c.

Por outro lado, a conservação da energia mecânica entre os pontos A e B, com o plano horizontal de referência passando por B, fornece:

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$0 + mgh = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0$$

$$m \cdot g(R - R \cdot \cos \theta) = \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

$$g \cdot R(1 - \cos \theta) = \frac{v_B^2}{2}$$

$$2g(1 - \cos \theta) = \frac{v_B^2}{R} \quad (2)$$

De (1) e (2), vem:

$$g \cdot \cos \theta = 2g(1 - \cos \theta)$$

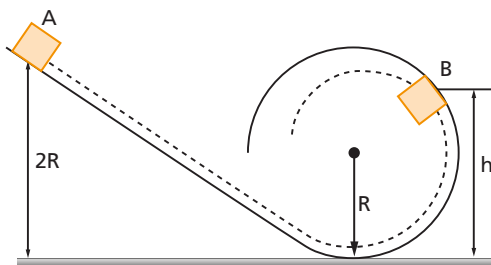
$$\cos \theta = 2 - 2 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{2}{3}$$

Consultando a tabela no CD da obra, tiramos:

$$\theta = 48^\circ$$

42. Um pequeno bloco é abandonado do repouso do ponto A de uma pista contida num plano vertical, com o formato mostrado na figura.



Desprezem-se os atritos. O trecho circular tem raio R . Determine, em função de R , a altura h que define a posição do ponto B, onde o bloco perde contato com a pista.

43. Um bloco de massa $5,0 \text{ kg}$ desloca-se sobre uma superfície horizontal lisa, com velocidade de 10 m/s , atingindo uma mola ideal de constante elástica $2,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, conforme a figura.



Determine a contração da mola, no instante em que a velocidade do bloco se anula. Despreze também a resistência do ar.

Resolução:

O sistema bloco-mola é conservativo e a energia cinética do bloco transforma-se em energia potencial elástica da mola:

$$E_c = E_p$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

$$x^2 = \frac{m \cdot v^2}{k}$$

Sendo $m = 5,0 \text{ kg}$, $v = 10 \text{ m/s}$ e $k = 2,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, vem:

$$x^2 = \frac{5,0 \cdot 10^2}{2,0 \cdot 10^3} \Rightarrow x = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

44. Um corpo de massa $2,0 \text{ kg}$ está em repouso, encostado em uma mola ideal que está comprimida $0,40 \text{ m}$. A constante elástica da mola é $2,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. Destrava-se a mola e o corpo é lançado. Determine a velocidade que o corpo adquire. Despreze os atritos.



45. Um pequeno bloco de massa $m = 2,5 \text{ kg}$ é abandonado em repouso a $3,0 \text{ m}$ acima de uma mola que possui constante elástica $k = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$, conforme mostra a figura. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a compressão máxima da mola. Despreze as perdas de energia mecânica.

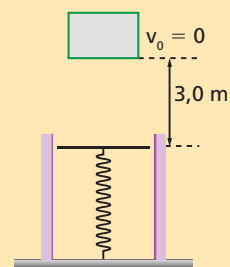


Figura a.

Resolução:

Vamos adotar como plano de referência, para medida da energia potencial gravitacional, o plano horizontal que passa pelo ponto em que a velocidade do bloco se anula. Nesse ponto, a mola está em sua compressão máxima.

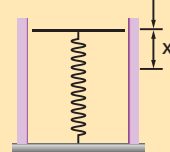
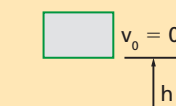


Figura b.

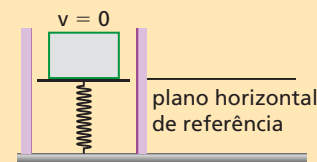


Figura c.

Nessas condições, a energia potencial gravitacional inicial do bloco, $mg(h + x)$, transforma-se em potencial elástica da mola, $\frac{kx^2}{2}$.

$$mg(h + x) = \frac{kx^2}{2}$$

Sendo $m = 2,5 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $h = 3,0 \text{ m}$, $k = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$, resulta:

$$2,5 \cdot 10 \cdot (3,0 + x) = \frac{2,0 \cdot 10^2 \cdot x^2}{2}$$

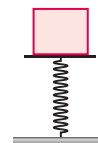
$$25 \cdot (3,0 + x) = 10^2 \cdot x^2$$

$$4,0x^2 - x - 3,0 = 0$$

$$x = \frac{1,0 \pm 7,0}{8,0}$$

Sendo $x > 0$, vem: $x = 1,0 \text{ m}$

46. Um corpo de massa $1,0 \text{ kg}$ está sobre uma mola comprimida $0,50 \text{ m}$. Determine a máxima altura, em relação à posição inicial, que o corpo atinge quando a mola é destravada. A constante elástica da mola é igual a $2,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze a resistência do ar.



47. O bloco A, de massa $m = 10 \text{ kg}$, é abandonado em repouso da posição indicada na figura a.

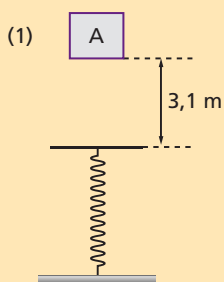


Figura a.

Sendo a constante elástica da mola k igual a $5,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a deformação que a mola sofre quando o bloco A atinge sua máxima velocidade;
- a máxima velocidade do bloco A;
- a máxima deformação da mola.

Despreze as perdas de energia mecânica.

Resolução:

- a) Abandonando o bloco, ele ficará sob ação de seu peso \vec{P} , somente até encontrar a mola (fig. b). A partir desse instante, além de \vec{P} , passa a agir no bloco a força elástica \vec{F}_{el} , cuja intensidade aumenta com a deformação da mola (fig. c). Enquanto $P > F_{el}$, o movimento do bloco é **acelerado**, atingindo a **velocidade máxima** quando $F_{el} = P$ (fig. d). A partir desse instante, $P < F_{el}$ e o movimento do bloco passa a ser retardado (fig. e), até que sua velocidade se anule.

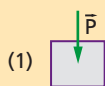


Figura b.

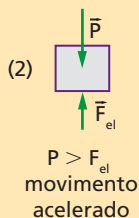


Figura c.

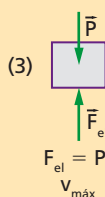
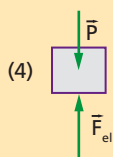


Figura d.



$F_{el} > P$
movimento retardado

Figura e.

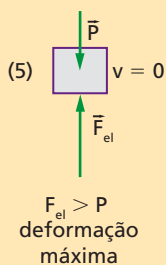


Figura f.

Portanto $v_{\text{máx}}$ ocorre quando $F_{el} = P$.

$$k \cdot x = m \cdot g$$

Sendo: $k = 5,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, vem:

$$5,0 \cdot 10^2 \cdot x = 10 \cdot 10$$

$$x = 0,20 \text{ m}$$

- b) Vamos adotar como plano de referência, para medida da energia potencial gravitacional, o plano horizontal que passa pelo ponto em que a velocidade do bloco é máxima.

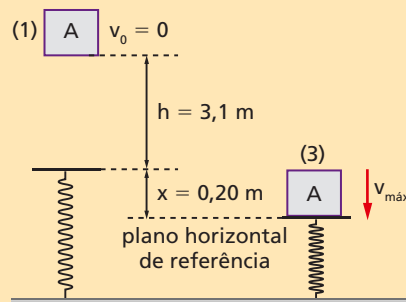


Figura g.

Nessas condições, a energia potencial gravitacional inicial do bloco, $mg(h + x)$, transforma-se em energia potencial elástica da mola, $\frac{kx^2}{2}$, e em energia cinética do bloco, $\frac{m \cdot v_{\text{máx}}^2}{2}$:

$$mg(h + x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{m \cdot v_{\text{máx}}^2}{2}$$

Sendo $m = 10 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $h = 3,1 \text{ m}$, $x = 0,20 \text{ m}$ e $k = 5,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$, vem:

$$10 \cdot 10 \cdot (3,1 + 0,20) = \frac{5,0 \cdot 10^2 \cdot (0,20)^2}{2} + \frac{10 \cdot v_{\text{máx}}^2}{2}$$

$$v_{\text{máx}} = 8,0 \text{ m/s}$$

- c) Cálculo da máxima deformação da mola. Ela ocorre no instante em que o bloco parar (posição 5) em que $v_A = 0$.

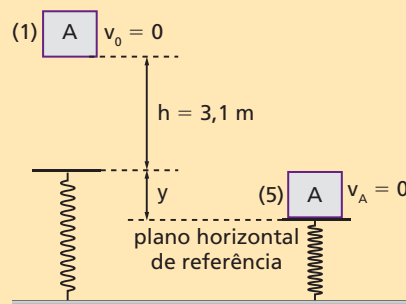


Figura h.

Entre as posições ① e ⑤ aplicamos o Princípio da Conservação da Energia Mecânica:

$$E_{M_1} = E_{M_5}$$

$$m \cdot g \cdot h_1 + \frac{mv_1^2}{2} = m \cdot g \cdot h_5 + \frac{mv_5^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Sendo $v_1 = 0$, $h_5 = 0$, $v_5 = 0$, $x = y$ (ver figura) e $h_1 = h + y$, vem:

$$m \cdot g \cdot (h + y) + 0 = 0 + 0 + \frac{ky^2}{2}$$

$$m = 10 \text{ kg}; g = 10 \text{ m/s}^2; k = 5,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$$

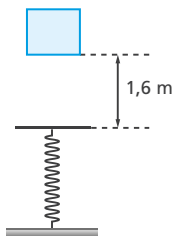
$$10 \cdot 10(3,1 + y) = \frac{5,0 \cdot 10^2 \cdot y^2}{2}$$

$$3,1 + y = 2,5y^2 \Rightarrow 2,5y^2 - y - 3,1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25y^2 - 10y - 31 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x_{\text{máx}} \cong 1,33 \text{ m}$$

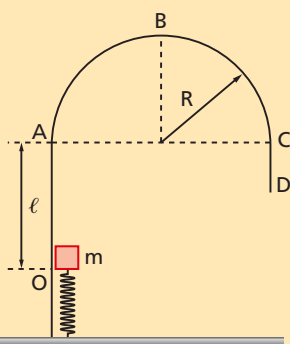
48. O bloco de massa $m = 8,0 \text{ kg}$ é abandonado em repouso da posição indicada na figura. A constante elástica da mola é $k = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze as perdas de energia mecânica.



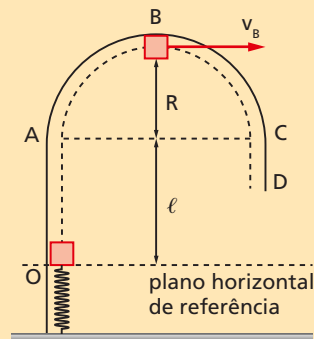
Determine:

- a máxima velocidade que o bloco atinge;
- a máxima deformação que a mola sofre.

49. Um pequeno bloco de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ é projetado para cima, da posição O , por uma mola ideal comprimida de $x = 0,50 \text{ m}$. Determine o mínimo valor da constante elástica k da mola, que permitirá ao bloco um contato permanente com a guia OABCD, ao longo da qual desliza sem atrito. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\ell = 3,0 \text{ m}$ e $R = 1,0 \text{ m}$.



Resolução:



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Não existe atrito, a mola é ideal e, desprezando qualquer outra força dissipativa, podemos admitir que o sistema seja conservativo.

O ponto crítico da trajetória é o ponto B . Adotando o plano horizontal de referência que passa por O , concluímos que a energia potencial elástica da mola em O , $\frac{kx^2}{2}$, é transformada em energia potencial gravitacional e energia cinética do bloco, em B , respectivamente: $mg(\ell + R)$ e $\frac{m \cdot v_B^2}{2}$.

Assim, temos: $\frac{kx^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot v_B^2}{2}$.

Observe que o mínimo valor de k corresponde a v_B mínimo. Sabemos que o mínimo valor da velocidade v_B , para que o bloco consiga efetuar a curva, é igual a \sqrt{Rg} . Portanto:

$$\frac{k_{\text{mín}} \cdot x^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot (v_{B\text{mín}})^2}{2}$$

$$\frac{k_{\text{mín}} \cdot x^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot (\sqrt{Rg})^2}{2}$$

$$\frac{k_{\text{mín}} \cdot x^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot g \cdot R}{2}$$

$$\frac{k_{\text{mín}} \cdot x^2}{2} = mg\left(\ell + \frac{3R}{2}\right)$$

$$k_{\text{mín}} = \frac{mg(2\ell + 3R)}{x^2}$$

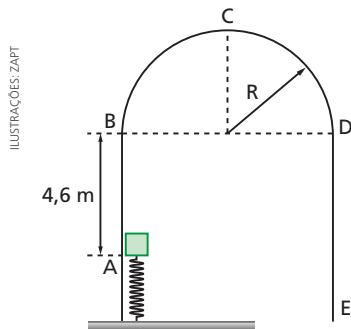
Sendo $m = 5,0 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\ell = 3,0 \text{ m}$, $R = 1,0 \text{ m}$ e $x = 0,50 \text{ m}$, vem:

$$k_{\text{mín}} = \frac{5,0 \cdot 10(2 \cdot 3,0 + 3 \cdot 1,0)}{(0,50)^2}$$

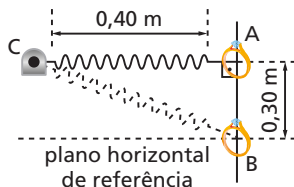
$$k_{\text{mín}} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

50. No esquema, ABCDE é um trilho liso cujo trecho BCD tem a forma de uma semicircunferência de raio $R = 3,6 \text{ m}$. Um bloco de massa $m = 4,0 \text{ kg}$ é colocado sobre uma mola ideal de constante elástica $k = 2,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}$, comprimida na posição A . Soltando-se o sistema, o bloco é empurrado pela mola e começa a subir. Sabendo

que $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a mínima compressão que a mola deve ter, na posição A, de modo que o bloco deslize por todo o trecho ABCDE sem perder contato com o trilho.



51. Um anel de massa $1,2 \text{ kg}$ desliza sem atrito ao longo de uma guia vertical AB. A mola ideal ligada no anel tem comprimento de $0,20 \text{ m}$, quando não deformada, e sua constante elástica é de 48 N/m . Abandonando-se o anel em repouso na posição A, determine sua velocidade na posição B, após descer $0,30 \text{ m}$. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.



52. Um bloco de massa m , ligado a uma mola presa a uma parede, oscila em torno de O , entre as posições A e B, sobre uma superfície sem atrito, como mostra a figura a.

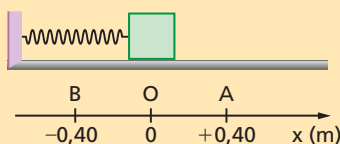


Figura a.

Seja $k = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ a constante elástica da mola, construa os gráficos:

- da energia potencial elástica E_p em função da deformação x ;
- da energia mecânica E_M em função de x ;
- da energia cinética E_c em função de x .

Resolução:

- a) A energia potencial elástica é dada por $E_p = \frac{kx^2}{2}$. Nessas condições, o gráfico de E_p em função de x é um arco de parábola, com a concavidade voltada para cima e passando pela origem.

ponto O:

$$x = 0 \Rightarrow E_{p_0} = 0$$

ponto A:

$$x = +0,40 \text{ m}$$

$$E_{p_A} = \frac{kx^2}{2} = \frac{2,0 \cdot 10^2 \cdot (0,40)^2}{2} \Rightarrow E_{p_A} = 16 \text{ J}$$

ponto B:

$$x = -0,40 \text{ m} \Rightarrow E_{p_B} = 16 \text{ J}$$

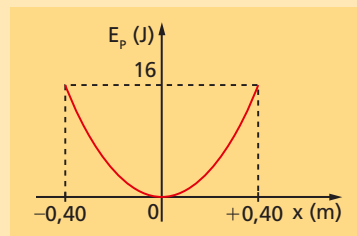


Figura b.

- b) A energia mecânica permanece constante. Nos pontos A e B, a energia potencial elástica é igual a 16 J e, nesses pontos, como a velocidade do bloco é nula, a energia cinética é nula. Assim, a energia mecânica é constante e igual a 16 J . Temos, então, o gráfico da figura c.

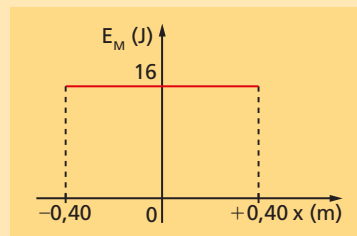


Figura c.

- c) Sendo $E_M = E_c + E_p$, vem: $E_c = E_M - E_p$ e $E_c = 16 - \frac{kx^2}{2}$.

Nessas condições, o gráfico de E_c em função de x é, também, um arco de parábola, mas com concavidade voltada para baixo:

ponto O: $E_{p_0} = 0$; $E_{c_0} = 16 \text{ J}$

ponto A: $E_{p_A} = 16 \text{ J}$; $E_{c_A} = 0$

ponto B: $E_{p_B} = 16 \text{ J}$; $E_{c_B} = 0$

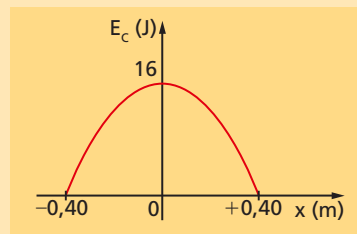
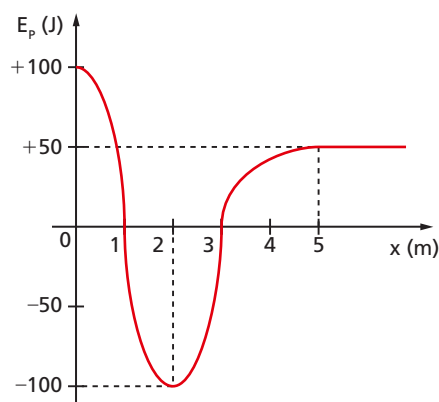


Figura d.

53. Um ponto material de massa $m = 4,0 \text{ kg}$ se movimenta num campo de forças conservativo. Sua energia mecânica é igual a 100 J e o gráfico de sua energia potencial em função da distância x é dado na figura ao lado. Determine:

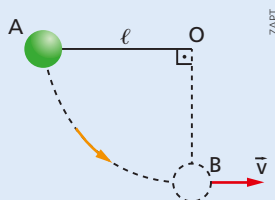
- a energia cinética do ponto material, para $x = 0$ e para $x = 1,0 \text{ m}$;
- a velocidade do ponto material, quando $x = 2,0 \text{ m}$ e quando $x = 5,0 \text{ m}$.



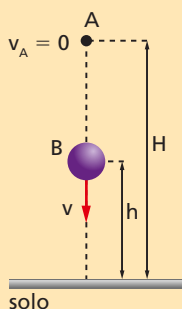
Exercícios de Reforço

54. Um pêndulo simples de comprimento ℓ , cuja esferinha tem massa m , é abandonado do repouso em posição horizontal, passando pela posição vertical com velocidade escalar máxima v . Para que não arrebente o fio, este deve resistir a uma tração de intensidade igual a:

- $\frac{m \cdot g}{2}$
- $m \cdot g$
- $3m \cdot g$
- $\frac{3m \cdot g}{2}$
- $4m \cdot g$



55. Uma pequena esfera é abandonada em queda livre de uma altura inicial H , num local em que a gravidade tem módulo g . São desprezíveis as forças dissipativas. Ao passar por um ponto B , verificou-se que sua energia cinética era o dobro da potencial. Determine a altura h correspondente ao ponto B .



Resolução:

Aplicando o Princípio da Conservação da Energia Mecânica entre A e B:

$$E_{M_A} = E_{M_B}$$

$$m \cdot g \cdot h_A + \frac{m \cdot v_A^2}{2} = m \cdot g \cdot h_B + \frac{m \cdot v_B^2}{2} \quad (\div m)$$

Temos: $h_A = H$; $h_B = h$; $v_A = 0$; $v_B = v$.

$$g \cdot H + 0 = g \cdot h + \frac{v^2}{2}$$

$$2gH = 2gh + v^2 \quad (1)$$

Em B, temos:

$$E_{c_B} = 2E_{p_B}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = 2 \cdot m \cdot g \cdot h \Rightarrow v^2 = 4gh \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$2gH = 2gh + 4gh \quad (\div 2g)$$

$$H = h + 2h \Rightarrow H = 3h \Rightarrow h = \frac{H}{3}$$

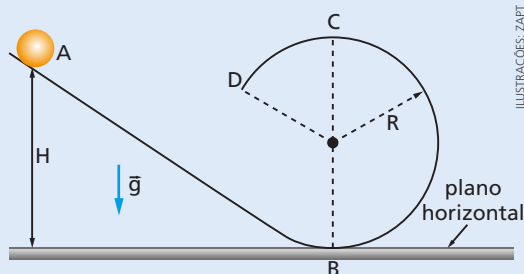
56. (OBF-Brasil) Um esquimó está no ponto mais alto do iglu semiesférico onde mora, como mostrado na figura. Ele desce ao longo da superfície do iglu de cima para baixo que tem um coeficiente de atrito cinético aproximadamente igual a zero e com velocidade inicial desprezível.



Para um iglu de raio $3,75 \text{ m}$, encontre:

- a altura a partir do chão onde o esquimó perde contato com a superfície do iglu;
- o módulo da velocidade do esquimó no ponto onde ele perde contato com a superfície do iglu.

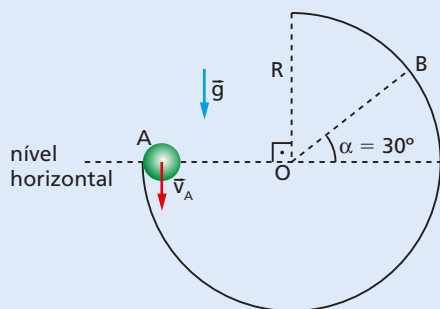
57. (AFA-SP) Uma partícula de massa M escorrega livremente sobre uma superfície sem atrito e percorre um trilho circular e vertical de raio $R = 40$ cm, conforme mostra a figura. O trilho termina no ponto D .



A partícula parte do repouso do ponto A e só se destaca do trilho no ponto D .

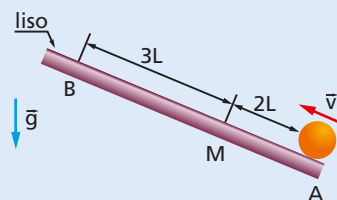
Determine, adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando o efeito do ar:

- a mínima velocidade possível no ponto C ;
 - a mínima velocidade possível no ponto B ;
 - o mínimo valor da altura H .
58. Um corpo é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial v , num local onde a aceleração da gravidade tem módulo g . Desprezando o atrito do ar e a força de arrastamento do vento, determine em que altura a sua energia potencial gravitacional é cinco vezes a sua energia cinética. Despreze a altura inicial de lançamento.
- $\frac{v^2}{g}$
 - $\frac{5v^2}{6g}$
 - $\frac{5v^2}{12g}$
 - $\frac{v^2}{5g}$
 - $\frac{v^2}{12g}$
59. Temos uma calha cuja secção reta é vertical, como mostra a figura. Uma esferinha é lançada verticalmente para baixo, a partir do ponto A , com velocidade de módulo $v_A = 6 \text{ m/s}$. A esferinha passa pelo ponto B sem se desprender da calha. São dados: a massa da esferinha $m = 200 \text{ g}$, o módulo da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$, o raio da calha $R = 2 \text{ m}$.

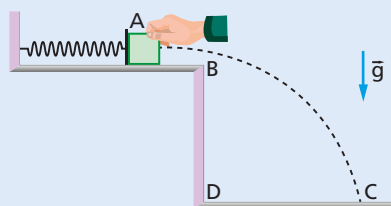


Considerando que não existe atrito no interior da calha, determine:

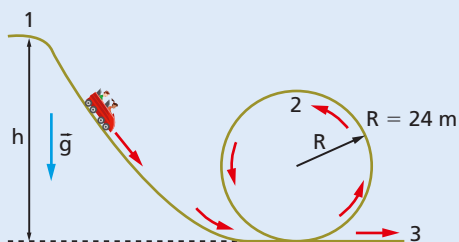
- a energia potencial da esferinha ao passar pelo ponto B , em relação ao nível horizontal que passa por A e O ;
 - a velocidade escalar com que ela passou pelo ponto B .
60. Numa rampa lisa, uma esferinha foi lançada com velocidade $v = 5 \text{ m/s}$ a partir da posição A e atingiu a posição B , de onde retornou. Determine a sua velocidade escalar ao passar pelo ponto M no retorno. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- $\sqrt{5} \text{ m/s}$
 - $\sqrt{15} \text{ m/s}$
 - $2\sqrt{15} \text{ m/s}$
 - $\sqrt{10} \text{ m/s}$
 - $3\sqrt{15} \text{ m/s}$



61. No esquema da figura temos um bloco comprimindo uma mola ideal, não conectada a ela. Se soltarmos o bloco, ele vai deslizar sobre a mesa horizontal sem atrito e, ao atingir B , deverá entrar em queda livre, chegando ao solo na posição C . As dimensões do bloco são desprezíveis e durante a sua queda a resistência do ar também será desprezível. São dados: constante elástica da mola: $k = 100 \text{ N/m}$; compressão da mola: $x = 20 \text{ cm}$; massa do bloco: $m = 1,0 \text{ kg}$; altura $BD = 5,0 \text{ m}$; aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$. Adote: $\sqrt{26} \approx 5,1$.



- Determine:
 - a duração da queda livre;
 - as velocidades escalares do bloco em B e em C .
 - Recalcule a velocidade em C , sem usar a velocidade em B , isto é, usando o Princípio da Conservação da Energia Mecânica desde o repouso em A até C . Por que os valores encontrados foram iguais?
62. (UE-CE) Um carrinho de montanha-russa tem velocidade igual a zero na posição 1, indicada na figura, e desliza no trilho, sem atrito, completando o círculo até a posição 3.

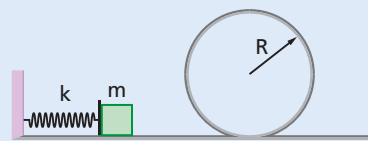


ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

A menor altura h , em metros, para o carro iniciar o movimento sem que venha a sair do trilho na posição 2 é:

- a) 36 b) 48 c) 60 d) 72

63. (UF-ES) Um bloco de massa m é lançado, por uma mola de constante elástica k , ao longo de um trilho. O trilho faz um *loop* de raio R , como mostra a figura.



Sendo qualquer forma de atrito desprezível, o menor comprimento de compressão que deve sofrer a mola, para que o bloco não perca contato com o trilho, é de:

- a) $\sqrt{\frac{mRg}{2k}}$ d) $\frac{2mRg}{k}$
 b) $\sqrt{\frac{mRg}{k}}$ e) $\frac{5mRg}{k}$
 c) $\sqrt{\frac{5mRg}{k}}$

6. Dissipação de energia mecânica

Em determinadas situações pode ocorrer dissipação de energia mecânica, como no caso de um bloco deslizando numa superfície com atrito, um corpo caindo quando a resistência do ar não é nula, etc.

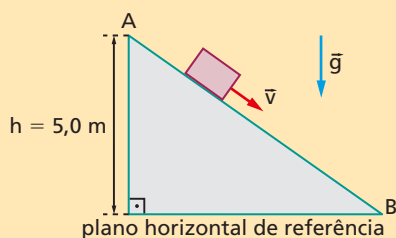
Quando uma força dissipativa realiza trabalho sobre o corpo, não podemos usar o Princípio da Conservação da Energia Mecânica, mas sim a seguinte estratégia:

- 1º) Calculamos a quantidade de energia mecânica inicial do corpo.
- 2º) Calculamos a quantidade de energia mecânica final do corpo.
- 3º) Comparando os dois resultados, verificamos que a primeira é maior que a segunda, justamente por causa do trabalho das forças dissipativas.
- 4º) A diferença entre a primeira parcela de energia mecânica e a segunda nos dá o trabalho das forças dissipativas ou a quantidade de energia dissipada.

$$E_{\text{dis}} = E_{M_1} - E_{M_2}$$

Exercícios de Aplicação

64. Um bloco de massa 2,0 kg desliza num plano inclinado com atrito, como nos mostra a figura. Tendo partido da posição A com velocidade escalar nula, atingiu a posição B com velocidade escalar igual a 8,0 m/s. Usando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a energia mecânica dissipada de A até B.



Resolução:

Adotando o plano horizontal do solo como referência, a energia mecânica em A é:

$$E_{M_A} = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

$$E_{M_A} = 2,0 \cdot 10 \cdot 5,0 + 0 \Rightarrow E_{M_A} = 100 \text{ J}$$

Ao atingir B, a energia mecânica é:

$$E_{M_B} = m \cdot g \cdot h_B + \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

$$E_{M_B} = 0 + \frac{2,0 \cdot 8,0^2}{2} \Rightarrow E_{M_B} = 64 \text{ J}$$

Observemos que a energia mecânica em A é maior que a final em B . Façamos a diferença das duas e obteremos a energia dissipada pelo atrito, desde A até B .

$$E_{\text{dis}} = E_{M_A} - E_{M_B}$$

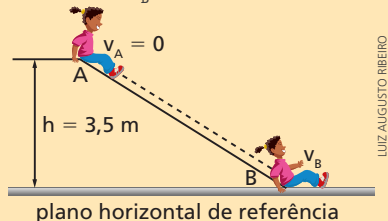
$$E_{\text{dis}} = 100 \text{ J} - 64 \text{ J} \Rightarrow E_{\text{dis}} = 36 \text{ J}$$

Observemos que a quantidade de energia dissipada é 36 J e não há necessidade de se usar sinal negativo ou positivo. É um valor absoluto. No entanto, se nos fosse pedido o trabalho do atrito, desde A até B , aí, sim, este seria negativo: $\mathcal{W}_{\text{at}} = -36 \text{ J}$.

65. Uma criança se encontra a 3,5 m do solo, em repouso, num escorregador. Começa a escorregar e durante a queda há uma perda de 30% de energia mecânica inicial. Calcule a velocidade da criança ao chegar ao solo. É dado $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução:

Se, durante a queda, há perda de 30% da energia mecânica inicial (E_{M_A}), significa que a energia mecânica final (E_{M_B}) é 70% da inicial:



$$E_{M_B} = 70\% E_{M_A}$$

$$E_{c_B} + E_{p_B} = 0,70(E_{c_A} + E_{p_A})$$

$$\frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 = 0,70(0 + mgh)$$

$$v_B^2 = 2 \cdot 0,70 \cdot g \cdot h$$

Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 3,5 \text{ m}$, vem:

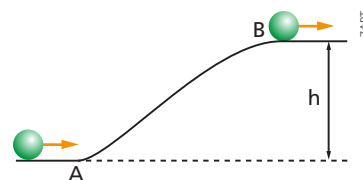
$$v_B^2 = 2 \cdot 0,70 \cdot 10 \cdot 3,5$$

$$v_B = 7,0 \text{ m/s}$$

66. Uma pedra de massa igual a 0,60 kg é lançada verticalmente para baixo com velocidade de 10 m/s de uma altura de 20 m do solo. Sabendo que a pedra atinge o solo com velocidade de 20 m/s, determine a quantidade de energia mecânica transformada em térmica, durante a descida. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

67. Com que velocidade a esfera da figura deve passar pelo ponto A para chegar a B com velocidade de 5,0 m/s? No percurso \overline{AB} houve uma perda de 25% de energia mecânica. Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $h = 2,5 \text{ m}$; massa da esfera: $m = 0,20 \text{ kg}$.

- 5,0 m/s
- 7,5 m/s
- 10 m/s
- 20 m/s
- 25 m/s



7. Potência

Em muitas situações-problema é importante sabermos com que rapidez um sistema A está transferindo energia para outro sistema B . Para medirmos essa rapidez, definiremos uma grandeza física denominada **potência**.

Seja ΔE o fluxo de energia transferido de A para B , num intervalo de tempo Δt . Define-se potência média como sendo o quociente:

$$P_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

①

A energia pode se apresentar sob diversas formas: elétrica, mecânica, térmica, eólica, etc. Assim se pode falar em:

- potência mecânica de um motor de automóvel;
- potência elétrica de um chuveiro elétrico;
- potência térmica da chama de um "bico" do fogão a gás da cozinha;
- potência luminosa de uma lâmpada;
- potência eólica do vento que faz girar as pás de um gerador de uma usina eólica de eletricidade.

Potência mecânica

Vamos estudar inicialmente a potência mecânica, que está relacionada com o fluxo de energia mecânica, ou seja, com o trabalho realizado por uma força. Conceitualmente, a potência mecânica é a medida da rapidez com que uma força realiza um trabalho. Podemos também estender esse conceito a uma máquina que realiza trabalho mecânico.

Potência mecânica média

Se uma força realiza um trabalho \mathcal{G} num intervalo de tempo Δt , a potência média desenvolvida nesse intervalo de tempo é:

$$P_m = \frac{\mathcal{G}}{\Delta t} \quad (2) \quad (\text{potência média})$$

Unidade de potência no SI

No SI o trabalho é medido em **joules (J)** e o tempo em **segundos (s)**. Resulta que a potência deve ser medida em J/s (joule por segundo). A unidade J/s recebeu o nome de **watt (W)** em homenagem a James Watt (1736-1819).

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} \Rightarrow 1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} \quad (\text{leia-se: um watt-segundo})$$

Deixamos a cargo do leitor, como exercício, a determinação da equação dimensional da potência.

NOTE BEM

Por extenso:
watt, com letras minúsculas.
Símbolo: **W**, com letra maiúscula.

Exemplo 5

- a) Se uma força realizar um trabalho de 400 J num intervalo de tempo de 40 s, a potência média dessa força será de:

$$P_m = \frac{\mathcal{G}}{\Delta t} = \frac{400 \text{ J}}{40 \text{ s}} = 10 \frac{\text{J}}{\text{s}} \Rightarrow P_m = 10 \text{ W}$$

- b) Se um guindaste erguer a carga em 2 minutos, realizando um trabalho de 180 kJ, a potência média realizada por ele será dada por:

$$P_m = \frac{\mathcal{G}}{\Delta t} = \frac{180 \text{ kJ}}{120 \text{ s}} \Rightarrow P_m = 1,5 \frac{\text{kJ}}{\text{s}} \Rightarrow P_m = 1,5 \text{ kW}$$

Potência mecânica instantânea

Conceitualmente, a potência instantânea corresponde à potência para um dado instante t . No entanto, a nossa definição é para um dado intervalo de tempo. Devemos então calcular a potência média num intervalo de tempo muito pequeno, por isso dizemos: tendendo a zero. Calculando-se o limite da potência média, para Δt tendendo a zero ($\Delta t \rightarrow 0$) os valores médios passam a ser valores instantâneos. Escrevemos:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}}{\Delta t}$$

Não há necessidade de desenvolvermos esse limite. Vamos fazer uma analogia com a Cinemática: a velocidade instantânea também foi definida por um limite e, no entanto, foram usadas outras estratégias para que este não precisasse ser calculado.

O cavalo-vapor e o horsepower

O cavalo-vapor (**cv**) e o *horsepower* (**HP** ou **hp**) são unidades de potência que não pertencem ao SI, mas são muito usadas, principalmente na indústria mecânica. Motores, em geral, têm sua potência nominal dada em HP.

O cavalo-vapor equivale à potência de uma força que realiza o trabalho de erguer o peso de 75 kgf à razão de 1 metro por segundo.

$$1_{cv} = \frac{75 \text{ kgf} \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ s}} \Rightarrow 1_{cv} = \frac{75 \cdot 9,8 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 735 \text{ W}$$

O *horsepower* significa, ao pé da letra, potência de um cavalo. Trata-se de uma unidade inglesa definida por James Watt, que estimou que um bom cavalo fosse capaz de realizar um trabalho de 33 000 pés · libra em 1 minuto, puxando carrinhos em minas de carvão.

$$1 \text{ HP} = \frac{33\,000 \text{ pés} \cdot \text{lb}}{1 \text{ min}} \Rightarrow 1 \text{ HP} = \frac{33\,000 \text{ pés} \cdot \text{lb}}{60 \text{ s}} = 550 \frac{\text{pés} \cdot \text{lb}}{\text{s}} = 746 \text{ W}$$

O símbolo do *horsepower*, por não ser unidade SI, não segue a regra geral de abreviação, que deveria ser hp. No entanto; não existe uma regra oficial, alguns autores usam HP. Na indústria automobilística, por exemplo, os engenheiros usam HP.

Resumindo:

$$\begin{aligned} 1 \text{ cv} &= 735 \text{ W} \\ 1 \text{ HP ou } 1 \text{ hp} &= 746 \text{ W} \end{aligned}$$

Potência e velocidade para uma força constante

Para o caso particular de uma força constante \vec{F} que atua sobre um corpo, fazendo ângulo θ com o deslocamento (fig. 17) e realizando um trabalho \mathcal{G} dentro de um intervalo de tempo Δt , temos:

$$\mathcal{G} = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

A potência média é:

$$P_m = \frac{\mathcal{G}}{\Delta t} = \frac{F \cdot d \cdot \cos \theta}{\Delta t} \quad (3)$$

Mas o quociente $\left(\frac{d}{\Delta t}\right)$ é o módulo da velocidade média v_m :

$$\frac{d}{\Delta t} = v_m \quad (4)$$

Substituindo-se na equação anterior:

$$P_m = F \cdot v_m \cdot \cos \theta \quad (5) \quad (\text{potência média})$$

Usando-se o limite, chega-se a:

$$P = F \cdot v \cdot \cos \theta \quad (6) \quad (\text{potência instantânea})$$

Na equação (6), o ângulo θ deve ser medido entre a força \vec{F} e o vetor velocidade \vec{v} (fig. 18), e v é o módulo da velocidade vetorial instantânea.

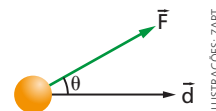


Figura 17.

ILUSTRAÇÕES: ZAPET

OBSERVAÇÃO

Embora a equação (6) tenha sido demonstrada para um caso particular em que a força é constante, ela pode ser estendida para o caso em que \vec{F} é uma força variável. Essa demonstração deve ser feita com o uso do Cálculo Integral.

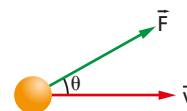


Figura 18.

Alguns casos particulares

1º) Quando a trajetória for retilínea e a força resultante \vec{F} tiver o mesmo sentido do movimento (fig. 19), teremos:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta = \cos 0^\circ = 1$$

A potência instantânea dessa força resultante \vec{F} será:

$$P = F \cdot v$$

2º) Quando o movimento for circular e uniforme (fig. 20), a força \vec{F} será perpendicular a \vec{v} , ou seja, será uma força centrípeta. Teremos:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

$$P = F \cdot v \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow P = 0$$

Como vimos no capítulo 17, também será nulo o trabalho da força centrípeta.

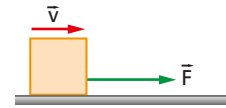


Figura 19.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

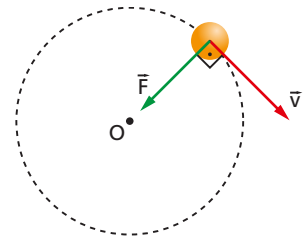


Figura 20.

Gráfico da potência em função do tempo

Inicialmente vamos considerar o caso em que a potência instantânea é constante e, portanto, igual à potência média para qualquer intervalo de tempo considerado. O gráfico da potência em função do tempo é uma reta paralela ao eixo do tempo, como ilustra a figura 21.

$$P = P_m = \frac{\mathcal{G}}{\Delta t}$$

$$\mathcal{G} = P \cdot \Delta t \quad (1)$$

Observemos o retângulo colorido em azul da figura 21. Sua área é dada por:

$$A = b \cdot h \Rightarrow A \stackrel{N}{=} \Delta t \cdot P \quad (2)$$

Se compararmos as equações (1) e (2), concluiremos que o lado direito da (1) é igual ao lado direito da (2). Então:

$$\mathcal{G} \stackrel{N}{=} A$$

Conclusão:

No diagrama potência-tempo a área sob o gráfico é numericamente igual ao trabalho.

Essa propriedade também é verdadeira para a potência variável com o tempo (fig. 22a). Nesse caso “fatiamos” a região colorida e a dividimos em diversos retângulos de base muito pequena, como é mostrado na figura 22b.

Cada retângulo tem área igual ao trabalho realizado naquele pequeno intervalo de tempo. Assim, o somatório de todas as áreas nos dá a área total A indicada no gráfico da figura 22a, portanto o trabalho \mathcal{G} é numericamente igual à área sob o gráfico.

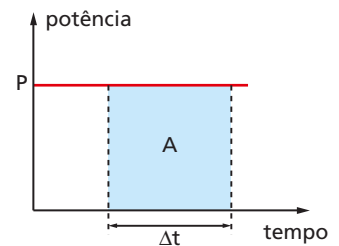


Figura 21.

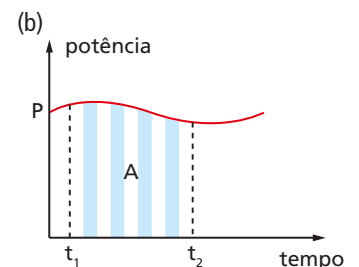
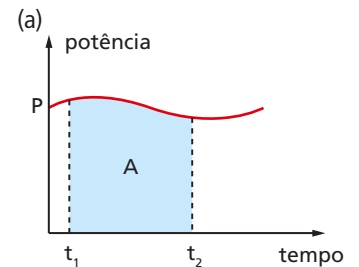


Figura 22.

Outras formas de energia

Embora o nosso assunto seja a energia mecânica, vamos mostrar alguns exemplos envolvendo potência para outras formas de energia.

- 1º) Para os aparelhos que funcionam com energia elétrica (chuveiro, máquina de lavar roupa, liquidificador, lâmpada, etc.), define-se uma potência operacional ou potência nominal, medida em watt ou kW. Mas o interessante é a unidade que se usa para medir a energia elétrica: o quilowatt-hora (kWh), que corresponde ao quilowatt (kW) multiplicado pela hora (h).

$$\Delta E = P \cdot \Delta t$$

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h}$$

Para o cálculo do consumo de energia elétrica do aparelho, multiplica-se a sua potência operacional pelo tempo de funcionamento.

Na conta de energia elétrica, o consumo de energia é medido em quilowatt-hora.

- 2º) No nosso cotidiano, o simples uso de um fogão a gás envolve o conceito de potência térmica. Precisamos saber qual é o “bico” que nos fornece maior potência para cozinhar mais rapidamente um alimento. Geralmente os manuais trazem as especificações de cada um em calorias por minuto (cal/min).
- 3º) Quando selecionamos uma lâmpada para uso em determinado local, a sua potência é decisiva, pois desta depende o brilho da lâmpada. Como exemplo, observemos as duas lâmpadas A e B da figura 23: a lâmpada A tem menor potência que a lâmpada B. Isso significa que, uma vez corretamente ligadas, a lâmpada B brilhará mais que a lâmpada A.

NOTE BEM

Na unidade kWh, escrevemos: **k** (minúsculo), **W** (maiúsculo), **h** (minúsculo). Não se pronuncia **kW** por hora, mas sim “**quilowatt-hora**”.

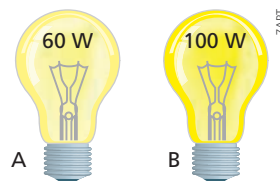


Figura 23.

Exercícios de Aplicação

68. Se uma pessoa de 60 kg subir uma escada de 10 degraus, com 25 cm de altura cada um, em 30 s e com velocidade escalar constante, qual é a potência média desenvolvida pelo seu corpo? (Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

Resolução:

$$m = 60 \text{ kg}; h = 10 \cdot 0,25 \text{ m} = 2,5 \text{ m}$$

$$P_m = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{60 \cdot 10 \cdot 2,5}{30} \Rightarrow P_m = \frac{1500 \text{ J}}{30 \text{ s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_m = 50 \text{ W}$$

69. Uma força realiza um trabalho de 120 J no intervalo de tempo de 0,5 minuto. Podemos afirmar que:
- a) a potência média dessa força é 240 W.
 - b) a potência instantânea dessa força é 240 W.
 - c) a potência média dessa força é de 4,0 W e, portanto, dentro desse intervalo de tempo, a potência em qualquer instante também é de 4,0 W.
 - d) num intervalo de tempo de 1,0 minuto a força teria realizado um trabalho de 240 W.
 - e) a potência média nesse intervalo de tempo é 4,0 W.

70. Usando as grandezas fundamentais massa M , comprimento L e tempo T , faça o que se pede:

- deduza as equações dimensionais da energia $[E]$ e da potência $[P]$;
- usando a equação dimensional da potência, relacione o watt com o metro, o quilograma e o segundo.

71. Uma força \vec{F} que atua sobre um corpo tem a intensidade variando com o tempo, como representado no gráfico da figura a. No instante $t = 2,0 \text{ s}$ a velocidade do corpo tem módulo $v = 5,0 \text{ m/s}$ e o ângulo entre a força e a velocidade é mostrado na figura b. Sabendo que $\cos 37^\circ = 0,8$, calcule a potência da força \vec{F} no instante $t = 2,0 \text{ s}$.

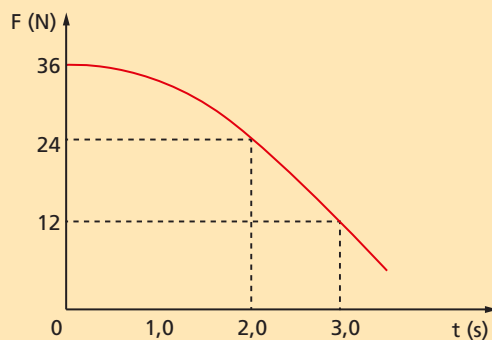


Figura a.

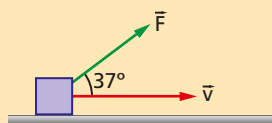


Figura b.

Resolução:

Da leitura do gráfico (figura a), temos:

$$t = 2,0 \text{ s} \Rightarrow F = 24 \text{ N}$$

$$P = F \cdot v \cdot \cos \theta$$

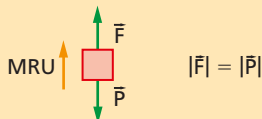
$$P = (24 \text{ N}) \cdot (5,0 \text{ m/s}) \cdot 0,8 \Rightarrow P = 96 \text{ W}$$

72. Uma partícula está submetida à ação de uma força de intensidade 8,0 N e num dado instante T_1 a sua velocidade tem módulo $v = 7,0 \text{ m/s}$, sendo de 60° o ângulo entre o vetor velocidade e o vetor força. Nesse instante a potência da força é P_1 . Em um segundo instante T_2 , a força e a velocidade têm as intensidades dobradas, mantendo-se, no entanto, o ângulo de 60° . A nova potência nesse segundo instante é P_2 . Podemos afirmar que:

	P_1	P_2
a)	28 W	28 W
b)	56 W	112 W
c)	28 W	56 W
d)	14 W	28 W
e)	28 W	112 W

73. Um motor de 2,0 cv, usando sua máxima potência, ergue um corpo de 1,0 t durante 20 s, em MRU. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine o deslocamento vertical.

Resolução:



$$P_{\text{ot}} = 2,0 \text{ cv} = 2,0 \cdot 735 \text{ W} = 1470 \text{ W}$$

$$\mathcal{W} = m \cdot g \cdot h; m = 1,0 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$$

$$\Delta t = 20 \text{ s}$$

$$P_{\text{ot}} = \frac{\mathcal{W}}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{W} = P_{\text{ot}} \cdot \Delta t$$

$$m \cdot g \cdot h = P_{\text{ot}} \cdot \Delta t$$

$$1000 \cdot 10 \cdot h = 1470 \cdot 20$$

$$h = 2,94 \text{ m}$$

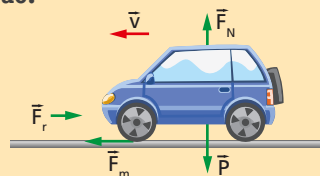
Observação: preferimos abreviar a potência por P_{ot} para não confundir com o peso.

74. Numa estrada retilínea e horizontal um carro se movimenta em MRU com velocidade escalar de

54 km/h. Venta muito em sentido contrário ao do movimento do carro. Sabendo que o motor do carro desenvolve uma potência de 30 kW, determine:

- a) a intensidade da força motora \vec{F}_m ;
b) a intensidade da força \vec{F}_r de resistência do vento que se opõe ao movimento.

Resolução:



Estão atuando as seguintes forças: \vec{P} = peso do carro; \vec{F}_N = força normal; \vec{F}_m = força motora; \vec{F}_r = força de resistência do vento.

O trabalho realizado pela força normal e pela força peso é nulo, pois elas são perpendiculares ao deslocamento. Logo, a potência dessas forças é nula.

- a) Para a força motora temos:

$$P_{\text{ot}} = 30 \text{ kW} = 30 \cdot 10^3 \text{ W}; v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P_{\text{ot}} = F_m \cdot v$$

$$30 \cdot 10^3 = F_m \cdot 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_m = 2,0 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \text{ou} \quad F_m = 2,0 \text{ kN}$$

- b) Para calcularmos a força de resistência do ar, basta verificarmos o tipo de movimento do carro: MRU. Esse é o único movimento em que a força resultante é nula. Logo as forças opostas \vec{F}_r e \vec{F}_m terão módulos iguais e se anulam. Então:

$$F_r = F_m = 2,0 \text{ kN}$$

75. Um automóvel num trecho reto e horizontal tem velocidade escalar constante de 10 m/s, apesar de atuar sobre ele uma força resistente total de intensidade $2,5 \cdot 10^3 \text{ N}$. Determine a potência necessária para mantê-lo em movimento.

76. Uma usina hidrelétrica foi construída para aproveitar uma queda-d'água de 20 m de altura. Se a vazão da água é de $1,5 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$, qual a potência disponível, supondo que não haja perdas? (Dados: densidade da água $d = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

Resolução:

A potência disponível é $P = \frac{\mathcal{W}}{\Delta t}$, em que $\mathcal{W} = m \cdot g \cdot h$ é o trabalho da gravidade. Sendo a densidade $d = \frac{m}{V}$, em que V é o volume, resulta $m = d \cdot V$ e, portanto, $\mathcal{W} = dVgh$.

Assim: $P = \frac{dVgh}{\Delta t}$.

Sendo $\frac{V}{\Delta t} = Z$ (vazão), vem:

$$P = d \cdot Z \cdot g \cdot h$$

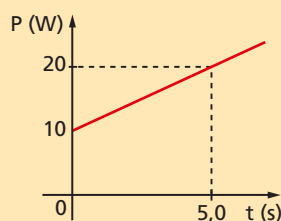
Fazendo $d = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $Z = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$,
 $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 20 \text{ m}$, vem:

$$P = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 20$$

$$P = 3,0 \cdot 10^8 \text{ W}$$

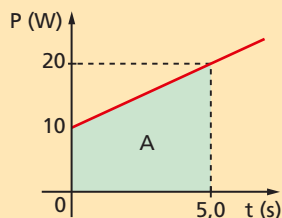
77. A potência disponível de uma queda-d'água de 10 m de altura é de $2,0 \cdot 10^6 \text{ W}$. Determine a vazão da água em m^3/s . Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade da água $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

78. A potência P de uma força varia com o tempo de acordo com o gráfico ao lado. Qual o trabalho realizado pela força entre os instantes 0 e 5,0 s?



Resolução:

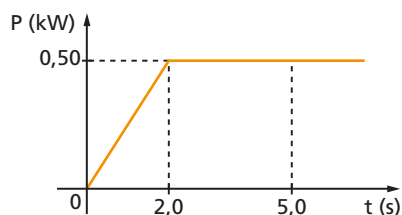
O trabalho realizado pela força, desde o instante zero até o instante 5,0 s, é numericamente igual à área A do trapézio indicado pela cor verde:



$$A = \frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura}$$

$$A \approx \frac{20 + 10}{2} \cdot 5,0 = 75 \Rightarrow \mathcal{W} = 75 \text{ J}$$

79. A potência de um motor, em função do tempo, está representada no gráfico abaixo.



Determine o trabalho realizado pela força motora nos intervalos de tempo:

- a) 0 a 2,0 s; b) 2,0 s a 5,0 s.

80. Os aparelhos elétricos de potência P , mostrados nas imagens a seguir, permaneceram em funcionamento durante um intervalo de tempo Δt , cujos valores estão indicados. Determine a energia elétrica que cada aparelho consumiu, bem como a energia elétrica total consumida.



100 W
1,0 h



4,0 kW
15 min



1,5 kW
20 min

Resolução:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Rightarrow \Delta E = P \cdot \Delta t$$

Usando-se a potência em kW e o tempo em horas:

• liquidificador: $P_1 = 0,10 \text{ kW}$ $\Delta t_1 = 1,0 \text{ h}$

• chuveiro elétrico: $P_2 = 4,0 \text{ kW}$ $\Delta t_2 = \frac{1}{4} \text{ h}$

• forno de micro-ondas: $P_3 = 1,5 \text{ kW}$ $\Delta t_3 = \frac{1}{3} \text{ h}$

Sendo a energia dada pelo produto das duas grandezas:

$$\Delta E_1 = P_1 \cdot \Delta t_1 = 0,10 \text{ kWh}$$

$$\Delta E_2 = P_2 \cdot \Delta t_2 = 1,0 \text{ kWh}$$

$$\Delta E_3 = P_3 \cdot \Delta t_3 = 0,50 \text{ kWh}$$

A energia elétrica total é a soma delas:

$$\Delta E_{\text{total}} = 0,10 \text{ kWh} + 1,0 \text{ kWh} + 0,50 \text{ kWh}$$

$$\Delta E_{\text{total}} = 1,60 \text{ kWh}$$

81. Todos os dias um chuveiro de potência 6,0 kW é usado durante 90 minutos. Calcule o consumo de energia elétrica:

- a) por dia; b) por mês (30 dias).

82. A chama do bico de Bunsen do laboratório fornece 200 cal a cada 2,0 minutos.

- a) Determine a potência térmica desse bico.
 b) Para aquecer a água de um Becker foram necessárias 800 cal. Quanto tempo demorou?

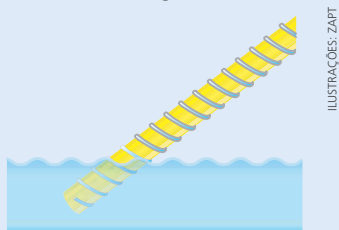
A caloria (cal) é uma unidade de energia usada para medida do calor.

Exercícios de Reforço

83. (Ucsal-BA) Um automóvel, de massa $1,0 \cdot 10^3$ kg, acelera desde o repouso até 20,0 m/s em 4,0 s, numa pista plana e horizontal. Despreze o efeito do ar. Nesta operação, a potência média útil desenvolvida pelo motor do automóvel é, em watts:

a) $5,0 \cdot 10^4$ d) $2,0 \cdot 10^3$
 b) $2,0 \cdot 10^4$ e) $5,0 \cdot 10^2$
 c) $5,0 \cdot 10^3$

84. (FGV-SP) Conhecido como parafuso de Arquimedes, este dispositivo foi utilizado pelos egípcios para retirar água do Nilo. Um modelo simples pode ser construído com uma mangueira enrolada em uma haste reta. Quando a haste é girada no sentido conveniente, a extremidade inferior da mangueira entra e sai da água, aprisionando uma porção desta no interior da mangueira. Enquanto o parafuso gira, a água capturada é obrigada a subir até o outro extremo da mangueira, onde é despejada.



Com um desses dispositivos, elevou-se água proveniente de um rio até um reservatório, localizado a 2,0 m de altura em relação ao nível de água desse rio. O parafuso de Arquimedes utilizado tinha 100 voltas completas de uma mangueira de borracha, sendo que cada anel podia transportar $1,0 \text{ cm}^3$ de água. Desconsiderando atritos e supondo uma rotação uniforme, admitindo que o tempo necessário para que o parafuso girasse 360° em torno de seu eixo era de 2,0 s, a potência útil da fonte do movimento de rotação, em W,

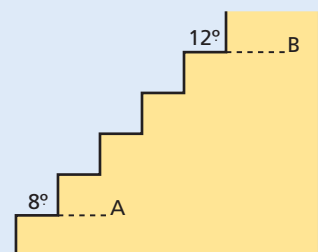
era de: (Dado: densidade da água = $1,0 \text{ g/cm}^3$; aceleração da gravidade = 10 m/s^2 .)

a) $2,5 \cdot 10^{-1}$ d) $1,0 \cdot 10^{-2}$
 b) $2,0 \cdot 10^{-1}$ e) $5,0 \cdot 10^{-3}$
 c) $1,5 \cdot 10^{-1}$

85. (Unesp-SP) O teste Margaria de corrida em escada é um meio rápido de medida de potência anaeróbica de uma pessoa. Consiste em fazê-la subir uma escada de dois em dois degraus, cada um com 18 cm de altura, partindo com velocidade máxima e constante de uma distância de alguns metros da escada. Quando pisa no 8° degrau, a pessoa aciona um cronômetro, que se desliga quando pisa no 12° degrau.

Se o intervalo de tempo registrado para uma pessoa de 70 kg foi de 2,8 s e considerando a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , a potência média avaliada por este método foi de:

a) 180 W c) 432 W e) 644 W
 b) 220 W d) 500 W



86. (ITA-SP) Projetado para subir com velocidade média constante a uma altura de 32 m em 40 s, um elevador consome a potência de 8,5 kW de seu motor. Considere que seja de 370 kg a massa do elevador vazio e a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$. Nessas condições, o número máximo de passageiros, de 70 kg cada um, a ser transportado pelo elevador é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

8. A conservação de energia

A energia não desaparece nem surge do nada de uma hora para outra. Ela muda de forma e sua soma é sempre constante. É o Princípio da Conservação da Energia Mecânica.

Quando analisamos uma situação-problema (fig. 24) que envolve dois sistemas A e B trocando energia entre si e isolados do resto do universo, podemos afirmar com certeza que a energia total de A + B permanecerá sempre a mesma. Assim, se a energia total de A diminuir, a de B aumentará, mas o somatório de ambas permanecerá o mesmo.

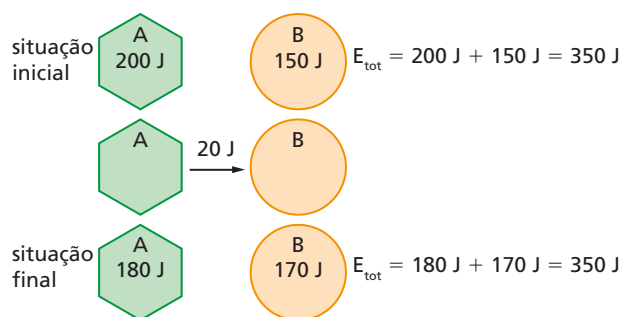


Figura 24. A energia total se conserva.

Vamos a um exemplo da Mecânica: um carro dotado de um motor de 40 HP está recebendo apenas uma potência de 30 HP, pois há dissipação devido ao atrito entre suas peças (engrenagens, polia, girabrequim, etc.). Em resumo, 10 HP estão sendo dissipados. O balanço energético fica assim:

$$40 \text{ HP} = 30 \text{ HP} + 10 \text{ HP}$$

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{útil}} + P_{\text{diss}}$$

No entanto, temos que explicar duas coisas: a primeira delas é de onde surgiu a potência de 40 HP. Evidentemente, não vem do solo, mas sim do combustível.

A segunda delas é: o que ocorreu com os 10 HP dissipados? Desapareceram? Não, apenas a energia tomou outra forma: a de energia térmica, jogando calor para o meio ambiente. O termo **dissipada** é porque a energia térmica não pode ser mais revertida em energia mecânica.

9. Rendimento de uma máquina

Consideremos uma máquina que recebe uma potência total P_{tot} e gera uma potência útil $P_{\text{útil}}$ inferior à potência recebida, havendo, portanto, uma parcela dissipada P_{diss} . O diagrama de potência da figura 25 ilustra o que dissemos.

Aplicando-se o Princípio da Conservação da Energia Mecânica e admitindo-se que tudo isso ocorre no mesmo intervalo de tempo Δt , temos:

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{útil}} + P_{\text{diss}}$$

Define-se rendimento da máquina como o quociente entre a potência útil e a potência total recebida pela máquina. Escrevemos:

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{tot}}}$$

Geralmente, o rendimento é expresso em porcentagem.

Observemos finalmente o seguinte: a definição acima não especificou qual é a forma de energia que alimenta a máquina. A definição é geral. Assim, ela pode ser uma máquina mecânica e sua energia útil será o trabalho. Ela pode ser um motor elétrico, cujo produto final também é uma energia mecânica.

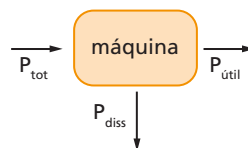


Figura 25. Diagrama de potência de uma máquina.

Exercícios de Aplicação

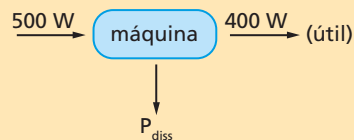
87. O Princípio da Conservação da Energia Mecânica é válido:

- somente para sistemas conservativos.
- somente para sistemas isolados.
- somente para situações-problema em que não haja atrito ou qualquer outra força dissipativa.
- para qualquer situação-problema, mesmo quando houver atrito.
- para qualquer situação-problema, mas desde que o trabalho das forças dissipativas seja nulo.

88. Um motor elétrico recebe da rede elétrica a potência de 200 W e realiza um trabalho mecânico tal que sua potência é de 180 W. A potência dissipada é:

- 10 W
- 20 W
- 50 W
- 60 W
- 80 W

89. Consideremos uma máquina mecânica que esteja operando sob o seguinte diagrama de potência:



Determine:

- a potência dissipada;
- o rendimento da máquina.

Resolução:

a) $P_{\text{tot}} = P_{\text{útil}} + P_{\text{diss}} \Rightarrow 500 \text{ W} = 400 \text{ W} + P_{\text{diss}}$

$$P_{\text{diss}} = 100 \text{ W}$$

b) O rendimento (η) é dado por:

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{tot}}} \Rightarrow \eta = \frac{400 \text{ W}}{500 \text{ W}} = 0,80$$

Expressando em porcentagem:

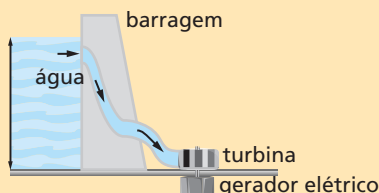
$$\eta = 0,80 \cdot 100\% \Rightarrow \eta = 80\%$$

90. Numa usina elétrica a água chega ao sistema turbina-gerador com potência de 4,0 MW e este fornece energia elétrica com potência de 3,5 MW.

- a) Determine o rendimento do sistema turbina-gerador.
b) Faça um diagrama de potência indicando: P_{tot} , $P_{\text{útil}}$ e P_{diss} .

91. Um carro possui um motor de 50 HP e num dado instante, percorrendo um trecho retilíneo, sua velocidade é 30 m/s e a força motora 1 000 N. Qual é o percentual da potência motora utilizada nesse instante? Adote 1 HP \cong 750 W.

92. Numa pequena usina hidrelétrica a vazão da água é praticamente constante e vale $\varphi = 500 \text{ L/s}$. A queda-d'água é de 20 m; porém, até chegar à turbina, há uma perda de 5,0%. O sistema turbina-gerador opera com eficiência de 90%. (Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



Determine:

- a) a potência da água ao penetrar na turbina;
b) a potência elétrica gerada.

Resolução:

- a) A cada 1,0 L de água corresponde uma massa de 1,0 kg.

$$\mathcal{E} = m \cdot g \cdot h$$

$$P_{\text{tot}} = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{\Delta t}$$

Para um intervalo de tempo de 1,0 s, temos:

$$\varphi = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow V = \varphi \cdot \Delta t = 500 \cdot 1,0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 500 \text{ L}$$

ou uma massa de água de 500 kg

$$P_{\text{tot}} = \frac{500 \cdot 10 \cdot 20}{1,0} \text{ (W)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\text{tot}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ W} = 100 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Como há uma perda de potência de 5,0% até a turbina:

$$P_{\text{turb}} = 0,95 \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ W}$$

$$P_{\text{turb}} = 95 \cdot 10^3 \text{ W} \Rightarrow P_{\text{turb}} = 95 \text{ kW}$$

- b) O sistema turbina-gerador opera com eficiência (rendimento) de 90%.

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{tot}}} \Rightarrow 0,90 = \frac{P_{\text{útil}}}{95} \Rightarrow P_{\text{útil}} = 85,5 \text{ kW}$$

Observação: Essa potência é suficiente para prover energia elétrica para cerca de dez residências de porte médio, fornecendo cerca de 8,5 kW em média a cada uma delas.

Exercícios de Reforço

93. (UF-GO) Nas usinas hidrelétricas, a energia potencial gravitacional de um reservatório de água é convertida em energia elétrica através de turbinas. Uma usina de pequeno porte possui vazão de água de $4,0 \cdot 10^2 \text{ m}^3/\text{s}$, queda de 9,0 m, eficiência de 90% e é utilizada para o abastecimento de energia elétrica de uma comunidade cujo consumo *per capita* mensal é igual a 360 kWh. Calcule:

- a) a potência elétrica útil gerada pela usina;
b) o número de habitantes que ela pode atender.

Considere:

$$1) g = 10,0 \text{ m/s}^2$$

$$2) \text{ densidade da água} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

94. (UE-AM) Uma turbina eólica converte a energia contida no vento em energia elétrica. O vento empurra as pás da turbina fazendo-as girar. Um eixo acoplado às pás transmite a rotação destas ao gerador, que

converte energia cinética de rotação em energia elétrica. Suponha que, em uma turbina, a força do vento seja suficiente para produzir $7,2 \cdot 10^8$ joules de energia cinética rotacional em duas horas.



Se 40% da energia de rotação é convertida em energia elétrica, a potência dessa turbina é, em kW,

- a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

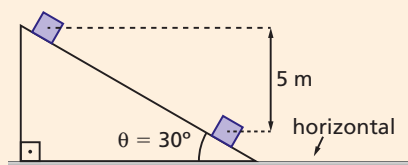
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

95. (Unemat-MT) A vazão de água necessária para acionar cada turbina de uma Central Hidrelétrica é de aproximadamente $600 \text{ m}^3/\text{s}$, através de um conduto de queda nominal de 120 metros. Se cada turbina geradora assegura uma potência de

$576 \cdot 10^3 \text{ kW}$, qual é a perda de energia nesse processo de transformação de energia mecânica em elétrica? (Considere: $g = 10 \text{ m/s}^2$; densidade da água: $d = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.)
a) 10% b) 20% c) 40% d) 60% e) 80%

Exercícios de Aprofundamento

96. (UE-CE) Um bloco de massa $M = 2 \text{ kg}$ desliza sobre um plano inclinado com atrito, conforme a figura abaixo. O bloco parte do repouso. Quando a variação da posição vertical do bloco for de 5 m , sua velocidade será de 5 m/s (em módulo).



Determine o módulo do trabalho da força de atrito entre o bloco e a superfície do plano em joule. (Considere a aceleração da gravidade como sendo 10 m/s^2 .)

97. (UF-RJ) Uma bolinha de massa $0,20 \text{ kg}$ está em repouso suspensa por um fio ideal de comprimento $1,20 \text{ m}$ preso ao teto, conforme indica a figura 1. A bolinha recebe uma pancada horizontal e sobe em movimento circular até que o fio faça um ângulo máximo de 60° com a vertical, como indica a figura 2. Despreze os atritos e considere $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

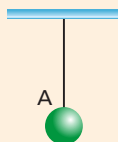


Figura 1.

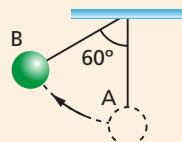
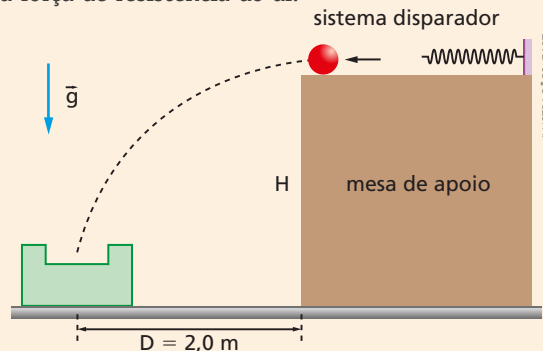


Figura 2.

- Calcule a intensidade T_0 da força de tração no fio na situação inicial em que a bolinha estava em repouso antes da pancada.
 - Calcule o valor T_1 da intensidade da força de tração no fio quando o fio faz o ângulo máximo de 60° com a vertical e o valor T_2 da intensidade da força de tração quando ele passa de volta pela posição vertical.
98. Um experimento de laboratório consiste em estudar o lançamento horizontal de uma bolinha e o respectivo alcance. Para realizar o lançamento horizontal usa-se um sistema elástico constituído por uma pequena canaleta e uma mola disparadora. Para medir o alcance horizontal usa-se como estratégia a colocação de uma caixinha no plano inferior, a qual deverá ser acertada pela bolinha.

No experimento montado desprezam-se os atritos e a força de resistência do ar.



São conhecidos: constante elástica da mola $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$; altura da mesa do laboratório $H = 80 \text{ cm}$; massa da bolinha $m = 100 \text{ g}$; aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Para que o experimento seja bem-sucedido quando se coloca a caixinha a $2,0 \text{ m}$ do pé da mesa, de quanto deverá ser a deformação (compressão) na mola?

99. (Fuvest-SP) Trens de alta velocidade, chamados trens-bala, deverão estar em funcionamento no Brasil nos próximos anos. Características típicas desses trens são: velocidade máxima de 300 km/h , massa total (incluindo 500 passageiros) de 500 t e potência máxima dos motores elétricos igual a 8 MW . Nesses trens, as máquinas elétricas que atuam como motores também podem ser usadas como geradores, freando o movimento (freios regenerativos). Nas ferrovias, as curvas têm raio de curvatura de, no mínimo, 5 km . Considerando um trem e uma ferrovia com essas características, determine:
- o tempo necessário para o trem atingir a velocidade de 288 km/h , a partir do repouso, supondo que os motores forneçam a potência máxima o tempo todo;
 - a força máxima na direção horizontal, entre cada roda e o trilho, numa curva horizontal percorrida a 288 km/h , supondo que o trem tenha 80 rodas e que as forças entre cada uma delas e o trilho tenham a mesma intensidade;

- c) a aceleração do trem quando, na velocidade de 288 km/h, as máquinas elétricas são acionadas como geradores de 8 MW de potência, freando o movimento. Suponha o trecho retilíneo.

Note e adote: 1 t = 1000 kg.

Desconsidere o fato de que, ao partir, os motores demoram alguns segundos para atingir sua potência máxima.

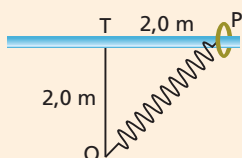
- 100.** (F. M. Triângulo Mineiro-MG) Dois blocos A e B, de massas, respectivamente, 2 kg e 8 kg, são abandonados do repouso da posição indicada na figura. A intensidade do campo gravitacional local é 10 N/kg e a resistência do ar pode ser desprezada. O fio que interliga os corpos e as polias é ideal e não há atrito a ser levado em conta.



Após o bloco B descer 50 cm verticalmente, a energia mecânica do sistema formado pelos dois blocos, em relação ao nível de referência indicado na figura, vale, em joule,

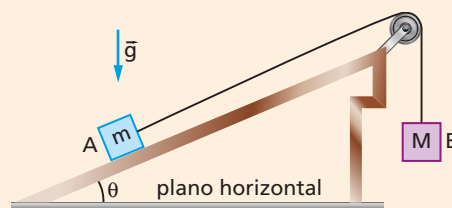
- a) 35 b) 70 c) 105 d) 140 e) 175
- 101.** (ITA-SP) Um aro de 1,0 kg de massa encontra-se preso a uma mola de massa desprezível, constante elástica $k = 10,0 \text{ N/m}$ e comprimento inicial $L_0 = 1,0 \text{ m}$ quando não distendida, afixada no ponto O. A figura mostra o aro numa posição P em uma barra horizontal fixa ao longo da qual ele pode deslizar sem atrito. Soltando-se o aro do ponto P, qual deve ser o módulo de sua velocidade, em m/s, ao alcançar o ponto T, a 2,0 m de distância?

- a) $\sqrt{30,0}$
b) $\sqrt{40,0}$
c) $\sqrt{23,4}$
d) $\sqrt{69,5}$
e) $\sqrt{8,2}$



- 102.** (IJSO) Um corpo A de massa m repousa sobre um plano inclinado, formando um ângulo θ com a horizontal e está conectado a outro corpo B, de massa M , através de uma polia ideal, conforme a figura. Inicialmente A e B se encontram num mesmo nível de referência horizontal.

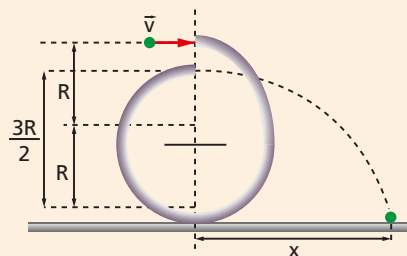
Sabe-se que $M > m$. Desprezando todos os atritos, encontre a velocidade v do bloco B, após ele ter-se deslocado para baixo de uma distância b , medida sobre o plano inclinado.



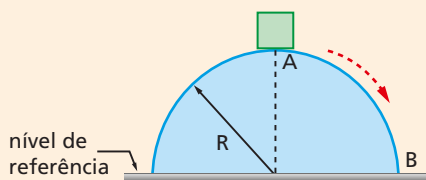
ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

- a) $v = \sqrt{\frac{2g \cdot b(M - m \cdot \sin \theta)}{m + M}}$
b) $v = \sqrt{\frac{g \cdot b(M + m \cdot \sin \theta)}{m + M}}$
c) $v = \sqrt{\frac{2g \cdot b(M - m \cdot \sin \theta)}{m - M}}$
d) $v = \sqrt{\frac{g \cdot b(M - m \cdot \sin \theta)}{m - M}}$
e) $v = \sqrt{\frac{2g \cdot b(M + m \cdot \sin \theta)}{m + M}}$

- 103.** (ITA-SP) Uma pequena esfera penetra com velocidade \vec{v} em um tubo oco, recurvado, colocado num plano vertical, como mostra a figura, num local onde a aceleração da gravidade tem módulo igual a g . Supondo-se que a esfera percorra a região interior do tubo sem atrito e acabe saindo horizontalmente pela extremidade, pergunta-se: que distância x , horizontal, ela percorrerá até tocar o solo?



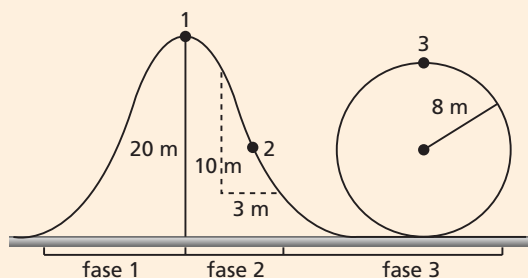
- 104.** (UE-CE) Um objeto puntiforme desliza, sob a ação da gravidade, sobre uma semiesfera fixada cuja secção plana é fixada no solo, como mostra a figura a seguir. Considere que o objeto parte, do ponto mais alto (A), mediante a aplicação de uma perturbação muito pequena, de modo que se possa considerar nula sua velocidade inicial. Considere desprezíveis todos os atritos, despreze as dimensões do objeto, suponha constante a aceleração da gravidade e adote o nível de referência no solo para o que se pede.



No instante em que o objeto perde contato com a esfera, a fração da energia mecânica correspondente à energia cinética é:

- a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$
 b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{4}$

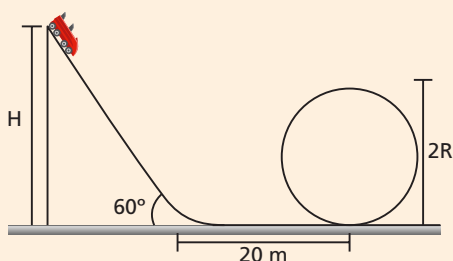
- 105.** Na montanha-russa esquematizada abaixo, um motor leva o carrinho até o ponto 1. Desse ponto, ele parte, saindo do repouso, em direção ao ponto 2, localizado em um trecho retilíneo, para percorrer o resto do trajeto sob a ação da gravidade ($g = 10 \text{ m/s}^2$). (Note e adote: $\sqrt{109} \approx 10,4$.)



Desprezando a resistência do ar e as forças de atrito, calcule:

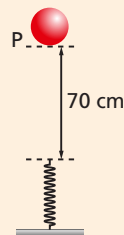
- a) o módulo da aceleração tangencial do carrinho no ponto 2;
 b) a velocidade escalar do carrinho no ponto 3, dentro do loop.

- 106.** (ITA-SP) A partir do repouso, um carrinho de montanha-russa desliza de uma altura $H = 20\sqrt{3} \text{ m}$ sobre uma rampa de 60° de inclinação e corre 20 m num trecho horizontal antes de chegar em um loop circular, de pista sem atrito. Sabendo que o coeficiente de atrito da rampa e do plano horizontal é $\frac{1}{2}$, assinale o valor do raio máximo que pode ter esse loop para que o carrinho faça todo o percurso sem perder o contato com a sua pista.



- a) $R = 8\sqrt{3} \text{ m}$ d) $R = 4(2\sqrt{3} - 1) \text{ m}$
 b) $R = 4(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$ e) $R = \frac{40(\sqrt{3} - 1)}{3} \text{ m}$
 c) $R = 8(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$

- 107.** (Mackenzie-SP) A figura mostra o instante em que uma esfera de 4 kg é abandonada do repouso, da posição P, e cai sobre a mola ideal de constante elástica $2 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. O maior valor do módulo da velocidade atingida por essa esfera, no seu movimento descendente, é: (Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$; despreze o efeito do ar.)



- a) 3 m/s c) 5 m/s e) 7 m/s
 b) 4 m/s d) 6 m/s

- 108.** O sistema mecânico da figura é constituído por duas esferas de raios desprezíveis acopladas a uma barra rígida de comprimento $3L$ articulada em O por um pino horizontal, perpendicular ao plano desta folha. Ela pode girar sem atrito em torno do pino, num plano vertical, no sentido anti-horário, ao ser abandonada, como se indica na figura. A barra é abandonada em repouso a partir da posição horizontal mostrada na figura.

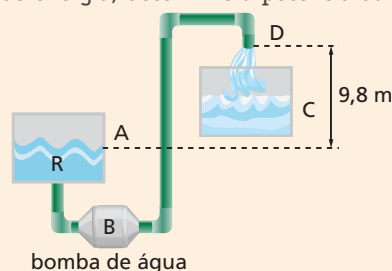


Despreze qualquer perda de energia e responda:

- a) De quantos radianos deverá girar a barra para que as esferas atinjam a máxima velocidade linear instantânea?
 b) Determine a velocidade linear máxima de cada uma das esferas.

Sugestão: use o Teorema da Conservação da Energia Mecânica, adotando a reta horizontal da figura como nível de referência.

- 109.** Uma bomba B recalca água com uma vazão de $3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$, de um reservatório R para uma caixa C. A altura de recalque é de 9,8 m e a água é injetada na caixa com uma velocidade escalar de 2,0 m/s em D. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade da água $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Desprezando as perdas de energia, determine a potência da bomba.



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Quantidade de movimento e impulso

No capítulo anterior tomamos conhecimento do **Princípio da Conservação da Energia Mecânica** e vimos que ele é útil não só na resolução de problemas mas também na análise de fenômenos.

Hoje sabemos que há outros princípios de conservação, isto é, há várias outras grandezas que, em determinadas condições, se conservam. Durante o nosso curso vamos ver alguns desses princípios, mas, infelizmente, há outros que não poderemos apresentar, pois envolvem fenômenos muito complexos, estudados apenas em cursos universitários.

Neste capítulo estudaremos o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**. Inicialmente veremos o que é quantidade de movimento e, mais adiante, apresentaremos o Princípio da Conservação associado a essa grandeza.

1. Quantidade de movimento de uma partícula

Dada uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} (fig. 1), sua **quantidade de movimento** \vec{Q} é definida por:

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

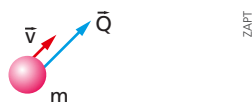


Figura 1. Uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} tem quantidade de movimento \vec{Q} dada por: $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$.

Observe na figura 1 que, sendo m uma grandeza positiva, os vetores \vec{v} e \vec{Q} têm sempre a mesma direção e o mesmo sentido. A quantidade de movimento é também chamada de **momento linear**. A palavra “linear” aqui é usada para diferenciar o momento linear de dois outros momentos que serão apresentados no capítulo 23. Alguns autores chamam a quantidade de movimento de **momentum**, palavra latina cujo plural é **momenta**.

A unidade de quantidade de movimento no SI é obtida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} |\vec{Q}| &= m \cdot |\vec{v}| \\ \text{unidade de } |\vec{Q}| &= \text{kg} \cdot (\text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m/s} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Essa unidade não tem nome especial.

1. Quantidade de movimento de uma partícula
2. Impulso de uma força constante
3. Impulso de uma força variável
4. Quantidade de movimento de um sistema
5. Forças internas e externas
6. Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento
7. A Segunda Lei de Newton

Exemplo 1

A figura 2 mostra um automóvel de massa $m_A = 900 \text{ kg}$ e velocidade cujo módulo é $v_A = 20 \text{ m/s}$. Sua quantidade de movimento (ou momento linear) é o vetor \vec{Q} , tal que:

$$\vec{Q}_A = m_A \cdot \vec{v}_A$$

Assim:

$$Q_A = m_A \cdot v_A = (900 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) = 1,8 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Na figura 3 temos um satélite S , em movimento circular e uniforme em torno da Terra. Sendo o movimento uniforme, temos: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$.

Como $\vec{Q}_1 = m \cdot \vec{v}_1$ e $\vec{Q}_2 = m \cdot \vec{v}_2$, temos também:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \Rightarrow |\vec{Q}_1| = |\vec{Q}_2|$$

isto é, o módulo da quantidade de movimento é constante.

A direção de \vec{Q}_1 , porém, é diferente da direção de \vec{Q}_2 . Assim, $\vec{Q}_1 \neq \vec{Q}_2$, isto é, a quantidade de movimento do satélite é variável.

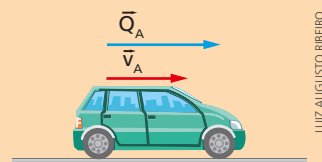


Figura 2.

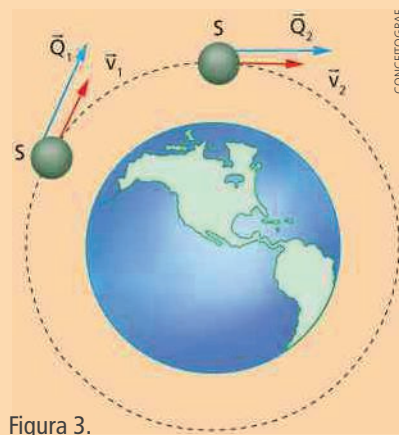


Figura 3.

Exercícios de Aplicação

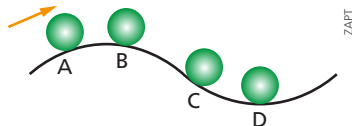
- Um automóvel de massa 1200 kg desce uma ladeira, como mostra a figura, com velocidade de módulo $v = 5,0 \text{ m/s}$.



Sendo \vec{Q} a quantidade de movimento do automóvel:

- copie a figura em seu caderno e desenhe \vec{Q} ;
- calcule o módulo de \vec{Q} .

- Uma partícula descreve a trajetória desenhada na figura, no sentido de A para D .



Copie a figura em seu caderno e desenhe o vetor quantidade de movimento da partícula nas posições A , B , C e D .

- Consideremos uma partícula livre da ação de forças ou, então, sujeita a um conjunto de forças cuja resultante é nula. O que podemos dizer sobre a quantidade de movimento da partícula?

- Um carro tem movimento uniforme ao longo de uma pista circular. Verifique se as sentenças a seguir são verdadeiras ou falsas:

- A quantidade de movimento do carro é constante.
- A energia cinética do carro é constante.
- O módulo da quantidade de movimento do carro é constante.

- Uma partícula de massa m tem quantidade de movimento \vec{Q} , velocidade \vec{v} e energia cinética E_c . Mostre que:

$$\text{a) } E_c = \frac{|\vec{Q}|^2}{2m} \quad \text{b) } |\vec{v}| = \frac{2E_c}{|\vec{Q}|}$$

- Um corpo tem energia cinética 400 J e massa $8,0 \text{ kg}$. Calcule o módulo da quantidade de movimento desse corpo.

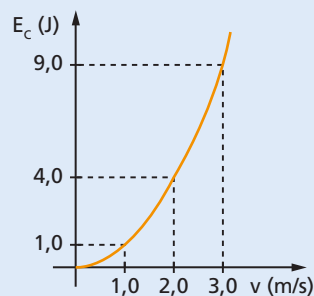
- Duas partículas A e B têm massas m_A e m_B , tais que $m_A > m_B$.

- Se as duas partículas tiverem a mesma quantidade de movimento, qual terá a maior energia cinética?
- Se as partículas tiverem a mesma energia cinética, qual terá a maior quantidade de movimento?

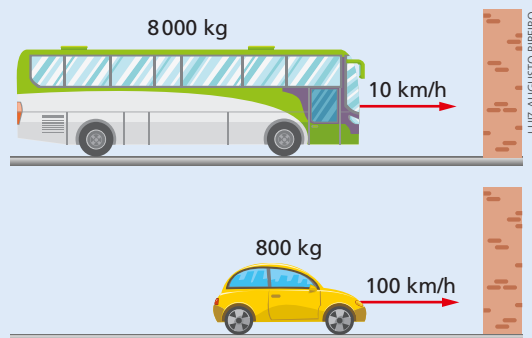
8. Um automóvel tem movimento retilíneo e uniforme. Se sua velocidade dobrar, podemos afirmar que:
- sua energia cinética se reduzirá à metade.
 - o módulo da quantidade de movimento se tornará o dobro do anterior.
 - sua energia cinética se tornará o dobro da anterior.
 - o módulo da quantidade de movimento se tornará o quádruplo do anterior.
 - o módulo da quantidade de movimento não se alterará.
9. Apresente a equação dimensional da quantidade de movimento.

Exercícios de Reforço

10. (UF-PE) Pai e filho são aconselhados a correr para perder peso. Para que ambos percam calorias na mesma proporção, o instrutor da academia sugeriu que ambos desenvolvessem a mesma quantidade de movimento. Se o pai tem 90 kg e corre a uma velocidade de 2,0 m/s, o filho, que tem 60 kg, deverá correr a:
- 1,0 m/s
 - 2,0 m/s
 - 3,0 m/s
 - 4,0 m/s
 - 5,0 m/s
11. (UF-AM) Um menino faz girar uma pedra presa a uma haste rígida e de massa desprezível de maneira que ela descreva um movimento circular uniforme num plano vertical, num local em que a aceleração da gravidade é constante. Sobre esse movimento considere as seguintes grandezas relacionadas com a pedra:
- Quantidade de movimento.
 - Energia potencial gravitacional.
 - Energia cinética.
 - Peso.
- Dentre essas grandezas, as que variam enquanto a pedra realiza seu movimento são:
- apenas I e IV.
 - apenas I e II.
 - apenas II e III.
 - apenas III e IV.
 - apenas I e III.
12. (UE-RJ) Em uma aula de Física os alunos relacionam os valores da energia cinética de um corpo aos de sua velocidade. O gráfico indica os resultados encontrados. Determine em $\text{kg} \cdot \text{m/s}$, o módulo da quantidade de movimento desse corpo quando atinge a velocidade de 5,0 m/s.



13. A figura representa um experimento em que um ônibus de massa 8 000 kg e um automóvel de massa 800 kg colidiram com muros idênticos.



Antes das colisões a velocidade do ônibus era 10 km/h, e a velocidade do automóvel era 100 km/h. Podemos observar que, antes das colisões, os dois veículos tinham a mesma quantidade de movimento. No entanto, o experimento mostrou que o dano no muro, causado pelo automóvel, foi maior que o causado pelo ônibus. Por quê?

14. Uma partícula tem energia cinética de 60 J e momento linear de módulo $15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Determine o módulo da velocidade dessa partícula.

2. Impulso de uma força constante

Consideremos uma situação particular em que a força resultante sobre um corpo é constante. Na figura 4 temos um bloco de massa m em movimento uniformemente variado, sendo \vec{F} a força resultante. No instante t_1 o bloco tem velocidade \vec{v}_1 e quantidade de movimento \vec{Q}_1 . No instante t_2 (com $t_2 > t_1$) o bloco tem velocidade \vec{v}_2 e quantidade de movimento \vec{Q}_2 .

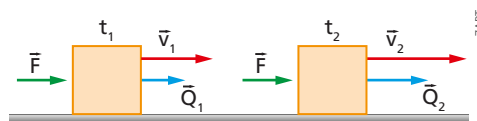


Figura 4.

Usando a Segunda Lei de Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} \cdot (\Delta t) = m \cdot (\Delta \vec{v}) \Rightarrow \vec{F} \cdot (\Delta t) = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{F} \cdot (\Delta t) &= \underbrace{m\vec{v}_2}_{\vec{Q}_2} - \underbrace{m\vec{v}_1}_{\vec{Q}_1} \Rightarrow \vec{F} \cdot (\Delta t) = \underbrace{\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1}_{\Delta \vec{Q}} \Rightarrow \vec{F} \cdot (\Delta t) = \Delta \vec{Q} \quad (1)\end{aligned}$$

A equação (1) nos diz que o produto $\vec{F} \cdot (\Delta t)$ é igual à variação da quantidade de movimento ($\Delta \vec{Q}$) no intervalo de tempo Δt . Devido à grande utilidade do conceito da quantidade de movimento, os físicos resolveram dar um nome ao produto $\vec{F} \cdot (\Delta t)$:

$$\vec{F} \cdot (\Delta t) = \text{impulso de } \vec{F} \text{ no intervalo de tempo } \Delta t$$

Representando o impulso por \vec{I} , temos:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad (2)$$

Sendo $\Delta t > 0$, os vetores \vec{F} e \vec{I} têm a mesma direção e o mesmo sentido (fig. 5). Se $\Delta t = 0$, teremos $\vec{I} = \vec{0}$. Usando essa definição, a equação (1) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\vec{I} = \Delta \vec{Q} \quad (3)$$

A equação (3) traduz o chamado **Teorema do Impulso**.

No Sistema Internacional, a unidade de $|\vec{F}|$ é o newton (N), e a unidade de tempo é o segundo (s). Assim, a partir de:

$$|\vec{I}| = |\vec{F}| \cdot \Delta t$$

temos:

$$\text{unidade de } |\vec{I}| = \text{N} \cdot \text{s}$$

Essa unidade não tem nome especial.

A partir da equação (3) percebemos que as unidades de impulso e quantidade de movimento são equivalentes:

$$\text{N} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

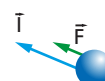


Figura 5.

ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Exemplo 2

Um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ desliza sobre uma superfície horizontal sob a ação de forças cuja resultante \vec{F} é constante (como mostra a fig. 6) e tem módulo $F = 12 \text{ N}$. No instante $t_i = 0$, a velocidade do bloco tem módulo $v_i = 4,0 \text{ m/s}$. Vamos determinar o impulso de \vec{F} no intervalo de tempo que vai de $t_i = 0$ a $t_f = 3,0 \text{ s}$ e a velocidade do bloco no instante $t_f = 3,0 \text{ s}$.

O impulso (\vec{I}) da força \vec{F} é dado por:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

O vetor \vec{I} tem a mesma direção e o mesmo sentido da força \vec{F} (fig. 7) e seu módulo é:

$$I = F \cdot \Delta t = (12 \text{ N})(3,0 \text{ s}) = 36 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$|\vec{I}| = 36 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Podemos calcular a velocidade final usando o Teorema do Impulso:

$$\vec{I} = \Delta \vec{Q} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_i$$

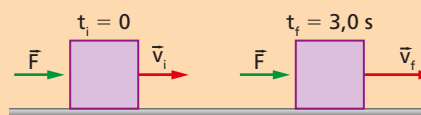


Figura 6.

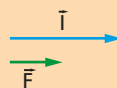


Figura 7.

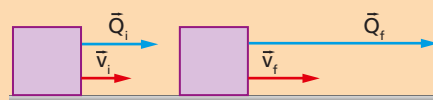


Figura 8.

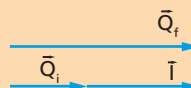


Figura 9.

Como os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido (figs. 8 e 9), podemos usar os módulos:

$$I = \vec{Q}_f - \vec{Q}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

$$36 = (2,0) \cdot v_f - (2,0)(4,0) \Rightarrow v_f = 22 \text{ m/s}$$

Você pode observar que, para calcular v_f , não há necessidade de usar o Teorema do Impulso. Com os valores da força (\vec{F}) e da massa (m), poderíamos usar a Segunda Lei de Newton ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$), obtendo a aceleração. A seguir, usando a equação horária da velocidade escalar do MUV ($v = v_0 + at$), poderíamos calcular a velocidade final. Usamos aqui o Teorema do Impulso para adquirirmos familiaridade com esse teorema, que será útil mais adiante.

Exemplo 3

Numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, um garoto lança verticalmente para cima uma bola de massa $m = 0,20 \text{ kg}$, com velocidade inicial de módulo $v_0 = 30 \text{ m/s}$ (fig. 10). Depois de um intervalo de tempo Δt , a bola está descendo com velocidade de módulo $v_1 = 15 \text{ m/s}$. Desprezando a resistência do ar, vamos calcular a variação da quantidade de movimento da bola, no intervalo de tempo Δt , e o valor de Δt .

Vamos calcular a variação da quantidade de movimento da bola de dois modos:

1ª modo:

As quantidades de movimento da bola nos instantes t_0 e t_1 são, respectivamente, \vec{Q}_0 e \vec{Q}_1 (fig. 11):

$$Q_0 = m \cdot v_0 = (0,20 \text{ kg})(30 \text{ m/s}) = 6,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$Q_1 = m \cdot v_1 = (0,20 \text{ kg})(15 \text{ m/s}) = 3,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

A variação da quantidade de movimento ($\Delta \vec{Q}$) deve ser obtida fazendo-se a diferença entre a quantidade de movimento final (\vec{Q}_1) e a inicial (\vec{Q}_0):

$$\Delta \vec{Q} = \vec{Q}_1 - \vec{Q}_0$$

Observamos que essa operação é uma subtração de vetores. Seguindo o procedimento visto no capítulo 8, desenhamos os vetores a partir de uma mesma origem (fig. 12) e ligamos suas extremidades (com sentido de \vec{Q}_0 para \vec{Q}_1). Da figura, tiramos:

$$|\Delta \vec{Q}| = |\vec{Q}_0| + |\vec{Q}_1| = 6,0 + 3,0 \Rightarrow |\Delta \vec{Q}| = 9,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

2ª modo:

Aproveitando o fato de que os vetores \vec{Q}_0 e \vec{Q}_1 têm a mesma direção, podemos determinar ($\Delta \vec{Q}$) algebricamente, adotando um eixo e atribuindo sinais a Q_0 e Q_1 (fig. 13). Adotando o eixo da figura 13, o vetor \vec{Q}_1 tem o mesmo sentido do eixo e, portanto, $Q_1 = 3,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

O vetor \vec{Q}_0 tem sentido oposto ao do eixo e, assim, $Q_0 = -6,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Portanto:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = (3,0) - (-6,0) = 3,0 + 6,0 = +9,0 \Rightarrow |\Delta \vec{Q}| = 9,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Vamos determinar o valor de Δt usando o Teorema do Impulso e observando que a única força atuante na bola é o seu peso \vec{P} (fig. 14), sendo:

$$P = m \cdot g = (0,20 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 2,0 \text{ N}$$

O impulso (\vec{I}) do peso deve ser igual à variação da quantidade de movimento ($\Delta \vec{Q}$):

$$\vec{I} = \Delta \vec{Q} \Rightarrow \vec{P} \cdot (\Delta t) = \Delta \vec{Q} \Rightarrow \Delta t = \frac{|\Delta \vec{Q}|}{\vec{P}} = \frac{9,0}{2,0} \Rightarrow \Delta t = 4,5 \text{ s}$$

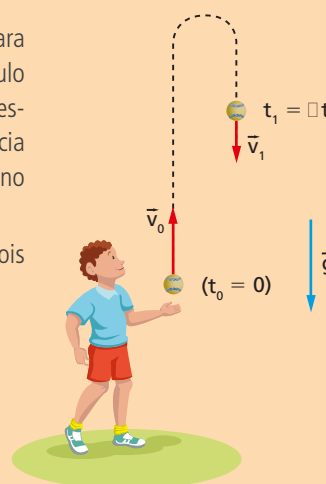


Figura 10.

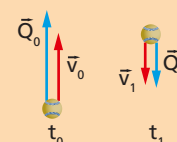


Figura 11.

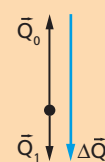


Figura 12.

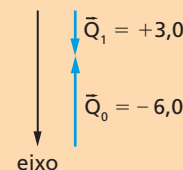


Figura 13.

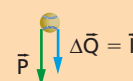


Figura 14.

Exemplo 4

Uma bola de massa $m = 0,40 \text{ kg}$ é lançada horizontalmente com velocidade de módulo $v_0 = 20 \text{ m/s}$ numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Desprezando a resistência do ar vamos calcular o impulso do peso entre os instantes $t_0 = 0$ e $t_1 = 1,5 \text{ s}$.

Durante o movimento da bola, o peso é constante em módulo, direção e sentido. Portanto, podemos calcular seu impulso por:

$$\vec{I} = \vec{P} \cdot \Delta t$$

Mas:

$$P = m \cdot g = (0,40 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 4,0 \text{ N}$$

Assim:

$$I = P \cdot \Delta t = (4,0 \text{ N})(1,5 \text{ s}) = 6,0 \text{ N} \cdot \text{s}$$

O impulso do peso é o vetor \vec{I} , que tem a mesma direção e o mesmo sentido do peso \vec{P} (fig. 15) e cujo módulo é:

$$|\vec{I}| = 6,0 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Tendo o impulso, podemos determinar a quantidade de movimento da bola no instante $t = 1,5 \text{ s}$.

As quantidades de movimento da bola, nos instantes $t_0 = 0$ e $t_1 = 1,5 \text{ s}$, são, respectivamente, \vec{Q}_0 e \vec{Q}_1 (fig. 16). Como o peso \vec{P} é a única força atuante na bola, temos, de acordo com o Teorema do Impulso:

$$\vec{I} = \vec{Q}_1 - \vec{Q}_0$$

Desenhando os vetores \vec{Q}_1 e \vec{Q}_0 a partir da mesma origem, temos o diagrama da figura 17, da qual tiramos:

$$|\vec{Q}_1|^2 = |\vec{Q}_0|^2 + |\vec{I}|^2$$

mas $|\vec{I}| = 6,0 \text{ N} \cdot \text{s}$, e:

$$|\vec{Q}_0| = m \cdot |\vec{v}_0| = (0,40 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) = 8,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Substituindo na equação acima:

$$|\vec{Q}_1|^2 = (8,0)^2 + (6,0)^2 \Rightarrow |\vec{Q}_1| = 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

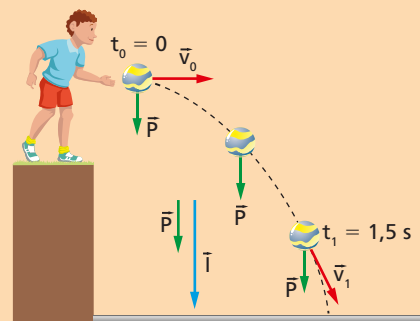


Figura 15.

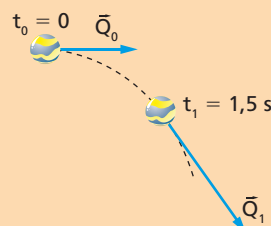


Figura 16.

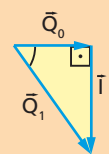


Figura 17.

3. Impulso de uma força variável

Para calcular o impulso de uma força variável, em um intervalo de tempo Δt , dividimos Δt em um grande número de “pequenos intervalos”, de modo que em cada um deles podemos admitir que a força é constante. Usamos então a equação $\vec{I} = \vec{F} \cdot (\Delta t)$ em cada pequeno intervalo e somamos os resultados.

Sabemos que esse procedimento é complexo e exige a aplicação de Cálculo Integral. Há, porém, uma situação especial que consideraremos: o caso de uma força que tem **direção constante**, variando apenas o módulo ou o sentido.

Para considerar esse caso, partimos do caso simples em que a força \vec{F} é constante. No gráfico do módulo de \vec{F} em função do tempo, representado na figura 18, a área da região colorida é numericamente igual ao módulo do impulso no intervalo de tempo Δt :

$$\text{área} = (\text{altura}) \cdot (\text{base})$$

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

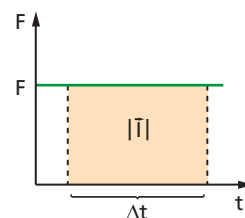


Figura 18.

Usando em seguida o mesmo tipo de argumentação do caso do trabalho de uma força, podemos concluir que, no caso da figura 19, em que apenas o módulo de \vec{F} varia, a área também nos dá o módulo do impulso da força no intervalo de tempo Δt . Porém, vale a pena repetir: essa propriedade só vale se a direção da força for constante.

Generalização do Teorema do Impulso

Usando o Cálculo Integral é possível demonstrar que o Teorema do Impulso continua válido nos casos em que a força é variável em qualquer dos seus aspectos: módulo, direção, sentido.

O impulso de uma força qualquer, num intervalo de tempo Δt , é igual à variação da quantidade de movimento produzida por essa força no intervalo de tempo Δt :

$$\vec{I} = \Delta \vec{Q}$$

Força média

No caso em que a força é variável, podemos calcular seu valor médio (\vec{F}_m) usando o Teorema do Impulso, como se \vec{F}_m fosse constante:

$$\vec{I} = \vec{F}_m \cdot \Delta t = \Delta \vec{Q}$$

No entanto, você deve estar lembrado de que, no capítulo 18, também calculamos o valor médio de uma força usando o Teorema da Energia Cinética:

$$\mathcal{W} = F_m \cdot d = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

Podemos então perguntar: “Ao calcularmos o valor da força média, o Teorema do Impulso e o Teorema da Energia Cinética fornecerão o mesmo resultado?”. A resposta é: “em geral, não”.

No exercício 68 você terá a oportunidade de verificar esse fato. Assim, devemos ser mais precisos na nossa linguagem: o resultado obtido por meio do Teorema da Energia Cinética é o **valor médio da força em relação ao deslocamento (d)**, enquanto o resultado obtido por meio do Teorema do Impulso é o **valor médio da força em relação ao intervalo de tempo (Δt)**.

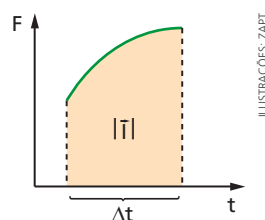


Figura 19.

Exemplo 5

Um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ desliza sobre uma superfície horizontal (fig. 20), de modo que a resultante (\vec{F}) das forças que atuam sobre ele tem direção horizontal constante. No instante $t = 0$ a velocidade do bloco tem módulo $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$ e, a partir desse instante, a intensidade de \vec{F} é dada pelo gráfico da figura 21. Vamos determinar a velocidade do bloco no instante $t = 6,0 \text{ s}$.

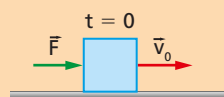


Figura 20.

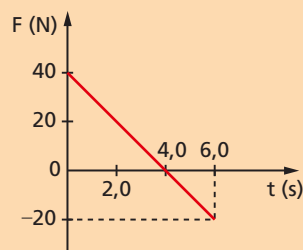


Figura 21.

Em primeiro lugar devemos observar que a direção de \vec{F} é constante e, assim, podemos calcular seu impulso a partir da propriedade da área. Porém, olhando para o gráfico (fig. 23) observamos que, entre $t = 4,0$ s e $t = 6,0$ s, a força é negativa. O que significa isso? Significa que, a partir do instante $t = 4,0$ s, o sentido de \vec{F} é oposto ao sentido inicial (fig. 22).

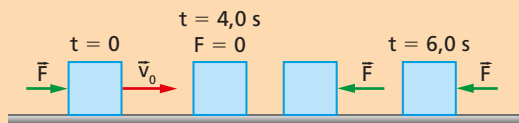


Figura 22.

Entre os instantes $t = 0$ e $t = 4,0$ s, o impulso (\vec{I}_1) tem módulo igual à área do triângulo colorido acima do eixo dos tempos (fig. 23):

$$|\vec{I}_1| = \frac{(4,0)(40)}{2} \Rightarrow |\vec{I}_1| = 80 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Entre os instantes $t = 4,0$ s e $t = 6,0$ s, o impulso (\vec{I}_2) tem módulo igual à área do triângulo colorido abaixo do eixo dos tempos:

$$|\vec{I}_2| = \frac{(2,0)(20)}{2} \Rightarrow |\vec{I}_2| = 20 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Atribuindo sinais a I_1 e I_2 , temos:

$$I_1 = 80 \text{ N} \cdot \text{s} \text{ e } I_2 = -20 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Assim, o impulso total (I) (fig. 24) será dado por:

$$I = I_1 + I_2 = (80 \text{ N} \cdot \text{s}) + (-20 \text{ N} \cdot \text{s}) = 60 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$|\vec{I}| = 60 \text{ N} \cdot \text{s}$$

De acordo com o Teorema do Impulso, temos:

$$I = \Delta Q = Q_f - Q_i = m \cdot v_f - m \cdot v_i$$

60
2,0
3,0

Assim:

$$60 = (2,0)(v_f) - (2,0)(3,0) \Rightarrow v_f = 33 \text{ m/s}$$

Podemos obter o valor médio de \vec{F} em relação ao intervalo de tempo que vai de $t = 0$ a $t = 6,0$ s por meio do Teorema do Impulso:

$$\vec{I} = \vec{F}_m \cdot \Delta t \Rightarrow |\vec{I}| = |\vec{F}_m| \cdot \Delta t \Rightarrow 60 = |\vec{F}_m| \cdot 6,0 \Rightarrow |\vec{F}_m| = 10 \text{ N}$$

O sentido de \vec{F}_m é o mesmo do impulso \vec{I} (fig. 25).

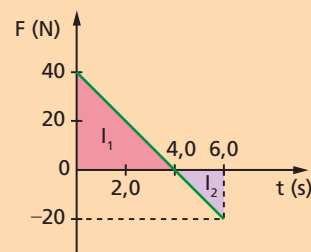


Figura 23.



Figura 24.

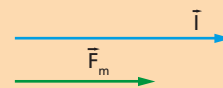
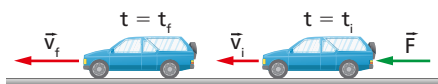


Figura 25.

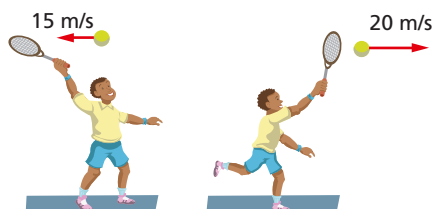
Exercícios de Aplicação

15. A figura representa um automóvel de massa $m = 800 \text{ kg}$ que, no instante $t_i = 0$, tem velocidade \vec{v}_i e, no instante $t_f = 2,0$ s, tem velocidade \vec{v}_f , sendo $|\vec{v}_i| = 5,0 \text{ m/s}$ e $|\vec{v}_f| = 8,0 \text{ m/s}$.



- Determine a variação da quantidade de movimento do automóvel entre os instantes t_i e t_f .
- Sendo \vec{F} a resultante das forças que atuam no automóvel, calcule o valor médio de \vec{F} no intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$.

16. Durante uma partida de tênis, um jogador golpeia a bola imprimindo-lhe uma velocidade \vec{v} , de módulo 20 m/s . Sabe-se que a massa da bola é 100 g e que ela havia chegado ao jogador com velocidade \vec{v}_0 de módulo 15 m/s , de mesma direção, mas de sentido oposto a \vec{v} .

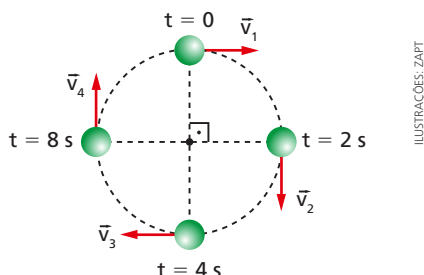


ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

- a) Determine a variação da quantidade de movimento sofrida pela bola.
- b) Supondo que o tempo de contato da bola com a raquete tenha sido 0,01 s, calcule a intensidade da força média exercida sobre a bola.

17. Uma bola de massa 2,0 kg tem movimento circular e uniforme, com velocidade escalar 10 m/s. Determine a variação da quantidade de movimento da bola nos seguintes intervalos de tempo (veja a figura):

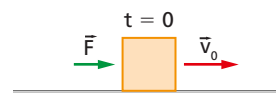
- a) de $t = 0$ a $t = 2$ s; c) de $t = 0$ a $t = 8$ s.
b) de $t = 0$ a $t = 4$ s;



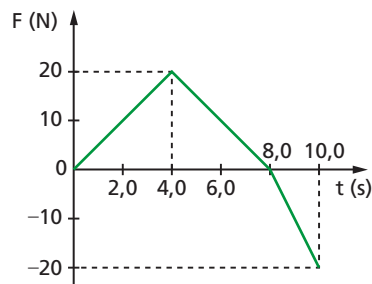
18. Volte à situação do exercício anterior e suponha que o raio da trajetória seja $R = 5,0$ m. Temos então condições de calcular o módulo da força resultante sobre a bola, que é uma força centrípeta (\vec{F}_c), pois o movimento é circular e uniforme. Consideremos então o intervalo de tempo Δt entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$ s.

- a) Levando em conta que o módulo de \vec{F}_c é constante, poderíamos calcular o impulso de \vec{F}_c , no intervalo de tempo Δt , usando a fórmula $\vec{I} = \vec{F}_c \cdot \Delta t$?
- b) Qual é o impulso de \vec{F}_c no intervalo de tempo Δt ?
- c) Qual é a intensidade da força média sobre a bola no intervalo de tempo Δt ?

19. Um bloco de massa 4,0 kg move-se inicialmente com velocidade constante $v_0 = 5,0$ m/s sobre uma superfície horizontal, como ilustra a figura a seguir.

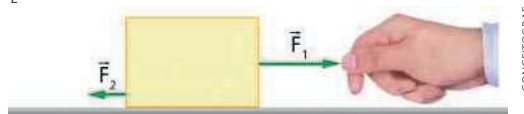


A partir do instante $t = 0$ passa a atuar sobre o bloco uma força de direção constante cuja intensidade em função do tempo é dada no gráfico.



- a) Calcule o impulso da força \vec{F} entre os instantes $t = 0$ e $t = 10$ s.
- b) Calcule a velocidade do bloco no instante $t = 10$ s.
- c) Determine o valor médio de \vec{F} entre os instantes $t = 0$ e $t = 10$ s.

20. Uma caixa de massa 2,0 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. A partir do instante $t = 0$, um indivíduo aplica sobre a caixa uma força horizontal \vec{F}_1 de intensidade $F_1 = 10$ N. A caixa entra em movimento, de modo que surge uma força de atrito \vec{F}_2 , de intensidade $F_2 = 4,0$ N.



- a) Calcule o impulso de \vec{F}_1 entre $t = 0$ e $t = 1,5$ s.
- b) Calcule o impulso de \vec{F}_2 entre $t = 0$ e $t = 1,5$ s.
- c) Calcule o impulso da força resultante (impulso total) entre $t = 0$ e $t = 1,5$ s.
- d) Qual é a velocidade da caixa no instante $t = 1,5$ s?

Exercícios de Reforço

21. (UF-RN) A quantidade de movimento de uma partícula de massa 0,4 kg tem módulo 1,2 kg · m/s. Nesse instante, a energia cinética da partícula é, em joules:

- a) 0,8 b) 1,2 c) 1,8 d) 3,0 e) 9,0

22. (U. F. ABC-SP) As baleias deslocam-se na água por meio de suas nadadeiras caudais horizontais. Suponha que, num dia de verão, determinada

baleia de 40 toneladas de massa, numa viagem para águas mais frias em busca de alimentos, esteja se movendo horizontalmente e tenha sua velocidade aumentada de 1,4 m/s para 2,2 m/s num certo intervalo de tempo. A intensidade do impulso total aplicado sobre essa baleia, nesse intervalo de tempo, foi, em N · s, igual a:

- a) 16 000 c) 56 000 e) 144 000
b) 32 000 d) 88 000

23. (U. E. Londrina-PR) Um corpo de massa 2,0 kg é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial de 20 m/s. Despreze a resistência do ar e considere a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$. O módulo do impulso exercido pela força do peso, desde o lançamento até atingir a altura máxima, em unidades do Sistema Internacional, vale:

- a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

24. (UF-GO) Para bater uma falta, durante uma partida de futebol, um jogador chuta a bola, exercendo uma força média de $2,0 \cdot 10^2 \text{ N}$ em um intervalo de tempo de $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$. Sabendo que a massa da bola é de $4,0 \cdot 10^2 \text{ g}$, pode-se afirmar que:

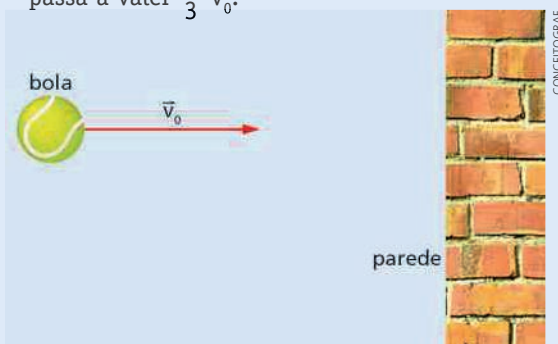
- I. o impulso fornecido à bola é igual a $2,0 \text{ N} \cdot \text{s}$.
 II. a velocidade da bola, imediatamente após o chute, é igual a $\sqrt{10} \text{ m/s}$.
 III. o trabalho realizado pela força média sobre a bola é igual a 20 J.
 IV. a potência média transferida à bola é igual a $5,0 \cdot 10^2 \text{ W}$.

25. (UE-PA) O traje espacial dos astronautas do Ônibus Espacial americano é chamado de Unidade de Mobilidade Extraveicular (EMU). Em muitas missões em que precisaram realizar tarefas fora do ônibus espacial, os astronautas usaram a chamada Unidade Tripulada de Manobras (MMU), uma “mochila” acoplada à EMU que os impulsiona, usando jatos de nitrogênio sob alta pressão, permitindo deslocamentos e rotações. Ela funciona fazendo uso da 3ª Lei de Newton: ao acionar um jato em um sentido, uma força é aplicada ao corpo do astronauta, empurrando-o em sentido contrário ao do jato. Um desses jatos imprime uma força constante de 65 N ao astronauta. Considere que a quantidade de massa ejetada em um jato é desprezível quando comparada à massa do astronauta e seu equipamento completo que vale 260 kg. Se um astronauta está a uma certa distância da estação espacial, em repouso em relação a ela, e deseja voltar para a estação com velocidade de 0,5 m/s, ele deve acionar o jato de gás durante um intervalo de tempo de:



- a) 0,2 s b) 0,5 s c) 1,0 s d) 2,0 s e) 5,0 s

26. (UF-RJ) Uma bola de tênis de massa m colide contra uma parede como mostra a figura. A velocidade da bola imediatamente antes do choque é perpendicular à parede e tem módulo v_0 . Imediatamente após o choque a velocidade continua perpendicular à parede e seu módulo passa a valer $\frac{2}{3} v_0$.



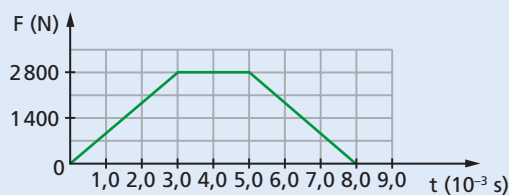
Calcule, em função de m e v_0 :

- a) o módulo da variação do momento linear da bola;
 b) a variação da energia cinética da bola.

27. (Vunesp-SP) Um atleta com massa de 80 kg salta de uma altura de 3,2 m sobre uma cama elástica, atingindo exatamente o centro da cama, em postura ereta, como ilustrado na figura. Devido à sua interação com a cama, ele é lançado novamente para o alto, também em postura ereta, até a altura de 2,45 m acima da posição em que a cama se encontrava. Considerando que o lançamento se deve exclusivamente à força de restituição da cama elástica e que a interação do atleta com a cama durou 0,4 s, calcule o valor médio da força que a cama aplica ao atleta. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

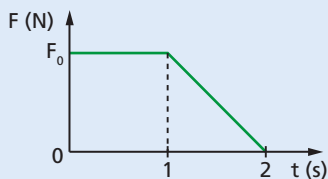


28. (UF-PE) A força exercida pelo pé de um jogador de futebol, durante o chute em uma bola de 500 g, inicialmente em repouso, está representada no gráfico $F \times t$. Calcule a velocidade que a bola adquire imediatamente após o chute.

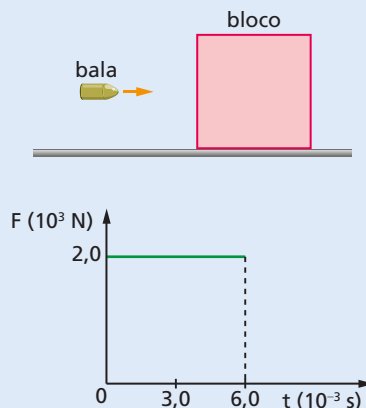


29. (UF-MA) O gráfico mostra a variação da intensidade da força \vec{F} , de direção constante, que atua sobre uma bola de bilhar de massa $m = 2 \text{ kg}$. Sabendo que para $t = 0$ e $t = 2 \text{ s}$ as velocidades da bola são 5 m/s e 14 m/s , respectivamente, qual o valor de F_0 ?

- a) 14 N
b) 10 N
c) 11 N
d) 12 N
e) 13 N



30. (UF-PE) Um bloco de madeira de massa $m = 0,8 \text{ kg}$ está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Uma bala colide com o bloco, atravessando-o. O gráfico mostra a força média exercida sobre o bloco durante os $6,0 \text{ ms}$ que durou a colisão. Considerando que o bloco não perdeu massa, qual a velocidade do bloco, imediatamente após a colisão?



31. (Unifor-CE) Defronte ao gol, um jogador rebate a bola, de massa m , fazendo com que ela passe a se mover com velocidade de mesmo módulo v , numa direção perpendicular à original. O impulso sofrido pela bola, na rebatida, tem módulo:

- a) $\frac{mv}{2}$ c) $2mv$ e) mv
b) $4mv$ d) $\sqrt{2}mv$

4. Quantidade de movimento de um sistema

Dado um conjunto (sistema) de n partículas (fig. 26) cujas quantidades de movimento num determinado instante são:

$$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$$

a quantidade de movimento total do sistema nesse instante é o vetor \vec{Q} , obtido fazendo-se a soma vetorial das quantidades de movimento de cada partícula:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_n$$

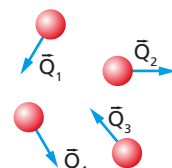


Figura 26.

Exemplo 6

- a) Consideremos um sistema formado por duas partículas, A e B, que se movem em trajetórias retilíneas e perpendiculares, como mostra a figura 27. Sendo $|\vec{Q}_A| = 60 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ e $|\vec{Q}_B| = 80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, a quantidade de movimento do sistema é o vetor \vec{Q} tal que:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$$

Na figura 28 representamos os três vetores. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo colorido da figura, temos:

$$|\vec{Q}|^2 = |\vec{Q}_A|^2 + |\vec{Q}_B|^2 = (60)^2 + (80)^2 \Rightarrow |\vec{Q}|^2 = 10000 \Rightarrow |\vec{Q}| = 100 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

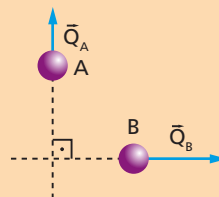


Figura 27.

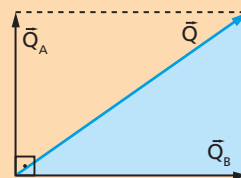


Figura 28.

b) Na figura 29 representamos um sistema formado por duas partículas A e B, de massas $m_A = 2,0 \text{ kg}$ e $m_B = 4,0 \text{ kg}$, que se movem sobre a mesma reta, mas em sentidos opostos, com velocidades de módulos $|\vec{v}_A| = 6,0 \text{ m/s}$ e $|\vec{v}_B| = 3,0 \text{ m/s}$.



Figura 29.

As quantidades de movimento de A e B são:

$$Q_A = m_A \cdot v_A = (2 \text{ kg})(6 \text{ m/s}) = 12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$Q_B = m_B \cdot v_B = (4 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) = 12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Observamos que $|\vec{Q}_A| = |\vec{Q}_B|$. Como \vec{Q}_A e \vec{Q}_B têm sentidos opostos (fig. 30), concluímos que sua soma é nula:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0}$$

Temos aqui um caso interessante: cada partícula do sistema tem uma quantidade de movimento não nula, mas a quantidade de movimento do sistema é nula.



Figura 30.

5. Forças internas e externas

Como veremos mais adiante, ao analisar o movimento de um sistema de corpos, precisaremos separar as forças que atuam neles em dois conjuntos: conjunto das forças internas e conjunto das forças externas. Uma força é chamada **interna** quando é exercida por um corpo do sistema sobre outro corpo do mesmo sistema. Uma força atuante num corpo do sistema é chamada **externa** quando é exercida por um corpo que está fora do sistema.

Consideremos um sistema formado pela Terra e pela Lua (fig. 31). No capítulo 24 veremos que todos os corpos desse sistema se atraem. Assim, existe um par de forças de atração entre a Terra e a Lua; são as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , que, pelo Princípio da Ação e Reação, devem ter o mesmo módulo, mas sentidos opostos: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ e $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$. As forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são forças exercidas entre dois corpos do sistema e, portanto, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são classificadas como forças internas. Porém, a Terra e a Lua são atraídas pelos outros corpos do Sistema Solar. Por exemplo, na figura 31, representamos um par de forças de atração entre o Sol e a Terra (\vec{F}_3 e \vec{F}_4) e um par de forças de atração entre o Sol e a Lua (\vec{F}_5 e \vec{F}_6). Assim, o sistema Terra + Lua recebe a ação das forças \vec{F}_3 e \vec{F}_5 exercidas por um corpo que está fora do sistema (o Sol); portanto, \vec{F}_3 e \vec{F}_5 são forças externas ao sistema.

Vamos considerar agora o sistema formado pela Terra, pela Lua e pelo Sol (fig. 32). As forças \vec{F}_3 e \vec{F}_5 são agora classificadas como forças internas, pois são exercidas por um corpo que faz parte do sistema: o Sol. Portanto:

Antes de classificar uma força como interna ou externa, devemos deixar bem claro qual é o sistema; uma mesma força pode ser interna em relação a um sistema e externa em relação a outro.

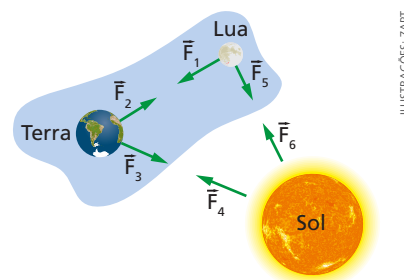


Figura 31.

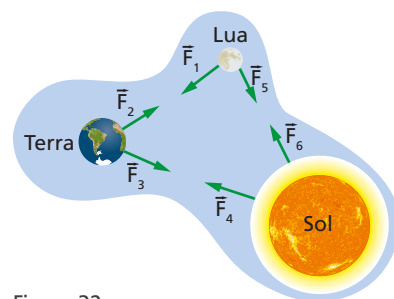


Figura 32.

Quando a resultante das forças externas é igual a zero, dizemos que o sistema é **isolado de forças** ou, simplesmente, **isolado**.

6. Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

Na figura 33 representamos um sistema isolado, formado por apenas dois corpos, A e B . Suponhamos que, entre os corpos, exista um par de forças de atração (são forças internas). As forças poderiam ser também de repulsão; o importante é que, pela Lei da Ação e Reação, essas forças devem ter o mesmo módulo, mas sentidos opostos:

$$|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| \quad \text{e} \quad \vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

Assim, em qualquer intervalo de tempo Δt , o impulso da força \vec{F}_A (\vec{I}_A) e o impulso da força \vec{F}_B (\vec{I}_B) devem também ter o mesmo módulo, mas sentidos opostos (fig. 34):

$$|\vec{I}_A| = |\vec{I}_B| \quad \text{e} \quad \vec{I}_A = -\vec{I}_B$$

Mas sabemos que o impulso de uma força é igual à variação da quantidade de movimento produzida pela força. Assim, o fato de termos $\vec{I}_A = -\vec{I}_B$ significa que as variações das quantidades de movimento dos corpos A e B são opostas e têm o mesmo módulo:

$$|\Delta \vec{Q}_A| = |\Delta \vec{Q}_B| \quad \text{e} \quad \Delta \vec{Q}_A = -\Delta \vec{Q}_B$$

Portanto:

$$\Delta \vec{Q}_A + \Delta \vec{Q}_B = 0$$

Isso significa que a variação da quantidade de movimento total do sistema é nula, isto é, as forças \vec{F}_A e \vec{F}_B podem alterar as quantidades de movimento dos corpos A e B , mas não alteram a quantidade de movimento total; a quantidade de movimento total é constante, mesmo que variem as quantidades de movimento de A e B .

Podemos estender essa argumentação para o caso de um sistema isolado com um número qualquer de corpos. Já que o sistema é isolado, só precisamos considerar as forças internas. Mas estas aparecem sempre aos pares e não alteram a quantidade de movimento total do sistema. Podemos, então, enunciar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:

A quantidade de movimento de um sistema isolado é constante.

Se o sistema não for isolado, isto é, a resultante das forças externas não for nula, então a quantidade de movimento total do sistema irá variar, sendo a variação igual ao impulso da resultante das forças externas.

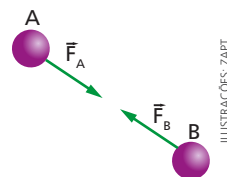


Figura 33.

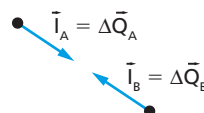


Figura 34.

Exemplo 7

Na figura 35 representamos dois carrinhos A e B , de massas $m_A = 6,0 \text{ kg}$ e $m_B = 4,0 \text{ kg}$, movendo-se com velocidades constantes \vec{v}_A e \vec{v}_B de módulos $v_A = 7,0 \text{ m/s}$ e $v_B = 3,0 \text{ m/s}$, sobre uma superfície horizontal sem atrito. Como $v_A > v_B$, haverá uma colisão entre os carrinhos. Suponhamos que haja um dispositivo que faça com que após a colisão os carrinhos fiquem unidos (fig. 36). Vamos calcular a velocidade do conjunto após a colisão.



Figura 35. Antes da colisão.

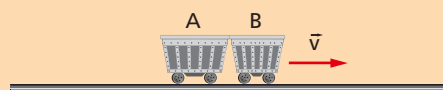


Figura 36. Após a colisão.

Antes da colisão as forças que atuam em A são o peso \vec{P}_A e a reação normal do apoio \vec{F}_{NA} ; as forças que atuam em B são o peso \vec{P}_B e a reação normal do apoio \vec{F}_{NB} . Durante a colisão haverá entre os carrinhos um par de forças de ação e reação, \vec{F} e $-\vec{F}$. As forças \vec{F} e $-\vec{F}$ são forças internas ao sistema formado pelos carrinhos, enquanto as outras forças são externas. Mas, como \vec{P}_A se cancela com \vec{F}_{NA} e \vec{P}_B se cancela com \vec{F}_{NB} , podemos afirmar que a resultante das forças externas é nula e, portanto, a quantidade de movimento do sistema se conserva, isto é, deve ser a mesma tanto antes como após a colisão.

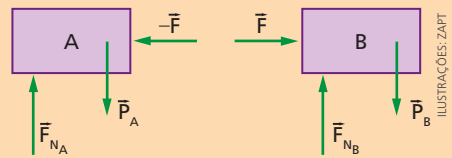


Figura 37.

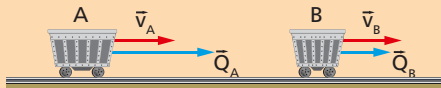


Figura 38.

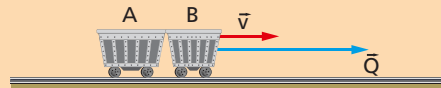


Figura 39.

Portanto:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$$

Como os três vetores têm o mesmo sentido (fig. 40), temos:

$$Q = Q_A + Q_B \quad (1)$$

Mas:

$$Q = (m_A + m_B)v; Q_A = m_A \cdot v_A; Q_B = m_B \cdot v_B$$

Substituindo em (1):

$$(m_A + m_B)v = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B \Rightarrow (6,0 + 4,0)v = (6,0)(7,0) + (4,0)(3,0)$$

Portanto:

$$v = 5,4 \text{ m/s}$$

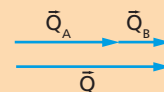


Figura 40.

Exemplo 8

Um garoto de massa $m_G = 40 \text{ kg}$, segurando uma melancia de massa $m_M = 4,0 \text{ kg}$, está inicialmente em repouso, usando patins (fig. 41). Num determinado instante o garoto lança a melancia horizontalmente, com velocidade cujo módulo é $v_M = 5,0 \text{ m/s}$ (fig. 42). Assim, pela Lei da Ação e Reação, o garoto adquire a velocidade \vec{v}_G . Desprezando os atritos, vamos calcular o módulo de \vec{v}_G .



Figura 41.

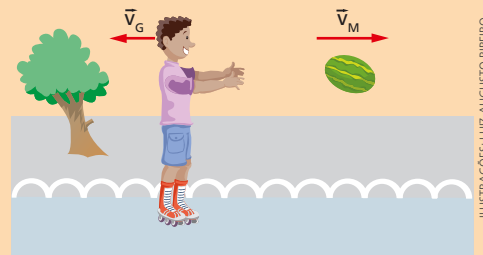


Figura 42.

O nosso sistema tem 2 corpos: o garoto e a melancia. Esse sistema está inicialmente em repouso sob a ação das forças externas \vec{P}_1 e \vec{F}_{N1} (fig. 43), em que \vec{P}_1 é o peso total e \vec{F}_{N1} é a força que o solo exerce nos pés do garoto. Como essas forças se anulam, podemos dizer que inicialmente o sistema está isolado. As forças internas são as forças exercidas entre o garoto e a melancia. Durante o lançamento o garoto exerce a força \vec{F}_1 sobre a melancia (fig. 44), e esta reage sobre o garoto com a força \vec{F}_2 . Essas forças são internas e, pela Lei da Ação e Reação, têm o mesmo módulo e sentidos opostos: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Após o lançamento da melancia, as forças externas que atuam sobre o sistema são: sobre o garoto, o seu peso \vec{P}_G (fig. 45) e a reação do solo \vec{F}_N ; sobre a melancia, o seu peso \vec{P}_M , que fará com que sua trajetória seja parabólica. Será que após o lançamento da melancia o sistema continua isolado?

As forças \vec{P}_G e \vec{F}_N se cancelam, mas a força \vec{P}_M não é cancelada. Portanto, o sistema não está isolado. Porém, essa força externa não cancelada é uma força vertical; não há forças externas na direção horizontal. Isso significa que, na horizontal, a quantidade de movimento se conserva, embora a quantidade de movimento total varie, devido à força \vec{P}_M . No início o sistema estava em repouso e, portanto, sua quantidade de movimento era nula. Já que na horizontal o sistema está isolado, após o lançamento da melancia a quantidade de movimento horizontal do sistema deverá permanecer constante. Sendo \vec{Q}_G a quantidade de movimento horizontal do garoto e \vec{Q}_M a quantidade de movimento horizontal da melancia (fig. 46) logo após o lançamento:

$$\vec{Q}_G + \vec{Q}_M = 0 \Rightarrow |\vec{Q}_G| = |\vec{Q}_M| \Rightarrow m_G \cdot v_G = m_M \cdot v_M \Rightarrow 40 \cdot v_G = (4,0)(5,0) \Rightarrow v_G = 0,50 \text{ m/s}$$

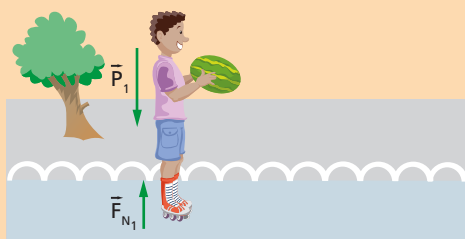


Figura 43.

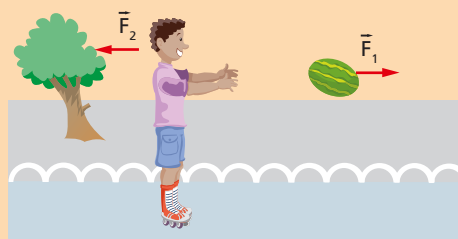


Figura 44.

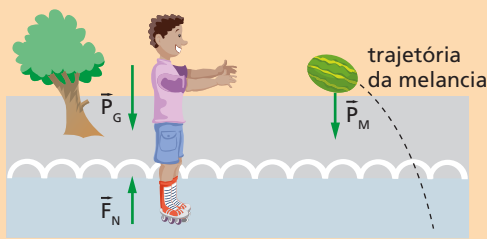


Figura 45.

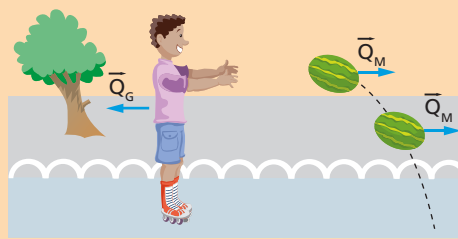


Figura 46.

É interessante observar que, inicialmente, a energia cinética do nosso sistema era nula (garoto e melancia em repouso). Porém, assim que o garoto lançou a melancia, a energia cinética total do sistema deixou de ser nula. De onde veio essa energia cinética? O que ocorreu é que parte da energia química armazenada no corpo do garoto transformou-se em energia cinética do garoto e da melancia.

Aplicações do Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

Entre as várias aplicações do Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento podemos destacar duas: o estudo das colisões e o das explosões. O exemplo do garoto jogando a melancia é análogo ao caso de uma explosão. Por exemplo, quando uma granada explode, essa explosão é causada por forças internas; assim, a quantidade de movimento inicial da granada deve ser igual à soma das quantidades de movimento dos fragmentos após a explosão, incluindo os gases que resultam desta. A quantidade de movimento dos gases é difícil de calcular (pois envolve milhões de moléculas). No entanto, essa quantidade de movimento é pequena em comparação com a dos fragmentos e, por isso, nos exercícios será desprezada. É importante ressaltar que, numa explosão, a energia química do explosivo é transformada em energia cinética dos fragmentos.

Tanto explosões quanto colisões ocorrem num curto intervalo de tempo. Assim, em geral, mesmo que a resultante das forças externas não seja nula, nesse curto intervalo de tempo, podemos admitir que a quantidade de movimento do sistema se conserva,

isto é, a quantidade de movimento “um pouco antes” da explosão (ou colisão) é igual à quantidade de movimento “logo após” a explosão (ou colisão).

Nos experimentos de Física Nuclear ocorrem muitas situações de colisões e explosões. Frequentemente observamos a “explosão” de um núcleo, isto é, o núcleo de um átomo emite uma ou mais partículas. Na realidade, os físicos não chamam isso de explosão, mas, sim, de decaimento. Para investigar o núcleo e as partículas elementares, os físicos produzem colisões entre núcleos, prótons, elétrons, etc., usando gigantescas máquinas denominadas aceleradores de partículas.

Na figura 47, temos a visão aérea de um laboratório americano, o Fermilab (assim chamado em homenagem ao grande físico italiano Enrico Fermi), na cidade de Chicago, Estados Unidos. O acelerador é um grande anel circular cuja circunferência mede 6 quilômetros. Na figura 48, temos a foto de um trecho do acelerador. Nesse acelerador, duas partículas são aceleradas em sentidos opostos e, quando suas velocidades ficam muito grandes, elas se chocam, produzindo durante a colisão outras partículas e energia (fótons). Essas colisões são analisadas usando-se duas “ferramentas” muito poderosas: o Princípio da Conservação da Energia e o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento (além de outros princípios de conservação mais complexos).



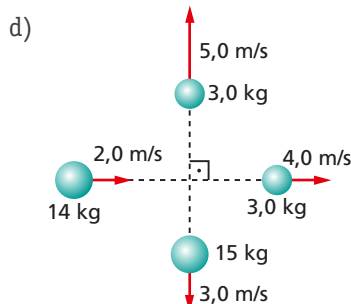
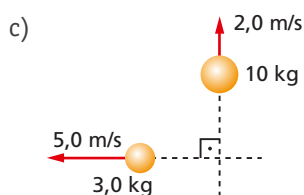
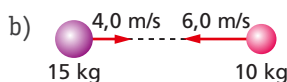
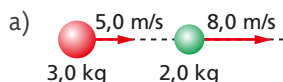
Figura 47. Vista aérea do Fermilab em Chicago, EUA.



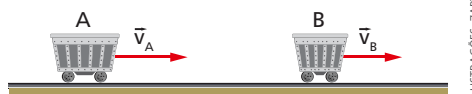
Figura 48. Vista interna do acelerador do Fermilab.

Exercícios de Aplicação

32. Determine a quantidade de movimento de cada sistema apresentado a seguir:

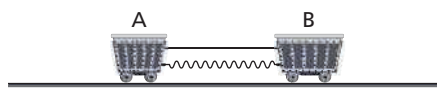


33. Na figura representamos dois carrinhos A e B, de massas $m_A = 7,5 \text{ kg}$ e $m_B = 2,5 \text{ kg}$, que se movem com velocidades constantes \vec{v}_A e \vec{v}_B , sobre a mesma reta, em uma superfície horizontal sem atrito. São dados: $v_A = 6,0 \text{ m/s}$ e $v_B = 2,0 \text{ m/s}$.



Os carrinhos têm um engate de modo que, após a colisão, prosseguem unidos.

- Qual a velocidade dos carrinhos após a colisão?
 - Calcule a soma das energias cinéticas dos dois carrinhos antes da colisão.
 - Calcule a energia cinética do conjunto após a colisão.
 - Calcule a variação da energia cinética do sistema.
34. A figura representa dois carrinhos A e B, de massas $m_A = 4,0 \text{ kg}$ e $m_B = 6,0 \text{ kg}$, inicialmente em repouso, comprimindo uma mola e unidos por um barbante.



Num determinado instante o barbante se rompe, e a mola se distende e cai. Logo após observa-se que o carrinho *B* move-se para a direita com velocidade 8,0 m/s.

- Qual a velocidade adquirida pelo carrinho *A*?
- Qual a energia potencial elástica armazenada na mola antes do rompimento do barbante?

- 35.** Na figura *a* representamos um garoto de massa 50 kg, segurando uma pedra de massa 2,0 kg, sobre um carrinho de massa 10 kg. Na situação da figura, o sistema está em repouso. Num determinado instante, o garoto lança a pedra horizontalmente, com velocidade inicial \vec{v}_0 em relação ao solo (fig. *b*), cujo módulo é 3,0 m/s.

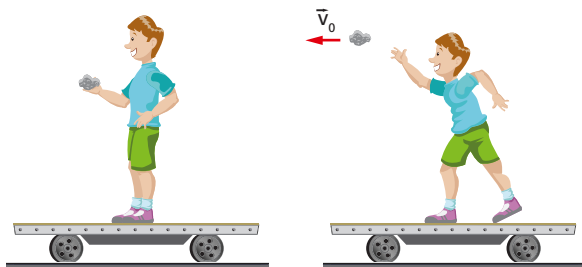


Figura *a*.

Figura *b*.

- Desprezando os atritos, calcule a velocidade de recuo do carrinho.
- No exercício anterior, a energia cinética final do sistema veio da energia potencial armazenada na mola. Na situação deste exercício, de onde veio a energia cinética do sistema após o lançamento da pedra?

- 36.** Na figura *a* representamos a situação inicial de duas bolas *A* e *B*, de massas $m_A = 6,0$ kg e $m_B = 2,5$ kg, que se movem sobre uma mesma reta, com velocidades de sentidos opostos e módulos $v_A = 4,0$ m/s e $v_B = 12$ m/s. Depois da colisão das bolas verifica-se que elas continuam a mover-se sobre a mesma reta, sendo que a bola *B* move-se para a direita com velocidade $v'_B = 6,0$ m/s. Determine a velocidade da bola *A* após a colisão.

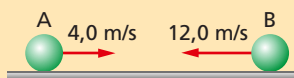


Figura *a*.

Resolução:

Quando as velocidades têm a mesma direção, podemos considerar as velocidades e as quantidades de movimento como grandezas escalares cujos sinais dependem de um eixo adotado (fig. *b*).

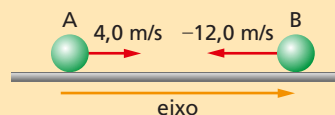


Figura *b*. Antes da colisão.

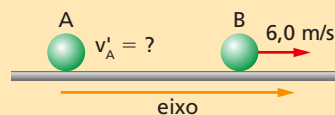


Figura *c*. Após a colisão.

Assim, antes da colisão temos:

$$v_A = 4,0 \text{ m/s e } v_B = -12,0 \text{ m/s}$$

Após a colisão temos:

$$v'_B = 6,0 \text{ m/s}$$

A quantidade de movimento do conjunto deve ser a mesma antes e após a colisão:

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B$$

$$(6)(4,0) + (2,5)(-12) = (6)v'_A + (2,5)(6,0)$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$v'_A = -3,5 \text{ m/s}$$

Como a velocidade resultou negativa, isto quer dizer que após a colisão a bola *A* move-se em sentido oposto ao do eixo, isto é, para a esquerda (fig. *d*).

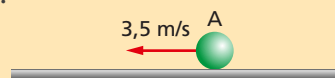
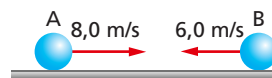


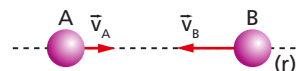
Figura *d*.

- 37.** A figura a seguir representa duas bolas *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 10 kg e 4,0 kg, que se movem sobre uma mesma reta.



Sabe-se que após a colisão as bolas continuam a se mover sobre a mesma reta, e que a bola *B* tem velocidade 12 m/s para a direita.

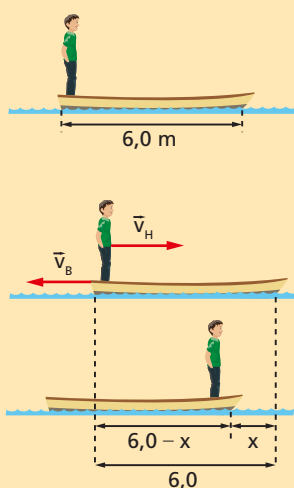
- Determine o módulo e o sentido da velocidade da bola *A* após a colisão.
 - Calcule a variação da energia cinética do sistema.
- 38.** Duas bolas *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 2,0 kg, têm inicialmente velocidade de módulo $v_A = 5,0$ m/s e $v_B = 10$ m/s, como ilustra a figura, movendo-se sobre a mesma reta.



Verifica-se que, após a colisão, as bolas continuam a se mover sobre a reta *r*, sendo que a bola *B* tem velocidade 8,0 m/s para a direita.

- Determine o módulo e o sentido da velocidade da bola *A* após o choque.
- Calcule a variação da energia cinética do sistema.

39. Um homem de massa $m_H = 60 \text{ kg}$ está inicialmente parado numa extremidade de um barco de massa $m_B = 120 \text{ kg}$, o qual está também parado, como ilustra a figura. O homem, então, caminha até a outra extremidade. Desprezando a resistência da água ao movimento do barco, calcule o deslocamento do barco.



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

Resolução:

Desprezando a resistência da água, podemos considerar o sistema homem + barco como isolado e assim impor a conservação da quantidade de movimento. Vamos supor que o deslocamento do homem se dê com velocidade constante. Assim, enquanto o homem move-se para a direita com velocidade v_H , o barco move-se para a esquerda com velocidade v_B . O sistema estava inicialmente em repouso e, portanto, com quantidade de movimento nula. Para que a quantidade de movimento continue nula, devemos ter:

$$m_B \cdot v_B = m_H \cdot v_H$$

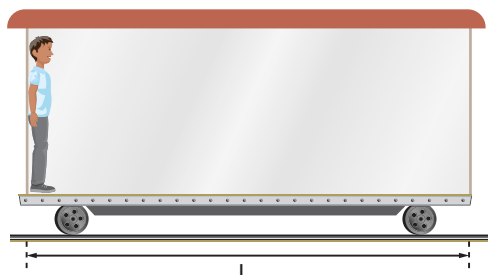
Mas: $v_B = \frac{x}{\Delta t}$ e $v_H = \frac{6,0 - x}{\Delta t}$. Substituindo na equação acima:

$$m_B \frac{x}{\Delta t} = m_H \frac{6,0 - x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 120 \cdot x = 60(6,0 - x) \Rightarrow x = 2,0 \text{ m}$$

Consideramos a hipótese de que as velocidades tenham sido constantes; porém, no capítulo 22, veremos que a resposta teria sido a mesma caso as velocidades não fossem constantes.

40. Um homem de massa 80 kg está inicialmente em repouso na extremidade de um vagão de massa 720 kg e comprimento $L = 18 \text{ m}$, como ilustra a figura.

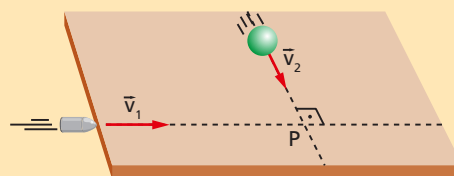


LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

O homem anda até a outra extremidade do vagão e para. Desprezando o atrito do vagão com o solo, determine:

- o deslocamento do homem em relação ao solo;
- o deslocamento do vagão em relação ao solo.

41. A figura *a* ilustra uma situação em que uma bala de massa $m_1 = 0,015 \text{ kg}$ é disparada, com velocidade horizontal de módulo $v_1 = 400 \text{ m/s}$. Ao mesmo tempo, uma bola de massa $m_2 = 1,6 \text{ kg}$ move-se sobre a mesa com velocidade de módulo $v_2 = 5,0 \text{ m/s}$, em trajetória perpendicular à trajetória da bala. A bala e a bola atingem o ponto *P* simultaneamente, ficando a bala alojada na bola, isto é, após a colisão a bala e a bola passam a constituir um único corpo. Determine a velocidade do conjunto logo após a colisão.



ZAPT

Figura *a*.

Resolução:

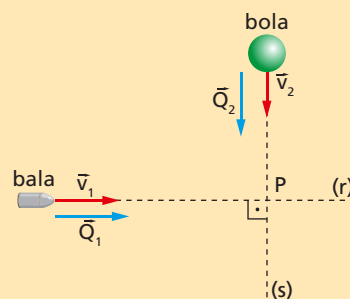
Vamos considerar como sistema o conjunto formado pela bala e pela bola. A situação da bala, aqui, é semelhante à situação da melancia no Exemplo 8. O peso da bala é uma força externa não anulada. Porém, o seu efeito é só na vertical; na horizontal podemos dizer que não há forças externas atuando e, assim, podemos impor a conservação da quantidade de movimento na horizontal.

Na figura *b* temos uma visão “de cima” da situação antes da colisão. A bala move-se sobre a reta *r*, e a bola, sobre a reta *s*. A bala tem quantidade de movimento \vec{Q}_1 , e a bola tem quantidade de movimento \vec{Q}_2 , sendo:

$$|\vec{Q}_1| = m_1 \cdot v_1 = (0,015 \text{ kg})(400 \text{ m/s})$$

$$|\vec{Q}_1| = 6,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$|\vec{Q}_2| = m_2 \cdot v_2 = (1,6 \text{ kg})(5,0 \text{ m/s}) = 8,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$



ZAPT

Figura *b*.

A quantidade de movimento do sistema antes da colisão é o vetor \vec{Q}_i (fig. c), tal que:

$$|\vec{Q}_i|^2 = |\vec{Q}_1|^2 + |\vec{Q}_2|^2 = (6,0)^2 + (8,0)^2$$

Portanto:

$$|\vec{Q}_i| = 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

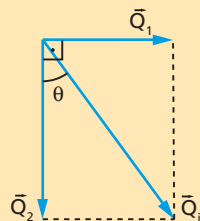


Figura c.

A direção de \vec{Q}_i pode ser dada por:

$$\text{tg } \theta = \frac{|\vec{Q}_1|}{|\vec{Q}_2|} = \frac{6}{8} = 0,75$$

isto é, $\theta = \text{arc tg } 0,75 \cong 37^\circ$

Após a colisão, o conjunto, de massa $m = m_1 + m_2$, move-se sobre a reta t (fig. d), com velocidade \vec{v}_f e quantidade de movimento \vec{Q}_f .

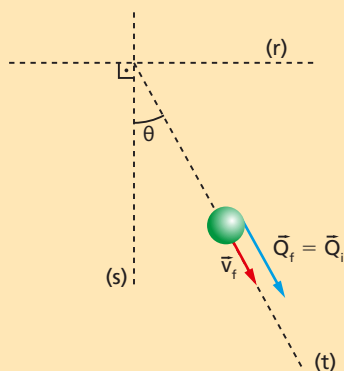


Figura d.

Como a quantidade de movimento inicial (\vec{Q}_i) deve ser igual à quantidade de movimento final (\vec{Q}_f), temos:

$$\vec{Q}_f = \vec{Q}_i$$

e o ângulo θ da figura d é o mesmo ângulo θ da figura c:

$$|\vec{Q}_f| = |\vec{Q}_i| \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot |\vec{v}_f| = |\vec{Q}_i| \Rightarrow \\ \Rightarrow (1,615) \cdot |\vec{v}_f| = 10 \Rightarrow |\vec{v}_f| \cong 6,2 \text{ m/s}$$

42. Um nêutron (n), que estava em repouso na origem de um sistema de coordenadas xy (fig. a), desintegra-se em três partículas: um próton, um elétron e um neutrino. O próton (p) segue ao longo do eixo y (fig. b) com velocidade de módulo $v_p = 1,8 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, e o elétron (e) segue

ao longo do eixo x com velocidade de módulo $v_e = 4,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

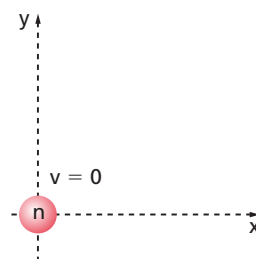


Figura a.

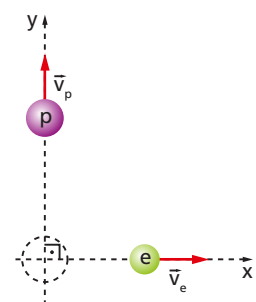


Figura b.

Determine a quantidade de movimento do nêutron sabendo que as massas do próton e do elétron são respectivamente iguais a $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ e $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

43. Um carrinho A, de massa $9,0 \text{ kg}$, move-se inicialmente com velocidade constante $v_1 = 6,0 \text{ m/s}$ sobre trilhos retos e horizontais (fig. a). Num determinado instante um bloco B, de massa $1,0 \text{ kg}$, cai verticalmente sobre o carrinho (fig. b). Desprezando os atritos, calcule a velocidade final do conjunto.

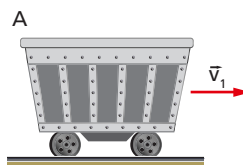


Figura a.

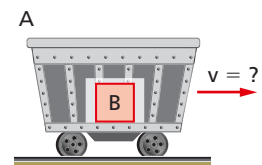
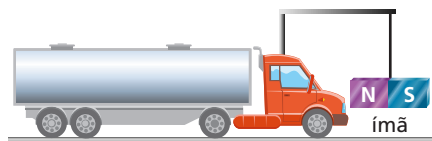


Figura b.

44. Um motorista de caminhão teve uma ideia de mover seu veículo sem gastar combustível. Ele ouviu falar que os ímãs atraem o ferro. Como a carcaça de seu caminhão é feita de ferro, ele pensou na montagem representada abaixo. Será que funciona?



45. Um núcleo do átomo de urânio-235, inicialmente em repouso (fig. a), decai emitindo uma partícula α (fig. b) cuja velocidade é $v_1 = 1,5 \cdot 10^4$ m/s. Após a emissão, o urânio-235 transforma-se em um núcleo de tório-231, que recua com velocidade \bar{v}_2 . O urânio-235 tem em seu núcleo um total de 235 partículas (entre prótons e nêutrons); o átomo de tório-231 tem em seu núcleo 231 partículas (entre prótons e nêutrons). A partícula α é um núcleo de hélio, possuindo um total de 4 partículas (2 prótons e 2 nêutrons). Lembrando que as massas do próton e do nêutron são praticamente iguais, calcule o valor de v_2 .

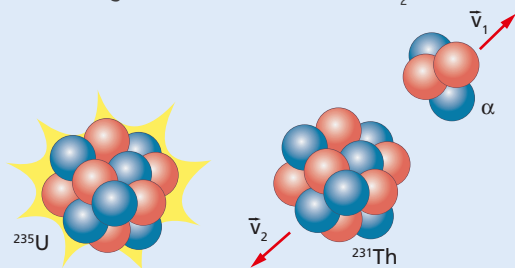


Figura a.

Figura b.

46. (Unicamp-SP) Suponha que o esquilo do filme *A era do gelo* tenha desenvolvido uma técnica para recolher nozes durante o percurso para sua toca. Ele desliza por uma rampa até atingir a superfície plana com velocidade de 10 m/s. Uma vez nessa superfície, o esquilo passa a apanhar nozes em seu percurso. Todo o movimento se dá sobre o gelo, de forma que o atrito pode ser desprezado. A massa do esquilo é de 600 g e a massa de uma noz é de 40 g.
- Qual é a velocidade do esquilo após recolher 5 nozes?
 - Calcule a variação da energia cinética do conjunto formado pelo esquilo e pelas nozes entre o início e o final da coleta das 5 nozes.
47. Uma bola A, de massa 2,0 kg e velocidade \bar{v}_1 , choca-se frontalmente com outra bola B, inicialmente em repouso (fig. a). Após a colisão as bolas movem-se na mesma direção de \bar{v}_1 , com velocidades \bar{v}_2 e \bar{v}_3 , como ilustra a figura b. São dados: $v_1 = 7,0$ m/s; $v_2 = 3,0$ m/s; $v_3 = 1,0$ m/s.

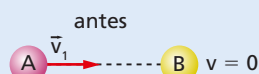


Figura a.

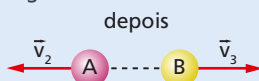
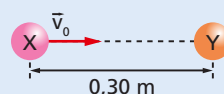


Figura b.

ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Calcule:

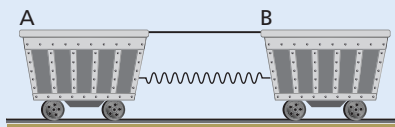
- a massa de B;
 - a energia cinética do sistema antes da colisão;
 - a energia cinética do sistema após a colisão;
 - a variação de energia cinética do sistema.
48. (UE-RJ) Uma partícula X desloca-se com velocidade constante $v_0 = 3,0 \cdot 10^7$ m/s, frontalmente ao encontro da partícula Y, que está em repouso, de modo que ambas só interajam durante a colisão. A figura representa a posição das partículas no instante $t = 0$.



- Depois de quanto tempo ocorrerá a colisão entre as partículas?
 - Após a colisão as partículas movem-se na mesma direção e sentido de \bar{v}_0 , de modo que a velocidade de X é $\frac{1}{3}$ da velocidade inicial v_0 e $\frac{1}{4}$ da velocidade adquirida por Y. Calcule a razão entre a massa de X e a massa de Y.
49. (UE-PI) Colisões (ou choques) entre corpos em sistemas isolados de forças externas são extremamente comuns, tanto em sistemas macroscópicos (colisões entre bolas de bilhar, entre carros etc.) quanto em sistemas microscópicos (colisões entre átomos, ou entre partículas elementares). Nestas colisões, podemos afirmar que:
- a energia cinética sempre se conserva.
 - sempre há perdas de massa.
 - a quantidade de movimento sempre se conserva.
 - sempre há inversão nos sentidos dos movimentos das partículas envolvidas.
 - as forças conservativas atuantes no sistema sempre levam à conservação da grandeza física impulso.
50. (Vunesp-SP) Um madeireiro tem a infeliz ideia de praticar tiro ao alvo disparando seu revólver contra um tronco de árvore caído no solo. Os projéteis alojam-se no tronco que fica novamente imóvel no solo. Nessa situação, considerando um dos disparos, pode-se afirmar que a quantidade de movimento do sistema projétil-tronco:
- não se conserva, porque a energia cinética do projétil se transforma em calor.

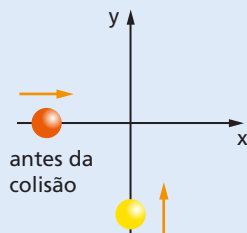
- b) se conserva, e a velocidade final do tronco é nula, pois a sua massa é muito maior do que a massa do projétil.
- c) não se conserva, porque a energia não se conserva, já que o choque é inelástico.
- d) se conserva, pois a massa total do sistema projétil-tronco não foi alterada.
- e) não se conserva, porque o sistema projétil-tronco não é isolado.

51. A figura representa dois carrinhos A e B, de massas respectivamente iguais a 2m e 3m, inicialmente em repouso, comprimindo uma mola ideal e unidos por um barbante. Num determinado instante o barbante se rompe e a mola se distende e cai. Logo após observa-se que o carrinho B move-se para a direita com energia cinética igual a 48 J. Qual a energia cinética do carrinho A?



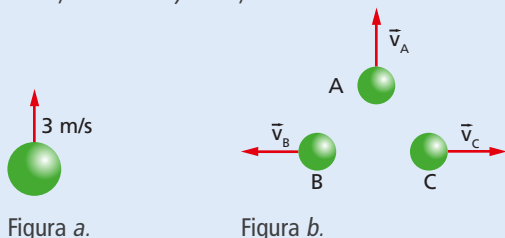
52. (U. F. Viçosa-MG) Uma partícula com massa igual a 2,0 kg se move com velocidade de módulo igual a 3,0 m/s no sentido positivo do eixo x. Outra partícula, também com massa de 2,0 kg, se move com velocidade de módulo igual a 4,0 m/s no sentido positivo do eixo y. Na origem do sistema de coordenadas elas sofrem uma colisão tal que após a colisão ficam unidas. Desprezando-se quaisquer forças externas ao sistema, o módulo da velocidade das partículas após a colisão é:

- a) 14,0 m/s
b) 1,5 m/s
c) 25,0 m/s
d) 2,5 m/s
e) 2,0 m/s



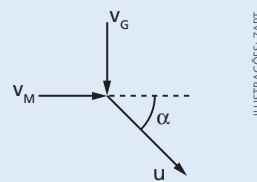
53. (UF-ES) A figura a mostra um corpo deslocando-se com velocidade 3 m/s. Se num determinado instante o corpo se parte em três fragmentos de massas iguais, a velocidade do fragmento A será:

- a) 9 m/s c) 3 m/s e) $\frac{1}{9}$ m/s
b) 6 m/s d) 1 m/s

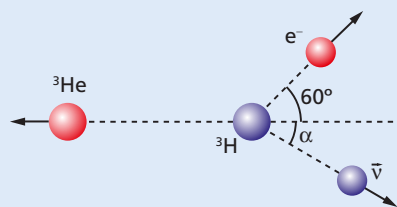


54. (Fuvest-SP) Um gavião avista, abaixo dele, um melro e, para apanhá-lo, passa a voar verticalmente, conseguindo agarrá-lo. Imediatamente antes do instante em que o gavião, de massa $m_g = 300$ g, agarra o melro, de massa $m_m = 100$ g, as velocidades do gavião e do melro são, respectivamente, $v_g = 80$ km/h na direção vertical, para baixo, e $v_m = 24$ km/h na direção horizontal, para a direita, como ilustra a figura. Imediatamente após a caça, o vetor velocidade u do gavião, que voa segurando o melro, forma um ângulo de α com o plano horizontal tal que $\tan \alpha$ é aproximadamente igual a:

- a) 20
b) 10
c) 3
d) 0,3
e) 0,1



55. (Unicamp-SP) A existência do neutrino e do antineutrino foi proposta em 1930 por Wolfgang Pauli, que aplicou as leis de conservação de quantidade de movimento e energia ao processo de desintegração β . O esquema a seguir ilustra esse processo para um núcleo de trítio, ${}^3\text{H}$ (um isótopo do hidrogênio), que se transforma em núcleo de hélio, ${}^3\text{He}$, mais um elétron, e^- , e um antineutrino, $\bar{\nu}$. O núcleo do trítio encontra-se inicialmente em repouso. Após a desintegração, o núcleo de hélio possui uma quantidade de movimento com módulo de $12 \cdot 10^{-24}$ kg \cdot m/s, e o elétron sai em uma trajetória fazendo um ângulo de 60° com o eixo horizontal e uma quantidade de movimento de módulo $6,0 \cdot 10^{-24}$ kg \cdot m/s.

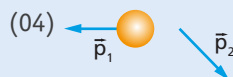
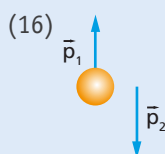
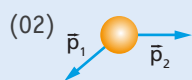
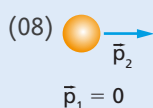
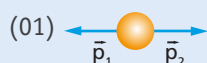


- a) O ângulo α que a trajetória do antineutrino faz com o eixo horizontal é de 30° . Determine o módulo da quantidade de movimento do antineutrino.
- b) Qual é a velocidade do núcleo de hélio após a desintegração? A massa do núcleo de hélio é $5,0 \cdot 10^{-27}$ kg.

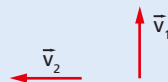
56. (UF-SC) Durante as festividades comemorativas da Queda da Bastilha, na França, realizadas em 14 de julho de 2005, foram lançados fogos de artifício em homenagem ao Brasil. Durante os fogos, suponha que um rojão com defeito, lançado obliquamente, tenha explodido no ponto

mais alto de sua trajetória, partindo-se em apenas dois pedaços que, imediatamente após a explosão, possuíam quantidades de movimento \vec{p}_1 e \vec{p}_2 . Considerando-se que todos os movimentos ocorrem em um mesmo plano vertical, verifique qual(ais) é(são) a(s) proposição(ões) que apresenta(m) o(s) par(es) de vetores \vec{p}_1 e \vec{p}_2 fisicamente possível(eis).

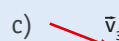
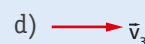
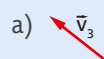
Dê como resposta a soma dos números que precedem as afirmativas corretas.



57. (Cefet-PR) Uma rocha, no espaço, está em repouso, vista de um determinado referencial inercial. Num certo instante ela explode em três fragmentos de massas aproximadamente iguais. Os vetores v_1 e v_2 representam as velocidades de dois fragmentos logo após a explosão.



Dentre os esquemas a seguir, verifique qual é aquele vetor que pode representar a velocidade adquirida pelo terceiro fragmento.



7. A Segunda Lei de Newton

Quando Newton enunciou sua Segunda Lei, não o fez na forma $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, que temos usado até agora. Ele enunciou a lei de modo que, na realidade, apresentava certa ambiguidade. Mais tarde, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) aperfeiçoou o trabalho de Newton, apresentando a Segunda Lei na forma:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} \quad (1)$$

em que \vec{Q} é a quantidade de movimento. Supondo que \vec{F} e a massa do corpo sejam constantes, temos:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_f - m\vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{m(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{\Delta t} = m\left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right) = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2)$$

A equação (2) também foi apresentada pela primeira vez por Euler.

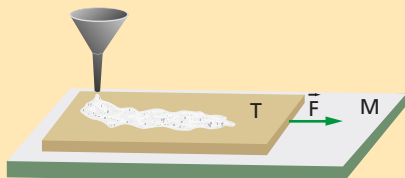
Assim, a equação (2) é um caso particular da equação (1) supondo m constante. A equação (1) é mais geral que a equação (2), podendo ser aplicada a casos em que a massa é variável, como é o caso de um foguete (fig. 49) que, ao ejetar os gases, tem sua massa diminuída. A aplicação da equação (1) ao caso do foguete exige o uso do Cálculo Diferencial, pois tanto a massa como a velocidade variam. Vamos aplicá-la em alguns casos mais simples.



Figura 49. No Centro Espacial da Guiana, o foguete europeu Ariane é lançado com dois satélites para a órbita terrestre.

Exercícios de Aplicação

58. Na figura está representada a situação em que uma tábua (T) desliza sobre uma superfície plana e horizontal (M), sem atrito, puxada por uma força \vec{F} . De um funil cai, sobre a tábua, areia à razão de 100 gramas por segundo. Determine o módulo de \vec{F} para manter a tábua com velocidade constante $v = 2,0$ m/s.



Resolução:

Nesse caso, não podemos usar a Segunda Lei de Newton na forma $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, pois o nosso sistema (tábua + areia) tem massa variável. Assim, devemos usá-la na forma: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$.

O nosso sistema tem quantidade de movimento $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$, em que \vec{v} é constante e m é variável. Assim:

$$\Delta \vec{Q} = m_f \cdot \vec{v} - m_i \cdot \vec{v} = \underbrace{(m_f - m_i)}_{\Delta m} \cdot \vec{v} = (\Delta m) \cdot \vec{v}$$

Portanto:

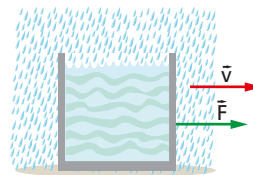
$$F = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(\Delta m) \cdot v}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right) \cdot v \quad (1)$$

Mas: $v = 2,0$ m/s e $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 100$ g/s = 0,100 kg/s

Substituindo em (1):

$$F = (0,100 \text{ kg/s})(2,0 \text{ m/s}) = 0,20 \text{ N} \Rightarrow F = 0,20 \text{ N}$$

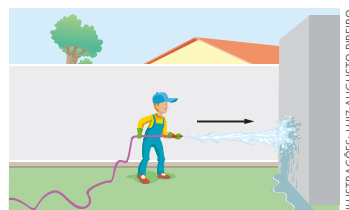
59. A figura ilustra uma caixa sendo arrastada sobre uma superfície horizontal sem atrito, puxada por uma força \vec{F} . Suponhamos que esteja chovendo, e que a chuva caia verticalmente dentro da caixa à razão de 600 gramas por minuto.



Sabendo que a velocidade da caixa se mantém constante e igual a 4,0 m/s, determine:

- a) a intensidade de \vec{F} ; b) a potência de \vec{F} .

60. A figura ilustra uma situação em que uma mangueira lança água contra uma parede, à razão de 2,0 kg/s. A água atinge a parede perpendicularmente, com velocidade 10 m/s, e cai no chão. Calcule a intensidade média da força que a água exerce na parede.

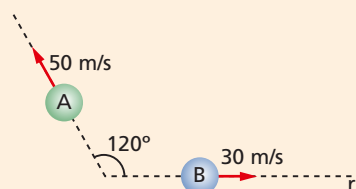


61. Uma metralhadora rigidamente presa ao solo atira balas de 20 gramas com velocidade 1000 m/s, à razão de 8 balas por segundo. A força média sofrida pela metralhadora tem módulo igual a:

- a) 80 N c) 160 N e) 16 N
b) 40 N d) 320 N

Exercícios de Aprofundamento

62. Uma granada de massa 1,20 kg inicialmente em repouso explode em três fragmentos. A figura a seguir representa os fragmentos A e B, cujas massas são, respectivamente, 0,40 kg e 0,20 kg, logo após a explosão.

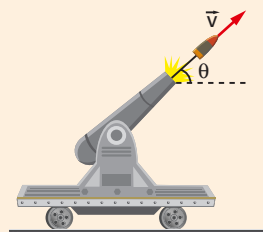


Determine:

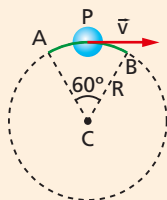
- a) a velocidade do terceiro fragmento;

- b) o ângulo formado entre a velocidade do terceiro fragmento e a reta r .

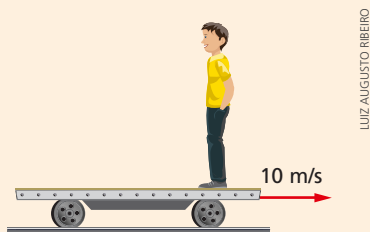
63. Um canhão apoiado sobre uma carreta dispara um projétil de massa 5,0 kg, que abandona a boca do canhão com velocidade \vec{v} , cujo módulo é 800 m/s e cuja direção forma ângulo θ com a horizontal. Sabendo que $\cos \theta = 0,80$ e que a massa do canhão com a carreta é 1000 kg, determine a velocidade de recuo da carreta.



64. Uma partícula P , de massa $8,0 \text{ kg}$, percorre, em movimento uniforme, um arco de circunferência AB , cujo raio é $R = 2,0 \text{ m}$ e cujo centro é C , como ilustra a figura. Sabendo que a força resultante (\vec{F}) sobre a partícula tem intensidade 36 N , determine o valor médio de \vec{F} .

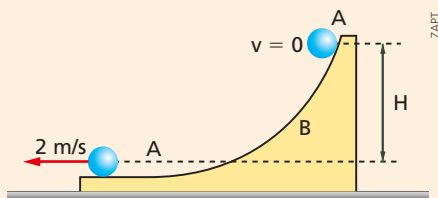


65. A figura ilustra a situação em que um vagão de massa 420 kg move-se para a direita com atrito desprezível e velocidade cujo módulo é 10 m/s . Sobre o vagão há um homem de massa 80 kg , em repouso em relação ao vagão. A partir de certo instante o homem passa a andar sobre o vagão, para a esquerda, com velocidade de $4,0 \text{ m/s}$ em relação ao vagão.



Enquanto durar esse caminhar:

- qual a velocidade do vagão em relação ao solo?
 - qual a velocidade do homem em relação ao solo?
66. (Fuvest-SP) O corpo B da figura tem massa M e pode mover-se sem atrito sobre uma superfície horizontal. Inicialmente, um corpo A de massa m é abandonado no seu topo e, após deslizar sem atrito sobre a superfície curva de B , dele se separa com velocidade 2 m/s .

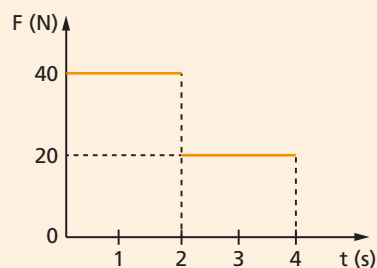
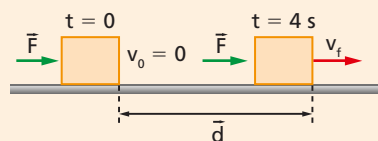


Sabendo que $M = 2m$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a velocidade final do corpo B ;
 - a altura H .
67. Uma granada inicialmente em repouso explode em apenas dois fragmentos A e B , cujas massas são m_A e m_B e cujas velocidades são \vec{v}_A e \vec{v}_B . Sendo E a soma das energias cinéticas de A e B , mostre que:

$$v_A = \sqrt{\frac{2E}{m_A \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right)}} \text{ e } v_B = \sqrt{\frac{2E}{m_B \left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)}}$$

68. Um bloco de massa $4,0 \text{ kg}$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. A partir do instante $t = 0$ passa a atuar sobre o bloco uma força \vec{F} (veja a figura), de direção e sentido constantes, mas com módulo variando, como mostra o gráfico. Despreze a resistência do ar.



- Determine o impulso de \vec{F} entre os instantes $t = 0$ e $t = 4 \text{ s}$.
- Usando $I = F_m \cdot \Delta t$, calcule o valor médio de \vec{F} entre $t = 0$ e $t = 4 \text{ s}$.
- Esboce o gráfico da velocidade escalar em função do tempo.
- Calcule o deslocamento (d) do bloco entre os instantes $t = 0$ e $t = 4 \text{ s}$.

Sugestão: Calcule a área entre o gráfico da velocidade e o eixo do tempo.

- Usando o teorema da energia cinética, calcule o valor médio de \vec{F} no deslocamento d .
- Compare os resultados obtidos nos itens B e E . São iguais?

Colisões

1. O que é uma colisão?

De modo geral, dizemos que uma interação entre dois corpos é uma **colisão** ou **choque** quando:

- a interação ocorre em um intervalo de tempo relativamente curto durante o qual o efeito das forças externas pode ser desprezado e, assim, podemos considerar o sistema como isolado e aplicar a conservação da quantidade de movimento para o “curto” intervalo de tempo da colisão;
- tanto antes como depois desse intervalo de tempo, a força de interação entre os corpos é nula ou desprezível.

No capítulo anterior analisamos algumas situações em que houve colisões, como, por exemplo, colisões entre bolas, a batida da raquete em uma bola de tênis, etc. Em todos esses casos consideramos colisões entre corpos macroscópicos (constituídos por um grande número de átomos). Esses são casos em que podemos admitir que houve contato entre os corpos. Porém, quando se trata de corpos microscópicos, como átomos, moléculas, prótons, etc., não é necessário haver contato entre eles.

A figura 1 ilustra uma situação frequente em experimentos de Física Nuclear. Na figura 1a, temos um próton A, que inicialmente se move com grande velocidade \vec{v}_A , bem distante de outro próton, B, em repouso. Ao estudarmos a eletricidade, veremos que entre dois prótons existe um par de forças de repulsão cujo módulo é dado por $F = \frac{k}{d^2}$, em que k é uma constante e d é a distância entre eles. Por essa equação percebemos que, quando d é grande, a intensidade da força é pequena. Portanto, quando A está próximo de B, durante um curto intervalo de tempo há uma intensa repulsão entre os prótons, provocando o desvio da trajetória de A e a movimentação de B, como ilustra a figura 1b.

Nessa figura, os círculos vazios representam as posições iniciais dos prótons, e os círculos cheios representam os prótons quando a distância entre eles é novamente grande e as forças de repulsão ficam novamente com intensidade desprezível. Essa interação também é chamada **colisão**.

Na realidade, entre corpos macroscópicos nunca há um contato. O que ocorre é que, quando ficam muito próximos, há entre eles uma intensa força de repulsão de origem elétrica, mas, até onde nossos olhos conseguem perceber, tudo se passa como se de fato houvesse o contato.

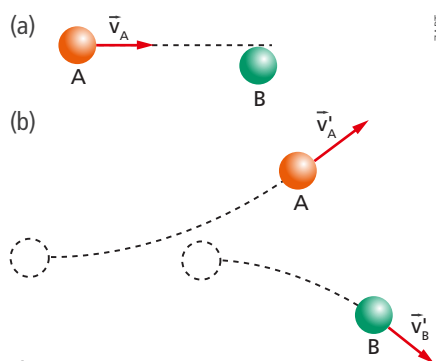


Figura 1.

1. O que é uma colisão?
2. Classificação das colisões
3. Colisões unidimensionais
4. Colisão com superfície fixa
5. Casos particulares do choque elástico

Exercícios de Aplicação

1. O pêndulo balístico é um dispositivo usado para a medida do módulo da velocidade de uma bala de revólver ou fuzil. O sistema é constituído de um grande bloco de madeira de massa M (ou uma caixa de madeira com areia dentro) pendurado por quatro fios a uma superfície horizontal; os fios são inextensíveis, flexíveis e de massa desprezível. Uma bala de massa m e velocidade v_0 é disparada horizontalmente contra o bloco (fig. a), nele penetrando e ficando incrustada (fig. b).

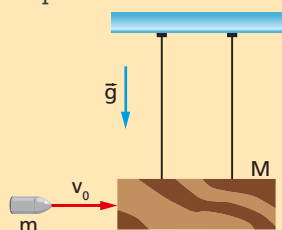


Figura a. Um pouco antes de a bala se chocar com o bloco.

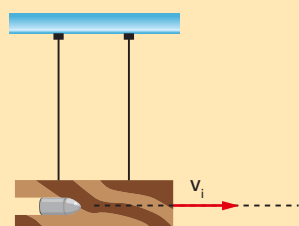


Figura b. Imediatamente após o choque.

Com isso, o conjunto de “bala + bloco” se eleva a uma altura máxima H em relação à posição de repouso (fig. c). Conhecidos os valores de H , M , m e da aceleração da gravidade (g), é possível calcular o valor de v_0 . Neste exercício faremos o inverso, daremos o valor de v_0 e pediremos o valor de H , considerando: $m = 0,05$ kg; $M = 29,95$ kg; $g = 10,0$ m/s²; $v_0 = 600$ m/s.

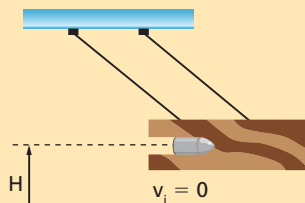


Figura c. Instante em que o conjunto atinge a altura máxima.

Resolução:

Vamos considerar o “curto” intervalo de tempo Δt , que começa “um pouco antes” do choque e termina “um pouco” após o choque. No fim desse intervalo de tempo, o conjunto “bloco + bala” está com velocidade horizontal v_i , mas ainda não começou a subir. Para o intervalo Δt vamos aplicar o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento (fig. d):

$$Q_{\text{antes}} = Q_{\text{depois}}$$

$$mv_0 = (M + m)v_i \Rightarrow v_i = \frac{m}{M + m} v_0$$

$$v_i = \frac{0,05}{29,95 + 0,05} \cdot (600) \Rightarrow v_i = 1,00 \text{ m/s}$$

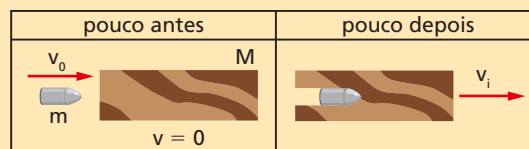


Figura d.

Vamos agora considerar o movimento de subida do conjunto “bloco + bala” (figs. b e c); para esse movimento, vamos aplicar a conservação da energia mecânica:

$$\frac{(M + m) v_i^2}{2} = (M + m)gH$$

Assim:

$$H = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{(1,00)^2}{2(10,0)}$$

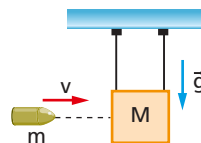
$$H = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

Alguém poderia, talvez, sugerir que resolvêssemos esse problema de outro modo, aplicando a conservação da energia mecânica para todo o processo, igualando a energia cinética inicial da bala (fig. a) à energia potencial final do conjunto “bala + bloco” (fig. c), isto é, escrevendo:

$$\frac{mv_0^2}{2} = (m + M)gH \text{ (será que vale?)}$$

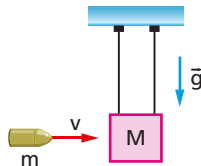
Se o leitor fizer as substituições numéricas na equação acima, verá que o valor de H será diferente de 5 cm. Isso acontece porque não há conservação da energia mecânica para todo o processo. Uma parte da energia mecânica é usada para o trabalho de deformação da bala e do bloco; uma parte ainda é transformada em outras formas de energia, como, por exemplo, o calor. Assim, este problema tem que ser necessariamente resolvido separando em duas fases: **fase da colisão** e **fase da subida do conjunto**.

2. Uma bala de massa $m = 20,0$ gramas e velocidade horizontal cujo módulo é $v = 400$ m/s atinge e se encrava num bloco de massa $M = 9,98$ kg, inicialmente em repouso e suspenso por fios ideais presos ao teto de um aposento, como ilustra a figura. Sendo $g = 10,0$ m/s², calcule:



- a velocidade do conjunto “bala + bloco” imediatamente após o impacto da bala;
- a altura máxima atingida pelo conjunto (em relação à posição inicial).

3. Um pêndulo balístico de massa $M = 11,96 \text{ kg}$ é usado para obter a velocidade v com que uma bala de massa $m = 40,0 \text{ gramas}$ sai do cano de um revólver. A bala é disparada horizontalmente contra o bloco, ficando nele incrustada após o impacto. Após o choque, o conjunto “bala + bloco” atinge uma altura máxima de $5,00 \text{ cm}$ em relação à posição inicial. Sabendo que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, calcule a velocidade da bala ao sair do cano do revólver.



4. Um projétil de massa $m = 20 \text{ g}$ atinge um bloco de massa $M = 480 \text{ g}$, que está apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito e encostado a uma mola de constante elástica $k = 2,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}$.

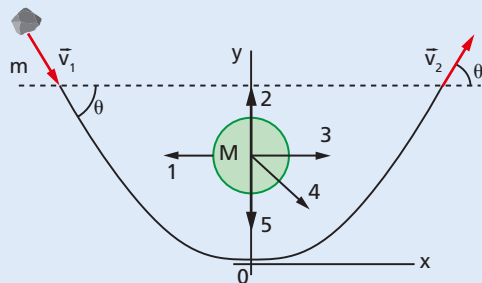
Antes da colisão, a mola não estava deformada e, após a colisão, o projétil fica incrustado no bloco. Sabendo que a velocidade inicial do projétil é $\bar{v}_0 = 400 \text{ m/s}$, calcule a deformação máxima da mola.



5. Um projétil de massa $5,0 \text{ g}$ é disparado horizontalmente contra um pedaço de madeira de massa $3,0 \text{ kg}$ que está sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito entre a madeira e a superfície é $0,20$. O projétil se engasta na madeira, e esta se desloca 25 cm sobre a superfície, até parar. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a velocidade inicial do projétil.

Exercícios de Reforço

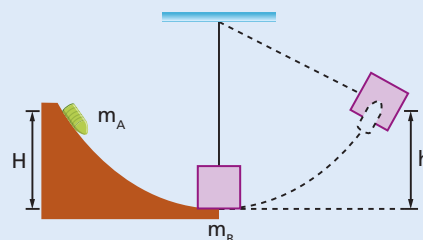
6. (Fuvest-SP) Um meteorito, de massa m muito menor que a massa M da Terra, dela se aproxima, seguindo a trajetória indicada na figura. Inicialmente, bem longe da Terra, podemos supor que sua trajetória seja retilínea e sua velocidade \bar{v}_1 . Devido à atração gravitacional da Terra, o meteorito faz uma curva em torno dela e escapa para o espaço sem se chocar com a superfície terrestre. Quando se afasta suficientemente da Terra, atinge uma velocidade final \bar{v}_2 de forma que, aproximadamente, $|\bar{v}_2| = |\bar{v}_1|$, podendo sua trajetória ser novamente considerada retilínea. O_x e O_y são os eixos de um sistema de referência inercial, no qual a Terra está inicialmente em repouso.



Podemos afirmar que a direção e o sentido da quantidade de movimento adquirida pela Terra são indicados aproximadamente pela seta:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
7. (UF-GO) Um corpo cilíndrico pontiagudo de massa m_A desliza por uma rampa sem atrito, a partir da altura H e, no final da rampa, já na horizontal, colide com outro corpo de massa m_B suspenso por um fio de massa desprezível, inicialmente em repouso. Após a colisão, os corpos permanecem

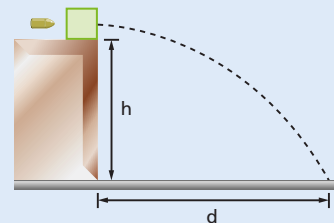
unidos e sobem juntos até uma altura h acima da posição do choque, conforme ilustrado na figura. Dados: $m_A = 0,5 \text{ kg}$; $m_B = 1,5 \text{ kg}$; $H = 80 \text{ cm}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

- a) Qual é o valor de h ?
b) Que fração da energia inicial é dissipada na colisão?

8. (Vunesp-SP) Para determinar a velocidade de um projétil, um perito, devidamente autorizado, toma um pequeno bloco de madeira, com massa de 480 g , e o coloca em repouso na borda de um balcão horizontal de altura $h = 1,25 \text{ m}$. A seguir, dispara o projétil, de massa 20 g , paralelamente ao balcão. O projétil penetra no bloco, lançando-o ao solo, a uma distância $d = 5,0 \text{ m}$ da borda do balcão, como ilustrado na figura.



Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando os efeitos de atrito com o ar e o movimento de rotação do projétil e do bloco, calcule:

- a) a velocidade com que o bloco deixa o balcão;
b) a velocidade do projétil obtida pelo perito.

2. Classificação das colisões

Uma das maneiras de classificar uma colisão leva em conta a direção dos movimentos. Uma colisão é chamada de **unidimensional** (ou **unidirecional**) quando tanto antes como depois dela os corpos se movem sobre uma mesma reta; na figura 2 temos um exemplo desse tipo de colisão. Uma colisão unidimensional é também chamada de colisão **frontal** ou colisão **central direta**.

Quando antes ou depois da colisão os corpos se movem em direções diferentes, a colisão é chamada **obliqua**.

Uma outra maneira de classificar as colisões é obtida pela comparação entre o total de energia cinética antes e depois da colisão. No capítulo anterior tivemos oportunidade de encontrar casos em que existe conservação de energia cinética, isto é, o total de energia cinética antes da colisão é igual ao total depois dela (por exemplo, o caso do exercício 38 do capítulo 20). No entanto, na maioria dos casos reais, há perda de energia cinética durante a colisão. Uma parte dessa energia perdida é usada para executar o trabalho de deformação dos corpos. Outra parte é transformada em outras formas de energia, como, por exemplo, energia térmica e energia vibratória, a qual produz o som que ouvimos durante a colisão. Em certos casos, porém, essa perda é tão pequena que admitimos que a energia cinética total é a mesma, antes e depois da colisão; tais colisões são denominadas **elásticas**. Como exemplos de colisões aproximadamente elásticas podemos citar a colisão entre duas bolas de aço e a colisão entre duas bolas de bilhar (feitas de marfim).

É possível demonstrar que, numa colisão elástica, os corpos necessariamente se separam após a colisão, isto é, numa colisão em que os corpos se unem, obrigatoriamente há perda de energia cinética.

Levando em conta a conservação ou não da energia cinética, as colisões são classificadas em três tipos:

- **colisões elásticas:** a energia cinética se conserva e os corpos se separam após a colisão;
- **colisões parcialmente elásticas:** os corpos se separam após a colisão, mas existe perda de energia cinética;
- **colisões inelásticas:** os corpos ficam unidos após a colisão e existe perda de energia cinética. São também chamadas de colisões **anelásticas**.

Na figura 3 ilustramos um caso em que os corpos se separam após a colisão.

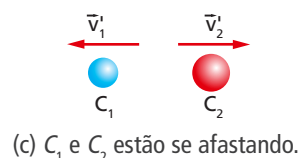
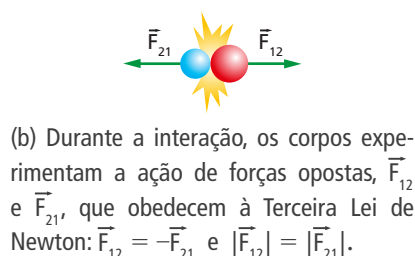
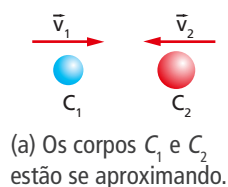


Figura 3.

Durante o intervalo de tempo Δt em que ocorre a colisão, o corpo C_1 exerce no corpo C_2 uma força variável \vec{F}_{12} , enquanto o corpo C_2 exerce em C_1 uma força \vec{F}_{21} , que, pela Lei da Ação e Reação, deve ter a cada instante o mesmo módulo, a mesma direção e sentido oposto ao de \vec{F}_{12} : $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = F$. Na realidade, não sabemos como F varia em função do tempo; apenas sabemos que o gráfico de F em função do tempo é algo parecido com o mostrado na figura 4. Durante a colisão podemos distinguir duas fases: a fase da **deformação** (Δt_1) e a fase da **restituição** (Δt_2). Na colisão, cada corpo se comporta como se fosse uma mola

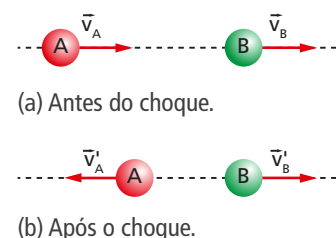


Figura 2. Exemplo de colisão unidimensional, também conhecida como choque central direto ou frontal.

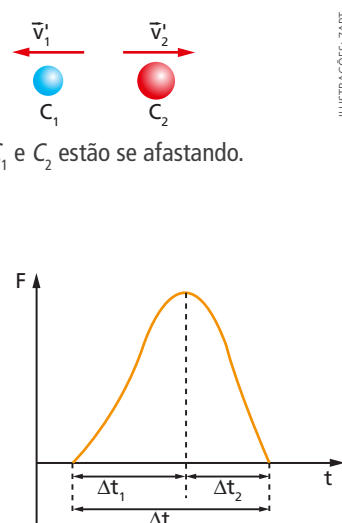


Figura 4. Gráfico da variação da força durante uma colisão.

que inicialmente é comprimida (fase da deformação) e depois se distende (fase da restituição), podendo ou não voltar à sua forma inicial. Durante a deformação uma parte da energia cinética vai se transformando em energia potencial, e durante a restituição essa energia potencial vai se transformando em energia cinética.

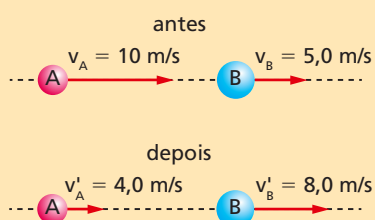
Se a colisão é elástica, ao seu final toda a energia cinética que, durante a fase de deformação, foi transformada em potencial é recuperada na forma de energia cinética. Numa colisão parcialmente elástica essa recuperação não é total; uma parte da energia cinética é perdida. Numa colisão inelástica não há fase de restituição e, assim, há perda de energia cinética, a qual é maior do que no caso de colisão parcialmente elástica (para uma mesma situação inicial).

Choques superelásticos

Em alguns casos, pode acontecer de a energia cinética total após a colisão ser maior que a de antes da colisão. Isso acontece quando, durante a colisão, algum tipo de energia potencial é liberado, transformando-se em energia cinética. Como exemplo podemos citar alguns tipos de colisão envolvendo núcleos atômicos. Quando o núcleo é quebrado, é liberada certa quantidade de energia que estava armazenada nele; a bomba atômica é um desses casos. Outro exemplo são as granadas, que, ao explodir, transformam energia potencial química em energia cinética.

Exercícios de Aplicação

9. Na figura estão representadas as situações antes e depois de uma colisão unidimensional de dois corpos A e B, cujas massas são $m_A = 1,0 \text{ kg}$ e $m_B = 2,0 \text{ kg}$. Classifique a colisão usando o critério da energia cinética.



Resolução:

Sendo E_i e E_f as energias cinéticas do sistema antes e depois da colisão, respectivamente, temos:

$$E_i = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}(1,0)(10)^2 +$$

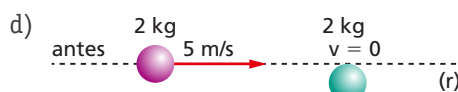
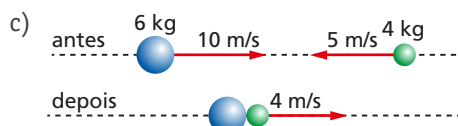
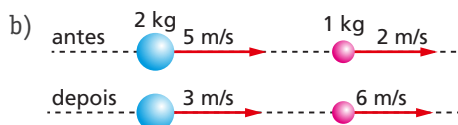
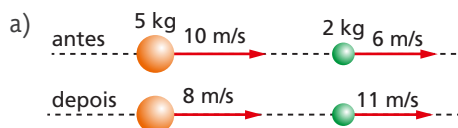
$$+ \frac{1}{2}(2,0)(5,0)^2 \Rightarrow E_i = 75 \text{ J}$$

$$E_f = \frac{1}{2}m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2}m_B (v'_B)^2 = \frac{1}{2}(1,0)(4,0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(2,0)(8,0)^2 \Rightarrow E_f = 75 \text{ J}$$

Como os corpos se separam e $E_f < E_i$, a colisão é parcialmente elástica.

10. Em cada caso, apresentamos as situações antes e depois de uma colisão. Classifique as colisões usando o critério da energia cinética.



3. Colisões unidimensionais

A figura 5 ilustra um caso genérico de colisão unidimensional de dois corpos A e B de massas m_A e m_B , que se separam após a colisão.

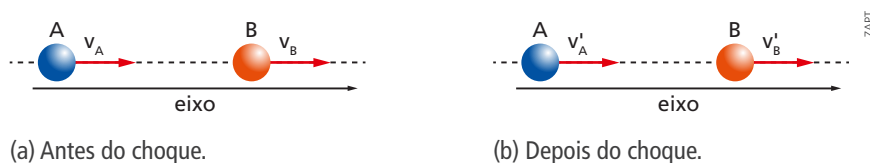


Figura 5.

Na figura colocamos todas as velocidades com sentido para a direita, embora elas possam ter sentido para a esquerda. Vamos trabalhar com as velocidades como se elas fossem grandezas escalares, considerando-as positivas se tiverem o mesmo sentido do eixo desenhado na figura e negativas se tiverem sentido oposto ao do eixo.

Suponhamos que sejam conhecidos os valores de m_A , m_B , v_A e v_B e que queiramos determinar os valores de v'_A e v'_B . A primeira providência é considerar a conservação da quantidade de movimento do sistema:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (1)$$

Porém, a equação não é suficiente para resolver o problema, pois temos duas incógnitas. Felizmente Newton descobriu, experimentalmente, uma relação entre as velocidades dos corpos antes e depois da colisão, que depende apenas dos materiais de que os corpos são feitos. Tal relação é chamada **coeficiente de restituição**, sendo representada por e e dada por:

$$e = - \frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} \quad (2)$$

Na tabela 1 damos os valores de e para alguns pares de materiais.

Na equação (2), a diferença $v'_A - v'_B$ é a velocidade de A em relação a B após o choque, e a diferença $v_A - v_B$ é a velocidade de A em relação a B antes do choque. Porém essas diferenças terão sinais contrários, pois antes do choque os corpos se aproximam e depois do choque os corpos se afastam. Desse modo:

$$\frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} < 0$$

e, assim, o sinal de menos da equação (2) é colocado para termos $e > 0$.

Obviamente, no caso de uma colisão inelástica teremos $e = 0$, pois, nesse caso, $v'_A = v'_B$ e $v'_A - v'_B = 0$.

Pode-se demonstrar que:

$$\text{o choque é elástico} \Leftrightarrow e = 1$$

Para uma colisão parcialmente elástica, temos:

$$0 < e < 1$$

Assim, em geral, desde que a colisão não seja superelástica, temos:

$$0 \leq e \leq 1$$

Materiais	e
vidro com vidro	0,93
marfim com marfim	0,90
chumbo com chumbo	0,20
ferro com chumbo	0,12

Tabela 1. Coeficientes de restituição para alguns pares de materiais.

Tipo de colisão	Coeficiente de restituição
elástica	$e = 1$
parcialmente elástica	$0 < e < 1$
inelástica	$e = 0$

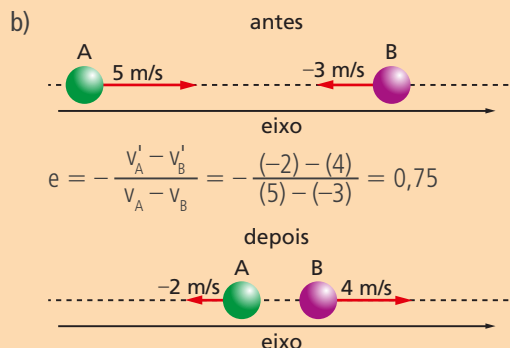
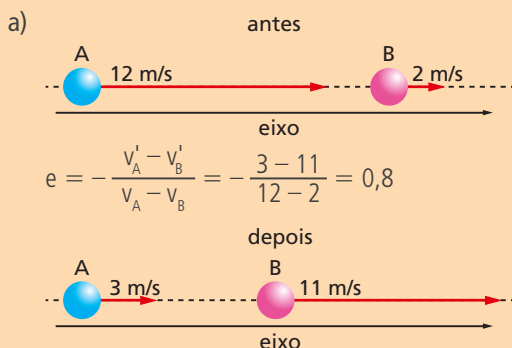
Tabela 2. Coeficientes de restituição para colisões não superelásticas.

PROCURE NO CD

Veja a demonstração no CD.

Exemplo

Em cada item, são representadas as situações de dois corpos A e B, antes e depois de uma colisão unidimensional. As velocidades já estão com os respectivos sinais em relação ao eixo adotado. Vamos calcular os coeficientes de restituição em cada caso.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Exercícios de Aplicação

11. A figura a representa duas bolinhas que se movem sobre a mesma reta. Supondo que a colisão seja frontal e elástica, calcule as velocidades logo após a colisão.



Figura a.

Resolução:

O primeiro passo é representar a situação antes da colisão (fig. b) e a situação após a colisão (fig. c), adotando um eixo e dando sinais às velocidades, de acordo com esse eixo. Provisoriamente estamos representando as velocidades finais para a direita, isto é, estamos supondo que sejam positivas. Se alguma delas for negativa, isso ficará evidenciado automaticamente na resolução das equações.

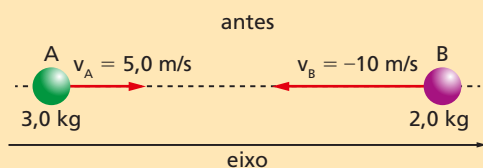


Figura b.

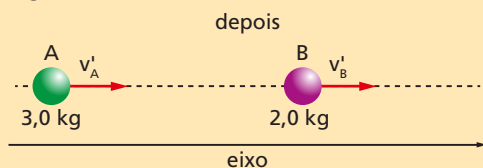


Figura c.

O segundo passo é considerar a conservação da quantidade de movimento:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$(3,0)(5,0) + (2,0)(-10) = (3,0)v'_A + (2,0)v'_B$$

$$3,0v'_A + 2,0v'_B = -5,0 \quad (1)$$

A equação (1) tem duas incógnitas; assim, precisamos de mais uma equação para resolver o problema. Essa equação vem da definição do coeficiente de restituição. Como a colisão é elástica, devemos ter $e = 1$:

$$e = -\frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} \Rightarrow 1 = -\frac{v'_A - v'_B}{(5,0) - (-10)}$$

$$v'_A - v'_B = -15 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obteremos as respostas:

$$\left. \begin{array}{l} 3,0v'_A + 2,0v'_B = -5 \\ v'_A - v'_B = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$v'_A = -7 \text{ m/s e } v'_B = +8,0 \text{ m/s}$$

O fato de termos obtido $v'_A < 0$ significa que a velocidade de A após a colisão tem sentido negativo e, assim, a situação real após a colisão é representada na figura d.



Figura d.

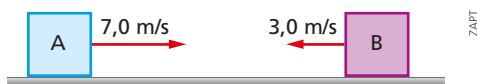
Já que a colisão é elástica, em vez de usar o coeficiente de restituição, poderíamos ter usado a definição de colisão elástica, isto é, poderíamos ter considerado a conservação de energia cinética:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2}m_B (v'_B)^2 \quad (3)$$

A equação (3), juntamente com a equação (1), formaria um sistema cuja resolução nos daria as

velocidades finais. Porém, observe que na equação (3) as velocidades são elevadas ao quadrado. Isso significa que, ao resolver o sistema, chegaremos a uma equação do segundo grau, cuja resolução é sempre mais trabalhosa que a de uma equação do primeiro grau. A vantagem do coeficiente de restituição é que ele nos fornece uma equação do primeiro grau, tornando mais fácil a resolução do problema.

12. Dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 1,0 kg, movem-se sobre uma superfície plana sem atrito e têm inicialmente as velocidades mostradas na figura.

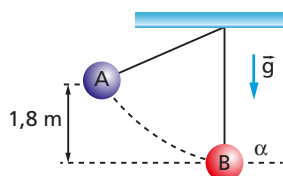


Supondo que o choque entre os blocos seja central direto e que o coeficiente de restituição seja igual a 0,60, determine:

- os módulos e os sentidos das velocidades dos blocos após o choque;
 - a perda de energia cinética durante o choque.
13. A figura representa duas partículas, A e B, antes de uma colisão unidimensional. Sabendo que a colisão é elástica, calcule as velocidades das partículas após o choque.



14. No sistema representado, a bola A, de massa 2,0 kg, é abandonada em repouso na posição indicada.



Ao chegar à posição mais baixa, colide elasticamente com a bola B, de massa 4,0 kg. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a velocidade de A um pouco antes da colisão;
 - as velocidades de A e B logo após as colisões;
 - as alturas máximas (em relação ao plano α) atingidas pelas bolas depois da primeira colisão.
15. Dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 0,1 kg e 15 kg movem-se sobre uma superfície plana, horizontal e sem atrito, como indica a figura. Supondo que o choque entre os blocos seja central direto e tenha coeficiente de restituição igual a 0,80, calcule os valores aproximados das velocidades dos blocos após o choque.



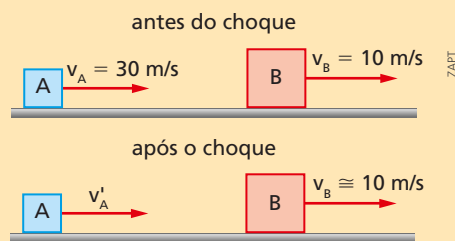
Resolução:

Pelos dados do problema percebemos que a massa do bloco B é **muito maior** que a massa do bloco A: $m_B = 150 \cdot m_A$

Por outro lado, embora a velocidade de A seja maior que a de B, a diferença não é muito grande, de modo que a quantidade de movimento de B também é muito maior que a de A:

$$\begin{aligned} Q_A &= (0,1 \text{ kg})(30 \text{ m/s}) = 3 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\ Q_B &= (15 \text{ kg})(10 \text{ m/s}) = 150 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned} \Rightarrow Q_B = 50 \cdot Q_A$$

Assim, podemos supor que, após o choque, o bloco B continua com praticamente a mesma velocidade.



Nesse caso podemos resolver o problema usando apenas o coeficiente de restituição:

$$e = 0,80 \cong \frac{10 - v'_A}{30 - 10} \Rightarrow \frac{10 - v'_A}{20} \cong 0,80 \Rightarrow v'_A \cong -6,0 \text{ m/s}$$

Portanto, após o choque teremos, **aproximadamente**, a situação representada na figura.

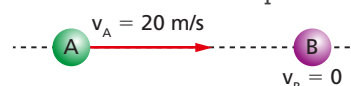


16. Uma bolinha A, de massa 0,2 kg, atinge com velocidade 20 m/s a traseira de um caminhão de massa igual a 2 toneladas, que se move a 15 m/s, como ilustra a figura.



Supondo que a colisão seja elástica, determine:

- os valores aproximados das velocidades da bolinha e do caminhão logo após o choque;
 - o sentido da velocidade da bolinha logo após o choque.
17. A figura ilustra a situação inicial de dois corpos, A e B, de massas respectivamente iguais a 400 kg e 2 kg. Supondo que o choque entre os corpos seja central direto e elástico, calcule os valores aproximados das velocidades após o choque.



Exercícios de Reforço

18. Duas partículas, A e B, de massas 4 kg e 6 kg, respectivamente, movem-se sobre a mesma reta, como mostra a figura.



Sabendo que o coeficiente de restituição é 0,8 e que o choque é unidimensional, calcule:

- as velocidades das partículas após o choque;
 - a perda de energia cinética durante o choque.
19. Um ônibus lotado, movendo-se a 80 km/h, choca-se frontalmente com um carrinho de massa 40 kg que vinha em sentido oposto, a 10 km/h. Calcule o valor aproximado da velocidade do carrinho logo após a colisão, supondo o coeficiente de restituição igual a 0,8.



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

20. (U. F. Juiz de Fora-MG) Dois blocos de massas M e $2M$ se deslocam sobre uma superfície plana sem atrito e colidem frontalmente, como mostra a figura. Antes da colisão, as velocidades escalares são $-2v$ e v , respectivamente.



Considerando-se uma colisão perfeitamente elástica, as velocidades escalares dos blocos de massas M e $2M$, após a colisão, serão, respectivamente:

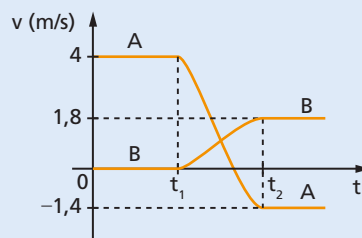
- $2v, -v$
- $v, -2v$
- $-v, v$
- $0, 0$

21. (PUC-SP) Uma esfera de massa 4,0 kg, animada de velocidade de módulo 1,2 m/s, colide unidimensionalmente com outra esfera de massa 5,0 kg, que se move no mesmo sentido com velocidade de módulo 0,60 m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição vale 0,50, determine as velocidades escalares das esferas após a colisão.

22. (UF-PI) Uma esfera de massa m_1 e velocidade v desliza sobre um plano horizontal sem atrito. A esfera colide frontalmente com outra esfera de massa m_2 que se encontra inicialmente em repouso. Considere o choque elástico. Determine a razão $\frac{m_2}{m_1}$ entre as massas das esferas, de modo que, após a colisão, as esferas tenham velocidades de mesmo módulo e se desloquem em sentidos contrários.

- 1
- $\frac{3}{2}$
- 2
- $\frac{5}{2}$
- 3

23. (UF-CE) Duas partículas, A e B, realizam uma colisão unidimensional. O gráfico a seguir representa as velocidades escalares de A e de B, tendo a colisão início no instante t_1 e término no instante t_2 .



- Qual o coeficiente de restituição na colisão esquematizada?
- Qual a relação entre as massas de A e de B?

4. Colisão com superfície fixa

Uma bolinha é lançada contra uma parede S de modo que, ao atingi-la, tem velocidade \vec{v} perpendicular a S (fig. 6a). Suponhamos que a bolinha não grude na parede; assim, um pouco após a colisão a bolinha tem velocidade \vec{v}' (fig. 6b). A parede está ligada à Terra e, portanto, podemos supor que a velocidade inicial de S (v_s) e a velocidade final de S (v'_s) são praticamente nulas:

$$v_s = v'_s = 0$$

Aplicando a definição do coeficiente de restituição, temos:

$$e = -\frac{v' - \frac{0}{v'_s}}{v - \frac{0}{v_s}} \Rightarrow e = -\frac{v'}{v} \Rightarrow e = \left| \frac{v'}{v} \right| \quad (1)$$

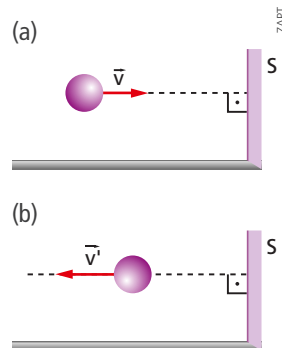


Figura 6.

Se a colisão for oblíqua (fig. 7), a equação ① aplica-se apenas às componentes das velocidades que são perpendiculares à superfície S :

$$e = \left| \frac{v'_y}{v_y} \right|$$

Se a superfície for lisa, teremos $v'_x = v_x$, mas, se houver atrito, teremos $v'_x < v_x$.

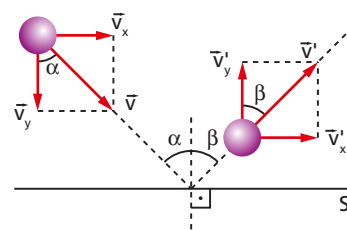


Figura 7.

Determinação do coeficiente de restituição

Há um modo fácil de determinar o valor do coeficiente de restituição entre dois materiais A e B . Para tanto, obtenha uma bolinha do material A e forre o chão com uma placa do material B . Por exemplo, obtenha uma bola de tênis e deixe cair de uma altura H (fig. 8) sobre o piso da cozinha de sua residência.

Sendo v_i a velocidade da bola um pouco antes de atingir o chão, vamos desprezar a resistência do ar e aplicar o Princípio da Conservação da Energia Mecânica:

$$mgH = \frac{mv_i^2}{2} \Rightarrow v_i = \sqrt{2gH}$$

Sendo e o coeficiente de restituição e v_f a velocidade da bola logo após a colisão com o solo (fig. 9), temos:

$$e = \frac{v_f}{v_i} \Rightarrow v_f = e \cdot v_i \Rightarrow v_f = e \cdot \sqrt{2gH} \quad \text{①}$$

Usemos novamente o Princípio da Conservação da Energia Mecânica para a subida:

$$\frac{mv_f^2}{2} = mgh \Rightarrow v_f^2 = 2gh \quad \text{②}$$

Substituindo ① em ②:

$$(e\sqrt{2gH})^2 = 2gh \Rightarrow e^2 \cdot 2gH = 2gh \Rightarrow e^2 = \frac{h}{H} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{h}{H}} \quad \text{③}$$

Portanto, medindo as duas alturas, a equação ③ nos dá o valor de e (observe que esse valor não depende de g).

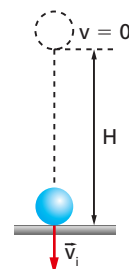


Figura 8.

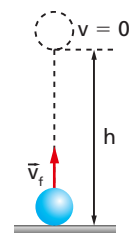


Figura 9.

Exercícios de Aplicação

24. Uma bolinha é lançada perpendicularmente a uma parede com velocidade $v_1 = 12 \text{ m/s}$ (fig. a).



Figura a.

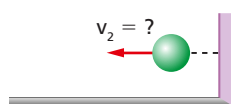
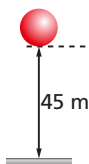


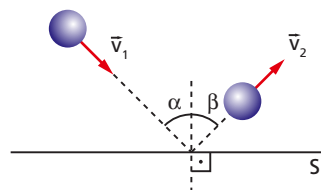
Figura b.

Calcule a velocidade v_2 da bolinha logo após a colisão com a parede, nos seguintes casos:

- a) a colisão é elástica;
b) o coeficiente de restituição é $e = 0,75$.
25. Uma bola de borracha é abandonada da altura de 45 metros acima do solo. Desprezando a resistência do ar e sabendo que o coeficiente de restituição é $e = \frac{2}{3}$, calcule a altura máxima atingida pela bolinha após a primeira colisão.



26. Uma partícula incide oblíqua sobre uma superfície fixa S , sendo \vec{v}_1 sua velocidade no momento em que atinge S e \vec{v}_2 sua velocidade logo após a colisão.



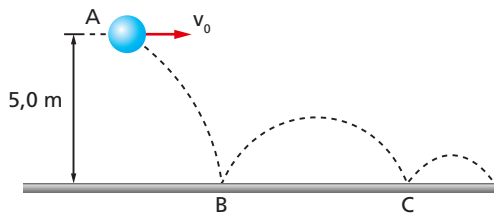
Para cada situação apresentada a seguir verifique se $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ ou $\alpha < \beta$.

- I. A colisão é elástica e S é lisa.
II. A colisão é elástica e S tem atrito.
III. A colisão é parcialmente elástica e S não tem atrito.

27. Considere novamente a situação da questão anterior. Supondo S lisa podemos afirmar que:

- a) $\operatorname{tg} \beta = e \operatorname{tg} \alpha$ d) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = e^2$
 b) $\operatorname{tg} \alpha = e \operatorname{tg} \beta$ e) $\operatorname{sen} \alpha = e \operatorname{sen} \beta$
 c) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = e$

28. Uma partícula é lançada horizontalmente, com velocidade \vec{v}_0 , de módulo 6,0 m/s, de um ponto A, situado 5,0 m acima do solo horizontal, como ilustra a figura. A partícula colide com o solo, pela primeira vez no ponto B e pela segunda vez no ponto C. Suponha que o solo seja liso, que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que o coeficiente de restituição para a colisão entre a partícula e o solo seja $e = 0,80$.



- a) Determine a distância entre os pontos B e C.
 b) Sendo \vec{v} a velocidade da partícula ao abandonar o solo no ponto B, determine o módulo de \vec{v} e o ângulo que ela forma com a direção horizontal.

29. Na figura a representamos um feixe de partículas que colidem elasticamente com a superfície S . Cada partícula tem massa $m = 0,010 \text{ kg}$ e velocidade de módulo $v = 200 \text{ m/s}$. Calcule a força média exercida sobre a superfície, sabendo que as partículas incidem na superfície à razão de 300 partículas por segundo.

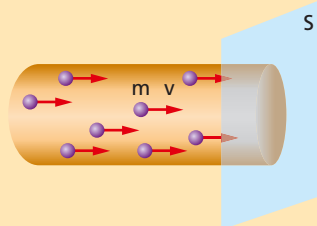


Figura a.

Resolução:

Cada partícula atinge a superfície com quantidade de movimento $\vec{q}_i = m\vec{v}$ (fig. b) e, sendo a colisão elástica, é refletida com quantidade de movimento $\vec{q}_f = -m\vec{v}$; assim, a variação da quantidade de movimento de cada partícula é:

$$\Delta \vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i = (-m\vec{v}) - (m\vec{v}) = -2m\vec{v}$$

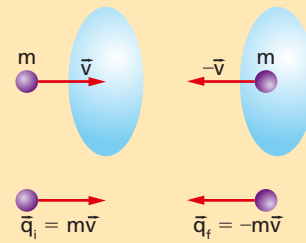


Figura b.

Em um intervalo de tempo $\Delta t = 1 \text{ s}$, o número de partículas que atingem a superfície é $n = 300$. Portanto, em cada segundo, a variação total da quantidade de movimento das partículas é:

$$\Delta \vec{Q} = n \cdot (\Delta \vec{q}) = n(-2m\vec{v}) = -2nm\vec{v}$$

Essa variação é provocada pela força \vec{F} que a superfície exerce nas partículas (fig. c); pela Lei da Ação e Reação, essa força tem o mesmo módulo e sentido oposto ao da força que as partículas exercem na superfície ($-\vec{F}$).

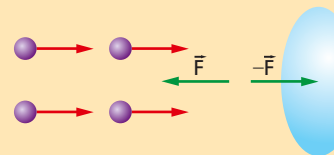


Figura c.

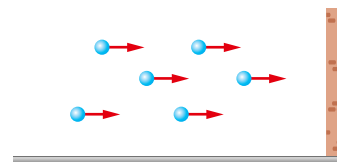
Aplicando a Segunda Lei de Newton na forma geral, temos:

$$|\vec{F}| = \frac{|\Delta \vec{Q}|}{\Delta t} = \frac{2nmv}{1} = 2nmv =$$

$$= 2(300)(0,010)(200)$$

$$|\vec{F}| = 1,20 \cdot 10^3 \text{ N}$$

30. Um feixe de partículas idênticas incide perpendicularmente a uma parede, à razão de 200 partículas por segundo, tendo cada partícula massa de 50 gramas e velocidade 100 m/s.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Determine a intensidade média da força exercida pelas partículas sobre a parede, nos seguintes casos:

- a) as colisões são elásticas;
 b) as colisões são inelásticas.

Exercícios de Reforço

31. Abandona-se de uma altura de 10,0 m uma bolinha de borracha. Sua queda é livre da resistência do ar. Após colidir com o solo, ela consegue alcançar a altura máxima de 6,40 m. Determine:

- o coeficiente de restituição do choque;
- o valor aproximado da velocidade da bolinha, imediatamente após o choque. Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

32. Abandona-se, a partir do repouso, uma bola de tênis de uma altura de 8,0 m. Após dois choques sucessivos com o solo, ela alcançou a altura de 2,0 m. Determine o coeficiente de restituição dos choques.

33. (Unifesp-SP) Uma pequena esfera maciça é lançada de uma altura de 0,6 m na direção horizontal, com velocidade inicial de módulo 2,0 m/s. Ao chegar ao chão, somente pela ação da gravidade, colide elasticamente com o piso e é lançada novamente para o alto. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, o módulo da velocidade e o ângulo de lançamento da esfera, a partir do solo, em relação à direção horizontal, imediatamente após a colisão, são respectivamente:

- 4,0 m/s e 30°
- 3,0 m/s e 30°
- 4,0 m/s e 60°
- 6,0 m/s e 45°
- 6,0 m/s e 60°

5. Casos particulares do choque elástico

Colisão unidimensional e elástica entre corpos de massas iguais

Na figura 10 representamos uma colisão unidimensional de duas partículas de massas iguais a m .

Pelo Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento, temos:

$$mv_A + mv_B = mv'_A + mv'_B \Rightarrow v_A + v_B = v'_A + v'_B \quad (1)$$

Se o choque for elástico, teremos:

$$e = 1 = -\frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} \Rightarrow v_A - v_B = -v'_A + v'_B \quad (2)$$

Adicionando membro a membro as equações (1) e (2), obtemos:

$$2v_A = 2v'_B \quad \text{ou} \quad v'_B = v_A \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1):

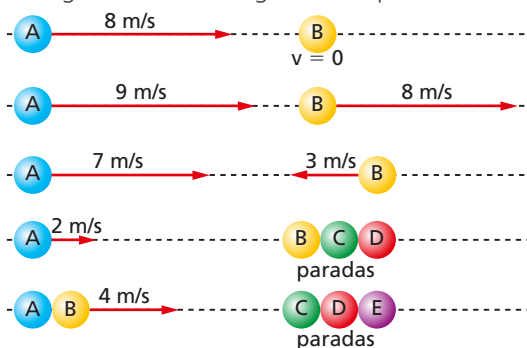
$$v_A + v_B = v'_A + v_A \Rightarrow v'_A = v_B \quad (4)$$

Observando as equações (3) e (4) percebemos que há uma permuta de velocidades, isto é:

velocidade final de A = velocidade inicial de B

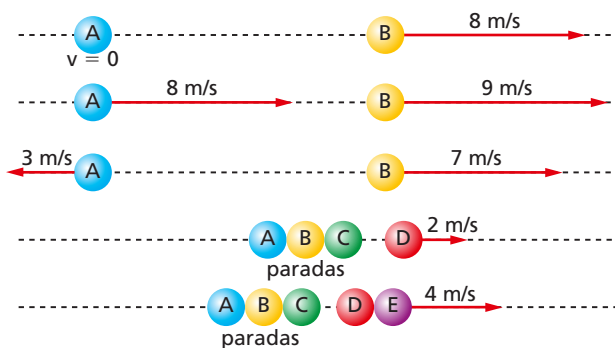
velocidade final de B = velocidade inicial de A

Na figura 11 temos alguns exemplos.



(a) Antes.

Figura 11.



(b) Depois.

ILUSTRAÇÕES: ZAPET

Colisão oblíqua e elástica entre partículas de massas iguais, estando uma delas inicialmente em repouso

Na figura 12 representamos as situações antes e depois da colisão de duas partículas de massas iguais a m , estando a partícula B inicialmente em repouso. Esse caso ocorre com frequência em experimentos de Física Nuclear, quando se dá, por exemplo, a colisão de dois prótons ou duas partículas α .

A quantidade de movimento do sistema antes da colisão é a quantidade de movimento de A , pois B está em repouso:

$$\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{Q}_A = m \cdot \vec{v}_A$$

Após a colisão, a quantidade de movimento total do sistema é:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B = m \cdot \vec{v}'_A + m \cdot \vec{v}'_B$$

Impondo o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento, temos:

$$\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{Q}_{\text{final}} \Rightarrow m\vec{v}_A = m\vec{v}'_A + m\vec{v}'_B \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}'_B$$

A figura 13 representa a soma vetorial da última equação.

Levando em conta que o choque é elástico, há conservação da energia cinética:

$$\frac{mv_A^2}{2} = \frac{m(v'_A)^2}{2} + \frac{m(v'_B)^2}{2} \Rightarrow (v_A)^2 = (v'_A)^2 + (v'_B)^2$$

Essa última equação corresponde ao teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo colorido da figura 13. Portanto, o ângulo θ é reto. Em resumo:

$$\theta = 90^\circ \text{ e } (v_A)^2 = (v'_A)^2 + (v'_B)^2$$

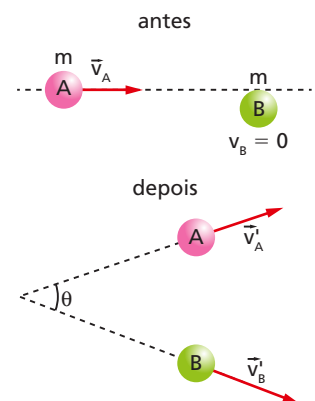


Figura 12.

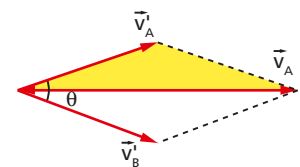
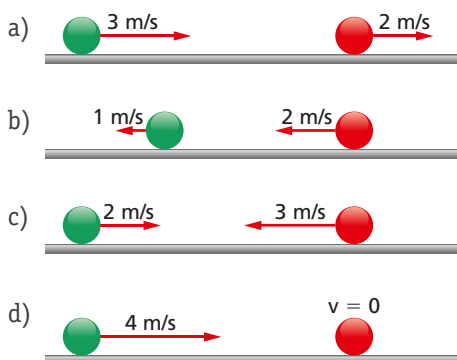


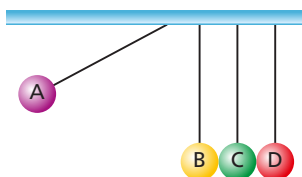
Figura 13.

Exercícios de Aplicação

34. Em uma mesa de bilhar, as bolas verde e vermelha realizam uma colisão frontal (unidimensional). Sabendo que as bolas têm a mesma massa e supondo que a colisão seja elástica, represente a situação após o choque em cada caso a seguir:



35. Na montagem representada na figura, as bolinhas têm a mesma massa e são feitas de aço. A bolinha A é abandonada na posição indicada. Supondo que a colisão seja elástica, represente a situação logo após a primeira colisão.



36. Em uma mesa de bilhar, a bola vermelha é lançada com velocidade 2,5 m/s contra a bola azul, que estava parada (fig. a). Após a colisão, as bolas seguem em direções que formam o ângulo β , como ilustra a figura b.

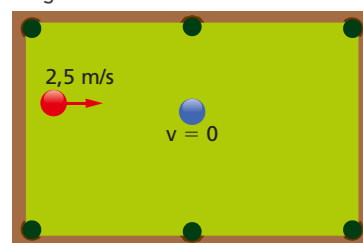


Figura a.

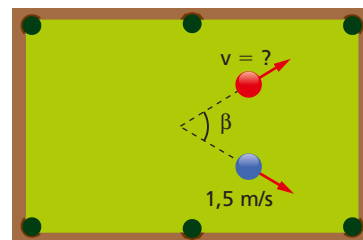


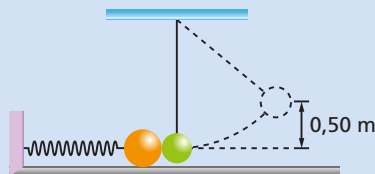
Figura b.

Sabendo que as bolas têm a mesma massa e supondo que a colisão seja elástica, determine:

- o ângulo β ;
- a velocidade da bola vermelha após a colisão.

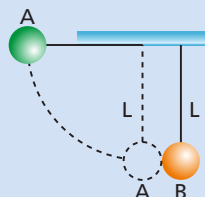
Exercícios de Reforço

37. (UF-RJ) Uma esfera de massa igual a 100 g está sobre uma superfície horizontal sem atrito, e prende-se à extremidade de uma mola de massa desprezível e constante elástica igual a 9 N/m. A outra extremidade da mola está presa a um suporte fixo, conforme mostra a figura. Inicialmente, a esfera encontra-se em repouso e a mola, no seu comprimento natural. A esfera é então atingida por um pêndulo de mesma massa que cai de uma altura igual a 0,50 m.

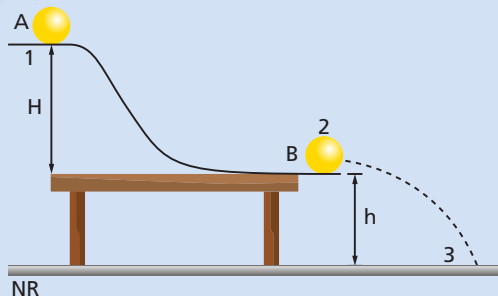


Supondo a colisão elástica e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- as velocidades da esfera e do pêndulo imediatamente após a colisão;
 - a compressão máxima da mola.
38. (U. F. Uberlândia-MG) A figura mostra dois pêndulos de massas iguais e comprimento $L = 5 \text{ m}$. Eleva-se o pêndulo A até a posição horizontal, onde é então abandonado. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, as alturas máximas atingidas pelas esferas A e B após a primeira colisão serão, respectivamente (a colisão é elástica):
- 5 m e 5 m
 - zero e 5 m
 - 2,5 m e 2,5 m
 - 3 m e 3 m
 - zero e 3 m



39. (UF-PE) Um corpo A de massa M é abandonado na posição 1 e desliza ao encontro do corpo B. O corpo B de mesma massa está em repouso na posição 2. As forças resistivas são desprezíveis e o choque é perfeitamente elástico. Considere nula a energia potencial no nível de referência (NR) indicado na figura.



Análise as afirmativas abaixo.

- I. Imediatamente antes do choque, o corpo A tem energia cinética igual a MgH .

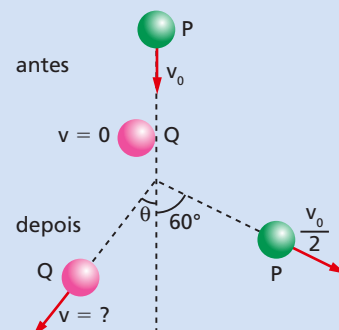
- II. Após o choque, o corpo A fica em repouso na posição 2, e o corpo B ocupa a posição 3.
 III. Após o choque, o corpo A volta à posição 1 e o corpo B ocupa a posição 3.
 IV. Após o choque, a energia mecânica do corpo A é $Mg(H + h)$.

É correto afirmar que:

- apenas a afirmativa II está correta.
- apenas a afirmativa I está correta.
- as afirmativas II e IV estão incorretas.
- as afirmativas I e II estão corretas.
- as afirmativas II e III estão incorretas.

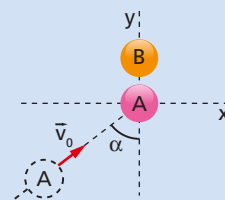
40. (U. E. Londrina-PR) P e Q são dois corpos iguais que interagem numa colisão perfeitamente elástica. Antes da colisão, Q estava em repouso e P estava em movimento horizontal de norte para sul com velocidade escalar v_0 . Durante a colisão, a velocidade vetorial de P sofre um desvio de 60° para leste, e passa a ter módulo $\frac{v_0}{2}$. Nessas condições, a velocidade de Q, após a colisão, tem módulo v , tal que:

- $v = \frac{v_0}{2}$
- $v = \frac{3v_0}{4}$
- $v = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $v = v_0 \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $v = v_0 \frac{\sqrt{3}}{4}$



41. Para a situação da questão anterior, determine o valor do ângulo θ .

42. (Unicamp-SP) Jogadores de sinuca e bilhar sabem que, após uma colisão não frontal de duas bolas A e B de mesma massa, estando a bola B inicialmente parada, as duas bolas saem em direções em que formam um ângulo de 90° . Considere a colisão de duas bolas de 200 g, representada na figura ao lado. A bola A se dirige em direção a B com velocidade $v_0 = 2,0 \text{ m/s}$ formando um ângulo α com a direção y tal que $\sin \alpha = 0,80$. Após a colisão, B sai na direção y.



- Calcule os componentes x e y das velocidades de A e B logo após a colisão.
- Calcule a variação da energia cinética de translação na colisão.

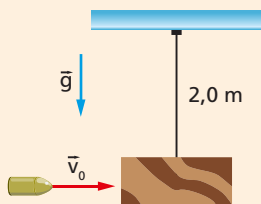
Nota: Despreze a rotação e o rolamento das bolas.

Exercícios de Aprofundamento

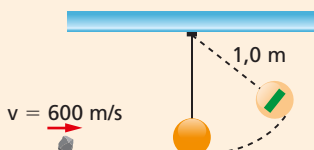
43. (UF-RS) Um cubo de massa específica d_1 desliza com velocidade v_0 sobre uma mesa horizontal, sem atrito, em direção a um segundo cubo, de iguais dimensões, inicialmente em repouso. Após a colisão frontal, os cubos se movem juntos sobre a mesa, com velocidade $\frac{3v_0}{4}$. Com base nessas informações é correto afirmar que a massa específica do segundo cubo é igual a:

- a) $\frac{4d_1}{3}$ c) $\frac{7d_1}{9}$ e) $\frac{d_1}{3}$
b) $\frac{9d_1}{7}$ d) $\frac{3d_1}{4}$

44. Um bloco de madeira, de massa 4,9 kg, está suspenso por um fio de comprimento 2,0 m. Um projétil de massa 0,1 kg é disparado contra o bloco com velocidade horizontal \vec{v}_0 , ficando incrustado no bloco após a colisão. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a máxima tração que o fio pode suportar sem se romper é 90 N, determine o máximo valor de $|\vec{v}_0|$ de modo que o fio não se rompa.



45. (Unifesp-SP) Uma pequena pedra de 10 g é lançada por um dispositivo com velocidade horizontal de módulo igual a 600 m/s, incide sobre um pêndulo em repouso e nele se engasta, caracterizando uma colisão totalmente inelástica. O pêndulo tem 6,0 kg de massa e está pendurado por uma corda de massa desprezível e inextensível, de 1,0 m de comprimento. Ele pode girar sem atrito no plano vertical, em torno da extremidade fixa da corda, de modo que a energia mecânica seja conservada após a colisão.



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Considerando $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a) a velocidade do pêndulo com a pedra engastada, imediatamente após a colisão;
b) a altura máxima atingida pelo pêndulo com a pedra engastada e a tensão T na corda neste instante.

46. (UF-RJ) A figura 1 a seguir mostra um pêndulo constituído por um fio ideal de comprimento L , com uma extremidade presa a um ponto fixo P , e por uma partícula de massa m presa à outra extremidade. O pêndulo está inicialmente em repouso com o fio esticado na posição horizontal. Após ter sido abandonado do repouso, o pêndulo desce e colide com outra partícula de massa m , que está em repouso sobre uma superfície lisa, no ponto mais baixo de sua trajetória. No choque, as partículas se grudam de modo que o pêndulo continua seu movimento com as duas presas em sua extremidade, como mostra a figura 2. Suponha que todo o movimento ocorra em um plano vertical.

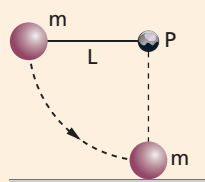


Figura 1.

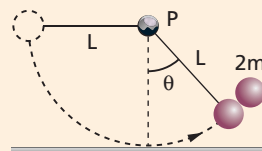
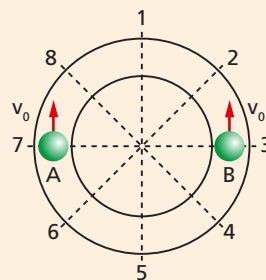


Figura 2.

- a) Calcule, em função de L e do módulo da aceleração da gravidade g , a velocidade da partícula presa à extremidade do pêndulo, imediatamente antes da colisão.
b) Calcule o valor máximo do ângulo θ que o pêndulo faz com a vertical após a colisão.

47. (Fuvest-SP) Em uma canaleta circular, plana e horizontal, podem deslizar duas pequenas bolas A e B com massas $m_A = 3m_B$, que são lançadas uma contra a outra, com igual velocidade v_0 , a partir das posições indicadas. Após o primeiro choque entre elas (em 1), que não é elástico, as duas passam a movimentar-se no sentido horário, sendo que a bola B mantém o módulo de sua velocidade v_0 .



Pode-se concluir que o próximo choque entre elas ocorrerá nas vizinhanças da posição:

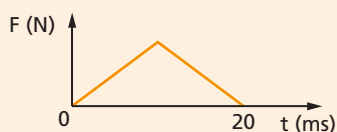
- a) 3 d) 7
b) 5 e) 8
c) 6

48. (Cefet-PR) Duas esferas A e B , de massas $m_A = 4 \text{ kg}$ e $m_B = 5 \text{ kg}$, colidem de forma perfeitamente elástica, como indica a figura. Suas velocidades, em módulo, antes do choque são respectivamente iguais a 8 m/s e 6 m/s (despreze os atritos).



Com base nessa situação são feitas as afirmativas a seguir:

- I. O módulo da quantidade de movimento do sistema constituído pelas duas esferas imediatamente após o choque é igual a $2 \text{ N} \cdot \text{s}$.
 - II. Por causa de sua massa menor, o impulso exercido pela esfera A sobre a esfera B , durante a colisão, é menor que o impulso exercido por B sobre A .
 - III. Durante a colisão a energia mecânica que é perdida dissipa-se na forma de calor.
- Podemos afirmar que:
- a) apenas a afirmativa I é correta.
 - b) apenas a afirmativa II é correta.
 - c) apenas a afirmativa III é correta.
 - d) todas são corretas.
 - e) todas são incorretas.
49. (OBF-Brasil) Uma bola, de massa 100 g , é abandonada de uma altura de $1,25 \text{ m}$, bate no chão e torna a subir até a altura de $0,80 \text{ m}$.



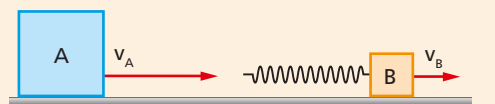
Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando a resistência do ar, determine:

- a) o coeficiente de restituição;
- b) o impulso do chão sobre a bola;
- c) a intensidade da força máxima exercida pelo chão sobre a bola, considerando que a colisão dure 20 ms e que a variação da intensidade da força com o tempo seja como no gráfico acima.

Enunciado para as questões de números 50 a 52.

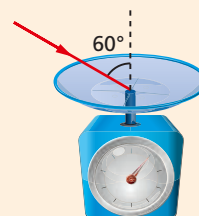
Um bloco A , de massa $8,0 \text{ kg}$, tem movimento retilíneo uniforme, de velocidade $v_A = 15 \text{ m/s}$, sobre uma superfície horizontal sem atrito. Um outro bloco B , de massa $4,0 \text{ kg}$, move-se na

mesma direção e sentido que A , com velocidade $v_B = 6,0 \text{ m/s}$. Uma mola ideal, de constante elástica $3,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}$, está presa ao bloco B , como mostra a figura.

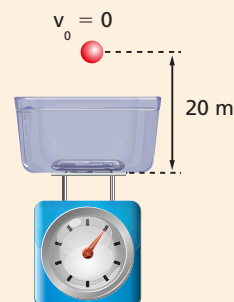


Como $v_A > v_B$, haverá colisão entre os blocos.

50. Durante a colisão, há um momento em que a velocidade de A é 13 m/s para a direita. Para esse momento, determine:
 - a) o módulo e o sentido da velocidade de B ;
 - b) a energia potencial armazenada na mola;
 - c) a compressão da mola.
51. Determine a compressão máxima da mola.
52. Determine as velocidades de A e B após a colisão.
53. Uma metralhadora dispara projéteis à razão de 4 por segundo, os quais atingem o prato de uma balança com velocidade 1000 m/s , formando ângulo de 60° com a vertical. A balança antes de receber os tiros marcava zero. Supondo o choque entre os projéteis e o prato da balança perfeitamente elástico, determine a leitura da balança quando está recebendo os tiros (a massa de cada projétil é $m = 20 \text{ g}$).



54. Põe-se uma caixa no prato de uma balança de modo que a leitura é nula quando a caixa está vazia. Deixam-se cair, então, na caixa pequenas bolas, de uma altura de 20 metros , à razão de 4 bolas por segundo, tendo cada uma delas massa de 10 gramas . Sabendo que os choques entre as bolas e a caixa são perfeitamente inelásticos, determine a leitura da balança, 10 segundos após o instante em que as bolas começam a chegar na caixa. (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



55. Sobre uma superfície horizontal, um disco A de massa 2,0 kg é lançado ao longo da reta x, como mostra a figura a, indo colidir com um disco B, de massa 4,0 kg, que estava em repouso. Um pouco antes da colisão, a velocidade do disco A tem módulo $v_A = 30$ m/s. Após a colisão, os discos movem-se em direções diferentes, como mostra a figura b, tendo o disco B velocidade de módulo $v'_B = 10\sqrt{2}$ m/s. Determine os valores de v'_A e θ .

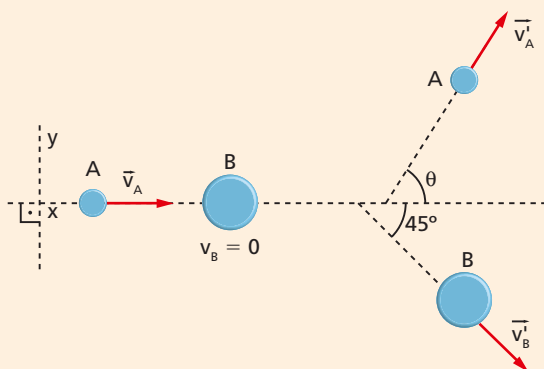
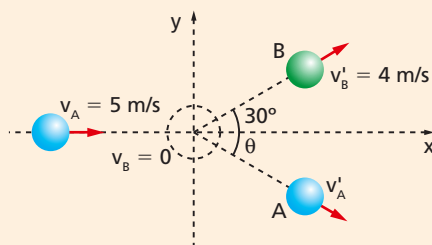


Figura a.

Figura b.

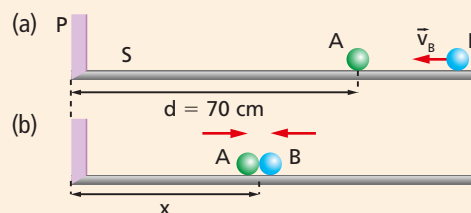
56. (UF-PA) A figura representa a geometria de uma colisão entre duas bolas de massas $m_A = 4$ kg e $m_B = 3$ kg.



Os módulos dos componentes da velocidade da bola de massa m_A , nas direções de x e y, após a colisão, valem, em m/s, respectivamente:

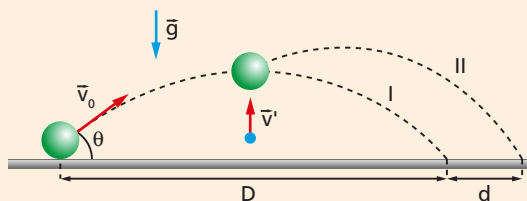
- $\frac{10 - 3\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{3}{2}$
- $3\sqrt{3}$ e 3
- $\frac{5 - \sqrt{3}}{2}$ e $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{10 - 5\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $2\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

57. Uma bolinha A, de massa 400 g, está em repouso sobre uma superfície horizontal S, sem atrito (fig. a). Uma bolinha B, com massa 600 g e velocidade \vec{v}_B , de módulo 8,0 m/s, colide elasticamente com A. A bolinha A colide elasticamente com a parede P e, na volta, colide pela segunda vez com B, à distância x da parede (fig. b). Desprezando os tamanhos das bolinhas, calcule o valor de x.



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

58. Uma bolinha de massa 180 g é lançada a partir do solo, com velocidade \vec{v}_0 formando ângulo θ com a horizontal, como ilustra a figura. Quando atinge a altura máxima, a bolinha é atingida por um projétil que tem massa 20 g e velocidade \vec{v}' , de direção vertical, no momento da colisão, que é inelástica. Após a colisão, o conjunto move-se sobre a linha II, diferente da linha I, que seria seguida pela bolinha se não tivesse sido atingida pelo projétil. São dados: $g = 10$ m/s²; $\sin \theta = 0,60$; $\cos \theta = 0,80$; $v_0 = 50$ m/s; $v' = 200$ m/s.



Determine:

- a altura da bolinha no momento da colisão;
- a distância D;
- a componente vertical da velocidade do conjunto logo após a colisão;
- a componente horizontal da velocidade do conjunto logo após a colisão;
- o intervalo de tempo entre o momento da colisão e o momento em que o conjunto atinge o solo;
- a distância d.

Centro de massa

1. O que é centro de massa?

Se lançarmos uma bolinha, obliquamente, próximo à superfície da Terra (fig. 1), sabemos que a trajetória da bolinha será curva, e essa curva será uma parábola, se a resistência do ar puder ser desprezada.

Pensemos agora em outro experimento. Em vez de lançarmos um corpo de tamanho desprezível, vamos lançar um corpo que, além do movimento de translação, tenha movimento de rotação, como o machado da figura 2. Se tirarmos uma série de fotos do machado em movimento, a intervalos de tempo muito curtos, ao analisarmos as fotos poderemos perceber que há um ponto do machado que descreve uma trajetória parabólica. É como se toda a massa do machado estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças que agem em cada partícula do machado também estivessem aplicadas nesse ponto. Esse ponto especial é o seu **centro de massa**.

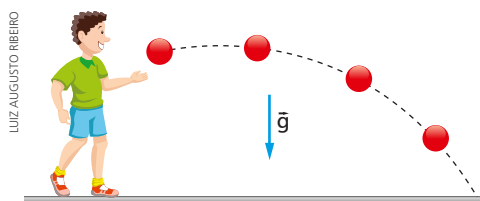


Figura 1.

Um fato interessante é que o centro de massa pode estar **fora** do corpo, como no caso do objeto lançado na figura 3.

A existência do centro de massa não se limita a casos de objetos rígidos, como nos dois exemplos anteriores. Ele existe também para sistemas formados por corpos separados. O Sistema Solar, por exemplo, tem um centro de massa; é em torno desse centro de massa que giram os planetas, e não em torno do centro do Sol (embora o centro de massa do Sistema Solar esteja bem próximo do centro do Sol).

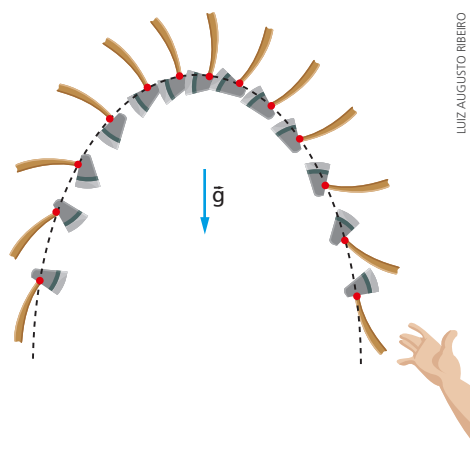


Figura 2.

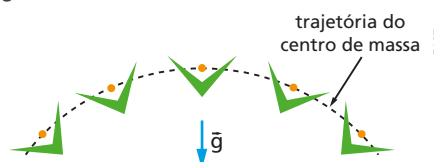


Figura 3.

1. O que é centro de massa?
2. Localização do centro de massa
3. Centro de massa de corpos extensos
4. Movimento do centro de massa

Na figura 4 consideramos o sistema Terra + Lua, cujo centro de massa é o ponto C (no exercício 9 veremos como determinar esse ponto). A Lua não gira em torno do centro da Terra, mas sim em torno do ponto C. Também não é a Terra que gira em torno do Sol. É o ponto C que gira em torno do centro de massa do Sistema Solar. Observe que a Terra também tem um pequeno movimento de rotação em torno do ponto C.

Outro fato interessante a respeito do centro da massa é:

As forças internas não afetam o movimento do centro de massa de um sistema.

Assim, por exemplo, se durante o movimento um corpo sofrer alterações apenas por efeito de forças internas, isso não irá alterar o movimento do centro de massa. Para exemplificar, vamos considerar o centro de massa do corpo humano. Quando uma pessoa está com o corpo esticado (fig. 5), seu centro de massa (C) está um pouco abaixo do umbigo. Porém, se ela levantar os braços ou as pernas, ou ainda se dobrar o corpo, ou os braços ou as pernas, o centro de massa irá para outra posição; na figura 6 temos a posição aproximada do centro de massa da ginasta com o corpo dobrado.

Na figura 9 representamos uma atleta que pratica saltos ornamentais. No momento em que ela abandona o trampolim, seu centro de massa tem uma velocidade \vec{v}_0 que forma um ângulo θ com a horizontal. A partir desse momento a trajetória do centro de massa está definida, como vimos no capítulo 14, ao estudarmos os lançamentos: será uma parábola (desprezando a resistência do ar). Durante o salto, a atleta pode mexer os braços e as pernas, dobrar o corpo, efetuar rotações, mas nada disso muda a trajetória do centro de massa, pois os movimentos do corpo acontecem por efeito de forças internas a ele, e essas forças não afetam o movimento do centro de massa.

Quando um atleta salta uma barreira, ocorre algo semelhante. Ao abandonar o solo, a trajetória de seu centro de massa já está determinada. Se ele saltar como na figura 7, o seu centro de massa estará na altura de seu peito, mas, quando salta da forma indicada na figura 8, o centro de massa está abaixo de seu corpo. É por isso que nas competições de salto em altura os atletas saltam do modo indicado na figura 8, pois assim conseguem atingir alturas maiores do que conseguiriam saltando da forma indicada na figura 7.

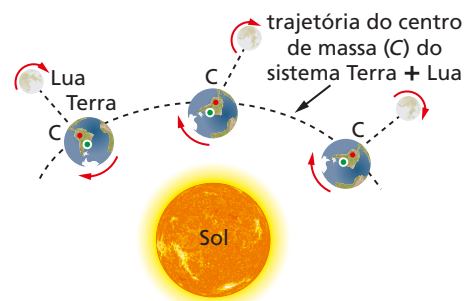


Figura 4. O ponto verde representa o centro da Terra e o ponto vermelho representa o centro de massa do sistema Terra-Lua.



Figura 5.

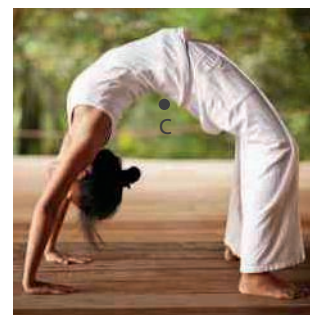


Figura 6.



Figura 7.



Figura 8.

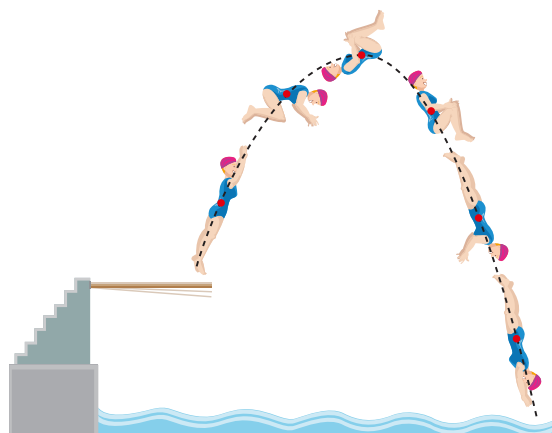


Figura 9.

2. Localização do centro de massa

Vamos agora verificar como obter a posição do centro de massa (CM). Consideremos inicialmente o caso de um sistema formado por n partículas de massas:

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$$

e que estejam num mesmo plano. Adotamos então um sistema (qualquer) de coordenadas cartesianas ortogonais, contido nesse plano. Essas partículas terão abscissas:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

e ordenadas:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

Usando o Cálculo Diferencial e Integral é possível demonstrar que, para o centro de massa ter as propriedades já apresentadas, sua abscissa x_{CM} e sua ordenada y_{CM} devem ser obtidas calculando as médias ponderadas das abscissas e das ordenadas das partículas, com as massas m_1, m_2, \dots, m_n funcionando como "pesos" da média:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1)$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2)$$

É óbvio que, se usarmos outro sistema de coordenadas, teremos outros valores para x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n . No entanto, usando as equações (1) e (2) é possível mostrar que isso não altera a posição do centro de massa em relação às partículas do sistema, isto é, para qualquer sistema de coordenadas adotado, obteremos o centro de massa sempre na mesma posição em relação às partículas. No exercício 1 mostraremos isso numa situação particular.

Se as partículas não estiverem todas num mesmo plano, teremos que considerar um sistema de coordenadas (fig. 11), como vimos no capítulo 2. Nesse caso, a coordenada z_{CM} do centro de massa também será dada pela média ponderada das coordenadas das partículas:

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3)$$

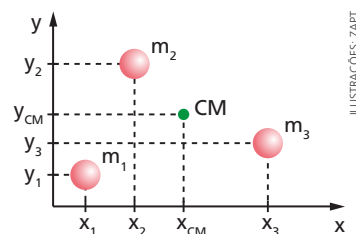


Figura 10.

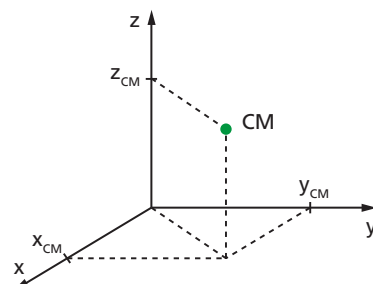


Figura 11.

Exercícios de Aplicação

1. Determine a posição do centro de massa do sistema de duas partículas representado na figura a.

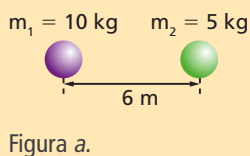


Figura a.

Resolução:

Temos liberdade para escolher um sistema de coordenadas qualquer. Adotemos então o sistema da figura b, para o qual temos:

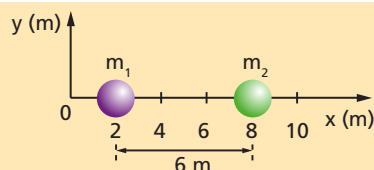


Figura b.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \text{ m} \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = 8 \text{ m} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do centro de massa (CM) são dadas por:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(10)(2) + 5(8)}{10 + 5} = \frac{60}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{CM} = 4 \text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{(10)(0) + 5(0)}{10 + 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{CM} = 0$$

O centro de massa está no segmento de reta que une as partículas, a 2 m da partícula de massa maior e a 4 m da partícula de massa menor (fig. c). É importante observar que o centro de massa está mais próximo da partícula de maior massa.

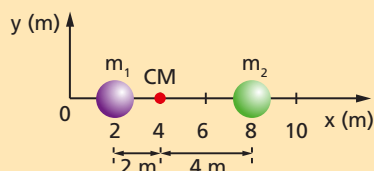


Figura c.

Vamos ver agora o que acontece se escolhermos um outro sistema de coordenadas. Em geral, para facilitar os cálculos, adotamos a origem sobre uma das partículas, como na figura d, para a qual temos: $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ m.

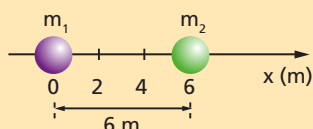


Figura d.

Assim:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(10)(0) + 5(6)}{10 + 5} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{CM} = 2 \text{ m}$$

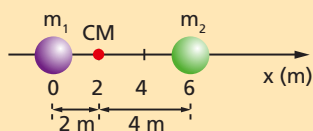


Figura e.

Como podemos observar (fig. e), embora o sistema de coordenadas seja outro, o centro de massa continua na mesma posição obtida anteriormente em relação às partículas do sistema: a uma distância de 2 m da partícula de massa maior e 4 m da outra partícula.

O sistema de duas partículas é um caso particular importante, ao qual vale a pena acrescentar um comentário. Vamos considerar um sistema de coordenadas cuja origem coincida com o centro de massa (fig. f), isto é, $x_{CM} = 0$.

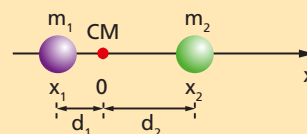


Figura f.

Pela equação (1) temos:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 x_2 = m_1 (-x_1)$$

Mas, observando a figura c, temos:

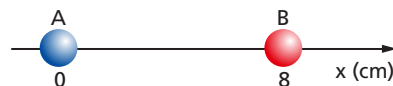
$$-x_1 = d_1 \text{ e } x_2 = d_2$$

$$\text{Assim: } m_1 d_1 = m_2 d_2$$

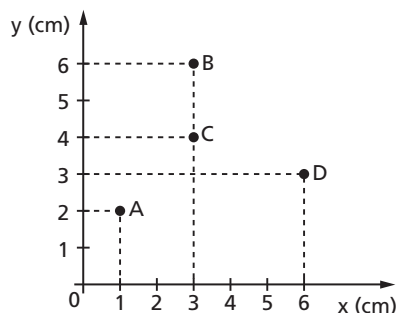
2. As partículas A e B representadas abaixo têm massas respectivamente iguais a 50 e 150 gramas. A que distância da partícula A se encontra o centro de massa do sistema formado pelas duas partículas?



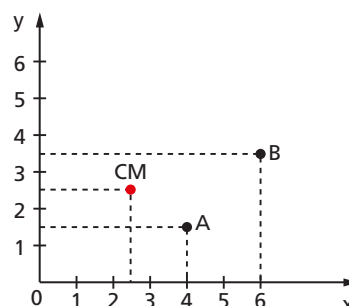
3. As partículas A e B da figura têm massas iguais. Qual é a abscissa do centro de massa do conjunto?



4. Na figura são representadas as posições de quatro partículas: A, B, C e D, de massas respectivamente iguais a 5, 3, 4 e 8 gramas. Determine as coordenadas do centro de massa do sistema formado por essas partículas.

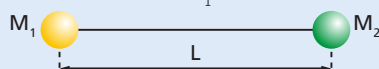


5. Na figura, CM é o centro de massa de um sistema de três partículas, A, B e C, de massas iguais. Quais são as coordenadas da partícula C?



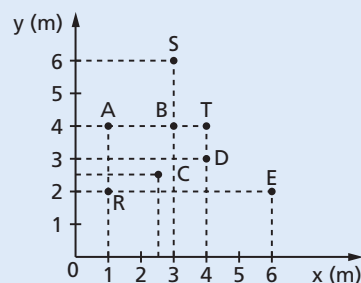
Exercícios de Reforço

6. (UF-PE) Duas partículas de massas $M_1 = M$ e $M_2 = \frac{M}{2}$ estão presas por uma haste de comprimento $L = 48$ cm e massa desprezível, conforme a figura. Qual a distância, em centímetros, do centro de massa do sistema em relação à posição da partícula de massa M_1 ?



7. (ITA-SP) Na figura a seguir estão representadas as posições de três partículas, R , S e T , cujas massas são 2 kg, 2 kg e 4 kg. Entre os pontos A ,

B , C , D e E , qual representa o centro de massa do sistema formado pelas partículas R , S e T ?



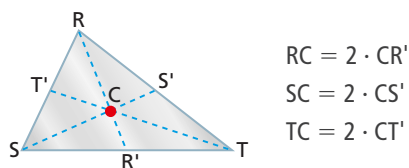
- a) A c) C e) E
b) B d) D

3. Centro de massa de corpos extensos

Para obtermos o centro de massa de um corpo extenso (fig. 12a), devemos dividi-lo em um número muito grande de “pedacinhos” (fig. 12b), de modo que cada “pedacinho” possa ser considerado uma partícula. Em seguida, aplicamos as fórmulas ①, ② e ③, para obtermos as coordenadas do centro de massa. No entanto, como se trata de um número infinitamente grande de partículas, isso deve ser feito usando-se o Cálculo Integral, que está além do nível do nosso curso. Assim, vamos apresentar apenas alguns casos particulares, sem demonstração.

Quando o corpo é homogêneo e apresenta um ponto de simetria, o centro de massa está sobre esse ponto. Por exemplo, o centro de massa de um corpo esférico homogêneo está em seu centro geométrico (fig. 13a) e o centro de massa de um corpo homogêneo em forma de cubo também está sobre o seu centro geométrico, que é o ponto de encontro das diagonais (fig. 13b).

Na figura 14, temos dois casos de chapas homogêneas. Na figura 14a, a chapa é triangular, e o centro de massa C está no ponto de encontro das medianas, o qual em geometria plana é conhecido pelo nome de **baricentro** do triângulo (lembre-se de que a mediana une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto). Na figura 14b temos uma chapa em forma de paralelogramo, cujo centro de massa C está no ponto de encontro das diagonais.



(a) Chapa triangular homogênea: o centro de massa (C) está no ponto de encontro das medianas.

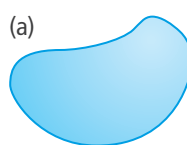
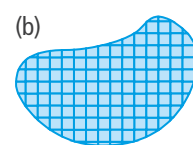


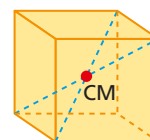
Figura 12.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

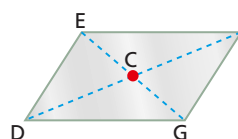


(a) Corpo esférico homogêneo: o centro de massa está no centro da esfera.



(b) Corpo cúbico homogêneo: o centro de massa está no centro do cubo.

Figura 13.



(b) Chapa homogênea em forma de paralelogramo: o centro de massa está no encontro das diagonais.

Figura 14.

Se as chapas da figura 14 estiverem referidas a um sistema de coordenadas cartesianas (fig. 15), nas aulas de Matemática (na parte de Geometria Analítica) você aprenderá que as coordenadas de C podem ser obtidas por meio das equações apresentadas na figura 15.

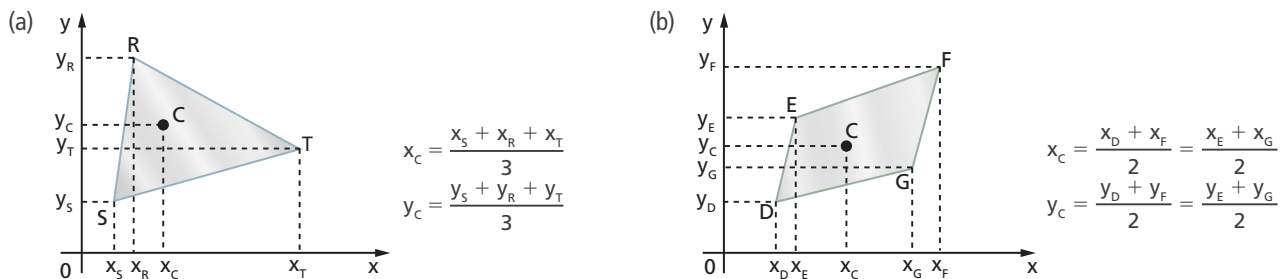


Figura 15.

Exercícios de Aplicação

8. Determine a posição do centro de massa da chapa homogênea representada na figura a.

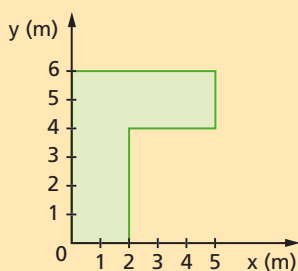


Figura a.

Resolução:

Como a chapa não tem nenhuma das formas particulares apresentadas, vamos dividi-la em “pedaços” cujos centros de massa sabemos determinar. A partir das fórmulas (1), (2) e (3), é possível mostrar que podemos substituir cada “pedaço” por seu centro de massa e calcular o centro de massa da chapa como se tivéssemos partículas, e não corpos extensos.

Vamos, por exemplo, dividir a chapa em dois retângulos, como indica a figura b. O retângulo superior tem centro de massa C_1 , cujas coordenadas são: $x_1 = 2,5$ m e $y_1 = 5$ m.

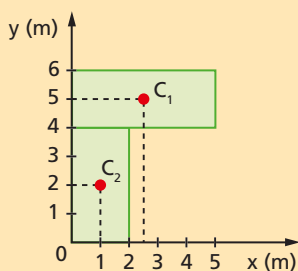


Figura b.

O retângulo inferior tem centro de massa C_2 , cujas coordenadas são: $x_2 = 1$ m e $y_2 = 2$ m. A partir de agora, tudo se passa como se quiséssemos determinar o centro de massa do sistema formado pelas partículas C_1 e C_2 .

Não sabemos as massas dos retângulos; porém, levando em conta que a chapa é homogênea, podemos admitir que a massa é proporcional à área e, assim, usar as áreas no lugar das massas:

$$A_1 = (5 \text{ m}) \cdot (2 \text{ m}) = 10 \text{ m}^2 \text{ e}$$

$$A_2 = (2 \text{ m}) \cdot (4 \text{ m}) = 8 \text{ m}^2$$

Portanto, as coordenadas do centro de massa C da chapa são:

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{(10)(2,5) + (8)(1)}{10 + 8} \cong$$

$$\cong 1,83 \Rightarrow x_C \cong 1,83 \text{ m}$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(10)(5) + (8)(2)}{10 + 8} \cong$$

$$\cong 3,66 \Rightarrow y_C \cong 3,66 \text{ m}$$

Observe, pela figura c, que o centro de massa da chapa C está no segmento de reta que une os pontos C_1 e C_2 , como é de esperar no caso de duas partículas.

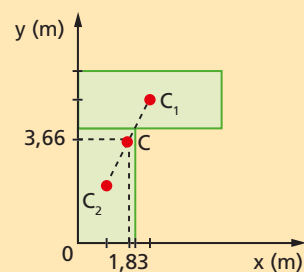
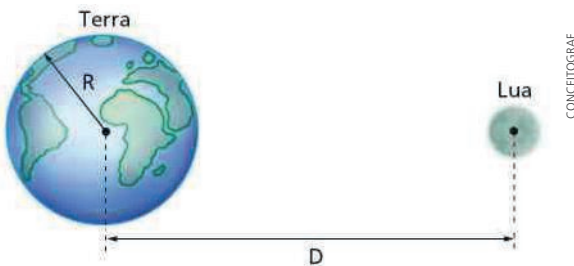


Figura c.

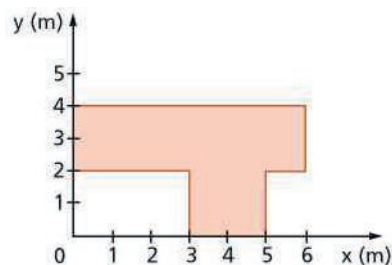
ILUSTRAÇÕES ZAPT

9. A distância D entre os centros da Terra e da Lua é aproximadamente igual a 380 000 km. As massas da Terra e da Lua são aproximadamente iguais a $6,0 \cdot 10^{24}$ kg e $7,4 \cdot 10^{22}$ kg, respectivamente.

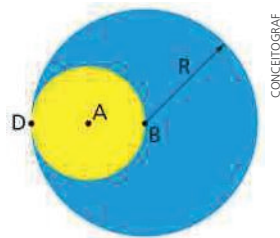


- Sendo C o centro de massa do sistema Terra + Lua, determine o valor aproximado da distância entre C e o centro da Terra.
- Sabendo que o raio da Terra é aproximadamente igual a 6 400 km, verifique se o ponto C está fora ou dentro da Terra.

10. Determine a posição do centro de massa da chapa homogênea da figura.

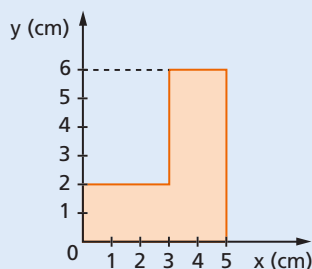


11. Em uma chapa circular de raio R foi feito um furo também circular, como mostra a figura. O ponto A é o centro do furo, e o ponto B é o centro da chapa original. Determine a posição do centro de massa da chapa furada.



Exercícios de Reforço

12. (Mackenzie-SP) A figura indica uma chapa homogênea de espessura uniforme. Determine a abscissa e a ordenada do centro de massa da chapa.



13. (UE-RJ) A forma de uma raquete de tênis pode ser esquematizada por um aro circular homogêneo de raio R e massa m_1 preso a um cabo cilíndrico homogêneo de comprimento L e massa m_2 . Sendo $R = \frac{L}{4}$ e $m_1 = m_2$, a distância do centro de massa da raquete ao centro do aro circular vale:

- $\frac{R}{2}$
- R
- $\frac{3R}{2}$
- $2R$

4. Movimento do centro de massa

Vamos considerar um sistema formado por várias partículas, de massas:

$$m_1, m_2, m_3, \dots$$

e que, num determinado instante, tenham velocidades:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$$

Nesse mesmo instante, o centro de massa (CM) do sistema tem velocidade \vec{v}_{CM} (fig. 16). Usando o processo de derivação (que mencionamos no capítulo 5), é possível mostrar que a velocidade do centro de massa pode ser obtida por uma equação semelhante à equação (1) (ou (2), ou (3)):

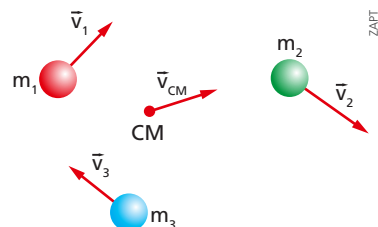


Figura 16.

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \xrightarrow{\text{derivando}} \vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \quad (4)$$

Mas $m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é a massa total (M) do sistema, e $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots$ é a quantidade de movimento total (\vec{Q}) do sistema. Assim, a equação (4) pode ser escrita:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{Q}}{M} \quad \text{ou} \quad \vec{Q} = M \cdot \vec{v}_{CM} \quad (5)$$

isto é:

A quantidade de movimento total do sistema é igual ao produto da massa total pela velocidade do centro de massa.

Por esse motivo, a quantidade de movimento do sistema (\vec{Q}) também é chamada de quantidade de movimento do centro de massa.

Pensemos agora na aceleração de cada partícula no mesmo instante:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$$

e na força resultante em cada partícula:

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$$

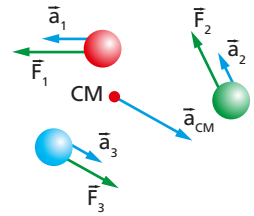


Figura 17.

Aplicando novamente o processo de derivação à equação (4), é possível demonstrar que a aceleração do centro de massa (\vec{a}_{CM}), nesse instante, pode ser obtida por uma fórmula análoga às anteriores:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \xrightarrow{\text{derivando}} \vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \quad (6)$$

Porém:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1; m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2; m_3\vec{a}_3 = \vec{F}_3; \dots$$

Assim, o numerador do lado direito da equação (6) é a soma de todas as forças que atuam nas partículas (\vec{F}_{total}), e a equação (6) pode ser escrita:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{total}}{M} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{total} = M \cdot \vec{a}_{CM} \quad (7)$$

Mas sabemos que (\vec{F}_{total}) é igual à soma das forças externas (\vec{F}_{ext}) com a soma das forças internas (\vec{F}_{int}), sendo $\vec{F}_{int} = \vec{0}$. Portanto:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = \vec{F}_{ext}$$

Desse modo, a equação (7) transforma-se em:

$$\vec{F}_{ext} = M \cdot \vec{a}_{CM} \quad (8)$$

A equação (7) e a equação (5) ($\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_{CM}$) mostram que:

O centro de massa de um sistema move-se como se toda a massa do sistema estivesse nele concentrada e todas as forças estivessem nele aplicadas.

Exercícios de Aplicação

14. Duas bolas, A e B, de massas respectivamente iguais a 7,0 kg e 3,0 kg, movem-se sobre uma mesma superfície horizontal, com velocidades constantes, como mostra a figura a. Qual é o movimento do centro de massa do sistema?

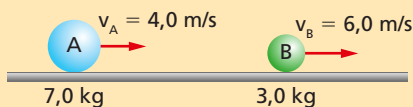


Figura a.

Resolução:

Para obter a aceleração do centro de massa, usamos a equação (8):

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}}$$

Porém, como as bolas têm movimentos uniformes, a resultante das forças externas é nula: $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$. Assim, a aceleração do centro de massa é nula, o que nos faz concluir que a velocidade do centro de massa é constante.

Para obter essa velocidade, usamos a equação (5):

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_{\text{CM}}$$

em que M é a massa do sistema e \vec{Q} é a quantidade de movimento do sistema: $\vec{Q} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$ (fig. b).

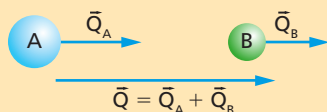


Figura b.

$$Q_A = m_A \cdot v_A = (7,0 \text{ kg})(4,0 \text{ m/s}) = 28 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$Q_B = m_B \cdot v_B = (3,0 \text{ kg})(6,0 \text{ m/s}) = 18 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Como os vetores \vec{Q}_A e \vec{Q}_B têm o mesmo sentido (fig. c), temos:

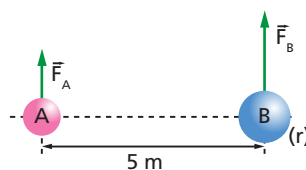
$$Q = Q_A + Q_B = 28 + 18 \Rightarrow Q = 46 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$Q = M \cdot v_{\text{CM}} \Rightarrow 46 = 10 \cdot v_{\text{CM}} \Rightarrow v_{\text{CM}} = 4,6 \text{ m/s}$$



Figura c.

15. Duas partículas, A e B, de massas $m_A = 4,0 \text{ kg}$ e $m_B = 6,0 \text{ kg}$, estão inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, distanciadas de 5 metros, sendo r a reta que passa pelas partículas (como na figura a seguir). A partir do instante $t = 0$, são aplicadas às partículas as forças \vec{F}_A e \vec{F}_B , cujas direções são perpendiculares à reta r e cujas intensidades são $F_A = 8,0 \text{ N}$ e $F_B = 24 \text{ N}$.

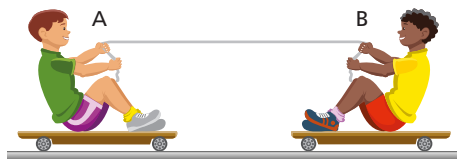


Determine:

- a posição inicial do centro de massa;
- a aceleração do centro de massa, a partir de $t = 0$.

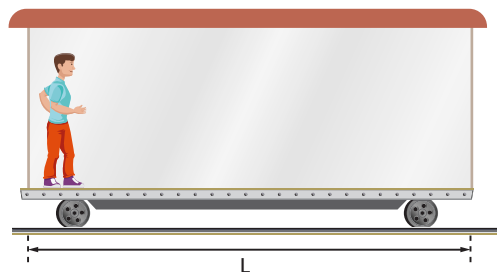
16. No esquema, observa-se um indivíduo A, sentado em um carrinho de rolimã (massa total 40 kg), e um indivíduo B, sentado em outro carrinho (massa total 60 kg). Inicialmente, ambos estão parados e distanciados de 1,0 m. Tracionando uma corda leve, A e B se aproximam mutuamente. Despreze a dissipação.

- O que acontece com o centro de massa do sistema?
- Quais as distâncias que A e B percorrem até se encontrarem?



17. No capítulo 20, usando o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento, você resolveu a questão a seguir (exercício 40):

Um homem de massa 80 kg está inicialmente em repouso na extremidade de um vagão de massa 720 kg e comprimento $L = 18 \text{ m}$, como ilustra a figura.

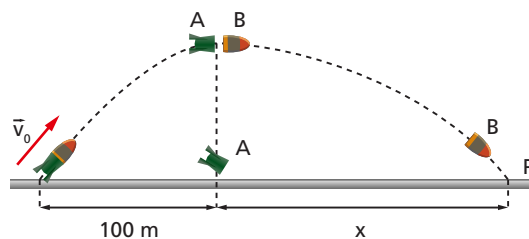


ILUSTRAÇÕES: ZAPFT

O homem anda até a outra extremidade do vagão e para. Desprezando o atrito do vagão com o solo, determine os deslocamentos do homem e do vagão em relação ao solo.

No capítulo 20 trabalhamos com a hipótese de que os movimentos ocorrem com velocidade constante. Resolva agora esse problema, usando o conceito de centro de massa, e mostre que a resposta seria a mesma se as velocidades não fossem constantes.

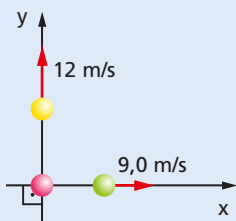
18. Um projétil é lançado a partir do solo com velocidade \vec{v}_0 . Ao atingir o ponto mais alto da trajetória, o projétil explode em dois pedaços A e B, de modo que o pedaço A cai verticalmente e o pedaço B continua, atingindo o solo no ponto P. Sabendo que os pedaços A e B têm massas iguais e desprezando a resistência do ar, qual é o valor da distância x ?



19. Suponha que você e um amigo muito gordo estejam patinando numa pista de gelo. Supondo que você conheça sua massa, como poderia obter o valor aproximado da massa de seu amigo, dispondo apenas de uma corda e de uma fita métrica?

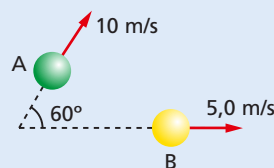
Exercícios de Reforço

20. (UF-PR) Com base nos conceitos e nas leis da conservação da quantidade de movimento (momento linear) verifique quais das sentenças a seguir são verdadeiras e dê como resposta a soma dos números que antecedem as sentenças verdadeiras.
- (01) A quantidade de movimento (momento linear) de uma partícula depende do sistema de referência.
 - (02) A energia cinética de uma partícula pode assumir valores negativos.
 - (04) Em uma colisão perfeitamente elástica, a energia cinética é conservada.
 - (08) Em uma colisão inelástica, a quantidade de movimento (momento linear) não é conservada.
 - (16) Quando duas partículas colidem, a velocidade do centro de massa do sistema, na ausência de forças externas, permanece constante.
21. (UF-CE) Um conjunto de três partículas, todas de igual massa m , está situado na origem de um sistema de coordenadas xy . Em dado instante, uma delas é atirada na direção x , com velocidade constante $v_x = 9,0 \text{ m/s}$, e outra é atirada, simultaneamente, na direção y , com velocidade constante $v_y = 12 \text{ m/s}$, ficando a terceira em repouso na origem.

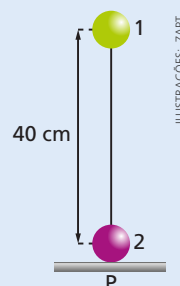


Determine o módulo da velocidade do centro de massa do conjunto.

22. Duas partículas A e B, de massas respectivamente iguais a $4,0 \text{ kg}$ e $6,0 \text{ kg}$ movem-se com velocidades constantes como indica a figura. Determine a velocidade do centro de massa do sistema.



23. (ITA-SP) Bolinhas 1 e 2, de massas respectivamente iguais a $3,0 \text{ kg}$ e $1,0 \text{ kg}$, foram fixadas nas extremidades de uma haste homogênea de massa desprezível e 40 cm de comprimento. Esse sistema foi colocado verticalmente sobre uma superfície plana, perfeitamente lisa, conforme mostra a figura, e abandonado. A bolinha 1 colidirá com a superfície a uma distância x do ponto P dada por:



- a) $x = 0$ (no ponto P)
- b) $x = 10 \text{ cm}$
- c) $x = 20 \text{ cm}$
- d) $x = 30 \text{ cm}$
- e) $x = 40 \text{ cm}$

Estática dos corpos rígidos

No estudo da Cinemática analisamos tanto os movimentos de translação (capítulos 3 a 10) como os de rotação (capítulo 11). No entanto, o nosso estudo da Dinâmica, até agora, limitou-se à análise dos movimentos de translação. O próximo passo seria o estudo da Dinâmica de Rotação. Porém, o estudo detalhado dessa Dinâmica exige ferramentas matemáticas não apresentadas no Ensino Médio. Assim, neste capítulo, vamos nos restringir a um caso particular cuja análise é simples, não necessitando de ferramentas matemáticas complexas: a condição para que um corpo rígido não sofra rotação.

1. Momento de uma força

Quando estudamos a translação de um corpo, não levamos em conta o ponto do corpo onde a força é aplicada. No entanto, quando se trata do movimento de rotação, esse aspecto influi no movimento, como você já deve ter notado em sua experiência diária. Observe a figura 1. Ao fechar ou abrir uma porta, é mais fácil fazê-lo empurrando-a longe da dobradiça (por onde passa o eixo de rotação da porta) do que perto.



PROCURE NO CD

No CD apresentamos, de forma resumida, a Dinâmica de Rotação, com ênfase em um princípio de conservação muito importante: o **Princípio da Conservação do Momento Angular**.

(a)



(b)



FERNANDO FAVORETTO/CRUAR IMAGEM

Figura 1. É mais fácil fechar uma porta empurrando-a longe do eixo de rotação (a) do que perto do eixo (b).

1. Momento de uma força
2. Alavancas
3. Definição geral de torque
4. Condição de equilíbrio de rotação
5. Sistemas indeterminados
6. Estabilidade do equilíbrio de rotação

A experiência mostra que o efeito de uma força \vec{F} na rotação de um corpo é dado pelo produto $F \cdot d$, sendo d a distância entre a linha de ação da força (linha r , na figura 2) e o ponto O , por onde passa o eixo de rotação (que é perpendicular ao plano da figura). Esse produto é chamado de **momento de \vec{F} em relação a O** ou **torque de \vec{F} em relação a O** , sendo representado por M_F :

$$M_F = F \cdot d$$

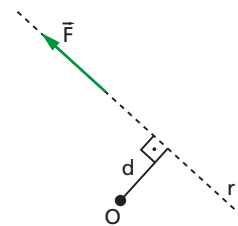


Figura 2. $M_F = F \cdot d$.

O ponto O é denominado **polo**, e a distância d é denominada **braço de \vec{F}** .

No SI, a unidade de momento é **N · m** (newton × metro). Podemos observar que essa unidade é igual à unidade de trabalho, mas não pode ser chamada **joule**.

É importante destacar que o torque, na realidade, é uma grandeza vetorial. No entanto, no nosso curso, consideraremos apenas situações em que todas as forças estão num mesmo plano e, assim, podemos considerar o torque como uma grandeza escalar.

Mais adiante faremos uma pequena alteração na definição de torque. Porém, por enquanto, usaremos essa definição em algumas situações simples.

Centro de gravidade

O centro de gravidade (G) de um corpo é o ponto onde podemos supor que está aplicado seu peso (fig. 3) no que se refere aos efeitos de rotação.

No CD demonstraremos que, se as dimensões do corpo forem pequenas em comparação com o tamanho da Terra, de modo que em todos os pontos do corpo a aceleração da gravidade tenha praticamente o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido (fig. 4), o centro de gravidade do corpo praticamente coincide com o centro de massa.

No próximo capítulo veremos que a aceleração da gravidade é um vetor (\vec{g}) que aponta, aproximadamente, para o centro da Terra (fig. 5). Além disso, a intensidade de \vec{g} diminui à medida que consideramos pontos mais afastados da Terra. Assim, quando o corpo tem dimensões grandes, em diferentes pontos do corpo o vetor \vec{g} poderá ter diferentes direções e diferentes intensidades, como exemplificado na figura 5, em que temos:

$$\vec{g}_1 \neq \vec{g}_3; \vec{g}_2 \neq \vec{g}_3; |\vec{g}_2| < |\vec{g}_1|$$

No planeta Terra há vários edifícios com alturas superiores a 400 m (fig. 6). No caso de um edifício cuja altura é 250 m, a intensidade de \vec{g} no topo é cerca de 0,008% menor do que na base. A consequência é que o centro de gravidade do edifício está cerca de 1 cm abaixo do centro de massa.

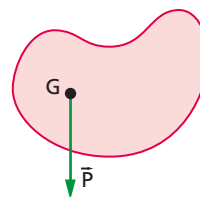


Figura 3. O centro de gravidade (G) é o ponto de aplicação do peso.

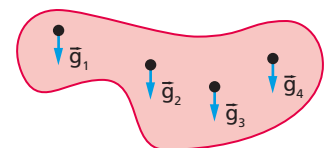


Figura 4. Neste caso, $\vec{g}_1 = \vec{g}_2 = \vec{g}_3 = \vec{g}_4$, e o centro de gravidade coincide com o centro de massa.

ILUSTRAÇÕES: ZAPT

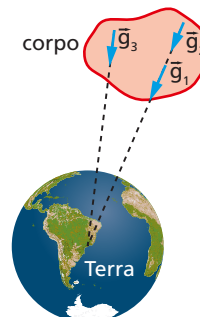


Figura 5. Neste caso, temos: $\vec{g}_1 \neq \vec{g}_2$ e $\vec{g}_1 \neq \vec{g}_3$. O centro de gravidade não coincide com o centro de massa.



Figura 6.

ALAMY/OTHER IMAGES

Exercícios de Aplicação

1. A figura *a* representa uma barra de peso $P = 50 \text{ N}$ em equilíbrio sob a ação das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , apoiada no suporte fixo S .

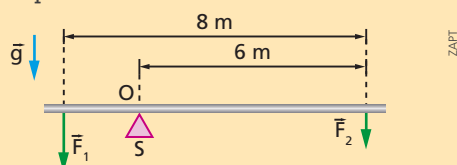


Figura a.

Sabendo que a barra é homogênea e que $F_1 = 350 \text{ N}$, determine:

- a intensidade de \vec{F}_2 ;
- a intensidade da força \vec{F}_3 exercida por S sobre a barra.

Resolução:

Na figura *b* representamos todas as forças que atuam na barra. Observe que, sendo a barra homogênea, o centro de gravidade está no centro da barra e, nesse ponto, aplicamos o peso \vec{P} .

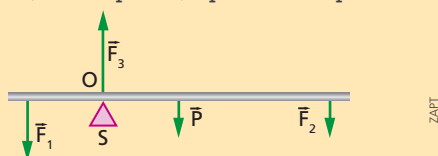


Figura b.

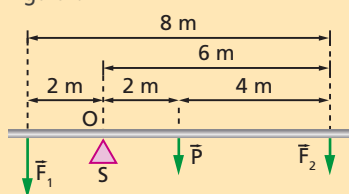


Figura c.

- A força normal \vec{F}_3 , exercida pelo suporte S sobre a barra, passa sobre o ponto de rotação O . Portanto o momento de \vec{F}_3 é nulo, isto é, a força \vec{F}_3 não influi na rotação. Observando a figura *c* vemos que os momentos das forças em relação ao ponto de suspensão O são:

$$M_{F_1} = F_1(2); M_P = P(2); M_{F_2} = F_2(6)$$

As forças \vec{P} e \vec{F}_2 "tentam" girar a barra no sentido horário, enquanto a força \vec{F}_1 "tenta" girar a barra no sentido anti-horário. Para que a barra não gire, essas tendências devem se cancelar:

$$M_{F_1} = M_P + M_{F_2} \Rightarrow F_1(2) = P(2) + F_2(6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 350(2) = 50(2) + F_2(6) \Rightarrow F_2 = 100 \text{ N}$$

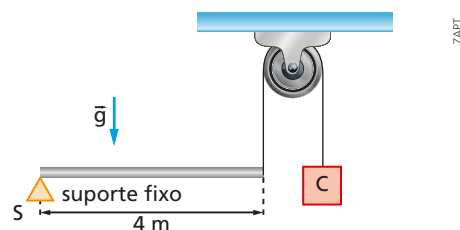
- Para calcular a intensidade de \vec{F}_3 , usamos o fato de que a barra, além de não sofrer rotação (está em equilíbrio estático), também

está em equilíbrio de translação. Assim, da figura *b* tiramos:

$$F_3 = F_1 + P + F_2 = 350 \text{ N} + 50 \text{ N} + 100 \text{ N}$$

$$F_3 = 500 \text{ N}$$

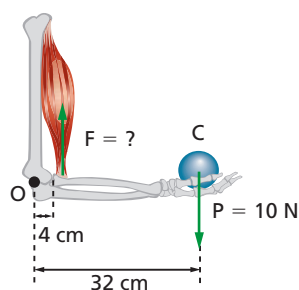
2. O sistema esquematizado está em equilíbrio estático.



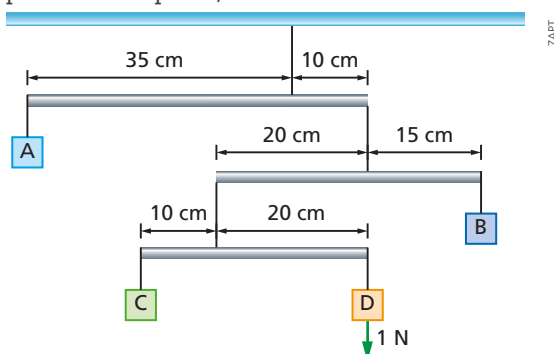
Sabendo que a barra é homogênea e tem peso 60 N , determine:

- o peso do corpo C ;
- a intensidade da força exercida pelo suporte S sobre a barra.

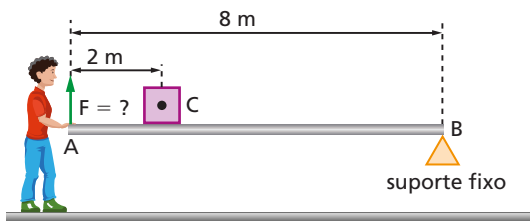
3. O músculo bíceps está ligado ao braço num ponto situado a aproximadamente 4 cm do ponto O de articulação do cotovelo. Na posição da figura, a pessoa está segurando um corpo C de peso $P = 10 \text{ N}$. Qual é a intensidade da força exercida pelo bíceps? (Despreze o peso do braço.)



4. A figura a seguir representa um brinquedo chamado móbile, em equilíbrio estático. As barras horizontais e os fios têm pesos desprezíveis. Sabendo que o peso do bloco D é 1 N , calcule os pesos dos corpos A , B e C .

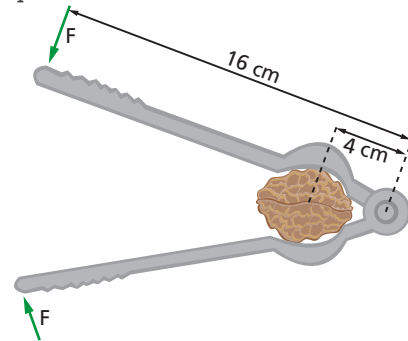


5. O sistema esquematizado está em equilíbrio. A barra é homogênea e tem peso 90 N, e o peso do corpo C é 20 N. Qual é a intensidade F da força exercida pelo indivíduo sobre a barra?



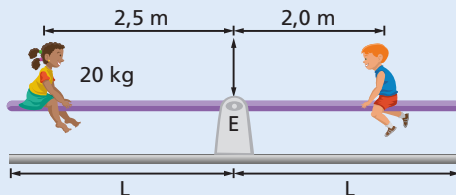
6. Para quebrar um certo tipo de noz, são necessárias forças de intensidade 36 N, de cada lado.

Usando o quebra-nozes da figura, calcule o valor aproximado da intensidade (F) da força que deve ser aplicada em cada extremo do instrumento para quebrar a noz.



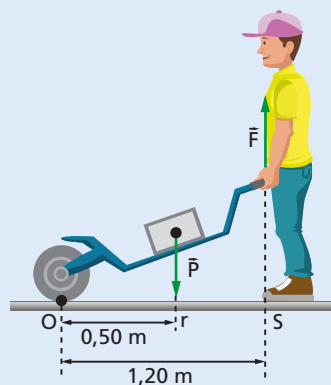
Exercícios de Reforço

7. (U. F. Viçosa-MG) Um menino e uma menina estão brincando sobre uma prancha homogênea, conforme ilustra a figura. A posição das crianças estabelece uma condição de equilíbrio. O ponto E é o ponto de rotação. Qual a massa do menino?



8. Na situação da questão anterior, o peso da prancha influi na rotação? Por quê?

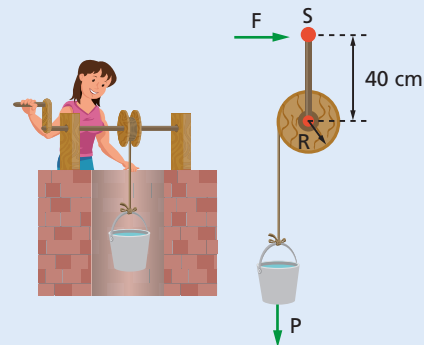
9. A figura representa a situação em que um homem segura um carrinho dentro do qual há um bloco de pedra de peso $P = 1200$ N. Desprezando o peso do carrinho, calcule:



- a intensidade da força \vec{F} exercida pelo homem;
- a intensidade da força do solo sobre a roda do carrinho.

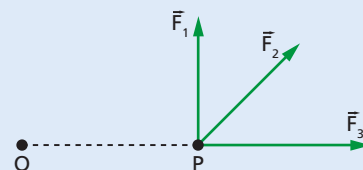
10. O dispositivo representado a seguir é usado para tirar água de um poço. Sabendo que $R = 10$ cm e que o peso do balde cheio de água é $P = 200$ N, calcule o valor aproximado da intensidade

da força (\vec{F}) que a pessoa deve fazer na extremidade da manivela para levantar o balde.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

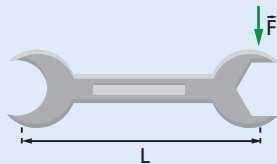
11. (UE-PI) A figura ilustra três forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 aplicadas ao ponto P. Sabe-se que estas forças têm o mesmo módulo. Os módulos dos momentos das forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 em relação ao ponto O são denotados, respectivamente, por M_1 , M_2 e M_3 .



Com relação a tal situação, verifique qual é a alternativa correta.

- $M_3 = 0$, $M_1 > M_2$
- $M_2 = 0$, $M_3 < M_1$
- $M_1 = 0$, $M_3 > M_2$
- $M_1 = M_2 = M_3$, onde os três momentos são não nulos.
- $M_1 = M_2 = M_3$, onde os três momentos são nulos.

12. (UF-MA) Ao apertarmos um parafuso utilizando uma chave de boca de comprimento L , aplicamos uma força \vec{F} , conforme mostra a figura. Duplicando o tamanho da chave, que força mínima \vec{F}' será necessária para apertarmos esse parafuso da mesma forma?



- a) $F' = F$ c) $F' = F \cdot L$ e) $F' = \frac{F}{2}$
b) $F' = 2F$ d) $F' = \frac{F}{L}$

13. (ITA-SP) Um corpo de massa m é colocado no prato A de uma balança de braços desiguais e equilibrado por um corpo de massa p colocado no prato B. Esvaziada a balança, o corpo de massa m é colocado no prato B e equilibrado por uma massa q colocada no prato A.

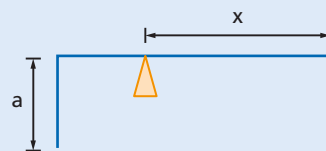


ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

O valor de m é:

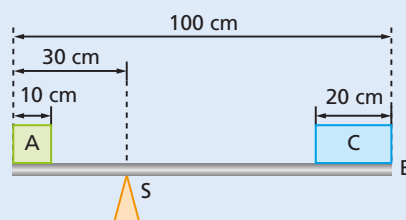
- a) pq c) $\frac{p+q}{2}$ e) $\frac{pq}{p+q}$
b) \sqrt{pq} d) $\sqrt{\frac{p+q}{2}}$

14. (UF-PI) Um arame homogêneo de 23 cm de comprimento é dobrado como indica a figura, em que $a = 5$ cm. Para que o arame apoiado se mantenha em equilíbrio, o comprimento x deve ser, aproximadamente, de:



- a) 6 cm d) 14 cm
b) 9 cm e) 15 cm
c) 11 cm

15. O sistema representado está em repouso, apoiado no suporte S. A barra B e os blocos A e C são homogêneos.



Sabendo que os pesos de B e C são $P_B = 10$ N e $P_C = 20$ N, calcule:

- a) o peso do bloco A;
b) a intensidade da força exercida pelo suporte S sobre a barra.

2. Alavancas

Nas situações analisadas até agora, vimos exemplos em que o efeito de uma força é multiplicado por meio da utilização de uma barra rígida: aplicando uma força de pequena intensidade na extremidade mais distante do ponto de rotação, conseguimos uma força de grande intensidade na extremidade mais próxima do ponto de rotação. Quando uma barra é utilizada dessa maneira, é chamada **alavanca**.

Na figura 7 temos dois exemplos de utilização do Princípio da Alavanca: na figura 7a temos uma alavanca **interfixa** (ponto fixo no meio) e, na figura 7b, uma alavanca **inter-resistente** (resistência no meio).

Existe também a alavanca **interpotente** (fig. 8) para a qual a força aplicada (\vec{F}) está entre o ponto fixo S e a resistência. Nesse caso, porém, a força aplicada tem intensidade maior que a resistência.

(a)



(b)



FERNANDO FAVORETTO/CIAR IMAGEM

ANJUEASTPX

Figura 7.

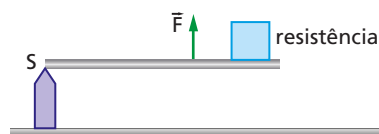


Figura 8.

3. Definição geral de torque

Vamos agora modificar a definição de momento (ou torque) de uma força. Essa modificação é necessária para analisarmos situações mais complexas que as discutidas até então. Há, por exemplo, situações em que não está claro qual é o ponto em torno do qual o sistema tem a tendência de girar.

O **momento de uma força \vec{F}** , em relação a um **ponto qualquer O** , é dado por:

$$M_F = \pm F \cdot d \quad (1)$$

em que d é a distância entre o ponto O e a reta suporte da força \vec{F} (reta r na fig. 9). Considerando O o ponto em torno do qual o corpo vai girar, os sinais $+$ ou $-$ na equação (1) são para diferenciar os casos em que a força tende a girar o corpo no sentido horário ou anti-horário. A escolha de qual é o sentido positivo é totalmente arbitrária. Adotaremos a convenção mais comum:

anti-horário $\rightarrow +$ e horário $\rightarrow -$

De acordo com essa convenção, na figura 10 o momento de \vec{F}_1 é positivo, pois tende a provocar uma rotação no sentido anti-horário, enquanto o momento de \vec{F}_2 é negativo, pois tende a provocar uma rotação no sentido horário:

$$M_{F_1} = F_1 \cdot d_1 \quad \text{e} \quad M_{F_2} = -F_2 \cdot d_2$$

Já a força \vec{F}_3 tem momento nulo, pois está sobre uma reta que passa por O .

O ponto O continua a ser chamado de **polo** e a distância d continua a ser chamada de **braço**.

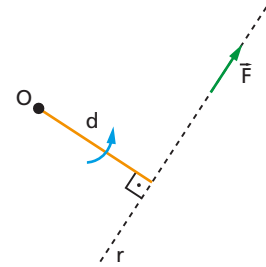


Figura 9.

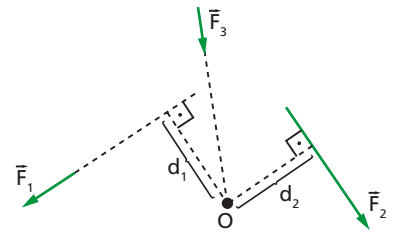


Figura 10.

Binário

Um conjunto de duas forças de mesma direção, sentidos opostos e tais que suas retas suportes são distintas (fig. 11a) é denominado **binário** ou **conjugado**; a distância d entre as retas suportes é denominada braço do binário. Nas figuras 11b e 11c, temos dois exemplos de situações em que aplicamos um binário a um corpo.

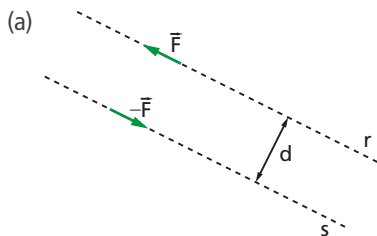


Figura 11.

Um fato interessante é que o momento total de um binário não depende do polo adotado. Consideremos, por exemplo, o polo O da figura 12a. Os momentos de \vec{F} e $-\vec{F}$ em relação a esse polo são:

$$M_F = +F \cdot y \quad \text{e} \quad M_{-F} = -F \cdot x$$

Assim, o momento total do binário é:

$$M = M_F + M_{-F} = +F \cdot y - F \cdot x = +F \cdot (y - x) = +F \cdot d$$

O momento total resultou positivo, pois o binário da figura 12a tende a produzir uma rotação no sentido anti-horário.

No caso da figura 12b, em que o binário tende a produzir uma rotação no sentido horário, o momento total é negativo.

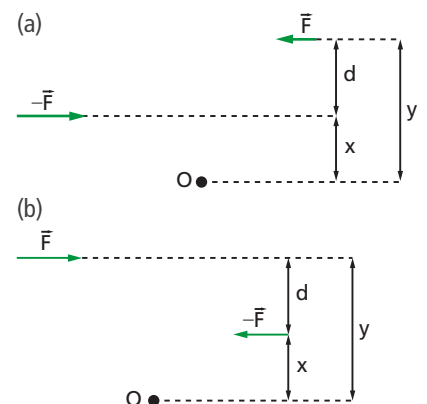


Figura 12.

4. Condição de equilíbrio de rotação

Consideremos um corpo sob a ação de várias forças, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. A condição para que o corpo esteja em equilíbrio de rotação é:

$$M_{F_1} + M_{F_2} + \dots + M_{F_n} = 0 \quad (2)$$

em que $M_{F_1}, M_{F_2}, \dots, M_{F_n}$ são os momentos das forças em relação a um polo O **qualquer**.

Você poderia, então, perguntar: “Mas a soma da equação (2) não depende do polo escolhido?”. A resposta é **sim**. De fato, o momento de cada força depende do polo escolhido e, conseqüentemente, a soma da equação (2), **em geral**, depende do polo. Porém, é possível demonstrar o seguinte:

Se a soma dos momentos é nula em relação a um polo, será também nula em relação a qualquer outro polo.

Assim, nas aplicações podemos escolher o polo que acharmos mais conveniente. Em geral o que fazemos é escolhê-lo sobre uma força não conhecida, pois assim seu momento será nulo.

O Teorema das Três Forças

Suponhamos que um corpo rígido esteja em equilíbrio de rotação e translação, sob a ação de apenas três forças. Nesse caso, pode-se demonstrar que as forças são coplanares e suas retas suportes são ou paralelas (fig. 13) ou concorrentes num único ponto K (fig. 14).

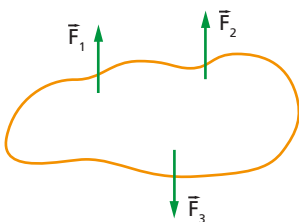


Figura 13.

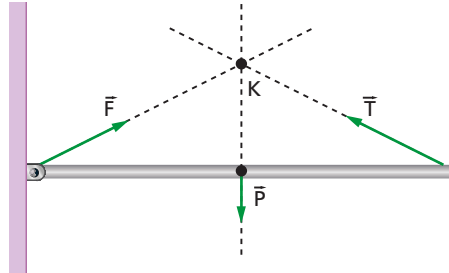


Figura 14.



PROCURE NO CD

Veja a demonstração deste teorema no CD!

Se houver mais de três forças, não podemos garantir que sejam paralelas ou tenham retas suportes passando por um mesmo ponto.

Exercícios de Aplicação

16. A barra da figura *a* está em equilíbrio. Sendo \vec{T} a força exercida pelo fio sobre a barra, calcule o momento de \vec{T} em relação ao ponto A . São dados:
- $\sin \theta = 0,60$;
 $\cos \theta = 0,80$.

Resolução:

Esse cálculo pode ser feito de dois modos. Em primeiro lugar vamos usar a definição. O momento de \vec{T} é dado por:

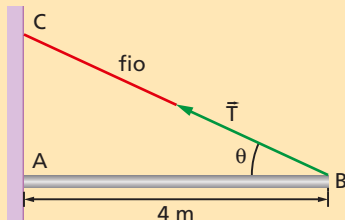


Figura *a*.

$M_T = +T \cdot d$
 em que d é a distância entre o polo A e a reta suporte de \vec{T} (reta r na fig. *b*). No triângulo colorido da figura temos:

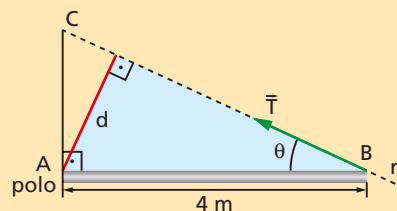


Figura *b*.

$$\text{sen } \theta = \frac{d}{4} \Rightarrow 0,60 = \frac{d}{4} \Rightarrow d = 2,4 \text{ m}$$

Portanto:

$$M_T = +T \cdot d = T \cdot (2,4) \Rightarrow M_T = 2,4T$$

Há, porém, outro modo de fazer esse cálculo. Inicialmente fazemos a decomposição da força \vec{T} (fig. c) nas componentes \vec{T}_x e \vec{T}_y .

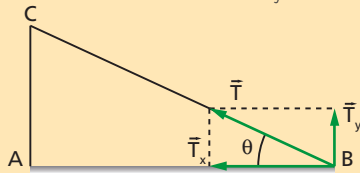


Figura c.

$$T_x = T \cdot \cos \theta = T \cdot (0,80)$$

$$T_y = T \cdot \sin \theta = T \cdot (0,60)$$

A seguir, usamos uma propriedade que pode ser demonstrada:

$$\vec{T} = \vec{T}_x + \vec{T}_y \Rightarrow M_T = M_{T_x} + M_{T_y}$$

A reta suporte da componente \vec{T}_x passa pelo ponto A e, portanto, o momento \vec{T}_x é nulo. Assim, o momento de \vec{T} é igual ao momento de \vec{T}_y :

$$M_T = M_{T_x} + M_{T_y} = M_{T_y} = T_y(AB) = T(0,60) \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_T = 2,4T$$

Temos, portanto, dois caminhos, mas em geral será mais fácil usar o processo da decomposição.

17. Uma barra homogênea, cujo peso tem intensidade $P = 60 \text{ N}$, está em equilíbrio na horizontal, sustentada por um fio ideal preso na extremidade B e articulada numa parede no ponto A. Sabendo que $\text{sen } \theta = 0,60$ e $\text{cos } \theta = 0,80$, determine a intensidade da tração no fio e da força exercida sobre a barra na articulação A.

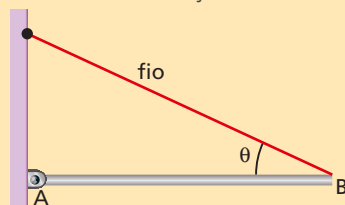


Figura a.

Resolução:

1º modo:

As forças atuantes na barra são a força \vec{T} exercida pelo fio no ponto B, o peso \vec{P} e a força \vec{F} exercida pela articulação sobre a barra no ponto A. Como a barra é homogênea, o peso atua em seu centro C. Na articulação, a força \vec{F} tem uma direção que ainda não conhecemos; assim, vamos trabalhar com suas componentes \vec{F}_x e \vec{F}_y . Fazamos também a decomposição da força \vec{T} nas componentes \vec{T}_x e \vec{T}_y .

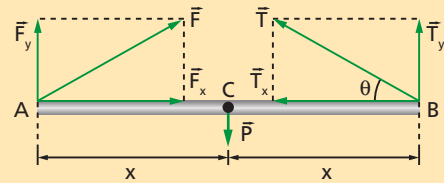


Figura b.

$$T_x = T \cdot \cos \theta = T \cdot (0,80)$$

$$T_y = T \cdot \sin \theta = T \cdot (0,60)$$

Vamos escolher o ponto A como polo dos momentos. As componentes \vec{F}_y , \vec{F}_x e \vec{T}_x têm suas retas suportes passando por A e, portanto, seus momentos são nulos:

$$M_{F_y} = M_{F_x} = M_{T_x} = 0$$

Os outros momentos são:

$$M_P = -P \cdot x \quad \text{e} \quad M_{T_y} = +T_y(2x)$$

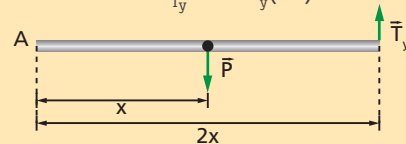


Figura c.

Para que haja equilíbrio de rotação, a soma dos momentos deve ser nula:

$$M_P + M_{T_y} = 0 \Rightarrow -P \cdot x + T_y(2x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2T_y = P \Rightarrow 2(T)(0,6) = 60 \Rightarrow T = 50 \text{ N}$$

Portanto:

$$\begin{cases} T_x = T \cdot \cos \theta = T \cdot (0,80) = 50(0,80) \Rightarrow \\ \Rightarrow T_x = 40 \text{ N} \\ T_y = T \cdot \sin \theta = T \cdot (0,60) = 50(0,60) \Rightarrow \\ \Rightarrow T_y = 30 \text{ N} \end{cases}$$

Impondo o equilíbrio de translação, devemos ter:

$$\begin{cases} F_x = T_x \Rightarrow F_x = 40 \text{ N} \\ F_y + T_y = P \Rightarrow F_y + 30 = 60 \Rightarrow F_y = 30 \text{ N} \end{cases}$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = (40)^2 + (30)^2 \Rightarrow F = 50 \text{ N}$$

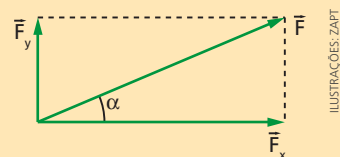


Figura d.

O ângulo α pode ser dado, por exemplo, pelo seno:

$$\text{sen } \alpha = \frac{F_y}{F} = \frac{30}{50} = 0,60, \text{ isto é, } \alpha = \text{arc sen } 0,60.$$

Observação: No início da resolução fizemos a hipótese de que o sentido da componente vertical da força na articulação A (\vec{F}_y) é para cima, e de fato é o que acontece neste caso. Se, no final da resolução, tivéssemos obtido $F_y < 0$, isto significaria que o sentido de \vec{F}_y seria oposto ao admitido, isto é, para baixo. Você encontrará essa situação no exercício 21.

2º modo:

Na resolução acima usamos o procedimento-padrão, que é aplicável a qualquer situação. Porém, neste caso há dois fatos que simplificam a análise e o exercício poderia ter sido resolvido do modo a seguir.

Em primeiro lugar, notamos que há apenas três forças atuando na barra e, de acordo com o Teorema das Três Forças, as retas suportes das três forças devem passar por um mesmo ponto D .

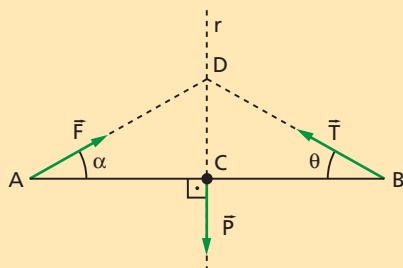


Figura e.

Como o peso atua no ponto médio do segmento \overline{AB} , a reta r é a mediatriz do segmento \overline{AB} e, portanto, os ângulos θ e α são iguais.

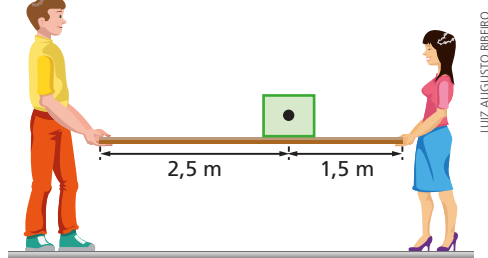
$$\alpha = \theta$$

Assim, devemos ter $F = T$ e:

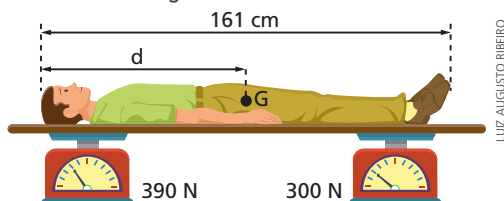
$$2(T \cdot \sin \theta) = P \Rightarrow 2(T)(0,60) = 60 \Rightarrow T = 50 \text{ N}$$

Portanto: $F = T = 50 \text{ N}$.

18. Na situação representada, o rapaz e a moça sustentam um bloco de peso 160 N , usando uma tábua de peso desprezível. Calcule as intensidades das forças exercidas pelo rapaz e pela moça sobre a tábua.

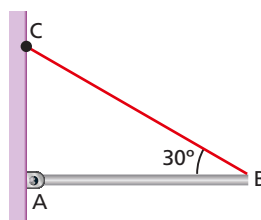


19. Para obter a posição aproximada do centro de gravidade (G) de um homem, ele foi deitado sobre uma prancha rígida e de peso desprezível, a qual por sua vez foi apoiada em duas balanças cujas marcações estão dadas na figura. Determine a distância d .

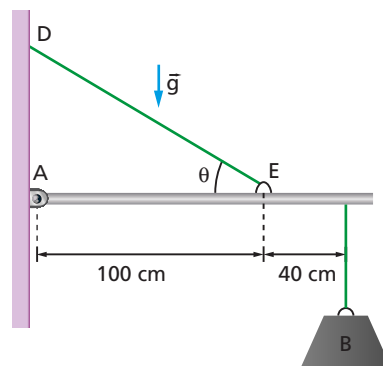


20. No sistema esquematizado, a barra é homogênea, tem peso \vec{P} de intensidade $P = 200 \text{ N}$, e o fio é ideal.

- a) Calcule as intensidades da tração no fio (\vec{T}) e da força \vec{F} exercida pela articulação A sobre a barra.
b) Represente num diagrama as forças \vec{T} , \vec{F} e \vec{P} .

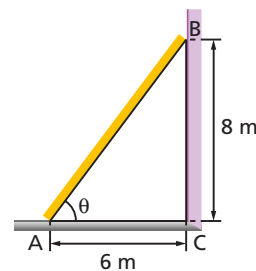


21. Uma barra homogênea e de peso 60 N está disposta horizontalmente, presa por uma articulação A a uma parede, como ilustra a figura. O bloco B tem peso 120 N , $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$.

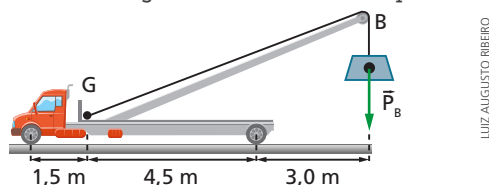


- a) Determine as intensidades da tração (\vec{T}) no fio DE e da força (\vec{F}) exercida pela articulação sobre a barra.
b) Faça um diagrama representando as forças que atuam na barra.

22. Uma escada está apoiada no solo e em uma parede vertical. Suponha que a parede seja lisa, mas o solo tenha atrito. Sabendo que o peso \vec{P} da escada tem intensidade 400 N , calcule a intensidade das forças exercidas pela parede e pelo solo sobre a escada.



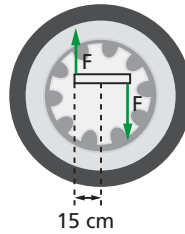
23. Para a situação do exercício anterior, em seu caderno, represente as forças exercidas sobre a escada.
24. O caminhão guindaste representado na figura tem massa 4000 kg e centro de gravidade G . O bloco B tem massa 2000 kg e o sistema está em equilíbrio.



Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a) a intensidade das forças exercidas pelo solo sobre cada uma das rodas dianteiras;
b) a intensidade das forças exercidas pelo solo sobre cada uma das rodas traseiras.

25. Para apertar os parafusos de uma roda de automóvel, é usada uma ferramenta, como mostra a figura. Em cada extremo da ferramenta é aplicada uma força de 300 N. Calcule o módulo do binário aplicado na ferramenta.



26. Uma escada de 10 metros de comprimento e cujo centro de gravidade encontra-se em seu centro está apoiada no solo (com atrito) e numa parede (sem atrito). O peso da escada é 400 N, o peso da pessoa é 600 N, $\sin \theta = 0,80$ e $\cos \theta = 0,60$. Calcule:



- a intensidade da força que a parede faz na escada;
- a intensidade da força normal exercida pelo solo sobre a escada;
- a intensidade da força de atrito exercida pelo solo sobre a escada;
- o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre o solo e a escada, de modo que esta não escorregue.

27. Na figura a representamos a seção reta de uma esfera homogênea de peso 120 N e em equilíbrio, presa por um fio ideal f e apoiada numa superfície plana vertical lisa (S) em um ponto B . O raio da esfera é 5 cm. Determine as intensidades da tração no fio e da força exercida por S sobre a esfera.

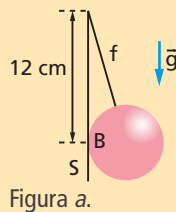


Figura a.

Resolução:

O peso (\vec{P}) da esfera passa pelo centro de massa C (fig. b). Como não há atrito, no ponto B a superfície S exerce sobre a esfera apenas a força normal \vec{F}_N . Porém, o ponto B é um ponto de tangência entre S e a esfera. Portanto, a reta suporte de \vec{F}_N deve passar por C . Como as forças \vec{F}_N e \vec{P} têm retas suportes que passam por C e há apenas três forças atuando na esfera, a terceira força (que é a tração \vec{T}) também deve ter reta suporte que passe por C (de acordo com o Teorema das Três Forças).

Como a esfera está em equilíbrio, as três forças que atuam sobre ela devem formar uma linha poligonal fechada (fig. d).

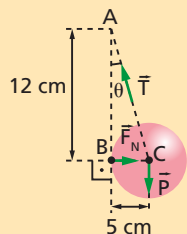


Figura b.

$$AC^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow AC = 13 \text{ cm}$$

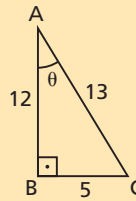


Figura c.

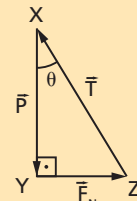


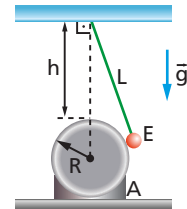
Figura d.

Os triângulos ABC e XYZ são semelhantes:

$$\frac{T}{13} = \frac{F_N}{5} = \frac{P}{12} \Rightarrow \frac{T}{13} = \frac{F_N}{5} = \frac{120}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 130 \text{ N} \text{ e } F_N = 50 \text{ N}$$

28. Uma pequena esfera E , de peso P , está presa a um fio ideal de comprimento L e apoiada em um cilindro cujo raio da base é R e cuja seção reta está representada na figura. O cilindro está fixado por meio de um apoio (A) sobre o solo e não há atrito entre o cilindro e a esfera. Determine, em função de R , h , L e P , os módulos da:



- tração no fio;
- força feita pelo cilindro sobre a esfera.

29. Na figura a representamos a seção reta de uma esfera homogênea de peso 120 N e em equilíbrio, presa por um fio ideal f e apoiada numa superfície plana e lisa S . Determine as intensidades da tração no fio e da força exercida por S sobre a esfera.

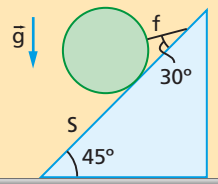


Figura a.

Resolução:

A reta suporte do peso (\vec{P}) deve passar pelo centro da esfera (C). Como não há atrito, a força exercida por S sobre a esfera é a força normal \vec{F}_N , cuja reta suporte passa por C . Como há apenas três forças atuando na esfera, a terceira força, que é a tração no fio (\vec{T}), também deve ter reta suporte passando por C .

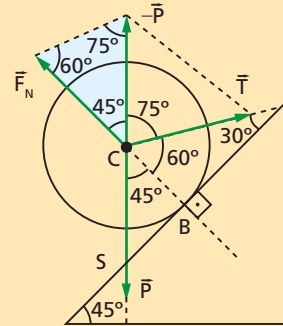


Figura b.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

O valor de $\sin 75^\circ$ pode ser obtido em uma tabela (ou calculadora eletrônica):

$\sin 75^\circ \approx 0,966$

Outro modo é usar a identidade:

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

Assim:

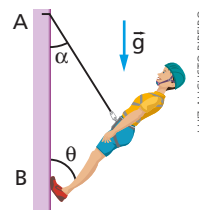
$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \approx (0,707)(0,866 + 0,500) \approx \\ &\approx (0,707)(1,366) \approx 0,966\end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo colorido:

$$\frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{F_N}{\sin 75^\circ} = \frac{P}{\sin 60^\circ} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{T}{0,707} &\approx \frac{F_N}{0,966} \approx \frac{120 \text{ N}}{0,866} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &\approx 98 \text{ N} \quad \text{e} \quad F_N \approx 134 \text{ N}\end{aligned}$$

30. A figura representa um rapaz apoiado numa parede e preso a uma corda, cujo prolongamento passa pelo seu centro de massa. Suponha que os pés do rapaz estejam na iminência de deslizar. Dados: $\sin \theta = 0,60$; $\cos \theta = 0,80$; $\alpha = 30^\circ$.

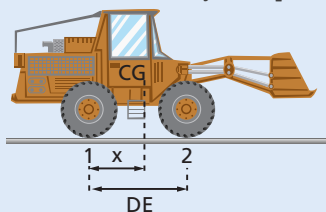


LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

- Em seu caderno, represente as forças que atuam no rapaz: o peso (\vec{P}), a tração da corda (\vec{T}) e a força exercida pela parede (\vec{F}).
- Calcule o coeficiente de atrito estático entre a parede e os pés do rapaz.
- Sabendo que o peso do rapaz é 600 N, determine as intensidades de \vec{T} e \vec{F} .

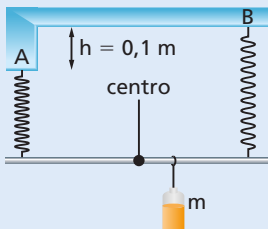
Exercícios de Reforço

31. (Vunesp-SP) A figura mostra, em corte, um trator florestal “derrubador-amontoador” de massa 13 000 kg; x é a abscissa de seu centro de gravidade (CG). A distância entre seus eixos, traseiro e dianteiro, é $DE = 2,5$ m. Admita que 55% do peso total do trator são exercidos sobre os pontos de contato dos pneus dianteiros com o solo (2) e o restante sobre os pontos de contato dos pneus traseiros com o solo (1). Determine a abscissa x do centro de gravidade desse trator, em relação ao ponto 1.



LUÍZ AUGUSTO RIBEIRO

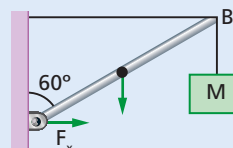
32. (UF-PE) A figura mostra uma barra homogênea, de comprimento $L = 1,0$ m, presa ao teto nos pontos A e B por molas ideais, iguais, de constante elástica $k = 1,0 \cdot 10^2$ N/m. A que distância do centro da barra, em centímetros, deve ser pendurado um jarro de massa $m = 2,0$ kg, de modo que a barra permaneça na horizontal? (Adote $g = 10$ m/s².)



ZAPET

33. (UF-PA) Uma barra de seção reta uniforme de 200 kg de massa forma um ângulo de 60° com um suporte vertical. Seu extremo superior está fixado a esse suporte por um cabo horizontal.

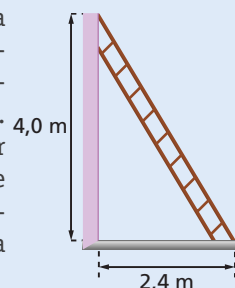
Uma carga de 600 kg é sustentada por outro cabo pendurado verticalmente da ponta da barra (ver figura). Qual o valor da componente F_x ? (g é o módulo da aceleração da gravidade.)



ZAPET

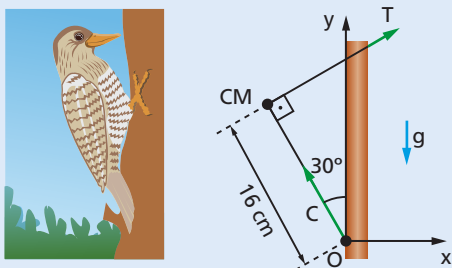
- 200g N
- 250g√3 N
- 300g√3 N
- 400g√3 N
- 700g√3 N

34. (UF-PE) Uma escada rígida e homogênea está encostada numa parede vertical lisa, conforme a figura. Determine o menor valor possível do coeficiente de atrito estático entre a escada e o assoalho, para que a escada não escorregue.



ZAPET

35. (Fuvest-SP) Para manter-se equilibrado em um tronco de árvore vertical, um pica-pau agarra-se pelos pés, puxando-se contra o tronco, e apoia sobre ele sua cauda, constituída de penas muito rígidas, conforme a figura a seguir. No esquema a seguir, estão indicadas as direções das forças nos pés (T) e na cauda (C) do pica-pau – que passam pelo seu centro de massa (CM) – e a distância da extremidade da cauda ao CM do pica-pau, que tem 1 N de peso (P).



- Calcule os momentos das forças P e C em relação ao ponto O indicado no esquema ao lado.
- Escreva a expressão para o momento da força T em relação ao ponto O e determine o módulo dessa força.
- Determine o módulo da força C na cauda do pica-pau.

5. Sistemas indeterminados

Ao resolvermos um problema de equilíbrio de um corpo rígido, temos disponíveis três equações independentes:

- resultante nula em uma direção x ;
- resultante nula em uma direção y , perpendicular a x ;
- soma dos torques igual a zero.

Portanto, se houver mais de três incógnitas não conseguiremos resolver o problema. É o caso, por exemplo, do exercício 22. Nesse exercício supusemos que a parede onde a escada se apoia é lisa. Se houvesse atrito entre a escada e a parede, teríamos mais uma incógnita, que é a força de atrito exercida pela parede sobre a escada e não conseguiríamos resolver o problema. Nesse caso dizemos que o sistema analisado é **indeterminado**.

6. Estabilidade do equilíbrio de rotação

Na figura 15 temos um corpo de centro de gravidade G , suspenso por um ponto S , com liberdade para girar em torno de S . Se abandonarmos o corpo na posição da figura 15a, o peso \vec{P} terá um momento cujo efeito é fazer o corpo girar no sentido horário, “procurando” a posição da figura 15b. Essa posição é de equilíbrio estável: a reta suporte (r) do peso passa pelo ponto de suspensão S , e o centro de gravidade G está abaixo de S .

Para obter experimentalmente o centro de gravidade de um corpo em forma de chapa (espessura constante), podemos proceder como na figura 16. Inicialmente suspendemos o corpo por um ponto S_1 qualquer e o deixamos atingir a posição de equilíbrio (fig. 16a), definindo a reta vertical r . Em seguida suspendemos o corpo por outro ponto S_2 (fig. 16b) e novamente o deixamos atingir a posição de equilíbrio, definindo a reta vertical s . O centro de gravidade estará no cruzamento das retas r e s (fig. 16c).

Na figura 17a temos um bloco de centro de gravidade G e peso \vec{P} apoiado sobre uma superfície horizontal. Se girarmos o corpo “levemente”, como indicado na figura 17b, de modo que a reta vertical r que passa por G intercepte a base AB , a tendência do bloco é voltar à posição inicial, girando no sentido anti-horário. Se girarmos o bloco como indicado na figura 17c, de modo que a reta vertical r que passa por G não intercepte a base, a tendência não é voltar à posição inicial, mas, sim, girar no sentido horário, tombando.

O caso da figura 17 é diferente do caso da figura 15, em que, para qualquer deslocamento angular da posição de equilíbrio, a tendência do corpo é voltar a essa posição de equilíbrio. Portanto, no caso da figura 15, a situação da figura 15b é realmente de **equilíbrio estável**. Já no caso da figura 17a,

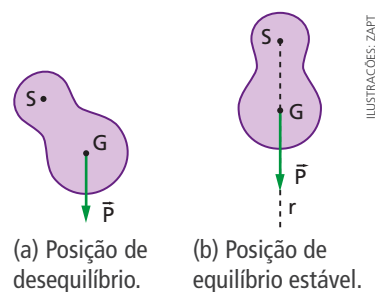


Figura 15.

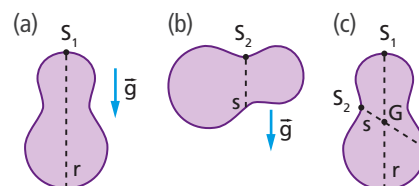


Figura 16.

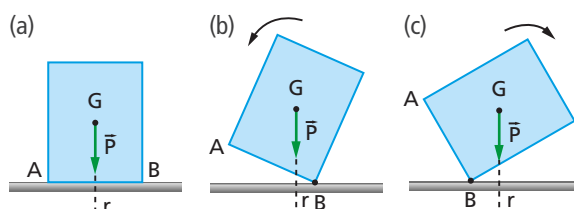


Figura 17.

podemos dizer que a posição é de **equilíbrio estável relativo**, pois o corpo tende a voltar à posição inicial apenas para “pequenos” deslocamentos angulares.

Nos casos de equilíbrio estável relativo, quanto **mais baixo** estiver o centro de gravidade, **mais estável** é o equilíbrio. Tomemos, por exemplo, o caso da figura 18, em que temos dois blocos cujas distribuições de massa não são uniformes, de modo que o centro de gravidade de *B* é mais baixo que o de *A*. Podemos dizer que o equilíbrio de *B* é mais estável que o de *A*, pois, para tombar *B*, é necessário efetuar deslocamentos angulares maiores que os de *A*.

Na figura 19a temos um livro, de comprimento *L*, apoiado sobre uma mesa, com um trecho de comprimento *x* para fora da mesa. Supondo que a massa do livro esteja uniformemente distribuída, seu centro de gravidade *G* está em seu centro. Na figura 19b temos uma vista lateral da mesma situação da figura 19a; enquanto $x \leq \frac{L}{2}$, o centro de gravidade está sobre a mesa, e o livro não cai. Na figura 19c o livro foi abandonado numa posição em que o ponto *G* está fora da mesa, e o livro cai.

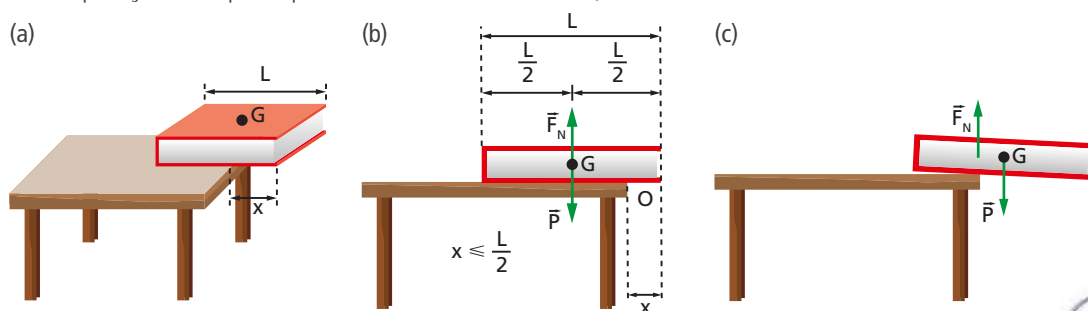


Figura 19.

Ilustrações sem escala ou em escalas diferentes.

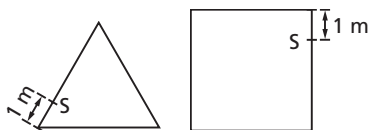
Um tipo de brinquedo encontrado facilmente está esquematizado na figura 20. Um boneco está apoiado em um suporte *S*. Pelo boneco passa um arame rígido em cujas extremidades estão fixas duas bolas de massas maiores que a do boneco. Desse modo, o centro de gravidade *G* do conjunto está abaixo do suporte *S*, e o sistema está em equilíbrio estável. Afastando-se levemente o brinquedo de sua posição de equilíbrio, ao liberá-lo, sua tendência é voltar à posição inicial.



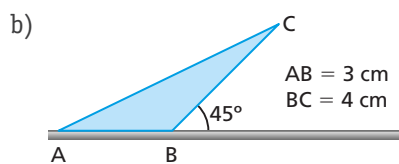
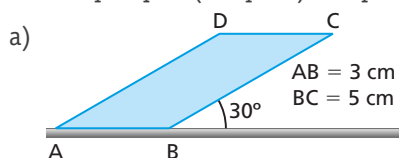
Figura 20.

Exercícios de Aplicação

36. Na figura temos duas chapas homogêneas: uma em forma de triângulo equilátero de lado 4 m e a outra em forma de quadrado de lado 4 m. Em seu caderno desenhe essas chapas nas posições de equilíbrio se elas forem suspensas pelo ponto *S*.



37. As figuras mostram a frente de dois prismas homogêneos colocados sobre uma superfície horizontal. Reproduza as figuras numa folha de papel e verifique qual (ou quais) dos prismas tombará.

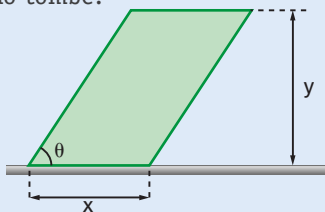


38. Um garoto está inicialmente sentado numa cadeira. Se ele quiser se levantar e ficar de pé, por que não conseguirá fazer isso sem antes se inclinar para a frente?



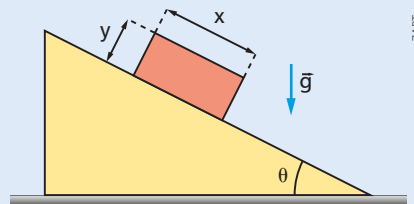
Exercícios de Reforço

39. (Mauá-SP) É dado um prisma homogêneo oblíquo, de base quadrada, de lado x e de altura y . Qual o valor mínimo da tangente do ângulo θ , de modo que o prisma, colocado na posição da figura, não tombe?



40. (ITA-SP) Considere um bloco homogêneo em repouso sobre um plano inclinado com atrito,

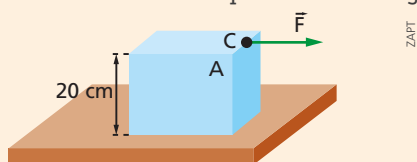
como ilustra a figura. Supondo que o atrito seja suficiente para que o bloco não deslize, o valor máximo de y de modo que o bloco não gire é:



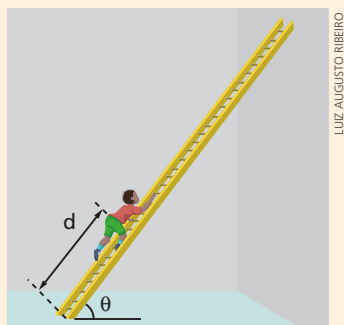
- a) $\frac{x}{\theta}$ c) $\frac{x}{\sin^2 \theta}$ e) $\frac{x}{\sin \theta \cdot \tan \theta}$
b) $\frac{x}{\sin \theta}$ d) $\frac{x}{\tan \theta}$

Exercícios de Aprofundamento

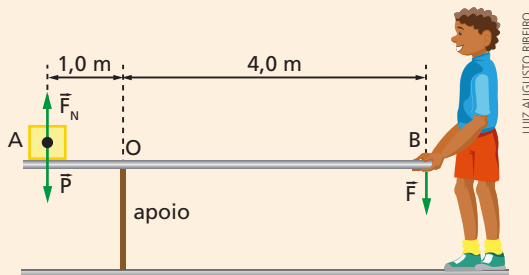
41. Um bloco homogêneo, em forma de cubo, de peso \vec{P} cuja intensidade é $P = 200 \text{ N}$, está em repouso sobre uma superfície horizontal com atrito. Aplicamos sobre o bloco uma força horizontal \vec{F} , como indica a figura. Supondo que o atrito seja suficiente para impedir o deslizamento, calcule o valor máximo de F de modo que o bloco não gire.



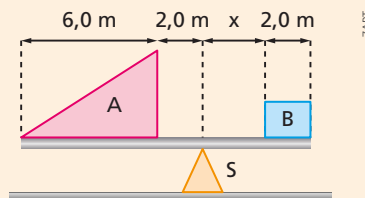
42. Na figura representamos uma pessoa de massa 60 kg que sobe uma escada apoiada em uma parede lisa, cuja massa é 20 kg , o comprimento é $6,0 \text{ m}$ e o centro de gravidade está em seu centro geométrico. Sabe-se que $\sin \theta = 0,80$, $\cos \theta = 0,60$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e o coeficiente de atrito estático entre a escada e o solo é igual a $0,50$. Sendo d a distância entre o pé da escada e o centro de gravidade da pessoa, calcule o maior valor de d de modo que a escada não escorregue.



43. O sistema esquematizado na figura está em repouso. O menino aplica uma força \vec{F} na extremidade da barra, e esta, em sua extremidade A , aplica a força \vec{F}_N sobre o corpo de peso \vec{P} . Se o menino provocar, na extremidade B da barra, um pequeno deslocamento para baixo, com velocidade constante, qual força realizará o maior trabalho: \vec{F} ou \vec{F}_N ?

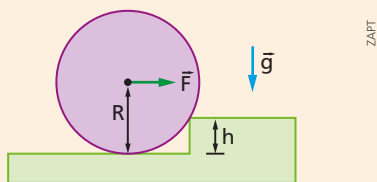


44. (Mackenzie-SP) O prisma (A) e o paralelepípedo (B), homogêneos, pesam 10 kgf e 20 kgf respectivamente e estão apoiados sobre uma barra inextensível e sem peso, simplesmente apoiada em S. Podemos afirmar que, nas condições de equilíbrio, x é igual a:



- a) $5,0 \text{ m}$ c) $10,0 \text{ m}$ e) $0,5 \text{ m}$
b) $8,0 \text{ m}$ d) $1,0 \text{ m}$

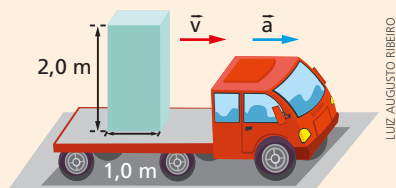
45. Uma roda de raio $R = 13 \text{ cm}$ e peso $P = 15 \text{ N}$ está apoiada sobre uma superfície horizontal e encostada em um degrau de altura $h = 8,0 \text{ cm}$, com atrito. Uma força horizontal \vec{F} é aplicada ao eixo da roda como mostra a figura.



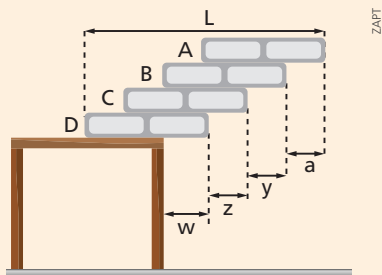
- Determine os valores de $|\vec{F}|$ para os quais a roda sobe o degrau.
- Seja \vec{F}_1 a força que deixa a roda na iminência de subir o degrau. Para essa situação, determine a força \vec{F}_2 exercida sobre a roda pelo degrau.

Enunciado para as questões 46 e 47:

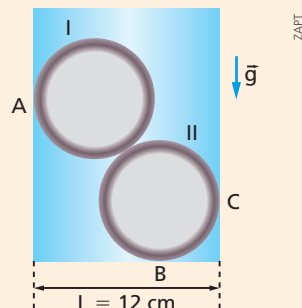
Sobre a carroceria de um caminhão há um bloco homogêneo cuja forma é a de um paralelepípedo reto cuja base é um quadrado de lado $1,0 \text{ m}$ e cuja altura é $2,0 \text{ m}$. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. O caminhão, que estava em repouso, adquire movimento de velocidade e aceleração crescentes, sendo a o módulo da aceleração.



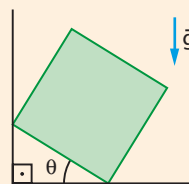
- Determine o maior valor de a de modo que o bloco não tombe, supondo que o atrito seja suficiente para que ele tombe antes de deslizar.
- Sendo μ_e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a carroceria, determine os valores de μ_e para os quais o bloco:
 - desliza antes de tombar;
 - tomba antes de deslizar.
- A figura representa quatro blocos idênticos e homogêneos, em equilíbrio estático. Calcule os valores máximos de a , y , z e w , em função de L .



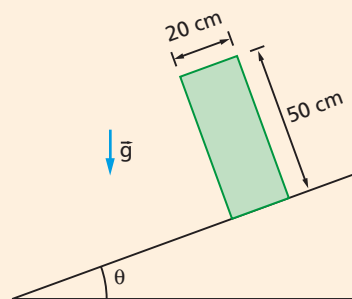
49. Na figura representamos as seções transversais de dois cilindros idênticos e homogêneos, apoiados nas paredes e no fundo de um recipiente. Sabendo que cada cilindro tem peso 20 N e raio da base igual a $4,0 \text{ cm}$, determine:



- as forças exercidas pelo recipiente sobre os cilindros, nos pontos de contato A, B e C;
 - a força exercida por um cilindro sobre o outro.
50. A figura mostra a seção transversal de um cubo homogêneo apoiado em uma parede vertical lisa e no solo, com o qual há atrito. Sabendo que $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$, determine o menor valor do coeficiente de atrito estático entre o cubo e o solo de modo que o cubo fique em equilíbrio. (Sugestão: $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$.)



51. A figura mostra a seção transversal de um bloco homogêneo em forma de paralelepípedo, cuja base é um quadrado de lado 20 cm e cuja altura mede 50 cm . O bloco está apoiado em um plano inclinado com atrito e o ângulo θ é aumentado vagarosamente, tendo, no início, valor nulo. Sendo μ_e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano inclinado, verifique o que acontecerá primeiro (tombamento ou deslizamento) em cada caso a seguir:



- $\mu_e = 0,50$
- $\mu_e = 0,30$

Gravitação

Na sua obra máxima, o *Principia*, além das três leis do movimento, Newton apresentou também outra lei de enorme importância, que ficou conhecida como **Lei da Gravitação Universal**. O objetivo principal deste capítulo é o estudo dessa lei. Porém, antes de apresentá-la, vamos fazer alguns comentários sobre o assunto que foi a inspiração de Newton para a obtenção dessa lei: os movimentos dos planetas.

1. Os primeiros modelos de mundo

As primeiras tentativas de explicar o Universo de maneira racional foram realizadas pelos primeiros filósofos gregos. Aristóteles (384-322 a.C.) — filósofo antigo que tratou do maior número de assuntos — propôs um modelo para explicar os movimentos da Lua, do Sol e dos cinco planetas então conhecidos: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno (para ele a Terra não era um planeta). Segundo esse modelo, a Terra estaria imóvel no centro do Universo, enquanto a Lua, o Sol e os planetas girariam em órbitas circulares em torno da Terra. Por isso esse modelo é chamado **geocêntrico** (Terra no centro).

Porém, já na Antiguidade os astrônomos perceberam que os planetas apresentavam movimentos estranhos, como ilustra a figura 1. Em certos momentos o planeta retorna (movimento retrógrado), sua trajetória parece dar um laço para depois retomar o movimento progressivo. O modelo de Aristóteles não explicava esse fato.

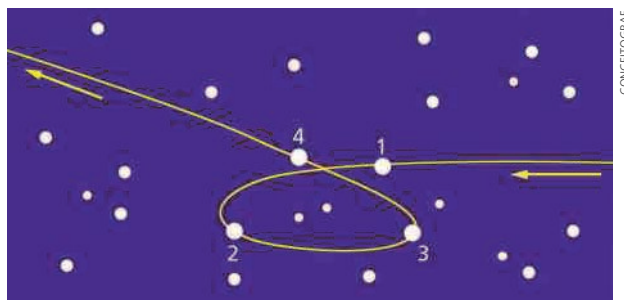


Figura 1. O movimento retrógrado de um planeta, com destaque para as posições 1, 2, 3 e 4.

Outros modelos foram propostos por vários filósofos. Heráclides do Ponto (c. 388-310 a.C.) propôs o movimento de rotação da Terra, e Aristarco de Samos (c. 310-230 a.C.) propôs um modelo em que o Sol estaria imóvel no centro do Universo (modelo **heliocêntrico**), enquanto os outros corpos girariam em torno dele. Porém, nenhuma dessas duas propostas foi aceita, pois era mais fácil aceitar a ideia de uma Terra imóvel e, desse modo, os modelos continuaram a ser geocêntricos.

1. Os primeiros modelos de mundo
2. O modelo de Kepler
3. Lei da Gravitação Universal
4. Corpos em órbitas circulares
5. Aceleração da gravidade e campo gravitacional
6. Energia potencial
7. Marés

O modelo de Ptolomeu

Vários astrônomos tentaram fazer alterações no modelo de Aristóteles, para que fossem explicadas as observações astronômicas. Essas tentativas culminaram na obra de Cláudio Ptolomeu (c. 100-178 d.C.).

A primeira modificação proposta por Ptolomeu está ilustrada na figura 2. Cada planeta teria uma órbita circular (epiciclo) em torno de um ponto P (epicentro), o qual giraria ao longo de outra circunferência (deferente), cujo centro estaria no centro da Terra. Na figura 3 apresentamos o modelo (ou sistema) completo, com a Lua, o Sol e os cinco planetas então conhecidos.

Cada planeta teria uma velocidade angular diferente e, ajustando essas velocidades, seria possível explicar as trajetórias com movimentos retrógrados, como exemplifica a figura 1 da página anterior. Houve, porém, necessidade de outras alterações, entre as quais apresentamos a que está ilustrada na figura 4: o centro da deferente não seria o centro da Terra, mas, sim, um ponto E , chamado **excêntrico**, que estaria próximo da Terra.

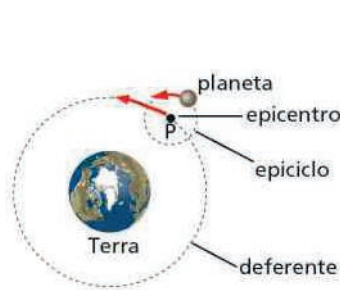


Figura 2. Modificação proposta por Ptolomeu para um planeta qualquer em um sistema geocêntrico.

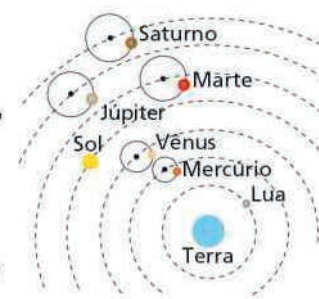


Figura 3. Sistema geocêntrico completo de Ptolomeu.

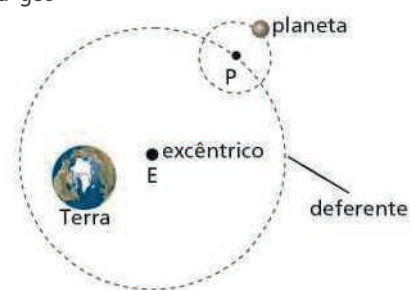


Figura 4. Modificação adicional no modelo de Ptolomeu.

O modelo de Copérnico

O modelo de Ptolomeu reinou absoluto até o início do século XVI, quando o polonês Nicolau Copérnico (fig. 5) propôs um modelo heliocêntrico. Inicialmente ele pensou num modelo em que a Lua giraria em torno da Terra e os planetas, incluindo a Terra, girariam em torno do Sol em órbitas circulares; além disso, a Terra teria um movimento diário de rotação. Porém essa proposta não conseguia explicar perfeitamente o que era observado e, assim, Copérnico foi obrigado a acrescentar epiciclos e excêntricos, tornando o seu modelo tão complexo quanto o de Ptolomeu. Essa complexidade dificultou a aceitação do seu modelo, que já despertava a condenação tanto por católicos quanto por protestantes, pelo fato de tirar a Terra do centro do Universo.

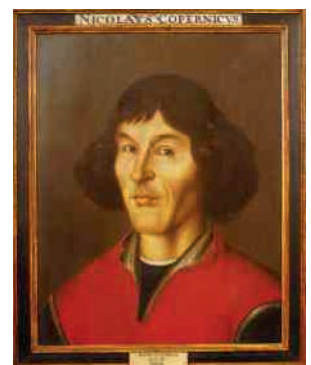


Figura 5. Nicolau Copérnico (1473-1543).

Tycho Brahe

O dinamarquês Tycho Brahe (fig. 6) passou vinte anos efetuando medidas muito precisas das posições dos planetas e estrelas. Ele não aceitou nem o modelo de Ptolomeu nem o de Copérnico, propondo um modelo geocêntrico, com a Lua e o Sol girando em torno da Terra. Os planetas girariam em torno do Sol.

Galileu e Copérnico

Galileu foi um grande defensor do sistema (modelo) de Copérnico e, por isso, foi condenado pela Inquisição católica. Sua defesa do modelo copernicano foi apresentada em uma obra, publicada em 1632, com o seguinte título: *Diálogo sobre os dois máximos sistemas*. Os dois máximos sistemas do título são o de Ptolomeu e o de Copérnico, pois Galileu não levou a sério o sistema de Tycho Brahe. Para conhecer os argumentos usados por Galileu e a história de sua condenação pela Inquisição, recomendamos os livros citados no final deste capítulo, nas **Sugestões de Leitura**.



Figura 6. Tycho Brahe (1546-1601).

2. O modelo de Kepler

O alemão Johannes Kepler (1571-1630) foi quem apresentou o modelo definitivo para explicar os movimentos dos planetas. Essa explicação veio na forma de três leis, as duas primeiras publicadas em 1609 e a terceira em 1619.

Kepler foi assistente de Tycho Brahe. Com a morte deste, Kepler foi nomeado para o seu posto (matemático imperial). A partir daí, analisando as anotações de Brahe e fazendo suas próprias observações, conseguiu chegar às suas três leis.

No modelo de Kepler, todos os planetas (inclusive a Terra) giram em torno do Sol. Porém, ele introduziu uma grande novidade, tendo a coragem de abandonar uma tradição de mais de dois mil anos: a obsessão pelo movimento circular. Ele percebeu que todas as observações astronômicas podiam ser explicadas admitindo-se que a trajetória de um planeta é uma **elipse**. Com isso não havia necessidade de recorrer a epiciclos e excêntricos.

Na figura 7 temos dois exemplos de elipses. Por enquanto, vamos apresentar alguns de seus elementos:

- F_1 e F_2 são os focos da elipse;
- $\overline{F_1F_2}$ é a distância focal;
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior;
- C é o centro;
- $\overline{A_1C}$ (ou $\overline{CA_2}$) é o semieixo maior;
- e = excentricidade = $\frac{F_1F_2}{A_1A_2}$.

SUGESTÃO DE LEITURA

Veja, no CD, a definição de elipse.

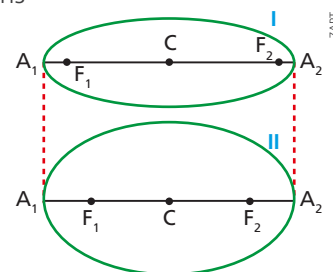


Figura 7. Exemplos de elipses.

A excentricidade (e) é uma medida do achatamento da elipse. Observe na figura 7 que a elipse I é mais achatada que a elipse II. Isso significa que $e_I > e_{II}$.

A circunferência é considerada um caso particular de elipse em que os focos coincidem com o centro e, portanto, para a circunferência temos $e = 0$.

Quanto à Lua, no modelo de Kepler ela tem movimento elíptico em torno da Terra. Passemos agora à apresentação das três leis de Kepler.

Primeira Lei de Kepler

Cada planeta move-se em trajetória elíptica, com o Sol em um dos focos da elipse.

O ponto da órbita (trajetória) que está mais próximo do Sol é chamado **periélio** e o que está mais afastado é chamado **afélio** (fig. 8).

As órbitas dos planetas estão aproximadamente contidas em um mesmo plano, sendo o plano da órbita da Terra chamado **plano da eclíptica**. Sabe-se também que essas órbitas são elipses de pequenas excentricidades, isto é, são quase circunferências. Na figura 9 representamos os oito planetas hoje conhecidos e o movimento que fazem em torno do Sol. Todos os planetas movem-se no mesmo sentido e a sequência, em ordem crescente de distância ao Sol, é: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

Vale ressaltar que no tempo de Kepler não se sabia da existência dos planetas Urano e Netuno. E, até o ano de 2006, admitia-se Plutão como o nono planeta do Sistema Solar. Porém, em um congresso da União Astronômica In-

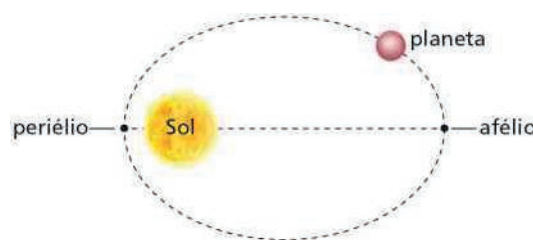


Figura 8.

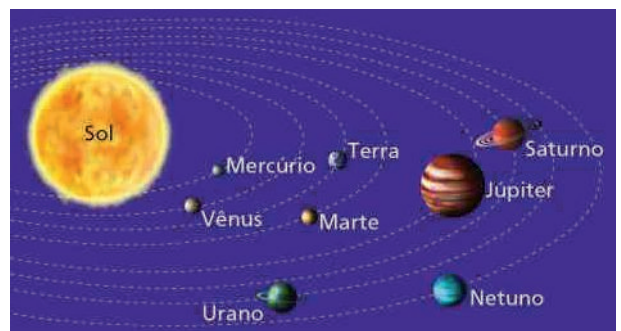


Figura 9. Ordem dos planetas em relação ao Sol.

ternacional realizado naquele ano, ficou decidido que, por ter características bem diferentes das dos outros planetas, Plutão passaria à categoria de planeta-anão.

Na tabela 1 fornecemos algumas informações sobre os oito planetas.

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
Inclinação da órbita em relação à eclíptica	7°	3°24'	0°	1°51'	1°18'	2°30'	48'	1°48'
Excentricidade da órbita (e)	0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056	0,046	0,010
Distância máxima ao Sol (10 ⁹ m)	69,9	109	152,1	249,1	815,7	1 507	3 004	4 537
Distância mínima ao Sol (10 ⁹ m)	45,9	107,4	147,1	206,7	740,9	1 347	2 735	4 456
Distância média ao Sol (10 ⁹ m)	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1 427	2 870	4 497
Período de translação (T) em anos terrestres	0,241	0,615	1,000	1,881	11,86	29,46	84,04	164,8
Período de rotação (dias)	59	−243	1,00	1,03	0,41	0,43	−0,75	0,80
Velocidade orbital média (10 ³ m/s)	47,9	35	29,8	24,1	13,1	9,6	6,8	5,4
Raio equatorial (km)	2 439	6 100	6 378	3 393	71 492	60 268	25 554	24 769
Massa em relação à Terra	0,055	0,815	1,00	0,107	317,9	95,2	14,6	17,2

Tabela 1. Dados dos planetas do Sistema Solar.

Na tabela 1, os períodos de rotação de Vênus e Urano aparecem com sinal negativo para indicar que a rotação desses planetas tem sentido oposto ao do movimento de translação (fig. 10). Para os outros planetas a rotação e a translação têm o mesmo sentido.

Segunda Lei de Kepler

Kepler imaginou uma linha ligando o Sol a um planeta (fig. 11). Considerando o movimento do planeta de uma posição P para uma posição P' num intervalo de tempo Δt, ele calculou a área A, “varrida pela linha”. Fazendo isso para vários intervalos de tempo, Kepler chegou à sua Segunda Lei:

A linha que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.



Figura 10. A rotação do planeta tem sentido oposto ao da translação.

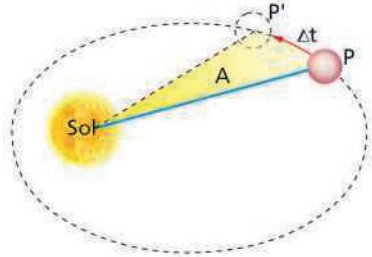


Figura 11.

A Segunda Lei de Kepler pode ser ainda enunciada de outro modo. Na figura 12, a linha que liga o Sol ao planeta varreu a área A_1 , no intervalo de tempo Δt_1 , e a área A_2 , no intervalo de tempo Δt_2 . Podemos dizer que as áreas varridas são proporcionais aos intervalos de tempo gastos para varrê-las:

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2}$$

A razão $\frac{A}{\Delta t}$ é chamada **velocidade areolar**.

Essa lei tem uma consequência importante, que pode ser constatada pela observação da figura 13. Comparemos a área A_1 com a área A_2 . Para que essas áreas sejam iguais, o arco \widehat{BC} deve ser maior do que o arco \widehat{DE} . Porém, esses arcos foram percorridos no mesmo intervalo de tempo. Isso significa que, no trecho \widehat{BC} , o planeta se moveu mais rápido que no trecho \widehat{DE} . Portanto:

A velocidade de um planeta é variável. Ela aumenta à medida que o planeta se aproxima do Sol e diminui à medida que ele se afasta.

Isso pode ser dito de outro modo: quando um planeta vai do afélio para o periélio, seu movimento é acelerado, e, quando vai do periélio para o afélio, seu movimento é retardado. Por essa lei, é fácil perceber que, se a trajetória fosse circular, o movimento seria uniforme.

No periélio a velocidade é máxima e no afélio a velocidade é mínima.

Terceira Lei de Kepler

Kepler calculou o período (T) de cada planeta, isto é, o tempo que cada planeta leva para executar uma volta completa em torno do Sol. Em seguida procurou uma relação entre o período (T) e a medida do semieixo maior (R) da elipse, que é a distância média do planeta ao centro do Sol (também chamada raio médio da órbita) e também pode ser calculada por:

$$R = \frac{d + D}{2}$$

A relação obtida foi:

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{constante}$$

Assim, a Terceira Lei de Kepler pode ser enunciada do seguinte modo:

O cubo da medida do semieixo maior e o quadrado do período do planeta são diretamente proporcionais.

No caso de a trajetória ser circular, a distância média será o raio da circunferência.

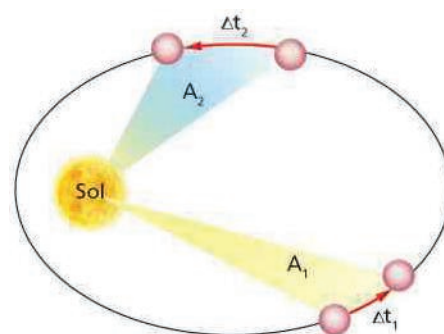


Figura 12.

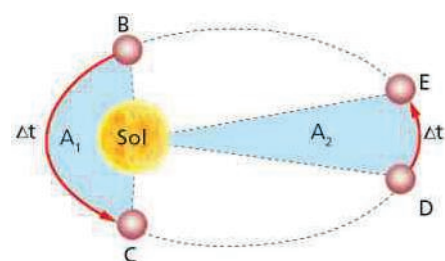


Figura 13.

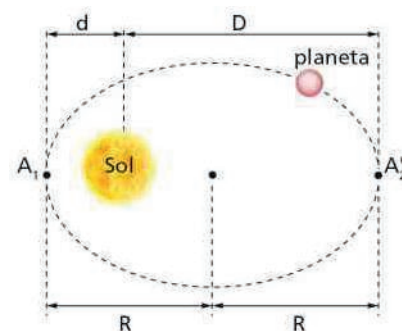


Figura 14. O semieixo maior (R) é a distância média do planeta ao Sol.

Na tabela 2 apresentamos os valores de R , T e $\frac{R^3}{T^2}$ para os oito planetas do Sistema Solar.

Como podemos observar, o valor de $\frac{R^3}{T^2}$ é praticamente o mesmo para todos os planetas.

É interessante notar que as leis de Kepler valem para qualquer sistema semelhante ao Sistema Solar. Ou seja, elas valem sempre que em torno de um corpo de massa "grande" giram corpos de massas "pequenas", como, por exemplo, na situação de um planeta e seus satélites.

A Terra tem apenas um satélite natural, que é a Lua. Mas o planeta Saturno tem vinte satélites que giram em torno dele, obedecendo aproximadamente às três leis de Kepler. Essas leis aplicam-se também à Terra e aos satélites artificiais que giram em torno dela. Nesse caso, supõe-se geralmente que as órbitas são circulares e, assim, o semieixo maior coincide com o raio R da trajetória.

Planeta	R (10^{10} m)	T (anos)	$\frac{R^3}{T^2}$ (10^{33} m ³ /ano ²)
Mercúrio	5,79	0,241	3,34
Vênus	10,8	0,615	3,33
Terra	15,0	1,00	3,37
Marte	22,8	1,88	3,35
Júpiter	77,8	11,9	3,33
Saturno	142	29,5	3,36
Urano	287	84,0	3,35
Netuno	449	165	3,35

Tabela 2. Dados da Terceira Lei de Kepler para os planetas do Sistema Solar.

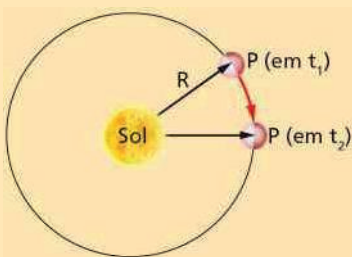
Exercícios de Aplicação

1. Calcule a velocidade areolar de um planeta que descreve, em torno do Sol, uma órbita praticamente circular, de raio R , com período T .

Resolução:

Chamando de K a velocidade areolar, sua definição é:

$$K = \frac{\text{área varrida}}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{A}{\Delta t}$$

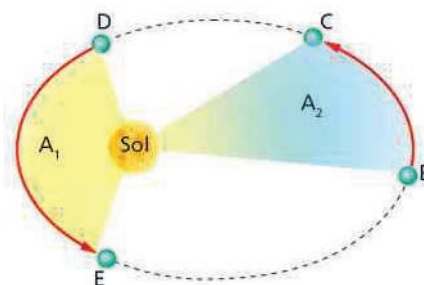


Em uma volta completa do planeta em torno do Sol, teremos:

$$A = \pi R^2 \text{ e } \Delta t = T$$

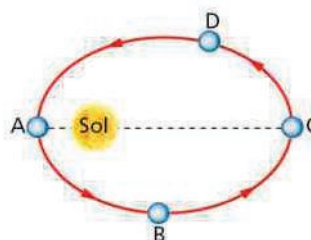
Portanto: $K = \frac{\pi R^2}{T}$

2. Na figura a seguir representamos o percurso de um planeta em torno do Sol. As áreas A_1 e A_2 valem $8,8 \cdot 10^{24}$ m² e $26,4 \cdot 10^{24}$ m², respectivamente. Sabendo que o percurso \widehat{BC} é efetuado em 62,15 anos, em quanto tempo é feito o percurso \widehat{DE} ?



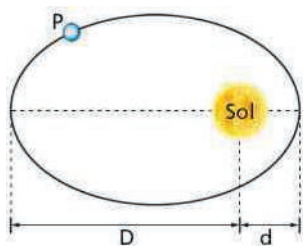
ILUSTRAÇÕES: CONCEITOGRAF

3. Na figura, representamos a trajetória de um planeta em torno do Sol.



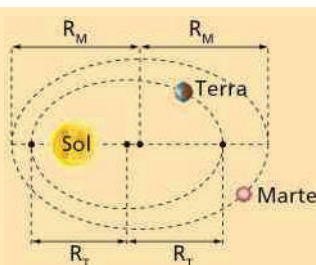
- a) Represente os vetores de velocidade do planeta, nas posições A, B, C e D.
- b) Em qual posição a velocidade do planeta tem módulo máximo?
- c) Em qual posição a velocidade do planeta tem módulo mínimo?
- d) No trecho \widehat{CDA} o movimento é acelerado ou retardado?
- e) No trecho \widehat{ABC} o movimento é acelerado ou retardado?

4. Um planeta P gira em torno do Sol de modo que sua distância máxima ao centro do Sol é $D = 8,16 \cdot 10^{11}$ m e a distância mínima é $d = 7,41 \cdot 10^{11}$ m.



Qual é a distância média do planeta ao Sol?

5. Os semieixos maiores da órbita da Terra e da órbita de Marte em torno do Sol medem cerca de $1,5 \cdot 10^{11}$ m e $2,3 \cdot 10^{11}$ m, respectivamente.



Calcule o período de translação de Marte, isto é, o tempo que ele gasta para dar uma volta em torno do Sol.

Resolução:

Resumindo as informações apresentadas acima:

T_T = período de translação da Terra = 1 ano

T_M = período de translação de Marte = ?

R_T = medida do semieixo maior da órbita da Terra

R_M = medida do semieixo maior da órbita de Marte

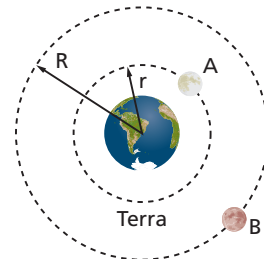
Pela Terceira Lei de Kepler temos:

$$\frac{R_M^3}{T_M^2} = \frac{R_T^3}{T_T^2} \Rightarrow \left(\frac{T_M}{T_T} \right)^2 = \left(\frac{R_M}{R_T} \right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_M}{1} \right)^2 = \left(\frac{2,3 \cdot 10^{11}}{1,5 \cdot 10^{11}} \right)^3 \Rightarrow T \approx 1,61 \text{ ano}$$

6. Um cometa gira em torno do Sol em órbita elíptica de modo que sua distância mínima ao Sol é $2,5 \cdot 10^{11}$ m e sua distância máxima ao Sol é $9,5 \cdot 10^{11}$ m. Determine o período de translação desse cometa, sabendo que a distância média da Terra ao Sol é $1,5 \cdot 10^{11}$ m.

7. Dois satélites artificiais, A e B, estão girando em torno da Terra, em órbitas circulares de raios r e R , respectivamente, tais que $R = 4r$. Calcule o período do satélite B, sabendo que o período de A é igual a 3 horas.



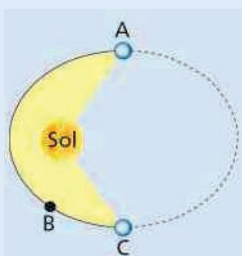
8. Um satélite **geoestacionário** é um satélite colocado a girar em torno da Terra, de modo que sua órbita está no mesmo plano do equador e seu período de translação é aproximadamente 24 horas, que é igual ao período de rotação da Terra. Desse modo, o satélite estará sempre em repouso para um observador fixo na Terra. Há um grande número de satélites desse tipo girando em torno da Terra, os quais são utilizados para transmissões de televisão e telefonia a grandes distâncias.

Sabendo que o período de translação da Lua em torno da Terra é 27,3 dias, a distância entre os centros da Terra e da Lua é aproximadamente de 380 000 km e o raio da Terra é aproximadamente 6 370 km, calcule:

- o valor aproximado do raio da órbita de um satélite geoestacionário;
- o valor aproximado da altitude do satélite acima da superfície da Terra.

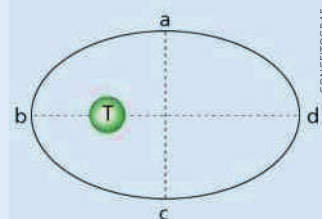
Exercícios de Reforço

9. A figura representa a trajetória elíptica da Terra em torno do Sol. Sabendo que a área da região sombreada na figura é igual a um quinto da área total da elipse, pode-se afirmar que o tempo gasto pela Terra para percorrer o trecho ABC é aproximadamente igual a:



- 1,8 mês.
- 2,4 meses.
- 2 meses.
- 3 meses.
- 4 meses.

10. (U. F. Viçosa-MG) Um satélite artificial orbita em torno da Terra (T), como representado no esquema.



Considerando as leis de Kepler, podemos afirmar que as velocidades do satélite nos pontos a, b, c e d de sua órbita obedecem às seguintes relações:

- $v_b > v_a > v_c > v_d$
- $v_b > v_a = v_c > v_d$
- $v_b < v_a = v_c < v_d$
- $v_b = v_a > v_c = v_d$
- $v_b = v_a < v_c = v_d$

11. (UF-MA) Considerando que a órbita dos planetas seja circular, a 3ª Lei de Kepler pode ser enunciada da seguinte forma: “O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do raio de sua órbita”. Se dois planetas P_1 e P_2 descrevem órbitas de raios $R_1 = R$ e $R_2 = 2R$, respectivamente, qual a relação entre seus períodos T_1 e T_2 ?

- a) $T_2 = \sqrt{8}T_1$ c) $T_2 = 2T_1$ e) $2T_2 = T_1$
b) $T_2 = T_1$ d) $\sqrt{8}T_2 = T_1$

12. (Unicamp-SP) Em agosto de 2006, Plutão foi reclassificado pela União Astronômica Internacional, passando a ser considerado como planeta-anão. A Terceira Lei de Kepler diz que: $T^2 = K \cdot a^3$, onde T é o tempo para um planeta completar uma volta em torno do Sol e a é a média entre a maior e a menor distância do planeta ao Sol. No caso da Terra, essa média é $a_T = 1,5 \cdot 10^{11}$ m, enquanto para Plutão é $a_p = 60 \cdot 10^{11}$ m. A constante K é a mesma para todos os objetos em órbita em torno do Sol. A velocidade da luz no vácuo é igual a $3,0 \cdot 10^8$ m/s.

- a) Considerando-se as distâncias médias, quanto tempo leva a luz do Sol para atingir a Terra? E para atingir Plutão?
b) Quantos anos terrestres Plutão leva para dar uma volta completa em torno do Sol? Expresse o resultado de forma aproximada como um número inteiro.

(Sugestão dos autores: Adote $\sqrt{10} \approx 3,2$.)

13. (UF-PI) Com relação às leis de Kepler para o movimento planetário, foram feitas as seguintes afirmações:

I. Os planetas do Sistema Solar descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, estando o mesmo no centro dessas elipses.

II. Como o dia (do nascer ao pôr do Sol) é mais curto no inverno do que no verão, podemos concluir que o vetor posição da Terra (linha que une a Terra ao Sol) varre uma área menor no inverno do que no verão, para o mesmo período de 24 horas.

III. Como a distância média da Terra ao Sol é de $1,5 \cdot 10^8$ km e da Terra a Saturno é de $1,43 \cdot 10^9$ km, pela 3ª Lei de Kepler conclui-se que o “ano” de Saturno é da ordem de 30 vezes o ano da Terra.

IV. As leis de Kepler não fazem referência à força de interação entre o Sol e os planetas.

Análise as afirmações e verifique qual é a alternativa correta:

- a) I e IV são verdadeiras.
b) I e III são verdadeiras.
c) I e II são verdadeiras.
d) III e IV são verdadeiras.
e) II e IV são verdadeiras.

3. Lei da Gravitação Universal

Estudando as leis de Kepler, Newton concluiu que elas poderiam ser explicadas supondo-se que:

Entre duas partículas de massas m_1 e m_2 existe um par de forças de atração cuja intensidade é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância d entre elas.

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \quad (1)$$

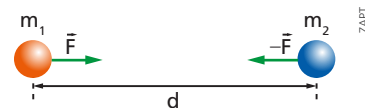


Figura 15.

A constante de proporcionalidade G deve ser obtida experimentalmente e isso foi feito pela primeira vez pelo inglês Henry Cavendish em 1798.

No SI o valor da constante de proporcionalidade G é:

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11}$$

Para obtermos a unidade de G no SI, partimos da equação ①:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \Rightarrow G = \frac{F \cdot d^2}{m_1 m_2}$$

No SI a unidade de F é o newton (N), a unidade de massa é o quilograma (kg) e a unidade de d é o metro (m). Portanto:

$$\text{unidade de } G = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Assim:

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$



PROCURE NO CD

No CD descrevemos o experimento por meio do qual Cavendish determinou o valor de G .

A força F foi chamada **força gravitacional** (do latim *gravitas*, que significa “peso”), e a constante G é chamada **constante de gravitação**.

A lei expressa pela equação ① ficou conhecida como **Lei da Gravitação Universal**. A palavra **universal** tem a finalidade de destacar que essa lei vale para todos os corpos do Universo. Isso pode parecer óbvio hoje, mas não era na época de Newton. Até o século XVII a maior parte dos pensadores achava que os corpos celestes obedeciam a leis diferentes das obedecidas pelos corpos terrestres.

Forças gravitacionais entre corpos extensos

A lei expressa pela equação ① vale para partículas. Para calcularmos a força de atração entre dois corpos extensos, devemos dividir cada um deles em um número muito grande de “pequenos pedaços” (fig. 16), de modo que cada um deles possa ser considerado uma partícula. A seguir, calculamos as forças de atração entre cada par de “pedaços” e depois adicionamos essas forças. Esse é um processo complexo, que exige a aplicação do Cálculo Integral.

Foi dessa forma que Newton conseguiu demonstrar que, no caso de dois corpos esféricos A e B , em que a massa esteja distribuída de forma simétrica, podemos usar a equação ①, em que d é a distância entre os centros das esferas (fig. 17).

$$F = G \frac{m_A \cdot m_B}{d^2}$$

Desse modo, embora o Sol e os planetas não sejam em geral corpos homogêneos, podemos supor que neles a massa está distribuída de forma aproximadamente simétrica e, assim, podemos aplicar a equação ①. Fazendo isso, Newton conseguiu demonstrar as leis de Kepler, e esse foi o seu maior sucesso.

Depois do que expusemos, você pode talvez perguntar: “ao calcular a força de atração entre dois corpos extensos, podemos considerar as massas dos corpos concentradas nos respectivos centros de massa e usar a distância entre eles?”. A resposta é: **em geral, não!** Apenas no caso de corpos esféricos, com distribuição simétrica de massa, podemos garantir que esse processo funciona.

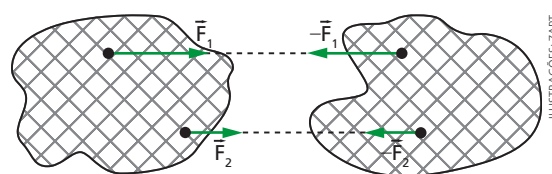


Figura 16.

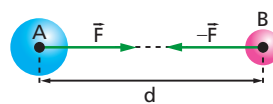
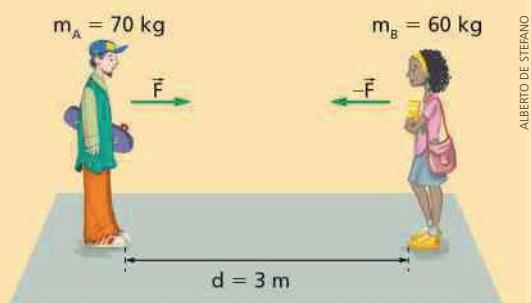


Figura 17.

Exercícios de Aplicação

14. A figura ilustra duas pessoas paradas, de pé, separadas por uma distância de aproximadamente 3 metros. Calcule o valor aproximado da intensidade da força de atração gravitacional entre elas.



Resolução:

Vamos usar a equação (1). Porém, como nesse caso não podemos considerar as pessoas como partículas, a equação (1) nos dará apenas o valor aproximado das intensidades das forças.

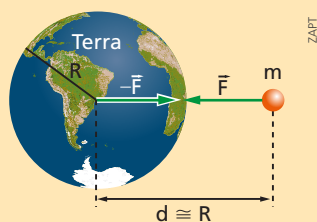
$$F = G \frac{m_A \cdot m_B}{d^2} = (6,673 \cdot 10^{-11}) \frac{(70)(60)}{(3)^2} = \frac{(6,673)(7)(6) \cdot 10^{-11} \cdot 10^2}{9} \cong 31 \cdot 10^{-9} = 0,000000031$$

Assim:

$$F \cong 0,000000031 \text{ N}$$

Como vemos, é uma força de intensidade muito pequena, de modo que seu efeito é desprezível no dia a dia; ela não consegue superar a força de atrito estático entre os pés das pessoas e o solo.

15. Um corpo esférico de massa $m = 5 \text{ kg}$ está próximo da superfície da Terra, cuja massa é $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Sabendo que o raio da Terra é aproximadamente $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$, calcule o valor aproximado das forças de atração entre a Terra e o corpo.



Resolução:

A distância d entre o centro da Terra e o centro do corpo é aproximadamente igual ao raio da Terra, $d \cong R$. Assim:

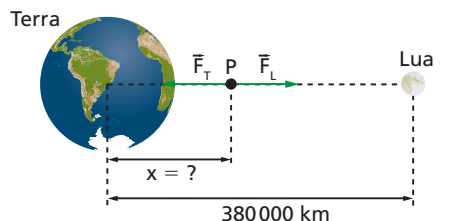
$$F = G \frac{M \cdot m}{d^2} = (6,673 \cdot 10^{-11}) \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 5}{(6,4 \cdot 10^6)^2} = \frac{(6,673)(6)(5)}{(6,4)^2} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24}}{10^{12}}$$

$$F \cong 4,9 \cdot 10 = 49 \Rightarrow F = 49 \text{ N}$$

Observe que, se usássemos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, o peso do corpo de massa $m = 5 \text{ kg}$ seria dado por:

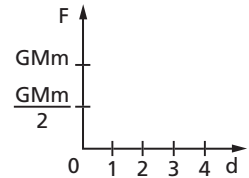
$$P = m \cdot g = (5 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) \Rightarrow P = 49 \text{ N}$$

16. As massas da Terra e da Lua são aproximadamente iguais a $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e $7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, respectivamente. Calcule o valor aproximado da intensidade das forças de atração entre a Terra e a Lua, sabendo que a distância entre seus centros é aproximadamente igual a 380 000 km.
17. Duas partículas de massas m_1 e m_2 , quando separadas por uma distância d , atraem-se com força de intensidade 180 N. Se a distância for multiplicada por 3, qual será a nova intensidade da força gravitacional?
18. Supondo que nas proximidades da superfície da Terra tenhamos $g = 10 \text{ m/s}^2$ e sabendo que a constante de gravitação universal é $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$, calcule o valor aproximado da massa da Terra.
(Dado: raio da Terra = $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.)
19. A massa da Terra é 81 vezes maior que a massa da Lua, e a distância entre os centros da Terra e da Lua é 380 000 km. Uma nave espacial está em um ponto P entre a Terra e a Lua. Determine a distância entre o ponto P e o centro da Terra, sabendo que a força de atração da Lua (\vec{F}_L) sobre a nave tem a mesma intensidade da força de atração da Terra (\vec{F}_T) sobre a nave.



20. Na situação representada na questão anterior, a nave colocada no ponto P está em equilíbrio estático. Esse equilíbrio é estável?
21. A intensidade (F) da força de atração entre duas partículas de massas M e m é dada por $F = G \frac{Mm}{d^2}$.

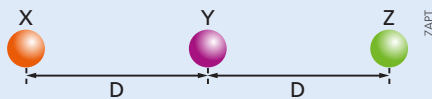
Copie a figura ao lado em seu caderno e obtenha os valores da força para $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$ e $d = 4$, e a seguir esboce o gráfico de F em função de d (mantendo M e m constantes).



Exercícios de Reforço

22. (Unesp-BA) O planeta Netuno tem massa aproximadamente 18 vezes maior que a da Terra, e sua distância ao Sol é aproximadamente 30 vezes maior que a da Terra ao Sol. Se o valor da força de atração gravitacional entre o Sol e a Terra é F , a força de atração gravitacional entre o Sol e Netuno é:
- a) $0,02F$ c) $1,67F$ e) $30F$
b) $0,60F$ d) $18F$

23. Três esferas (X , Y e Z) estão fixas em uma haste, como se representa na figura. A esfera Y é equidistante de X e Z . O módulo da força de atração gravitacional entre X e Y é igual a F .



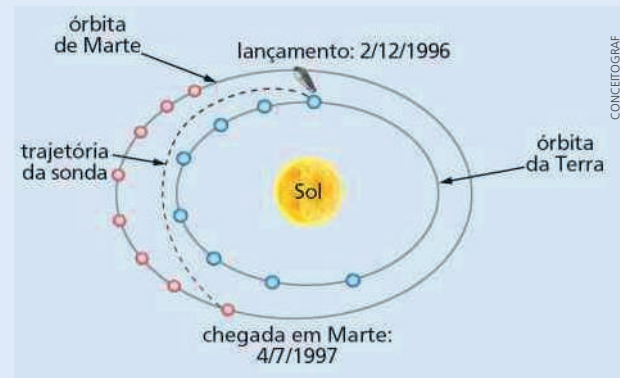
Qual é o módulo da resultante das forças de atração gravitacional que X e Y exercem sobre Z ? (As massas das três esferas são iguais.)

- a) $\left(\frac{5}{4}\right)F$ c) $2F$ e) $\left(\frac{3}{2}\right)F$
b) $\left(\frac{4}{5}\right)F$ d) $\frac{F}{2}$
24. (UF-RS) O módulo da força de atração gravitacional entre duas pequenas esferas de massa m , iguais, cujos centros estão separados por uma distância d , é F . Substituindo-se uma das esferas por outra de massa $2m$ e reduzindo-se a separação entre os centros das esferas para $\frac{d}{2}$, resulta uma força gravitacional de módulo:
- a) F d) $8F$
b) $2F$ e) $16F$
c) $4F$
25. (Fuvest-SP) A razão entre as massas de um planeta e de um satélite é 81. Um foguete está a uma distância R do planeta e a uma distância r

do satélite. Qual deve ser o valor da razão $\frac{R}{r}$ para que as duas forças de atração sobre o foguete se equilibrem?

- a) 1 d) 27
b) 3 e) 81
c) 9

26. (UE-PA) No dia 04 de julho de 1997, chegou ao planeta Marte a sonda Mars Pathfinder, que levou o robô Sojourner, em uma viagem de 7 meses, cuja trajetória é representada na figura. Para lançar a nave, foguetes poderosos são usados para impulsioná-la a fim de vencer a gravidade terrestre. Esses foguetes rapidamente esgotam seus combustíveis e são ejetados. A nave segue, então, sozinha em sua trajetória.



Considerando o movimento da nave desde o momento em que os foguetes são descartados até antes de atingir a atmosfera de Marte, é correto afirmar que a força resultante sobre ela:

- a) é nula durante todo o movimento.
b) é nula apenas no ponto médio entre as órbitas da Terra e de Marte.
c) é constante e igual ao peso da sonda.
d) não é nula em nenhum momento.
e) é sempre no mesmo sentido de seu movimento.

4. Corpos em órbitas circulares

Vamos considerar um caso de dois corpos de massas M e m , tais que $M \gg m$ (M é muito maior que m). É o caso, por exemplo, do Sol e um planeta ou de um planeta e um satélite. Desse modo, é possível que o corpo de massa m gire em órbita aproximadamente circular em torno do corpo de massa M (fig. 18), isto é, a força $-\vec{F}$ tem efeito pequeno em comparação com o efeito de \vec{F} . A força \vec{F} é uma força centrípeta, e sua intensidade pode ser calculada pela Lei da Gravitação de Newton:

$$F = m \frac{v^2}{R} = G \frac{M \cdot m}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (2)$$

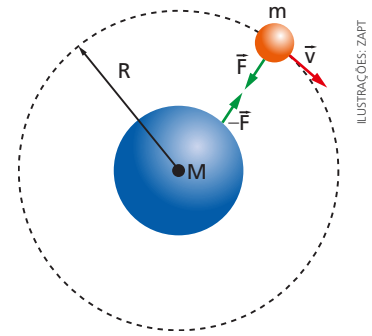


Figura 18.

ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Imponderabilidade

Como podemos observar na equação (2), a velocidade não depende da massa m do corpo que está girando, mas apenas da massa do corpo central (M) e do raio da órbita (R). Portanto, qualquer corpo que gire na órbita do raio R terá a mesma velocidade v (desde que sua massa seja muito menor que a massa M do corpo central): uma nave espacial, um astronauta ou uma maçã (fig. 19). É isso que dá a sensação de ausência de peso para um astronauta que está dentro de uma nave espacial (fig. 20). Tanto faz o astronauta estar dentro ou fora da nave: sua velocidade será a mesma; ele terá a sensação de flutuar, e os corpos dentro da nave também parecerão flutuar. Se o astronauta soltar uma maçã, ela não “cairá”, mas, sim, parecerá flutuar, pois estará girando junto com o astronauta e a nave, todos com a mesma velocidade. Esse efeito é chamado **imponderabilidade**, o qual nós já comentamos nos capítulos 13 e 14.

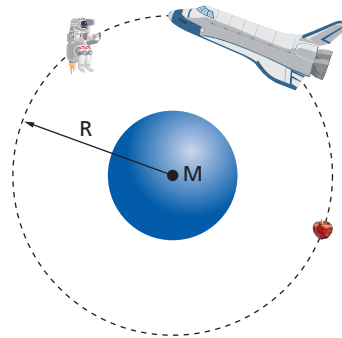


Figura 19.

A Terceira Lei de Kepler e a órbita circular

Vamos demonstrar a Terceira Lei de Kepler para o caso particular da órbita circular (o caso geral precisa do Cálculo Diferencial e Integral). Vimos no capítulo 11 que o período (T) do movimento circular é dado por:

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Introduzindo o valor de v dado pela equação (2):

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{\frac{GM}{R}} = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

O quociente $\frac{GM}{4\pi^2}$ depende apenas da massa M do corpo central, e assim será o mesmo para qualquer corpo em trajetória circular em torno do corpo de massa M .



Figura 20. A imponderabilidade pode ser observada em alguns objetos que flutuam no interior do ônibus espacial Endeavour.

JOHNSON SPACE CENTER MEDIA ARCHIVE/NASA

Exercícios de Aplicação

27. As massas da Terra e da Lua são aproximadamente iguais a $6,0 \cdot 10^{24}$ kg e $7,4 \cdot 10^{22}$ kg, respectivamente. Suponha que a Lua tenha movimento circular e uniforme, de raio $R = 3,82 \cdot 10^8$ m, em torno da Terra. Em relação a um referencial na Terra, qual é o módulo da velocidade da Lua? (Adote $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ N \cdot m²/kg².)

Resolução:

Sendo $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ (SI) e $R = 3,82 \cdot 10^8$ m, vem:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$v = \sqrt{\frac{(6,7 \cdot 10^{-11})(6,0 \cdot 10^{24})}{3,82 \cdot 10^8}}$$

$$v \cong 1,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

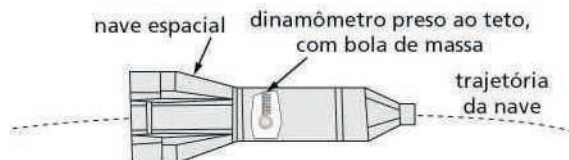
28. Um satélite artificial gira em torno da Terra em órbita circular a uma altitude de 3 700 km acima da superfície da Terra. São dados: raio da Terra = 6 300 km; massa da Terra = $6,0 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ (SI). Calcule:

- a velocidade escalar do satélite em relação à Terra;
- a velocidade angular do satélite;
- o período do movimento do satélite.

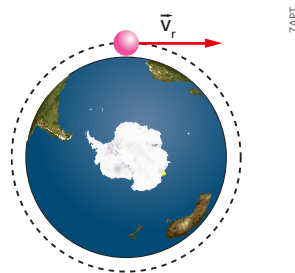
29. No exercício 8 calculamos a altitude de um satélite geoestacionário usando a Terceira Lei de Kepler, comparando com o movimento da Lua. Calcule agora essa altitude usando a equação $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. São dados: massa da Terra = $6,0 \cdot 10^{24}$ kg; raio da Terra = $6,3 \cdot 10^6$ m; $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ (SI).

30. Suponha que os planetas tenham trajetórias circulares em torno do Sol. O planeta Urano tem período de translação de 84 anos. Se a massa do Sol fosse multiplicada por 4, qual seria o novo período de translação de Urano, supondo que o raio da órbita não se alterasse?

31. Uma nave espacial gira em torno da Terra em movimento circular e uniforme de raio 12 000 km. Uma bola de massa $m = 2$ kg está presa ao dinamômetro que está fixado no "teto" da nave. Qual é a marcação do dinamômetro?



32. Um corpo é lançado horizontalmente, com velocidade v_r , de modo que descreve uma trajetória circular rasante em torno da Terra.

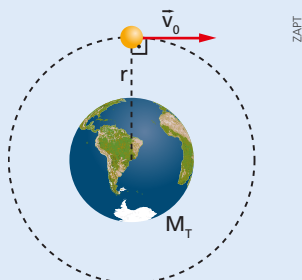


Calcule o valor de v_r . São dados:

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N \cdot m²/kg²; $R_{\text{Terra}} = 6,38 \cdot 10^6$ m; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

Exercícios de Reforço

33. (UF-PA) Um corpo de massa m é lançado com velocidade horizontal v_0 de um ponto situado a uma distância r do centro da Terra.



Sabendo que M_T é a massa da Terra e G é a constante de gravitação universal, qual deve ser

o valor de v_0 para que o corpo descreva órbita circular em torno da Terra?

- $\left(\frac{GM_T}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\left(\frac{GM_T}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\left(\frac{GM_T}{r^3}\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\left(\frac{GM_T}{r}\right)^2$
- $\left(\frac{GM_T}{r^2}\right)$

34. (UF-PE) Dois satélites artificiais A e B, em órbitas circulares em torno da Terra, têm raios orbitais satisfazendo a relação $\frac{R_A}{R_B} = \frac{1}{4}$. Qual a razão $\frac{v_A}{v_B}$ entre as suas velocidades escalares orbitais?

35. (UF-MT) A massa da Terra pode ser medida por meio de observações astronômicas. Isso pode ser feito sabendo-se que a Lua move-se em torno da Terra num período de 27 dias e está a uma distância média da Terra de $3,8 \cdot 10^5$ km. Considere que a constante gravitacional universal é igual a $6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$. Calculando, em kg, o valor da massa da Terra e expressando-o em notação científica, qual o valor do expoente da potência de dez?

36. (Vunesp-SP) Depois de anos de interrupção, ocorreu em 2005 a retomada de lançamentos do ônibus espacial pela Nasa, desta vez com sucesso. Nas imagens divulgadas do dia a dia no ônibus espacial girando em torno da Terra, pudemos ver os astronautas realizando suas atividades, tanto fora da nave como no seu interior. Considerando que as órbitas da nave e dos astronautas sejam circulares, analise as afirmações seguintes:

- I. Não há trabalho realizado pela força gravitacional para manter um astronauta em órbita ao redor da Terra.
- II. A aceleração de um astronauta girando ao redor da Terra deve-se exclusivamente à ação da força gravitacional.

III. A velocidade vetorial do astronauta ao redor da Terra é constante.

Estão corretas as afirmações:

- a) II, somente.
- b) III, somente.
- c) I e II, somente.
- d) II e III, somente.
- e) I, II e III.

37. (Fuvest-SP) Dentro de um satélite em órbita em torno da Terra, a tão falada “ausência de peso”, responsável pela flutuação de um objeto dentro do satélite, é devida ao fato de que:

- a) a órbita do satélite se encontra no vácuo e a gravidade não se propaga no vácuo.
- b) a órbita do satélite se encontra fora da atmosfera, não sofrendo assim os efeitos da pressão atmosférica.
- c) a atração lunar equilibra a atração terrestre e, conseqüentemente, o peso de qualquer objeto é nulo.
- d) a força de atração terrestre, centrípeta, é muito menor que a força centrífuga dentro do satélite.
- e) o satélite e o objeto que flutua têm a mesma aceleração, produzida unicamente por forças gravitacionais.

5. Aceleração da gravidade e campo gravitacional

No capítulo 6 obtivemos o valor da aceleração da gravidade experimentalmente. Agora poderemos calculá-la usando a Lei da Gravitação de Newton.

Inicialmente vamos supor que a Terra seja rigorosamente esférica, que sua massa esteja distribuída de modo simétrico e que não haja movimento de rotação.

Vamos considerar um corpo de massa m e dimensões desprezíveis colocado a uma distância d do centro da Terra (fig. 21). A força que a Terra exerce no corpo tem intensidade dada pela Lei da Gravitação de Newton:

$$F = G \frac{Mm}{d^2}$$

Mas essa força é o peso do corpo; portanto, devemos ter também:

$$F = P = mg$$

Assim:

$$F = G \frac{Mm}{d^2} = mg \Rightarrow g = \frac{GM}{d^2} \quad (3)$$

É importante ressaltar que a equação (3) não leva em conta as atrações de outros corpos celestes como, por exemplo, o Sol e a Lua.

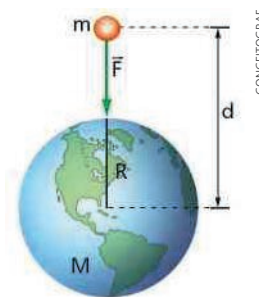


Figura 21.

Exemplo

Suponhamos que a Terra seja um corpo esférico, homogêneo, de massa $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, raio $R = 6,37 \cdot 10^6$ m e que não tenha movimento de rotação. Para calcular a aceleração da gravidade em pontos próximos à superfície (g_s) podemos usar a equação ③ fazendo $d = R$:

$$g_s = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11})(5,98 \cdot 10^{24})}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = \frac{(6,67)(5,98)}{(6,37)^2} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24}}{10^{12}} \Rightarrow g_s \cong 9,83 \text{ m/s}^2$$

Calculemos agora a aceleração da gravidade num ponto P situado a uma altitude de 130 km. Nesse caso temos:

$$\begin{cases} h = 130 \text{ km} = 0,13 \cdot 10^6 \text{ m} \\ R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \\ d = R + h = (0,13 + 6,37) \cdot 10^6 \text{ m} = 6,50 \cdot 10^6 \text{ m} \end{cases}$$

Aplicando a fórmula ③:

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11})(5,98 \cdot 10^{24})}{(6,5 \cdot 10^6)^2} \Rightarrow g \cong 9,44 \text{ m/s}^2$$

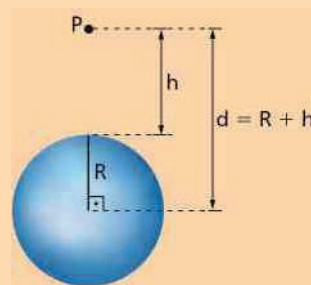


Figura 22.

Nas condições em que a fórmula ③ foi deduzida (Terra esférica, sem rotação, com massa distribuída simetricamente), o gráfico de g em função da distância ao centro da Terra tem o aspecto da figura 23, e na tabela 3 temos alguns valores de g em função da altitude. A altitude de 35 700 km é a de um satélite estacionário, e a altitude de 380 000 km é a da Lua.

Acontece, porém, que a Terra não é perfeitamente esférica; ela é achatada nos polos. Além disso, ela não é um corpo homogêneo (a densidade da crosta é aproximadamente $2,5 \text{ g/cm}^3$, enquanto no seu interior há regiões em que a densidade chega a 15 g/cm^3). Isso faz com que a aceleração da gravidade seja maior nos polos do que no equador.

Altitude (km)	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$
0	9,83
100	9,53
400	8,70
35 700	0,225
380 000	0,0027

Tabela 3. Valores de g em função da altitude.

Influência da rotação da Terra

Suponhamos novamente que a Terra seja esférica, homogênea e que não tenha movimento de rotação. Nesse caso, a aceleração da gravidade teria o mesmo valor g_0 em qualquer ponto próximo da superfície da Terra (fig. 24a). Consideremos agora a Terra girando com velocidade angular ω (fig. 24b); desse modo, ela passa a ser um referencial não inercial. Para nós, que estamos fixos na Terra, aparecerá uma aceleração **centrífuga** em cada ponto, dada por:

$$a_{cf} = \omega^2 \cdot R$$

em que R é o raio da trajetória.

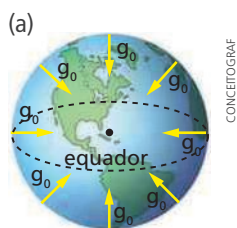


Figura 24.

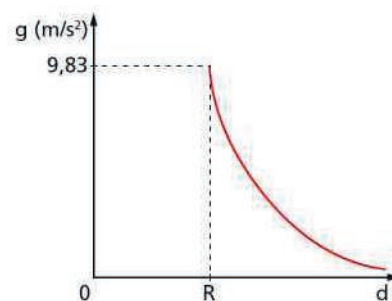
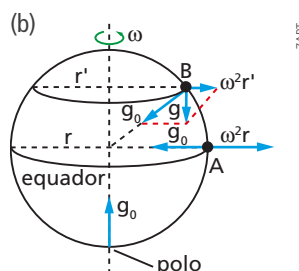
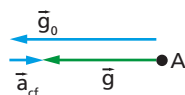


Figura 23.

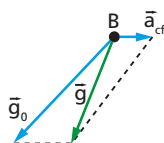
Assim, quando fazemos um experimento qualquer para obter o valor da aceleração da gravidade, o que obtemos é a resultante \vec{g} entre \vec{g}_0 e \vec{a}_{cf} .

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{a}_{cf}$$

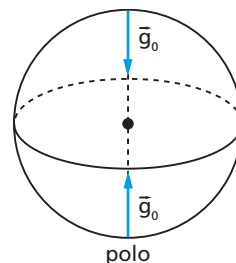
Na figura 24b, o ponto A tem trajetória cujo raio é o próprio raio da Terra; já o ponto B tem trajetória de raio r' . Nos polos não há influência da rotação da Terra. Neles a gravidade medida é g_0 (fig. 25c). Desse modo, temos dois motivos para que a aceleração da gravidade (medida) seja maior nos polos que no equador: a rotação e o achatamento da Terra.



(a) Ponto A.



(b) Ponto B.



(c) Polos.

Figura 25.

Depois dessas considerações, torna-se necessário fazer uma pequena alteração na nossa linguagem:

- A aceleração dada pela equação ③ $\left(g_0 = \frac{GM}{d^2}\right)$ é resultado apenas da força de atração gravitacional, e seu nome é **campo gravitacional**.
- O valor medido (g), que leva em conta a rotação da Terra, as influências de outros astros e também a distribuição irregular de massa no interior da Terra, é denominado **aceleração da gravidade**. Na tabela 4 temos os valores de g para diversas latitudes, ao nível do mar.

É importante observar que a discussão que fizemos sobre a influência da rotação foi apenas para que você tomasse conhecimento do fato; nos exercícios, não levaremos em conta a distinção entre campo gravitacional e aceleração da gravidade.

Latitude	g (m/s ²)
0°	9,78039
10°	9,78195
20°	9,78641
30°	9,79329
40°	9,80171
45°	9,80665
50°	9,81071
60°	9,81918
70°	9,82608
80°	9,83059
90°	9,83217

Tabela 4. Valores de g em função da latitude.

Aceleração da gravidade no interior da Terra

Suponhamos agora que a Terra seja esférica e homogênea, isto é, que a densidade seja a mesma em todos os seus pontos. Nesse caso é possível demonstrar que nos pontos interiores à Terra, o campo gravitacional tem intensidade proporcional à distância d do ponto considerado ao centro da Terra. Desse modo, para pontos interiores à Terra, o gráfico de g em função de d é o segmento de reta da figura 26.

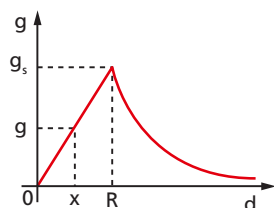


Figura 26.

Dado um ponto interior à Terra, situado à distância x do centro, o valor de g nesse ponto pode ser obtido do gráfico da figura 26:

$$\frac{g}{x} = \frac{g_s}{R} \Rightarrow g = \frac{x}{R} g_s$$

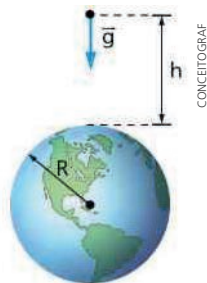


PROCURE NO CD

Veja esta demonstração no CD!

Exercícios de Aplicação

38. Admitindo que a Terra seja esférica, homogênea e sem movimento de rotação, calcule a aceleração da gravidade a uma altitude $h = 2\,600$ km. São dados: massa da Terra $= 6 \cdot 10^{24}$ kg; raio da Terra $= 6\,400$ km; $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.



39. Sabendo que o raio da Terra é $6,3 \cdot 10^6$ m e sendo g_s o valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra, determine a altitude do ponto em que a aceleração da gravidade vale metade de g_s .

40. Seja g_0 a aceleração da gravidade na superfície de um planeta. Qual é a aceleração da gravidade na superfície de outro planeta que possui metade da massa e raio igual a $\frac{1}{3}$ do primeiro planeta?

Resolução:

Seja, para o primeiro planeta:

$$M, \text{ sua massa; } R, \text{ seu raio; } g_0 = G \frac{M}{R^2}.$$

Para o segundo planeta, teremos:

$M' = \frac{M}{2}$, sua massa; $R' = \frac{R}{3}$, seu raio; g'_0 a aceleração da gravidade na sua superfície.

$$g'_0 = G \frac{M'}{(R')^2}, \text{ então:}$$

$$g'_0 = G \frac{\left(\frac{M}{2}\right)}{\left(\frac{R}{3}\right)^2}$$

$$g'_0 = G \frac{M}{R^2} \cdot \frac{9}{2} \Rightarrow g'_0 = \frac{9}{2} \cdot g_0$$

41. Admitindo que a aceleração da gravidade na superfície da Terra seja 10 m/s^2 , calcule a aceleração da gravidade em outro planeta cuja massa é 12 vezes maior que a da Terra e cujo raio seja o dobro do raio da Terra.
42. O planeta Vênus tem aproximadamente o dobro do raio da Terra e massa aproximadamente igual a 80% da massa da Terra. Um determinado corpo tem peso 100 N próximo da superfície da Terra. Qual é o peso aproximado desse mesmo corpo quando próximo à superfície de Vênus?

43. Suponhamos que a Terra seja homogênea e esférica, com raio $R = 6,37 \cdot 10^6$ m. Supondo que nos polos a aceleração da gravidade seja $9,83 \text{ m/s}^2$, determine a aceleração da gravidade no equador, considerando a rotação da Terra.

44. Supondo que nos polos a aceleração da gravidade seja $9,83 \text{ m/s}^2$, calcule qual deveria ser o período de rotação da Terra para que no equador a aceleração da gravidade se anulasse. (Considere o raio da Terra igual a $6,37 \cdot 10^6$ m.)

45. Suponha que a Terra seja um planeta homogêneo, esférico de raio R e desprovido de rotação. Sendo g_0 a aceleração da gravidade na sua superfície, determine o valor da aceleração da gravidade num ponto situado à distância $\frac{2R}{3}$ do centro da Terra.

Resolução:

Vimos que a aceleração da gravidade em um ponto P interno à Terra é diretamente proporcional à distância d entre P e o centro da Terra, isto é,

$$g = k \cdot d$$

sendo k uma constante. Assim:

$$\left. \begin{aligned} g &= k \cdot d = k \cdot \frac{2R}{3} \\ g_0 &= k \cdot R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{g}{g_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow g = \frac{2}{3} g_0$$

46. Considere a Terra como um corpo homogêneo e esférico de raio $R = 6\,400$ km. Imagine que fosse construído um túnel ligando o polo Norte ao polo Sul que passasse pelo centro da Terra.



Um objeto, no polo Sul, tem peso 50 kgf . Determine o seu peso:

- no polo Norte;
- no centro da Terra (ponto O);
- no ponto M , médio entre o centro da Terra e o polo Sul.

Exercícios de Reforço

47. (UF-BA) Considere os seguintes dados a respeito de três planetas do Sistema Solar:

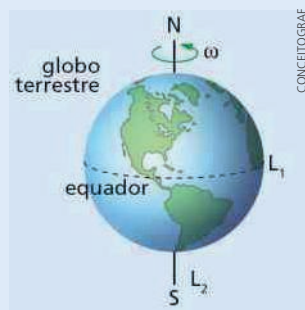
Planeta	Raio médio da órbita (em milhões de km)	Massa (em kg)
Mercúrio	58	$3,3 \cdot 10^{23}$
Vênus	108	$4,9 \cdot 10^{24}$
Terra	150	$6,0 \cdot 10^{24}$

Considere a constante de gravitação universal como igual a $6,67 \cdot 10^{-11}$ unidades do SI e analise as sentenças a seguir. Dê como resposta a soma dos números que antecedem as sentenças verdadeiras:

- (01) A massa da Terra é cerca de 18 vezes maior que a massa de Mercúrio.
- (02) O movimento dos planetas em torno do Sol obedece à trajetória que todos os corpos tendem a seguir por inércia.
- (04) A constante de gravitação universal, expressa em unidades do Sistema Internacional, é igual a $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.
- (08) O período de revolução da Terra é maior que o de Vênus.
- (16) A aceleração da gravidade na superfície de Mercúrio é nula.
- (32) O ponto de equilíbrio de um objeto entre a Terra e a Lua, sob a ação exclusiva de forças gravitacionais desses corpos, localiza-se mais próximo da Lua.
48. (UF-PR) Os astrônomos têm anunciado com frequência a descoberta de novos sistemas planetários. Observações preliminares em um desses sistemas constataram a existência de um planeta com massa 50 vezes maior que a massa da Terra e com diâmetro 5,0 vezes maior que o da Terra. Sabendo que o peso de uma pessoa é igual à força gravitacional exercida sobre ela, determine o valor da aceleração da gravidade a que uma pessoa estaria sujeita na superfície desse planeta, em m/s^2 . (Dado: A aceleração da gravidade na superfície da Terra é 10 m/s^2 .)
49. (Vunesp-SP) Para demonstrar que a aceleração da gravidade na superfície de Marte é menor que na superfície terrestre, um jipe-robô lança um pequeno corpo verticalmente para cima, a partir do solo marciano. Em experimento idêntico na Terra, onde $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, utilizando o mesmo corpo e a mesma velocidade de lançamento, a

altura atingida foi 12,0 m. A aceleração da gravidade na superfície de um planeta de raio R e massa M é dada por $g = \frac{GM}{R^2}$, sendo G a constante de gravitação universal. Adotando o raio de Marte igual à metade do raio da Terra e sua massa dez vezes menor que a da Terra, calcule, desprezando a atmosfera e a rotação dos planetas:

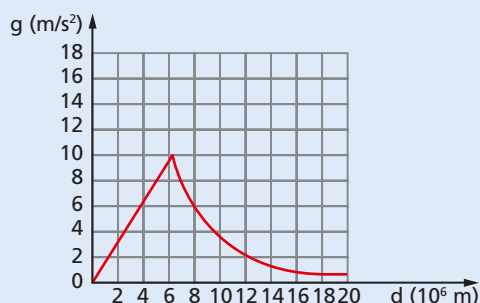
- a) a aceleração da gravidade na superfície de Marte.
- b) a altura máxima atingida pelo corpo no experimento em Marte.
50. (PUC-SP) O peso de um corpo:
- a) medido ao longo de um meridiano e ao nível do mar permanece constante.
- b) medido ao longo de um paralelo e ao nível do mar varia sensivelmente.
- c) não varia com a altitude.
- d) é maior no equador que nos polos.
- e) varia com a latitude.
51. (UFF-RJ) Um corpo de massa m é pendurado em uma balança de mola, de alta precisão, de modo que seu peso aparente possa ser medido em duas posições de latitudes distintas L_1 e L_2 , conforme ilustrado na figura.



Levando-se em conta os efeitos de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo, o corpo terá, em princípio, acelerações diferentes: a_1 em L_1 e a_2 em L_2 . Considerando que a Terra seja esférica e que P_1 e P_2 sejam as duas medidas registradas, respectivamente, na balança, é correto prever que:

- a) $P_1 = P_2$ porque o peso aparentemente não depende da aceleração.
- b) $P_1 > P_2$ porque $a_1 > a_2$.
- c) $P_1 > P_2$ porque $a_1 < a_2$.
- d) $P_1 < P_2$ porque $a_1 < a_2$.
- e) $P_1 < P_2$ porque $a_1 > a_2$.

52. (Fuvest-SP) O gráfico da figura representa a aceleração da gravidade g da Terra em função da distância d ao seu centro.



Considere uma situação hipotética em que o valor do raio R_T da Terra seja diminuído para

R' , sendo $R' = 0,8R_T$, e em que seja mantida (uniformemente) sua massa total. Nessas condições, os valores aproximados das acelerações da gravidade g_1 à distância R' e g_2 a uma distância igual a R_T do centro da "Terra Hipotética" são, respectivamente:

	g_1 (m/s²)	g_2 (m/s²)
a)	10	10
b)	8	6,4
c)	6,4	4,1
d)	12,5	10
e)	15,6	10

ILUSTRAÇÕES: CONCEITOGRAF

6. Energia potencial

No capítulo 19 vimos que a força peso é uma força conservativa e que, portanto, existe uma energia potencial correspondente a ela. Para calcular essa energia potencial, primeiramente escolhemos um plano de referência (fig. 27). Em seguida, a energia potencial de um corpo de massa m num ponto A (E_{pA}) foi definida como o trabalho realizado pelo peso quando o corpo vai de A até o referencial.

A partir daí obtivemos: $E_{pA} = mgh_A$. Porém, essa fórmula só é válida para uma região próxima da superfície da Terra, de modo que possamos considerar a aceleração da gravidade constante. Acontece que agora estamos tratando de situações nas quais a aceleração da gravidade não é mais constante e, assim, devemos procurar outra fórmula para a energia potencial.

Vamos considerar a situação em que temos um corpo S , de massa M muito grande, que possa ser considerado em repouso (e que seja esférico e com massa distribuída simetricamente). Um corpo T , de massa m muito menor que M , é colocado em uma posição A , sendo d a distância entre os centros dos dois corpos (fig. 28). O corpo S exerce sobre o corpo T a força gravitacional \vec{F} . Para obtermos a energia potencial do corpo T na posição A , devemos escolher um referencial e em seguida calcular o trabalho de \vec{F} quando o corpo T vai de A até o referencial. Porém a força \vec{F} varia com a distância e, assim, esse cálculo tem de ser feito por meio do Cálculo Integral. Ao se fazer isso, percebe-se que a fórmula da energia potencial fica mais simples se escolhermos o referencial no infinito, isto é, no infinito a energia potencial é nula. A fórmula que se obtém é:

$$E_p = -\frac{GMm}{d} \quad (4)$$

Observando a figura 28 é fácil entender por que a energia potencial é negativa: ao calcularmos o trabalho de \vec{F} , da posição A até o infinito, o deslocamento teve sentido oposto ao da força.

Na figura 29 apresentamos o gráfico de E_p em função de d .

Se a única força que atua no corpo T é a força gravitacional \vec{F} , a energia mecânica (E_M) de T é constante, isto é, a soma da energia cinética (E_C) com a energia potencial (E_p) é constante:

$$E_M = E_C + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{d^2} = \text{constante} \quad (5)$$

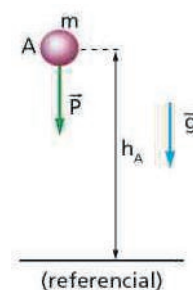


Figura 27.

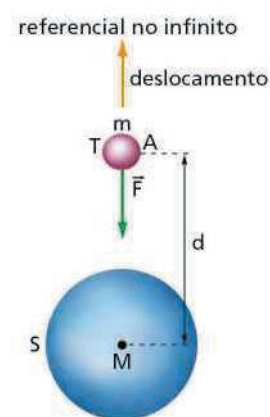


Figura 28.

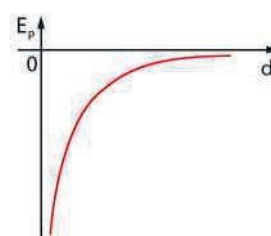


Figura 29.

Velocidade de escape

Quando lançamos um corpo a partir da superfície de um planeta, com velocidade inicial v_0 , é possível que esse corpo não mais retorne ao planeta, desde que o valor de v_0 seja igual ou maior que uma velocidade v_E , denominada **velocidade de escape**.

Para calcular o valor de v_E basta usar a conservação da energia mecânica e impor que a energia cinética do corpo se anule no infinito, onde também a energia potencial se anula. Sendo E_{C_i} e E_{P_i} as energias cinética e potencial no lançamento e E_{C_∞} e E_{P_∞} as energias cinética e potencial no infinito, teremos:

$$E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_\infty} + E_{P_\infty} \Rightarrow \frac{mv_E^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0 + 0 \Rightarrow v_E^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (6)$$

Vale a pena observar que o valor de v_E não depende da direção em que o corpo é lançado (figs. 30 e 31).

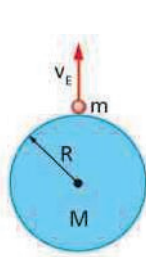


Figura 30.

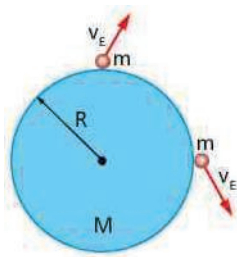


Figura 31.

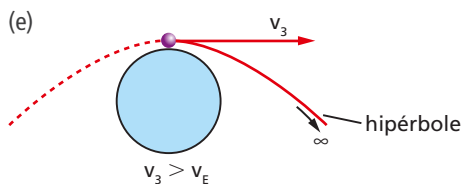
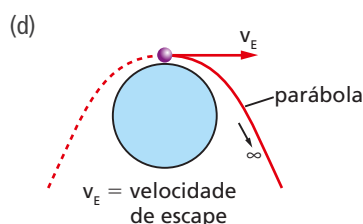
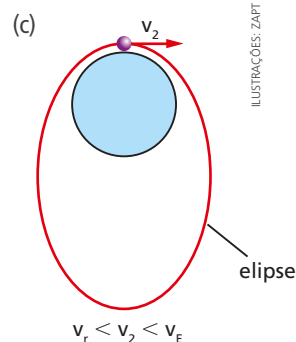
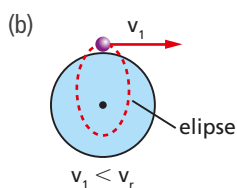
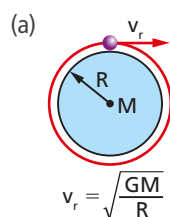
ILUSTRAÇÕES: CONCEITO GRAF

Observe também que, quando o corpo é lançado com a velocidade v_E , sua energia mecânica E_M é nula:

$$E_M = E_C + E_P = 0$$

Suponhamos que um corpo seja lançado horizontalmente pouco acima da superfície de um planeta esférico cuja massa esteja distribuída de forma simétrica. No exercício 32 vimos que, para voo rasante em torno do planeta (fig. 32a), a velocidade de lançamento é $v_r = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Nas figuras de 32b a 32e mostramos as trajetórias para velocidades de lançamento diferentes de v_r . É importante destacar que:

- nos casos *a*, *b* e *c* a energia mecânica é negativa ($E_M < 0$);
- no caso *d* a energia mecânica é nula ($E_M = 0$);
- no caso *e* a energia mecânica é positiva ($E_M > 0$).



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Figura 32.

O efeito estilingue

Quando uma nave espacial é enviada a um planeta muito distante, em vez de ir diretamente ao planeta ela contorna algumas vezes planetas intermediários. Por exemplo, a nave exploratória Galileu, lançada em outubro de 1989, com destino a Júpiter, descreveu a trajetória indicada na figura 33, contornando uma vez o planeta Vênus e duas vezes a Terra, antes de se dirigir a Júpiter. A cada vez que a sonda contornou um planeta ela ganhou energia e, assim, economizou combustível.



PROCURE NO CD

Veja, no CD, mais detalhes de como ocorre o efeito estilingue.

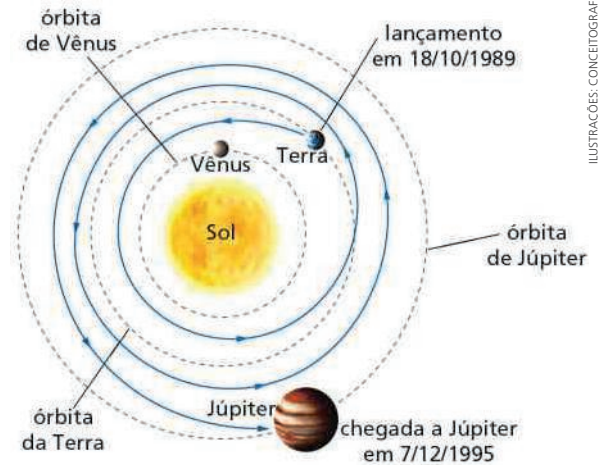
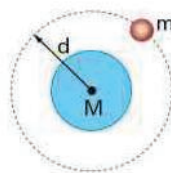


Figura 33.

ILUSTRAÇÕES: CONCITO GRAF

Exercícios de Aplicação

53. Um satélite de massa m gira em torno de um planeta esférico e homogêneo de massa M , com órbita circular de raio d .

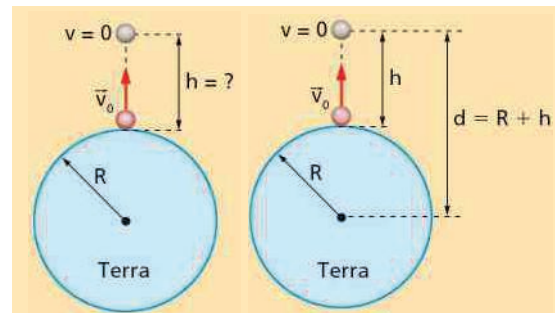


- Qual é a energia potencial do satélite?
- Mostre que a energia cinética do satélite é dada por $E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{GMm}{d} \right)$.
- Mostre que a energia mecânica do satélite é $E = -\frac{1}{2} \left(\frac{GMm}{d} \right)$.

54. Um satélite artificial de massa $m = 500$ kg gira em torno da Terra, com órbita circular de raio $8 \cdot 10^6$ m. São dados: massa da Terra = $6 \cdot 10^{24}$ kg; raio da Terra = $6,4 \cdot 10^6$ m e $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ (SI). Calcule:

- a energia potencial do satélite;
- a energia cinética do satélite;
- a energia mecânica do satélite.

55. Um projétil é lançado verticalmente a partir de um ponto da superfície da Terra, com velocidade inicial de módulo $v_0 = 6,5 \cdot 10^3$ m/s. Qual é a altura máxima h atingida pelo projétil? São dados: raio da Terra = $6,4 \cdot 10^6$ m; massa da Terra = $6,0 \cdot 10^{24}$ kg.



Resolução:

Seja M a massa da Terra e m a massa do projétil, a energia mecânica inicial do projétil é:

$$E_i = E_{c_i} + E_{p_i} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}$$

No ponto mais alto a velocidade do projétil será nula; portanto, nesse ponto só haverá energia potencial:

$$E_f = E_{c_f} + E_{p_f} = 0 - \frac{GMm}{d} = \frac{-GMm}{d}$$

Como a energia mecânica é constante, devemos ter $E_i = E_f$:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{d} \Rightarrow \frac{GM}{d} = \frac{GM}{R} - \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{2GM - Rv_0^2}{2GMR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{2GMR}{2GM - Rv_0^2} =$$

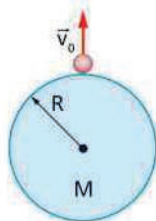
$$= \frac{2(6,7 \cdot 10^{-11})(6,0 \cdot 10^{24})(6,4 \cdot 10^6)}{2(6,7 \cdot 10^{-11})(6,0 \cdot 10^{24}) - (6,4 \cdot 10^6)(6,5 \cdot 10^3)^2}$$

$$d \cong 9,6 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = d - R \cong (9,6 \cdot 10^6 \text{ m}) - (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})$$

$$h \cong 3,2 \cdot 10^6 \text{ m} = 3200 \text{ km}$$

56. Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir de um ponto próximo à superfície da Terra, com velocidade inicial $v_0 = 7 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Calcule a altura máxima atingida pelo projétil. São dados: massa da

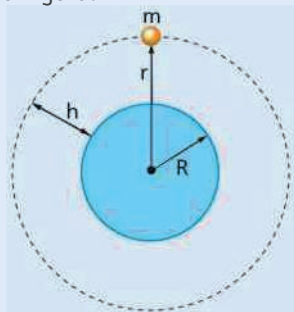


Terra = $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; raio da Terra = $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ e $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ (SI)}$.

57. Calcule a velocidade de escape do planeta Terra sabendo que sua massa é $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, seu raio médio é $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ e $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
58. A velocidade de escape da Terra é $11,2 \text{ km/s}$. Calcule o valor aproximado da velocidade de escape do planeta Urano, sabendo que sua massa é 15 vezes maior que a massa da Terra e o seu raio é 4 vezes maior que o raio da Terra.

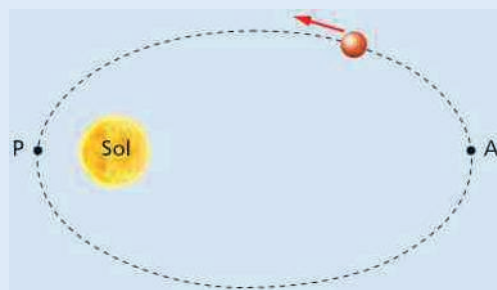
Exercícios de Reforço

59. (UF-GO) Um satélite de massa 450 kg orbita em torno da Terra, numa trajetória circular de raio r conforme a figura.



- Determine a altura, h , da órbita do satélite sabendo-se que, nessa órbita, $g' = \frac{4}{9} g$, sendo g a gravidade na superfície da Terra.
 - Determine a energia cinética do satélite nessa órbita.
 - Determine a energia mecânica total do satélite, adotando-se referencial no infinito.
60. Sabendo que a velocidade de escape de um corpo lançado de um dos polos da Terra (desprezando a resistência do ar) é $11,2 \text{ km/s}$ e que a aceleração da gravidade ao nível do mar, no mesmo local, vale aproximadamente $9,83 \text{ m/s}^2$, determine: (Dados: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e $R = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$.)
- a velocidade de escape no planeta Marte, cuja massa e raio valem, respectivamente, $0,11 M$ e $0,55 R$, onde M e R são, respectivamente, a massa e o raio da Terra;
 - a aceleração da gravidade nos polos do planeta Marte.
61. (UE-PA) Os planetas do Sistema Solar, em seu movimento ao redor do Sol, obedecem às leis de

Kepler. Eles percorrem órbitas elípticas nas quais o Sol está em um dos focos. O ponto da órbita mais distante do Sol é chamado de afélio (A) e o ponto mais próximo é chamado de periélio (P). Essas características estão ilustradas na figura abaixo.



ILUSTRAÇÕES: CONCEITOGRAF

Analise as afirmativas abaixo sobre o movimento dos planetas ao redor do Sol.

- Se existisse um planeta com o raio médio de sua órbita igual a duas vezes a distância média da Terra ao Sol, o período de revolução desse planeta seria de dois anos.
- No afélio, a energia potencial do sistema é máxima, e parte dela se converte em energia cinética até o periélio.
- A quantidade de movimento de um planeta é maior no periélio do que no afélio.
- O trabalho realizado sobre um planeta pela força gravitacional, durante uma órbita completa, é nulo.

Estão corretas somente as afirmativas:

- I, II e IV
- I e III
- I e IV
- II e III
- II, III e IV

7. Marés

Um fato que qualquer pessoa que viva à beira-mar pode perceber facilmente é que as águas do mar têm um movimento periódico de “sobe e desce”: são as **marés**. Na figura 34a temos a foto da maré baixa em uma praia e na 34b temos a foto da maré alta. Na média, a diferença de nível entre as marés é da ordem de 1 metro. Mas há locais da Terra em que essa diferença chega a 15 metros, como na praia de Moreré, Bahia. O que ocasiona essa movimentação das águas?



Figura 34. Praia de Moreré, Bahia. (a) Maré baixa e (b) maré alta.

Antes de Newton publicar sua obra, alguns cientistas já suspeitavam que as marés seriam causadas pela atração da Lua. Eles argumentavam que, se a Terra estivesse isolada da ação de outros corpos, o nível da água do mar seria o mesmo ao redor de todo o globo terrestre (fig. 35a). Porém, como a Terra não está isolada, a atração da Lua provoca o deslocamento das águas do mar (fig. 35b), produzindo uma maré alta em A e uma maré baixa em B.

A ideia parece boa, mas há um problema: por essa teoria teríamos apenas uma maré alta e uma maré baixa por dia! E quem mora no litoral sabe que há **duas** marés altas e **duas** baixas diariamente, isto é, a cada instante há uma maré alta no lado da Terra virado para a Lua (fig. 36) e outra maré alta no lado oposto. Como explicar isso? Um dos sucessos da Lei da Gravitação de Newton foi explicar esse fato.

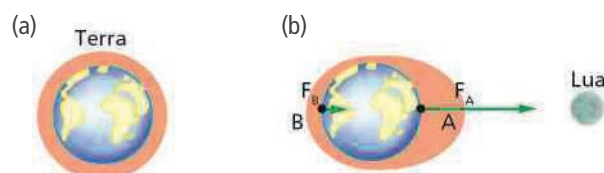


Figura 35.



Figura 36.

PROCURE NO CD

No CD apresentamos, com detalhes, a explicação sobre o movimento das marés.

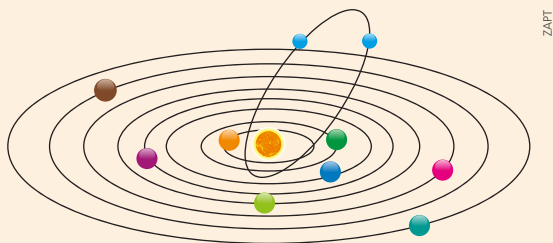
Exercícios de Aprofundamento

62. (Unifesp-SP) A massa da Terra é aproximadamente oitenta vezes a massa da Lua e a distância entre os centros de massa desses astros é aproximadamente sessenta vezes o raio da Terra. A respeito do sistema Terra-Lua, pode-se afirmar que:

- a) a Lua gira em torno da Terra com órbita elíptica e em um dos focos dessa órbita está o centro de massa da Terra.
- b) a Lua gira em torno da Terra com órbita circular e o centro de massa da Terra está no centro dessa órbita.

- c) a Terra e a Lua giram em torno de um ponto comum, o centro de massa do sistema Terra-Lua, localizado no interior da Terra.
- d) a Terra e a Lua giram em torno de um ponto comum, o centro de massa do sistema Terra-Lua, localizado no meio da distância entre os centros de massa da Terra e da Lua.
- e) a Terra e a Lua giram em torno de um ponto comum, o centro de massa do sistema Terra-Lua, localizado no interior da Lua.

63. O cometa Halley se aproxima da Terra a cada 76 anos, aproximadamente. A última vez em que esteve próximo da Terra foi em 1986, e deverá retornar em 2061. Ele gira em torno do Sol, com órbita elíptica, como mostra a figura, sendo $88 \cdot 10^9$ m a sua distância mínima ao Sol. Calcule a distância máxima do cometa ao Sol, sabendo que a distância média da Terra ao Sol é $150 \cdot 10^9$ m.



64. (ITA-SP) Deseja-se colocar em órbitas circulares um satélite S_T ao redor da Terra e um satélite S_L ao redor da Lua, de modo que ambos tenham o mesmo período. São dados: R_T = raio da Terra = $= 6,37 \cdot 10^6$ m; R_L = raio da Lua = $1,74 \cdot 10^6$ m;

M_T = massa da Terra = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg;

M_L = massa da Lua = $7,34 \cdot 10^{22}$ kg.

Sendo r_T a distância de S_T ao centro da Terra e r_L a distância de S_L ao centro da Lua, determine o menor valor possível para r_T .

65. (Fuvest-SP) A densidade (ρ) de um corpo é a razão entre sua massa (m) e seu volume (V):

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Se fosse possível colocar um satélite em órbita rasante em torno da Terra, o seu período seria T . Sendo G a constante de gravitação universal, expresse a densidade média da Terra em função de T e G .

66. Suponha que a Terra seja esférica, homogênea, e que a aceleração da gravidade na sua superfície seja $g = 10 \text{ m/s}^2$ se não houver movimento de rotação. São dados:

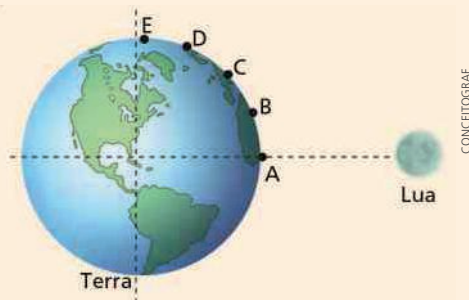
velocidade angular de rotação da Terra $\cong 7 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$

raio da Terra $\cong 6400 \text{ km}$.

Quantas vezes mais rápido, aproximadamente, teria de girar a Terra para que uma pessoa situada ao longo da linha do equador tivesse seu peso aparente reduzido a zero?

- 2 vezes.
- 18 vezes.
- 100 vezes.
- 1000 vezes.
- Dependeria da massa da pessoa.

67. (UF-MA) Todos os dias observamos que a baía de São Marcos seca e enche aproximadamente a cada 6 horas. Este é o efeito de maré oriundo principalmente da força de atração gravitacional que a Lua exerce sobre as águas.



Observando a figura, em que ponto indicado ocorrerá a maré mais alta?

- C
- B
- A
- D
- E

SUGESTÕES DE LEITURA

- Mariconda, Pablo Rubén; Vasconcelos, Júlio. *Galileu e a nova Física*. São Paulo: Odysseus, 2006. Nos capítulos de 4 a 7 desta obra são apresentados os argumentos de Galileu na defesa do sistema de Copérnico.
- Rossi, Paolo. *O nascimento da Ciência Moderna na Europa*. Bauru: Edusc, 2001. No capítulo 8 há uma análise profunda sobre a mudança na concepção de Universo ocorrida com os trabalhos de Copérnico, Kepler, Galileu e Newton.
- Galilei, Galileu. *Diálogo sobre os dois máximos sistemas*. São Paulo: Discurso Editorial, 2001. Esta é uma das obras-primas de Galileu. Em forma de diálogo, ele combate o sistema de Ptolomeu e defende o sistema de Copérnico.
- Crease, Robert P. *Os dez mais belos experimentos científicos*. Rio de Janeiro: Zahar, 2006. No capítulo 5 o autor apresenta o experimento de Cavendish.

Fluidostática – Lei de Stevin

Até agora estudamos os movimentos de partículas e corpos rígidos, isto é, corpos indeformáveis. Neste capítulo iniciaremos o estudo das propriedades mecânicas de líquidos e gases, que são facilmente deformáveis, isto é, **fluem** facilmente e, por isso, são genericamente chamados **fluidos**. Neste e no próximo capítulo estudaremos os fluidos em equilíbrio estático e esse estudo recebe o nome de **Fluidostática**. No capítulo 27 estudaremos os fluidos em movimento e esse estudo é chamado **Fluidodinâmica**. A Fluidostática e a Fluidodinâmica constituem a **Fluidomecânica**.

O primeiro fluido a ser estudado foi a água. Assim, por razões históricas, a Fluidostática, a Fluidodinâmica e a Fluidomecânica são também chamadas Hidrostática, Hidrodinâmica e Hidromecânica, pois *hydro* é a palavra grega para “água”.

As variações de temperatura influem pouco no comportamento de líquidos, mas influem muito no comportamento de gases. Assim, neste nosso estudo da Fluidomecânica trataremos principalmente dos líquidos. O estudo dos gases será completado no próximo volume, no estudo da Termologia.

Antes de começar este capítulo recomendamos que você relembre as definições de densidade e massa específica, apresentadas no capítulo 1.

1. Pressão

No estudo da Dinâmica, de modo geral, consideramos forças atuando em um ponto de um corpo. Porém, as forças que os fluidos exercem sobre os corpos não se concentram num ponto, mas se “espalham” ao longo da superfície do corpo. Para levar em conta esse “espalhamento” da força, definimos uma nova grandeza: **pressão**.

Consideremos uma superfície de área A , sobre a qual estão aplicadas forças perpendiculares (fig. 1), sendo \vec{F} a resultante dessas forças. A **pressão média** (p_m) exercida por essa força sobre a superfície é definida por:

$$p_m = \frac{|\vec{F}|}{A}$$

A pressão em um ponto é dada pelo limite da pressão média quando a área A tende a zero (fig. 2).

$$p_m = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{|\vec{F}|}{A}$$

Quando a pressão é a mesma em todos os pontos da superfície, o valor dessa pressão coincide com o da pressão média.

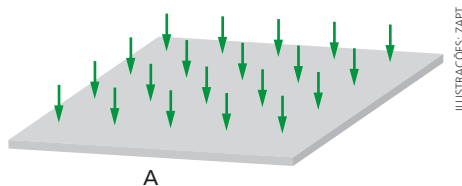


Figura 1.

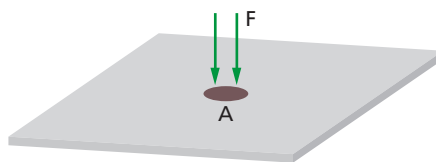


Figura 2.

1. Pressão
2. Líquido em equilíbrio estático
3. Tensão superficial
4. Forças e pressões em fluidos
5. Lei de Stevin
6. Vasos comunicantes
7. Princípio de Pascal
8. Pressão atmosférica

Pela definição vemos que:

$$\text{unidade de pressão} = \frac{\text{unidade de força}}{\text{unidade de área}}$$

Portanto, no SI, a unidade de pressão é o **newton por metro quadrado** (N/m^2), a qual foi chamada de **pascal** (Pa) em homenagem ao matemático e físico francês Blaise Pascal (1623-1662), que fez importantes contribuições para o estudo dos fluidos.

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa}$$

Porém, há várias outras unidades usadas na prática, que apresentaremos ao longo do texto.

Resistência à penetração

Na figura 3 representamos duas situações em que uma pessoa anda na neve. Em uma delas, usando sapatos comuns, afunda na neve, enquanto na outra, usando esquis, consegue andar sem afundar. A razão é que, em geral, a resistência dos materiais à penetração é dada não pela força, mas pela pressão, isto é, cada material suporta uma pressão máxima sem ser penetrado.

Assim, como nas duas situações o peso é praticamente o mesmo, ele exerce forças de intensidades iguais (F) sobre a neve. Mas, como $p = \frac{F}{A}$, quanto maior a área, menor a pressão. Desse modo, a pessoa com esquis exerce uma pressão menor que a sem esquis.

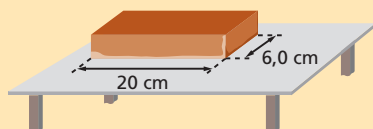


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Figura 3.

Exercícios de Aplicação

1. Numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$, um tijolo de massa $1,2 \text{ kg}$ está apoiado sobre uma mesa horizontal como mostra a figura. Calcule a pressão exercida pelo tijolo sobre a mesa.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Figura a.

Resolução:

A intensidade da força \vec{F} exercida pelo tijolo sobre a mesa é igual ao seu peso (P):

$$F = P = m \cdot g = (1,2 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 12 \text{ N}$$

A área da base do tijolo é (fig. b):

$$A = (6,0 \text{ cm})(20 \text{ cm}) = (6,0 \cdot 10^{-2} \text{ m})(20 \cdot 10^{-2} \text{ m}) = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

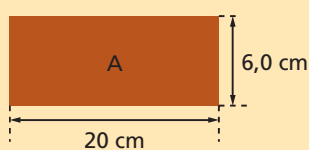


Figura b.

Assim, a pressão média exercida pelo tijolo sobre a mesa vale:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{12 \text{ N}}{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}$$

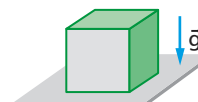
$$p = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

2. Uma pessoa comprime um percevejo contra uma mesa de madeira, exercendo uma força de 20 N . Sabendo que a ponta do percevejo tem área $0,10 \text{ mm}^2$, calcule, em N/m^2 , a pressão exercida pela ponta do percevejo.



CRISTINA XAVIER

3. Um corpo em forma de cubo, cuja aresta mede $2,0$ metros, apoia-se no solo, exercendo nos pontos de contato uma pressão de $3,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Qual é o peso do corpo?



4. Um edifício de massa de $30\,000$ toneladas deverá ser construído sobre um terreno que suporta pressões de no máximo $7,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a área mínima que deverá ter a base desse edifício.

5. Apresente a equação dimensional da pressão.

6. A pressão é grandeza escalar ou vetorial?

7. Nos postos de combustíveis há aparelhos destinados a “acertar” a pressão do ar dentro dos pneus dos veículos. Em geral, esses aparelhos estão graduados em kgf/cm^2 ou na unidade do Sistema Britânico de Engenharia: **libra por polegada quadrada** (lb/in^2), também indicada pela sigla **psi**, formada com as iniciais de *pound/square inch*. Lembrando que $1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ N}$, $\text{lb} = 4,448 \text{ N}$ e $1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$, transforme:

a) 1 kgf/cm^2 em N/m^2 ;

b) 1 lb/in^2 em N/m^2 .

Resolução:

a) $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$

$$\frac{1 \text{ kgf}}{1 \text{ cm}^2} = \frac{9,81 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} \Rightarrow 1 \text{ kgf/cm}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

b) $1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm} = 2,54 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ in}^2 =$

$$= (2,54 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \cong 6,45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ in}^2} = \frac{4,448 \text{ N}}{6,45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \text{ lb/in}^2 = 1 \text{ psi} \cong 6,9 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

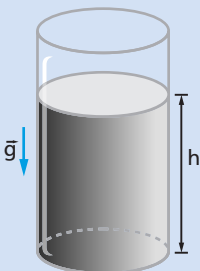
8. Usando os dados da questão anterior, transforme:

a) 1 Pa em kgf/cm^2 ;

b) 1 Pa em psi .

Exercícios de Reforço

9. Um tubo cilíndrico contém mercúrio até uma altura $h = 80,0 \text{ cm}$. Adotando $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e sabendo que a massa específica do mercúrio é $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, calcule a pressão exercida por ele na base do tubo em Pa .



10. (UF-RS) Um gás está contido em um recipiente cúbico, tendo cada face área igual a $2,0 \text{ m}^2$. As moléculas do gás bombardeiam continuamente as faces do recipiente exercendo sobre elas uma pressão média de $5,0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. Qual o módulo da força média exercida pelo gás sobre cada face?

a) $1,0 \cdot 10^4 \text{ N}$

d) $2,5 \cdot 10^3 \text{ N}$

b) $7,5 \cdot 10^3 \text{ N}$

e) $1,0 \cdot 10^3 \text{ N}$

c) $5,0 \cdot 10^3 \text{ N}$

11. (U. F. Santa Maria-RS) Referindo-se à estrutura física, uma das causas importantes da degradação do solo na agricultura é a sua compactação por efeito das máquinas e da chuva. Um trator tem rodas de grande diâmetro e largura para que exerça contra o solo pequeno(a):

a) pressão.

c) peso.

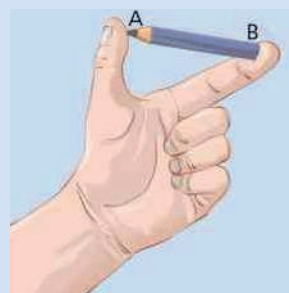
e) atrito.

b) força.

d) energia.

12. (UF-SC) Uma pessoa comprime um lápis entre os seus dedos, da maneira indicada na figura. Adotando como A a área de superfície de contato entre a ponta do lápis e o dedo polegar e

como B a área de contato entre o lápis e o dedo indicador, e admitindo-se que A seja menor que B , verifique a(s) proposição(ões) correta(s) e dê como resposta a soma dos números que antecedem as proposições corretas.



ALBERTO DE STEFANO

(01) A intensidade da força do polegar sobre A é maior do que a do indicador sobre B .

(02) A pressão exercida pela força do polegar sobre A é maior do que a do indicador sobre B .

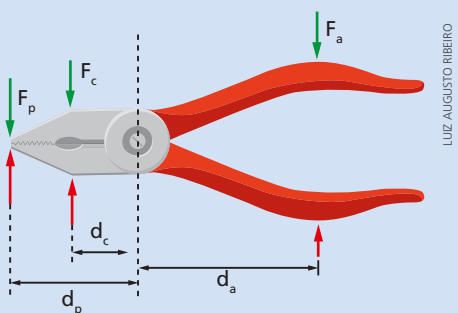
(04) A pressão exercida pela força do polegar sobre A é igual à do indicador sobre B .

(08) Pressão é sinônimo de força.

(16) A pressão exercida por uma força sobre uma superfície só depende da intensidade da força.

(32) A intensidade da força do polegar sobre A é igual à do indicador sobre B .

13. (Unicamp-SP) Uma das aplicações mais comuns e bem-sucedidas de alavancas são os alicates. Esse instrumento permite amplificar a força aplicada (F_a), seja para cortar (F_c) ou para segurar materiais pela ponta do alicate (F_p).

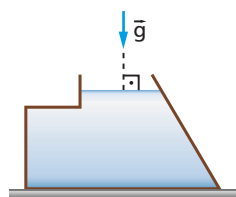


LUIS AUGUSTO RIBEIRO

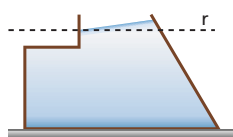
- Um arame de aço tem uma resistência ao corte de $1,3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, ou seja, essa é a pressão mínima que deve ser exercida por uma lâmina para cortá-lo. Se a área de contato entre o arame e a lâmina de corte do alicate for de $0,1 \text{ mm}^2$, qual a força F_c necessária para iniciar o corte?
- Se esse arame estivesse na região de corte do alicate a uma distância $d_c = 2 \text{ cm}$ do eixo de rotação do alicate, que força F_a deveria ser aplicada para que o arame fosse cortado? ($d_a = 10 \text{ cm}$)

2. Líquido em equilíbrio estático

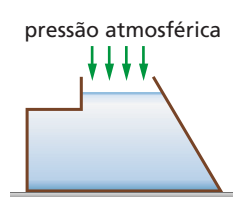
Consideremos um líquido em equilíbrio estático (repouso) dentro de um recipiente de formato qualquer e sob a ação da gravidade (fig. 4a). A superfície livre do líquido deve ficar perpendicular à aceleração da gravidade \vec{g} , isto é, na horizontal.



(a) Situação estável.



(b) Situação instável.

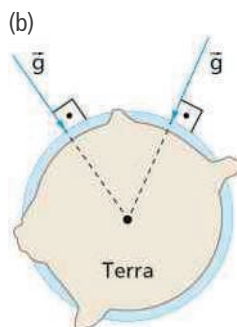
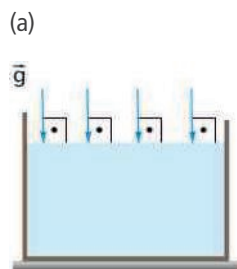


(c) A pressão atmosférica dificulta a evaporação.

Figura 4.

Esse fato pode ser demonstrado usando a Lei de Stevin, que será estudada mais adiante. Mas, por enquanto, vamos apresentar uma justificação mais simples. Suponhamos que, após perturbarmos o recipiente da figura 4a, o líquido fique, momentaneamente, na situação da figura 4b. Como o líquido é facilmente deformável, o peso do líquido situado acima do plano representado pela linha r força um retorno à situação da figura 4a. Convém também observar que, para dificultar a evaporação do líquido, este deve estar em contato com a atmosfera, isto é, a pressão exercida pela atmosfera (fig. 4c) dificulta a saída de moléculas do líquido (mais adiante veremos como calcular o valor da pressão atmosférica).

Se o recipiente for pequeno em comparação com o tamanho da Terra, podemos admitir que, em todos os pontos da região onde está o recipiente, a aceleração da gravidade tem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido (fig. 5a). Desse modo, a superfície livre do líquido é plana e horizontal. Mas, para grandes quantidades de líquido, cujo tamanho seja comparável com o tamanho da Terra, a superfície livre será curva. Por exemplo, a superfície livre dos oceanos é uma superfície aproximadamente esférica (fig. 5b).



CONCEITO GRAF

Figura 5.

Líquido em recipiente acelerado

A figura 6a representa um recipiente aberto, contendo certa quantidade de líquido, em equilíbrio estático, sobre uma superfície plana horizontal. A superfície livre do líquido é horizontal e está sujeita à pressão atmosférica.

Suponhamos agora que seja aplicada uma força sobre o recipiente, de modo que ele adquira uma aceleração horizontal \vec{a} (fig. 6b). Por inércia, a tendência inicial do líquido é ficar “para trás”; depois de uma breve oscilação, o líquido fica em equilíbrio estático em relação ao recipiente, com sua superfície livre formando um ângulo θ com a horizontal.

Para determinar o ângulo θ consideremos um referencial fixo no recipiente, o qual não é inercial. Como vimos no capítulo 12, para um observador fixo no recipiente, tudo se passa como se, além da aceleração da gravidade \vec{g} , houvesse uma aceleração da gravidade adicional $-\vec{a}$ (fig. 7) resultando numa aceleração da gravidade aparente \vec{g}_A , de modo que a superfície livre do líquido fica perpendicular a \vec{g}_A . Da figura 7 tiramos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{g}$$

e

$$g_A = \sqrt{a^2 + g^2}$$

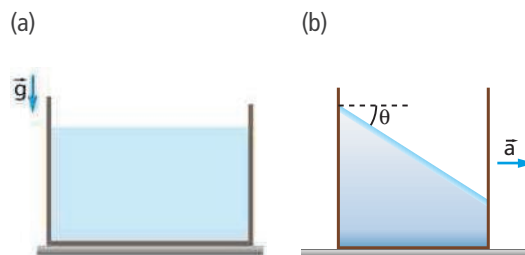


Figura 6.

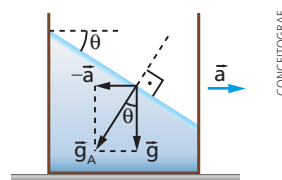
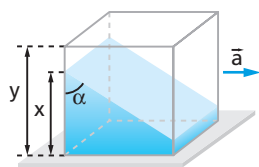


Figura 7.

Exercícios de Aplicação

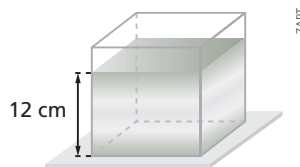
14. Uma caixa cúbica, de aresta $y = 16$ cm e aberta na parte de cima, tem movimento horizontal de aceleração \vec{a} . Dentro da caixa há um líquido cuja superfície livre forma ângulo α com a vertical. São dados: $\sin \alpha = 0,80$; $\cos \alpha = 0,60$; $g = 10$ m/s² e $x = 14$ cm.



Calcule:

- a) o módulo de \vec{a} ; b) o volume de água.

15. Uma caixa cúbica e aberta na parte superior, cuja aresta mede 20 cm, contém um líquido em repouso, como mostra a figura, numa região em que $g = 10$ m/s². Aplica-se à caixa uma força horizontal de modo que a caixa adquira uma aceleração horizontal \vec{a} , perpendicular a uma das faces. Qual o máximo valor de $|\vec{a}|$ de modo que o líquido não saia da caixa?



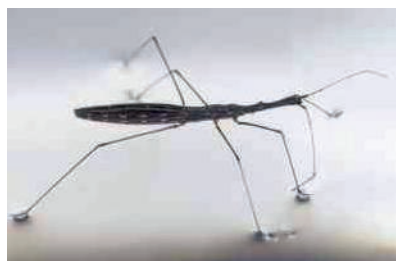
3. Tensão superficial

No item anterior afirmamos que líquidos contidos em recipientes pequenos em comparação com o tamanho da Terra, e sob a ação da gravidade, apresentam superfície livre plana e horizontal. No entanto, se enchermos um copo com água até a boca, é possível (com algum cuidado) colocar um pouco mais de água (fig. 8) de modo que a superfície livre adquira uma forma curva, um pouco acima da boca do copo. Como explicar esse fato? Isso é possível porque a superfície livre da água comporta-se como uma membrana esticada, podendo resistir a “pequenas” pressões. Essa propriedade da água e de outros líquidos é chamada **tensão superficial**.



Figura 8. Água não transborda.

Outros exemplos estão ilustrados na figura 9. Na figura 9a vemos um inseto caminhar sobre a água. Colocando-se com cuidado uma agulha sobre a água, ela flutua (fig. 9b), apesar de ser feita de aço e, conforme veremos no próximo capítulo, como o aço é mais denso que a água, a agulha deveria afundar. Se você fizer esse experimento, dissolva um pouco de sal na água (no próximo capítulo você verá por quê). Na figura 9c temos outra situação familiar: a formação de pequenas gotas na extremidade de um conta-gotas. Como a gota é muito “pequena”, a tensão superficial impede que o líquido escorra.



ALAMY/OTHER IMAGES

(a) Inseto caminha sobre a água.



FERNANDO FAVORETTO/CIAR IMAGEM

(b) Agulha flutuando sobre a água.



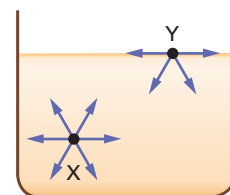
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

(c) A gota não escorre.

Figura 9. Exemplos de tensão superficial.

O fenômeno da tensão superficial pode ser entendido considerando-se as forças exercidas entre as moléculas do líquido. Essas moléculas exercem, entre si, forças atrativas de natureza elétrica.

Na figura 10, representamos uma molécula X no interior de um líquido em equilíbrio. Ela está em equilíbrio recebendo forças em todas as direções. No entanto, a molécula Y, que está na superfície, recebe forças de atração que têm resultante para baixo, ocasionando uma compressão da molécula.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Figura 10.

Existem substâncias que, ao serem adicionadas a um líquido, diminuem a tensão superficial. Tais substâncias são chamadas **surfactantes**. No caso da água, são os detergentes e os sabões. Essas substâncias diminuem a tensão superficial e facilitam, por exemplo, a penetração da água nos pequenos espaços, ajudando na limpeza.

Na ausência da gravidade, a tendência dos líquidos é assumir a forma esférica, por causa da tensão superficial, como mostra a figura 11, na qual vemos um astronauta, dentro de uma nave espacial, “brincando” com a bola feita de suco de morango.

De modo geral, nas aplicações, desprezaremos os efeitos da tensão superficial.



JOHNSON SPACE CENTER MEDIA ARCHIVES/ASA

Figura 11. Astronauta John M. Lounge brinca com uma bola de suco de morango.

Experimento

Coloque dois palitos de fósforo flutuando na água contida em um recipiente, próximos um do outro.

Em seguida, pingue uma gota de detergente entre os palitos. Você observará que eles se afastam bruscamente.

Para entender por que isso ocorre observe a figura b. A película de água exerce forças iguais nos dois lados dos palitos. O detergente pingado entre os palitos diminui a tensão superficial nessa região (fig. c) e, assim, as forças exercidas pela película nessa região diminuirão, ocasionando o afastamento dos palitos.



FERNANDO FAVORETTO/CIAR IMAGEM

Figura a.

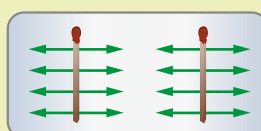


Figura b.

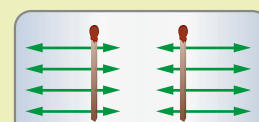


Figura c.

Exercícios de Aplicação

16. Quando molhamos um pincel na água e o retiramos, os fios ficam unidos. O mesmo acontece quando molhamos o cabelo. Por quê?



ALBERTO DE STEFANO

17. Na figura representamos um garoto soprando uma bolha de sabão na extremidade de um canudo. Quando ele para de soprar, a bolha diminui. Por quê?



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

4. Forças e pressões em fluidos

Vamos agora considerar alguns fatos referentes às pressões e forças exercidas por fluidos em **repouso** e sob a **ação da gravidade**.

Um primeiro fato importante é que:

As forças exercidas pelo fluido sobre uma superfície com a qual esteja em contato são perpendiculares à superfície.

Assim, por exemplo, no caso da figura 12a, na qual representamos um recipiente cheio de um líquido em repouso, as forças exercidas pelo líquido são perpendiculares à superfície em cada ponto de contato.

Suponhamos, por um momento, que a força exercida pelo líquido no ponto B do recipiente fosse inclinada como na figura 12b. Nesse caso, pela Lei da Ação e Reação, a parede do recipiente exerceria sobre o líquido a força $-\vec{F}$ (fig. 12c), que teria duas componentes: uma tangencial \vec{F}_y e uma normal (perpendicular) \vec{F}_x . A componente tangencial \vec{F}_y faria o líquido “fluir” ao longo da superfície, o que contradiz a nossa hipótese de que o líquido está em repouso.

Portanto, o fato de as forças exercidas por fluidos (em repouso e sob a ação da gravidade) serem perpendiculares às superfícies é decorrência de os fluidos “fluírem”, isto é, não resistirem a esforços tangenciais. Como o fluido está em repouso, isso significa que não existem forças tangenciais agindo. Essa propriedade dos fluidos pode ser verificada facilmente enchendo-se com água um recipiente de plástico ou uma bexiga (fig. 13) e em seguida fazendo alguns furos no recipiente. Você perceberá que os pequenos jatos d’água abandonam o recipiente perpendicularmente a ele.

Na figura 14a, isolamos uma “minúscula” porção de líquido em forma de cubo e assinalamos as forças exercidas sobre cada face do cubo pelo restante do líquido. Sendo esse cubo “muito pequeno”, podemos desprezar seu peso. Desse modo, para que ele esteja em repouso, as forças devem se cancelar, e assim concluímos que a pressão é a mesma em todas as faces.

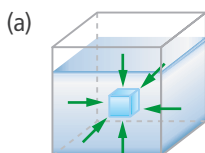
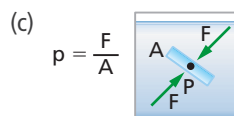
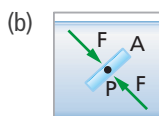


Figura 14.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

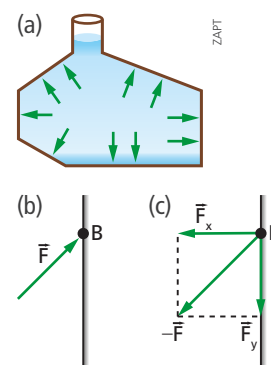


Figura 12.



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Figura 13.

Sendo P o ponto que está no centro do “pequeno cubo”, podemos falar na **pressão no ponto P** , a qual podemos calcular tomando uma “pequena” superfície de área A (figs. 14b e 14c) que passa por P e fazendo $p = \frac{F}{A}$. Qualquer que seja a orientação da superfície, o resultado será o mesmo: **a pressão no ponto P** . Resumindo:

A pressão num ponto de um fluido em equilíbrio (e sob a ação da gravidade) é a mesma em todas as direções, isto é, seu valor não depende da orientação da superfície usada para medi-la.

A pressão em um ponto de um fluido pode ser medida usando-se um aparelho cuja estrutura básica é mostrada na figura 15a. Ele é constituído por um cilindro evacuado dentro do qual é encaixado um pistão cuja área da base é A e que está ligado a uma mola de constante elástica k . O fluido aplica sobre o pistão uma força de intensidade F , que causa uma deformação x na mola. A pressão na região em que está o medidor é calculada por:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{kx}{A} = \left(\frac{k}{A}\right) \cdot x$$

Na figura 15b ilustramos o fato de que o valor da pressão em um ponto não depende da orientação da superfície usada para fazer a medida: o medidor pode ser colocado em qualquer orientação.

Vamos agora considerar no interior do fluido dois pontos X e Y situados no mesmo nível (fig. 16a). Qual seria a relação entre as pressões nesses pontos? Para responder a essa questão, vamos tomar uma porção do fluido em forma de cilindro horizontal “muito fino” (fig. 16b), de modo que os centros das bases sejam os pontos X e Y . Na figura 16c isolamos o cilindro. A pressão na face esquerda é p_x e na face direita é p_y . Portanto, sendo A a área de cada face, as forças horizontais exercidas pelo resto do fluido sobre o cilindro têm intensidades F_x e F_y dadas por:

$$F_x = p_x \cdot A \quad \text{e} \quad F_y = p_y \cdot A$$

Para que o cilindro esteja em equilíbrio, devemos ter:

$$F_x = F_y \Rightarrow p_x \cdot A = p_y \cdot A \Rightarrow p_x = p_y$$

Portanto:

Em um fluido em equilíbrio, pontos que estejam num mesmo nível suportam a mesma pressão.

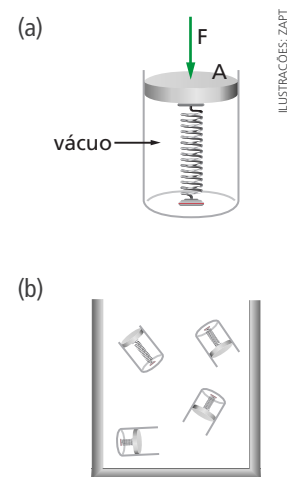


Figura 15. Medidor de pressão.

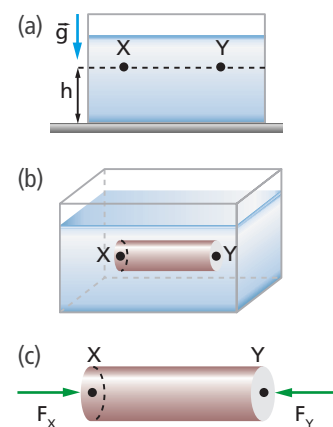


Figura 16.

5. Lei de Stevin

Em um líquido em equilíbrio consideremos dois pontos X e Y situados numa mesma reta vertical, sendo h o desnível entre eles (fig. 17a).

Tomemos uma porção do líquido (destacada em outra cor na fig. 17b) em forma de cilindro vertical “muito fino”, cuja área da base é A , de modo que os pontos X e Y estejam nos centros das bases.

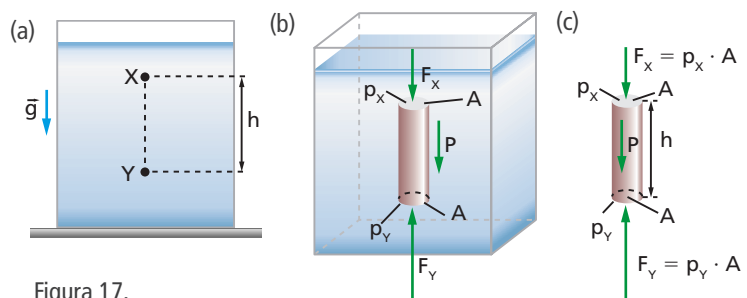


Figura 17.

Na face superior do cilindro a pressão é p_x e na face inferior é p_y . Assim, as forças verticais que o resto do líquido exerce no cilindro têm intensidades

$$F_x = p_x \cdot A \quad \text{e} \quad F_y = p_y \cdot A$$

como ilustra a figura 17c. Além dessas duas forças, devemos considerar o peso (P) do cilindro, cujo volume é V . Sendo d a densidade do líquido, temos:

$$P = m \cdot g = \underbrace{d \cdot V}_m \cdot g = d \cdot \underbrace{Ah}_V \cdot g$$

Para que o cilindro esteja em equilíbrio, devemos ter:

$$F_y = F_x + P$$

ou:

$$p_y \cdot A = p_x \cdot A + dAhg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_y = p_x + dgh \quad (\text{Lei de Stevin})$$

Essa equação foi deduzida das leis da Mecânica e, assim, poderia ser chamada de Teorema de Stevin em vez de Lei de Stevin. No entanto, por razões históricas, costuma ser chamada **Lei de Stevin**, pois foi obtida experimentalmente pelo holandês Simon Stevin (1548-1620) antes do estabelecimento das leis da Mecânica.

A superfície livre do líquido sofre a ação da pressão atmosférica (fig. 18). Mais adiante veremos como calcular essa pressão, mas podemos adiantar que a camada de ar que envolve a Terra exerce nos corpos próximos à superfície uma pressão cujo valor é dado aproximadamente por: $p_{\text{atm}} \cong 10^5 \text{ Pa}$.

Desse modo, em todos os pontos que estão na superfície livre, a pressão é a pressão atmosférica (p_{atm}) e, em todos os pontos que estão a uma profundidade h , a pressão é a mesma (p), podendo ser calculada pela Lei de Stevin:

$$p = p_{\text{atm}} + dgh$$

Como essa equação é do primeiro grau, o gráfico da pressão em função da profundidade (fig. 19) é retilíneo.

Um modo simples de perceber que a pressão aumenta com a profundidade é fazer o experimento sugerido na figura 20. Coloque água num recipiente e depois faça alguns furos. Você verá que, quanto mais baixo o furo, maior a velocidade com que a água sai por ele, acarretando um maior alcance. No capítulo 27 calcularemos esses alcances e veremos por que os resultados são mais fáceis de observar quando as duas distâncias assinaladas na figura obedecem à condição: $D \geq d$.

O fato de a pressão aumentar com a profundidade pode ser percebido pelos moradores de um edifício em que a caixa-d'água está no teto (fig. 21). Nos andares mais baixos a água jorra com maior pressão que nos andares mais altos.

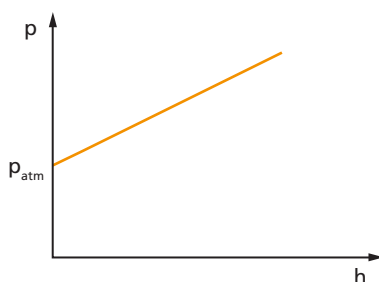


Figura 19.

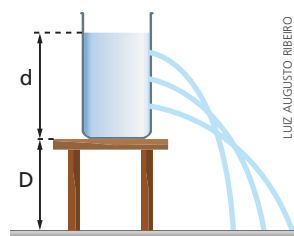


Figura 20.

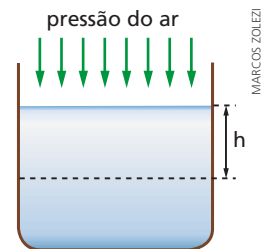


Figura 18.

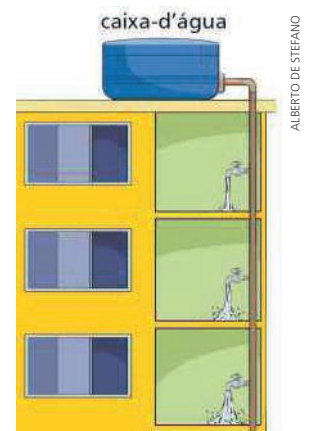


Figura 21.

Paradoxo hidrostático

Tomemos o caso da figura 22, em que recipientes de formas diferentes, mas com bases de mesma área A , contêm o mesmo líquido até uma mesma altura h .

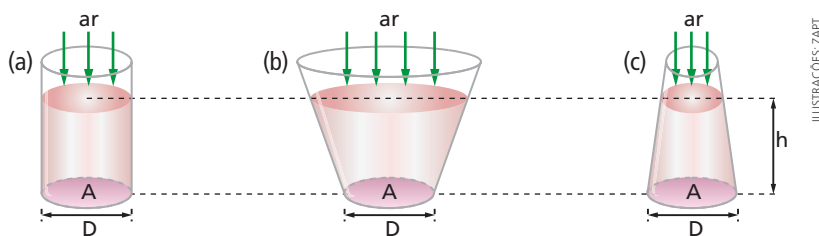


Figura 22.

Pela Lei de Stevin, nos fundos dos três recipientes a pressão é a mesma, sendo dada por:

$$p = p_{\text{atm}} + dgh$$

Portanto, como os três “fundos” têm a mesma área A , as forças exercidas em todos eles têm a mesma intensidade F , dada por $F = p \cdot A$. Mas como podem as forças ter a mesma intensidade se cada recipiente tem uma quantidade diferente de líquido e, assim, um peso diferente? Essa situação costuma ser chamada **paradoxo hidrostático**.

Para entender por que isso acontece, basta considerar as forças exercidas pelas “paredes” do recipiente no líquido (fig. 23).

No caso da figura 23a, as paredes laterais exercem forças horizontais e não comprimem o fundo. No caso da figura 23b, a componente vertical \vec{F}_y ajuda a “sustentar” o excesso de líquido em relação à situação da figura 23a. No caso da figura 23c, a componente vertical \vec{F}_y comprime o fundo, “compensando” o fato de ter menos líquido que o recipiente da figura 23a.

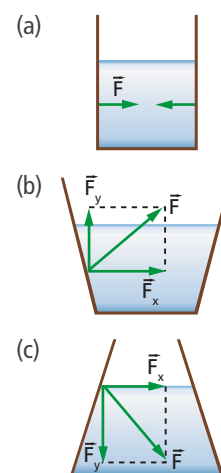


Figura 23.

Força em uma barragem

Na construção de barragens que vão represar a água de uma usina hidrelétrica, um problema importante é o cálculo da força exercida pela água sobre a barragem e o ponto de aplicação dessa força, para que possa ser calculado o seu torque.

Na figura 24 representamos uma barragem cuja região de contato com a água é um retângulo de base medindo L e altura H .

Para calcular a intensidade F da força exercida pela água sobre a barragem não é necessário levar em conta a pressão atmosférica, pois ela atua nos dois lados da barragem.

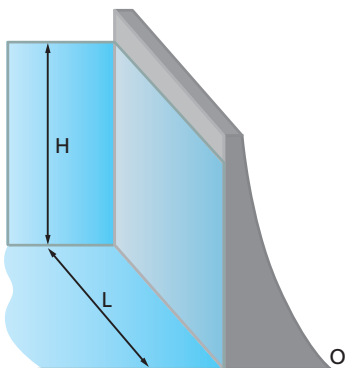


Figura 24.

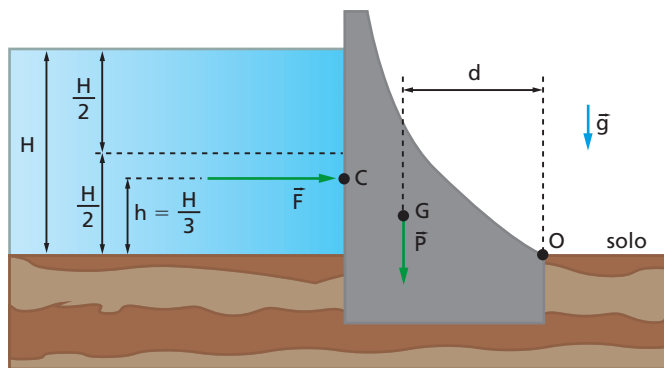


Figura 25.

A pressão exercida pela água aumenta com a profundidade. Porém, usando o Cálculo Integral é possível demonstrar que a pressão média exercida pela água (p_m) é igual à pressão exercida a uma profundidade $\frac{H}{2}$, isto é:

$$p_m = dg \frac{H}{2}$$

A área A da região da barragem em contato com a água é:

$$A = LH$$

Assim:

$$p_m = \frac{F}{A} \Rightarrow dg \frac{H}{2} = \frac{F}{LH} \Rightarrow F = \frac{dgLH^2}{2}$$

É também possível demonstrar que, levando em conta os efeitos de rotação, o ponto de aplicação de \vec{F} é o ponto C assinalado na figura 25, que está a uma distância $\frac{H}{3}$ do fundo. Esse ponto é chamado **centro de pressão**.

Se os cálculos não forem benfeitos existe o risco de a barragem girar em torno do ponto O . Como os torques de \vec{F} e \vec{P} tendem a produzir rotações em sentidos opostos, é interessante que o braço de \vec{P} (que é a distância d assinalada na fig. 25) seja grande. Essa é uma das razões pelas quais a barragem é mais larga na base. A outra razão é que a pressão aumenta com a profundidade e, assim, é necessário aumentar a resistência da barragem.

Equilíbrio de líquidos imiscíveis

Há líquidos que não se misturam; são **imiscíveis**. É o caso, por exemplo, da água e do óleo. Experimente colocar dentro de um copo (fig. 26) um pouco de água e um pouco de óleo. Na situação de equilíbrio teremos o líquido mais denso (água) no fundo e o líquido menos denso (óleo) por cima.

Se você fizer o inverso, colocando primeiramente o óleo e depois a água, verá que depois de algum tempo o óleo estará por cima da água. De modo geral, na situação de equilíbrio, sob a ação da gravidade, o líquido mais denso fica por baixo, desde que os líquidos sejam imiscíveis. No próximo capítulo, ao estudarmos o Princípio de Arquimedes, entenderemos a razão disso.

Consideremos, por exemplo, o caso representado na figura 27. Sendo d_o a densidade do óleo e d_a a densidade da água, a pressão no ponto Y é dada por:

$$p_Y = p_{atm} + d_o g h_1 + d_a g h_2$$

A Lei de Stevin e os gases

A Lei de Stevin pode ser aplicada quando a densidade do fluido é a mesma em todos os seus pontos. É o caso dos líquidos, que são altamente incompressíveis.

Porém, no caso dos gases, que são facilmente compressíveis, muitas vezes a densidade não é uniforme, isto é, não é a mesma em todas as “porções”, não sendo, então, possível aplicar a Lei de Stevin. Isso se dá, por exemplo, com a atmosfera terrestre: a densidade do ar vai diminuindo à medida que nos afastamos da superfície. Para grandes altitudes, ou seja, para grandes desníveis h , a densidade varia muito, não valendo, então, a Lei de Stevin.

Para desníveis inferiores a 10 metros, a variação da densidade é pequena e aí a Lei de Stevin vale parcialmente. Por outro lado, como as densidades dos gases são muito “pequenas” em comparação com as dos líquidos, para $h < 10$ m o produto dgh será também muito “pequeno” (fig. 28).



Figura 26. $d_{\text{água}} > d_{\text{óleo}}$

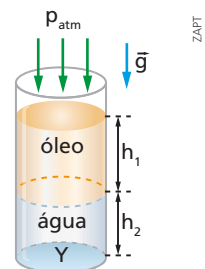


Figura 27.

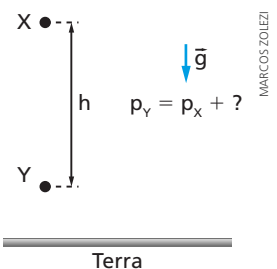
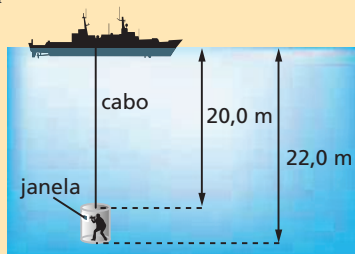


Figura 28.

Assim, quando trabalhamos com gases contidos em recipientes de dimensões menores que 10 metros, podemos admitir que a pressão é praticamente a mesma em todos os pontos, e também podemos falar simplesmente **pressão do gás**, sem especificar o ponto. A pressão do gás é o resultado do bombardeio das moléculas do gás que estão em constante agitação a altas velocidades, como vimos na introdução do capítulo.

Exercícios de Aplicação

18. Para filmar uma região submarina, um cinegrafista entra em uma câmara cilíndrica, de paredes de aço e provida de uma janela de vidro reforçado. A massa da câmara (incluindo o cinegrafista) é $m = 3\,200\text{ kg}$ e a área da base do cilindro é $A = 1,50\text{ m}^2$. A câmara é mantida na profundidade indicada na figura por meio de um cabo de aço preso a uma embarcação. Suponha que a aceleração da gravidade valha $g = 10,0\text{ m/s}^2$, que a densidade da água seja $d = 1,00 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$ e que a pressão atmosférica seja $p_{\text{atm}} = 1,00 \cdot 10^5\text{ Pa}$.



Calcule a intensidade da:

- força exercida pela água na base superior da câmara;
- força exercida pela água na base inferior da câmara;
- força resultante exercida pela água sobre a câmara;
- força de tração no fio.

Resolução:

Todos os pontos da base superior estão à mesma profundidade e, portanto, suportam a mesma pressão p_1 . Todos os pontos da base inferior também estão à mesma profundidade e assim suportam a mesma pressão p_2 . Porém, na face lateral a pressão vai aumentando com a profundidade.

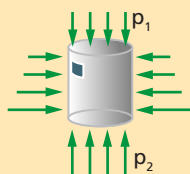


Figura a.

- Na profundidade $h_1 = 20,0\text{ m}$, a pressão p_1 é dada por:

$$p_1 = p_{\text{atm}} + dgh_1$$

$$p_1 = (1,00 \cdot 10^5) + (1,00 \cdot 10^3)(10,0)(20,0)$$

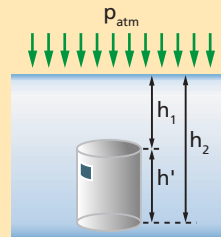
$$p_1 = 3,00 \cdot 10^5\text{ N/m}^2 = 3,00 \cdot 10^5\text{ Pa}$$
 Sendo $A = 1,5\text{ m}^2$, a força total exercida na base superior tem intensidade:

$$F_1 = p_1 \cdot A$$

$$F_1 = (3,00 \cdot 10^5\text{ N/m}^2)(1,50\text{ m}^2)$$

$$F_1 = 4,50 \cdot 10^5\text{ N}$$

b)



ILUSTRAÇÕES: ZAPET

Figura b.

Na profundidade $h_2 = 22,0\text{ m}$, a pressão p_2 é dada por:

$$p_2 = p_{\text{atm}} + dgh_2 \text{ ou } p_2 = p_1 + dgh'$$

em que $h' = 2,0\text{ m}$ (fig. b)

Assim:

$$p_2 = p_1 + dgh'$$

$$p_2 = (3,00 \cdot 10^5) + (1,00 \cdot 10^3)(10,0)(2,0)$$

$$p_2 = (3,00 \cdot 10^5) + (0,20 \cdot 10^5) = 3,20 \cdot 10^5$$

$$p_2 = 3,20 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$$

A força total exercida pela água na base inferior tem intensidade:

$$F_2 = p_2 \cdot A$$

$$F_2 = (3,20 \cdot 10^5\text{ N/m}^2)(1,50\text{ m}^2)$$

$$F_2 = 4,80 \cdot 10^5\text{ N}$$



Figura c.

- Pela simetria da situação (fig. a), na face lateral as forças (horizontais) se cancelam. Assim, a força resultante exercida pela água sobre a câmara (\vec{F}_A) é a resultante de \vec{F}_1 com \vec{F}_2 :

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Observando a figura d e lembrando que $F_2 > F_1$, temos:

$$F_A = F_2 - F_1$$

$$F_A = 4,80 \cdot 10^5 - 4,50 \cdot 10^5$$

$$F_A = 0,30 \cdot 10^5$$

$$F_A = 3,0 \cdot 10^4\text{ N}$$



Figura d.

- d) A câmara está em equilíbrio sob a ação de três forças (fig. e): a tração do fio (\vec{T}), o peso (\vec{P}) e a força total exercida pela água (\vec{F}_A).

Assim, devemos ter:

$$T + F_A = P \quad \text{ou}$$

$$T = P - F_A$$

mas:

$$P = mg$$

$$P = (3\,200\text{ kg})(10\text{ m/s}^2)$$

$$P = 3,2 \cdot 10^4\text{ N}$$

Portanto:

$$T = P - F_A = (3,2 \cdot 10^4\text{ N}) - (3,0 \cdot 10^4\text{ N})$$

$$T = 2 \cdot 10^3\text{ N}$$

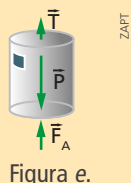
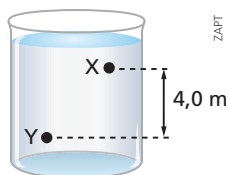
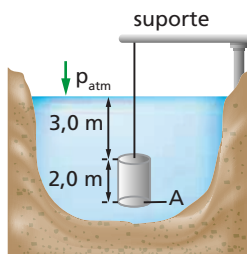


Figura e.

19. Um recipiente contém líquido de densidade $d = 1,5\text{ g/cm}^3$ (veja a figura). Sabe-se que a pressão no ponto X é $1,1 \cdot 10^5\text{ Pa}$. Sendo $g = 10\text{ m/s}^2$, calcule a pressão no ponto Y.



20. Um corpo cilíndrico cuja área da base é $A = 0,50\text{ m}^2$ e cuja massa é 1400 kg está mergulhado na água de um lago, preso a um cabo, como mostra a figura. Sabe-se que $g = 10\text{ m/s}^2$, a densidade da água é $1,0 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$ e a pressão atmosférica é $1,0 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$. Calcule:



- a pressão na face superior do corpo;
- a pressão na face inferior do corpo;
- a intensidade da força total exercida pela água sobre o corpo;
- a intensidade da força exercida pelo cabo sobre o corpo.

21. Na figura a temos o gráfico da pressão em função da profundidade h de um líquido contido em um recipiente aberto (fig. b).

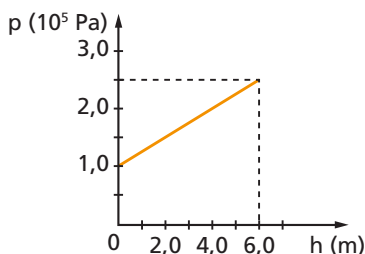


Figura a.

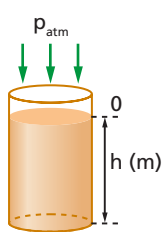
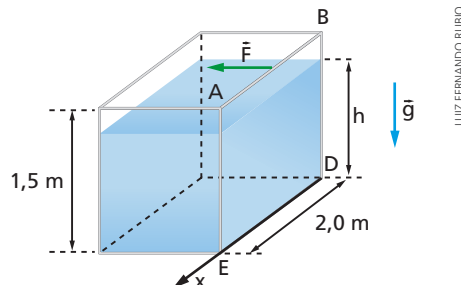


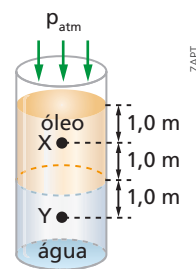
Figura b.

- Qual é o valor da pressão atmosférica?
- Qual é a densidade do líquido?

22. A figura representa uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo, com água até a altura $h = 1,2\text{ m}$. A face ABDE da caixa, que pode girar em torno do eixo x, é mantida na posição vertical por meio da aplicação de uma força horizontal \vec{F} . Sabendo que a densidade da água é $1,0 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$ e que $g = 10\text{ m/s}^2$, determine a intensidade de \vec{F} .

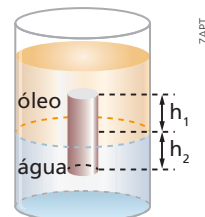


23. Numa região em que $g = 10\text{ m/s}^2$ e a pressão atmosférica é $p_{\text{atm}} = 10 \cdot 10^5\text{ Pa}$, temos óleo e água em equilíbrio dentro de um recipiente, como mostra a figura. Sabendo que a densidade do óleo é $9,0 \cdot 10^2\text{ kg/m}^3$ e a densidade da água é $1,0 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$, calcule:

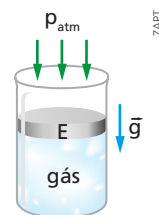


- a pressão no ponto X;
- a pressão no ponto Y.

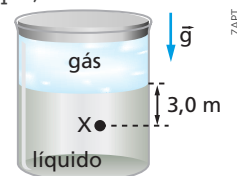
24. Um corpo cilíndrico e homogêneo flutua parcialmente imerso na água e parcialmente imerso no óleo, como ilustra a figura. Sabe-se que a densidade do óleo é $d_1 = 0,90\text{ g/cm}^3$, a densidade da água é $d_2 = 1,0\text{ g/cm}^3$, $h_1 = 8,0\text{ cm}$ e $h_2 = 2,0\text{ cm}$. Calcule a densidade do corpo (d_c).



25. Na figura representamos um gás aprisionado em um recipiente cilíndrico por meio de um êmbolo E, que pode se mover sem atrito. O êmbolo tem área da base $A = 2,0 \cdot 10^{-2}\text{ m}^2$ e peso $P = 400\text{ N}$. Supondo que a pressão atmosférica seja $p_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$, calcule a pressão do gás.



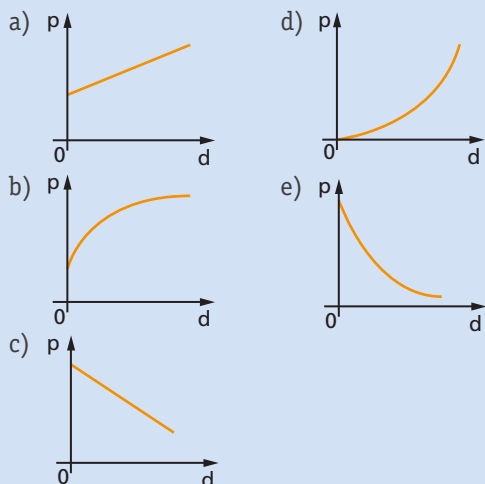
26. A figura representa a situação em que, dentro de um recipiente fechado, há um gás, sob pressão de $2,3 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$, e um líquido, cuja densidade é $4,0\text{ g/cm}^3$. Sendo $g = 10\text{ m/s}^2$, determine a pressão no ponto X.



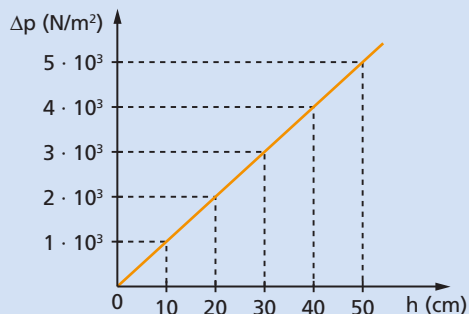
27. A pressão atmosférica próxima da superfície da Terra é, aproximadamente, $1,0 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$. Usando as informações do exercício 7, calcule o valor aproximado da pressão atmosférica em lb/in^2 .

Exercícios de Reforço

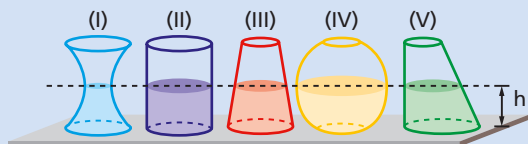
28. (Unifor-CE) O gráfico da pressão p exercida num ponto de um líquido incompressível contido num reservatório, em função da distância d do ponto à superfície do líquido, está representado corretamente em:



29. (UF-PA) A representação gráfica da variação de pressão medida no interior de um líquido contido num recipiente aberto, relativa à superfície livre do mesmo, é mostrada na figura. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a densidade do líquido.



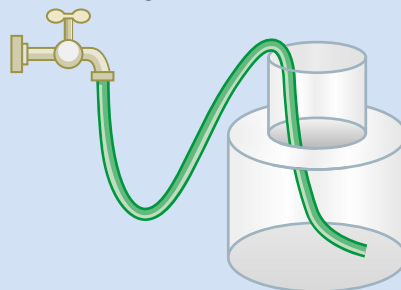
30. (UF-MT) Todos os recipientes a seguir estão preenchidos à mesma altura h por um líquido de mesma densidade. A partir dessas informações, assinale a afirmativa correta.



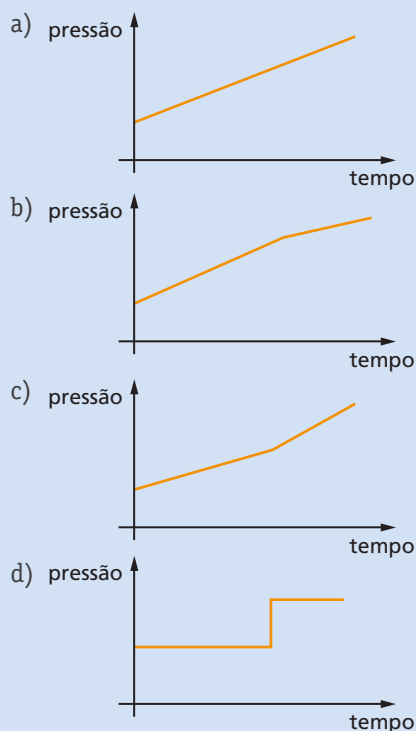
- a) No recipiente II, a força que o líquido exerce sobre a base é igual ao peso do líquido.
- b) A pressão que o líquido exerce sobre a base é maior nos recipientes IV e V que nos outros.
- c) A pressão que o líquido exerce sobre a base é menor no recipiente III que nos outros.
- d) A força que o líquido exerce sobre a base dos recipientes independe da área das bases.

- e) Em todos os recipientes a força sobre a base é menor que o peso do líquido.

31. (UF-MG) Um reservatório de água é constituído de duas partes cilíndricas, interligadas como mostrado nesta figura:



A área da seção reta do cilindro inferior é maior do que a do cilindro superior. Inicialmente, esse reservatório está vazio. Em certo instante, começa-se a enchê-lo com água, mantendo-se uma vazão constante. Assinale a alternativa cujo gráfico melhor representa a pressão, no fundo do reservatório, em função do tempo, desde o instante em que se começa a enchê-lo até o instante em que ele começa a transbordar.

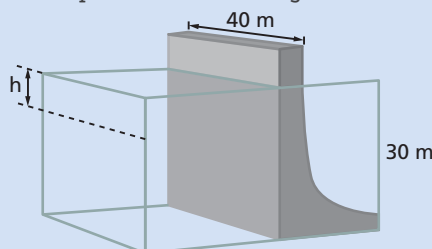


32. (U. F. Viçosa-MG) Um mergulhador profissional pode ser submetido a uma pressão máxima de $5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, sem que ocorram danos a seu organismo. Considerando a pressão atmosférica igual a 10^5 N/m^2 , a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade da água $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, podemos

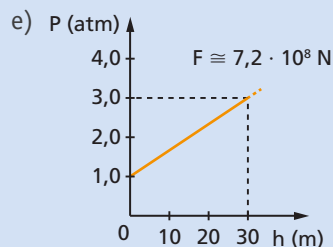
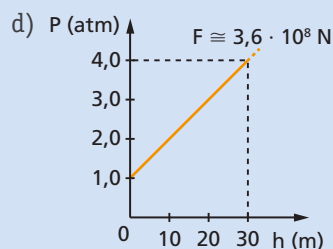
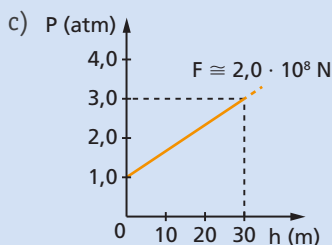
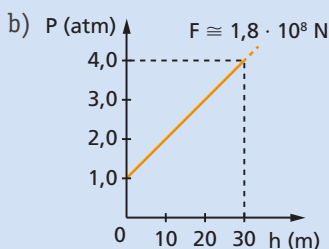
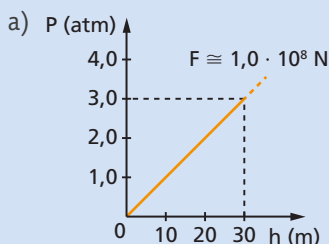
afirmar que a profundidade máxima recomendada a esse mergulhador é de aproximadamente:

- a) 450 m c) 100 m e) 40 m
b) 30 m d) 200 m

33. (Unesp-SP) As barragens em represas são projetadas para suportar grandes massas de água. Na situação representada na figura, temos uma barragem de largura 40 m, retendo uma massa de água de 30 m de profundidade. Conhecendo-se o comportamento da pressão com a altura da coluna de um fluido e levando-se em conta que a pressão atmosférica age dos dois lados da barragem, é possível determinar a força horizontal da água da represa sobre a barragem.

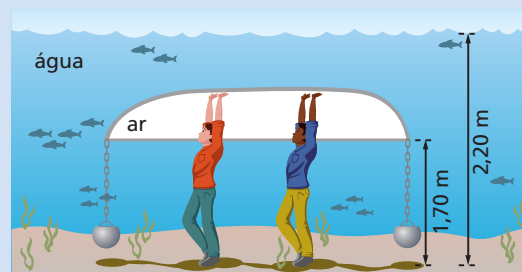


Considere a pressão atmosférica como $1 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a densidade da água $\rho_{\text{água}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a aceleração da gravidade $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Qual das alternativas melhor representa a variação da pressão com a altura h da água em relação à superfície e a força horizontal exercida por essa massa de água sobre a barragem?



34. (UF-PR) Uma tarefa de rotina em depósitos de combustíveis consiste em retirar uma amostra de líquido dos tanques e colocar em provetas para análise. Ao inspecionar o conteúdo de um dos tanques de um certo depósito, observou-se na parte inferior da proveta uma coluna de 20 cm de altura de água e, flutuando sobre ela, uma coluna com 80 cm de altura de óleo. Considerando a densidade da água igual a $1,00 \text{ g/cm}^3$, a do óleo igual a $0,80 \text{ g/cm}^3$, a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 e a pressão atmosférica igual a $1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a pressão hidrostática no fundo desse tubo é:
- a) $1,094 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ d) $1,66 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
b) $9,41 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e) $0,941 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
c) $1,03 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

35. (UF-RJ) Dois fugitivos devem atravessar um lago sem serem notados. Para tal, emborcam um pequeno barco que afunda com o auxílio de pesos adicionais. O barco emborcado mantém, aprisionada em seu interior, uma certa quantidade de ar, como mostra a figura. No instante retratado, tanto o barco quanto os fugitivos estão em repouso e a água está em equilíbrio hidrostático. Considere a densidade da água do lago igual a $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a aceleração da gravidade igual a $10,0 \text{ m/s}^2$. Usando os dados indicados na figura, calcule a diferença entre a pressão do ar aprisionado pelo barco e a pressão do ar atmosférico.



6. Vasos comunicantes

A Lei de Stevin nos fornece a diferença de pressão entre dois pontos quaisquer de um líquido em equilíbrio (e sob a ação da gravidade), independentemente da forma do recipiente. Assim, por exemplo, no caso da figura 29, podemos escrever:

$$P_Y = P_X + dgh \quad \text{ou} \quad P_Y = P_Z + dgh$$

Os pontos X e Z, pelo fato de estarem no mesmo nível, têm pressões iguais:

$$P_X = P_Z$$

Do mesmo modo, estando os dois lados do recipiente submetidos à mesma pressão nos dois lados (pressão atmosférica), o nível do líquido deve ser o mesmo nos dois lados. Isso é mostrado na figura 30, na qual vários vasos comunicantes, de formas e larguras diferentes, contêm o mesmo líquido. Podemos observar que em todos eles o líquido atinge o mesmo nível.

Ao se construir um reservatório de água para abastecer uma cidade, procura-se colocá-lo num ponto o mais alto possível (fig. 31), de modo que, pelo princípio dos vasos comunicantes, a água atinja todas as residências. Quando isso não é possível, como no caso de um edifício, há a necessidade de usar uma bomba que eleve a água do nível da rua para uma caixa situada no teto do edifício.

Se colocarmos em vasos comunicantes líquidos diferentes e imiscíveis, na posição de equilíbrio poderemos ter desníveis entre as superfícies livres, como ilustra a figura 32.



Figura 31.

ALBERTO DE STEFANO

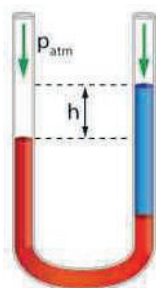


Figura 32.

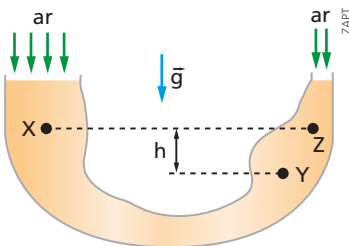


Figura 29.

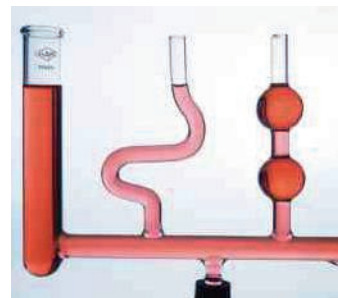


Figura 30. Vasos comunicantes de formas diferentes apresentam o mesmo nível de um mesmo líquido.

© RUDDY GOLD

Manômetro

Os instrumentos destinados a medir a pressão de um gás são chamados **manômetros**. O termo *mano* deriva do grego *manós*, que significa “pouco denso”.

Na figura 33 apresentamos dois exemplos de **manômetro de tubo aberto**, assim chamado pelo fato de um de seus ramos estar aberto, em contato com a atmosfera.

Sendo d a densidade do mercúrio, no caso da figura 33a, temos:

$$\text{pressão do gás} = p_G = p_B = p_C = p_{\text{atm}} + dgh$$

isto é:

$$p_G = p_{\text{atm}} + dgh \quad (1)$$

No caso da figura 33b, obtemos:

$$p_G = p_{\text{atm}} - dgh \quad (2)$$

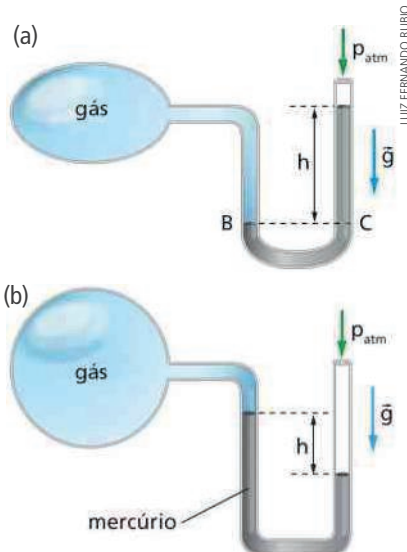


Figura 33. Manômetros de tubo aberto.

LUIZ FERNANDO RUBIO

A diferença entre a pressão do gás e a pressão atmosférica é chamada **pressão manométrica** (p_M):

$$p_M = p_G - p_{atm}$$

Podemos observar que no caso da figura 33a temos $p_M > 0$ e no caso da figura 33b temos $p_M < 0$. Quando a pressão manométrica é positiva, é também chamada **sobrepressão**.

Para diferenciar da pressão manométrica, a pressão p_G nas equações ① e ② é chamada **pressão absoluta do gás**.

Nos postos de combustíveis há aparelhos usados para “calibrar” os pneus dos veículos, isto é, para introduzir ou retirar ar dos pneus de modo que eles fiquem com a pressão recomendada pelos fabricantes dos veículos. Esses aparelhos estão acoplados a medidores de pressão, que indicam a pressão manométrica dos pneus, isto é, eles são manômetros. Assim, por exemplo, se o manômetro indica 26 lb/in², para obtermos a pressão absoluta do ar dentro do pneu devemos somar a pressão atmosférica, que, como vimos no exercício 27, vale aproximadamente 14,7 lb/in². Então:

$$p_G \cong 26 \text{ lb/in}^2 + 14,7 \text{ lb/in}^2 \cong 40,7 \text{ lb/in}^2$$

O conceito de pressão manométrica foi definido inicialmente para os gases. Porém, depois, ele foi estendido para o caso dos líquidos. Assim, por exemplo, na figura 34, sendo d a densidade do líquido, temos:

$$p_X = p_{atm} + dgh$$

$$p_X = \text{pressão absoluta no ponto } X$$

$$p_X - p_{atm} = \text{pressão manométrica no ponto } X$$

É importante ressaltar que os manômetros medem sempre a pressão manométrica.

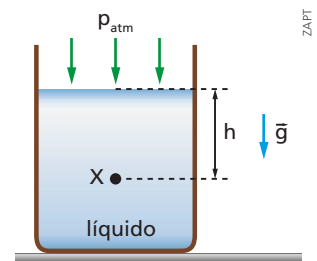


Figura 34.

Exercícios de Aplicação

36. Na figura a representamos um tubo em U contendo dois líquidos imiscíveis em equilíbrio: a água, cuja densidade é $d_A = 1,0 \text{ g/cm}^3$, e o óleo de oliva, cuja densidade é $d_0 = 0,90 \text{ g/cm}^3$. Sabendo que $h_0 = 20 \text{ cm}$, calcule o desnível h entre as superfícies livres dos dois líquidos.

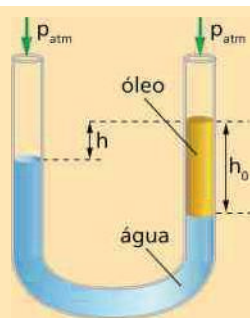


Figura a.

Resolução:

Na figura b, os pontos X e Y pertencem a um mesmo líquido (água) e estão no mesmo nível. Portanto, a pressão no ponto X deve ser igual à pressão no ponto Y.

$$p_X = p_Y \quad \text{①}$$

Calculando p_X pelo ramo esquerdo do tubo, temos:

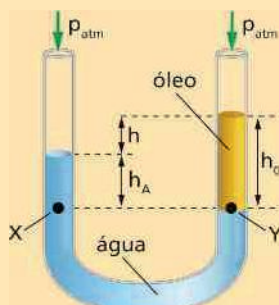


Figura b.

$$p_X = p_{atm} + d_A \cdot g \cdot h_A \quad \text{②}$$

Calculando p_Y pelo ramo direito do tubo, temos:

$$p_Y = p_{atm} + d_0 \cdot g \cdot h_0 \quad \text{③}$$

Colocando ② e ③ em ①:

$$p_{atm} + d_A \cdot g \cdot h_A = p_{atm} + d_0 \cdot g \cdot h_0$$

$$d_A \cdot h_A = d_0 \cdot h_0$$

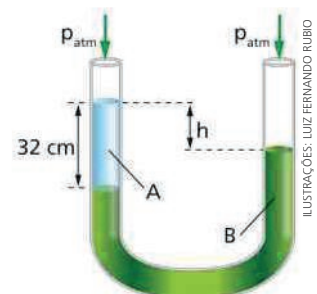
Portanto:

$$h_A = \frac{d_0}{d_A} \cdot h_0 = \left(\frac{0,90}{1,0} \right) \cdot (20) \Rightarrow h_A = 18 \text{ cm}$$

Assim:

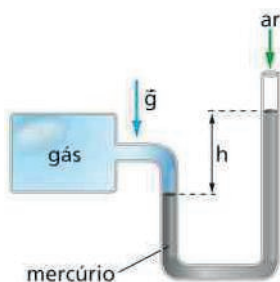
$$h = h_0 - h_A = 20 \text{ cm} - 18 \text{ cm} \Rightarrow h = 2,0 \text{ cm}$$

37. Dois líquidos imiscíveis A e B, de densidade $d_A = 0,90 \text{ g/cm}^3$ e $d_B = 2,4 \text{ g/cm}^3$, estão em equilíbrio num tubo em U, como ilustra a figura. Calcule o desnível h entre as superfícies livres dos dois líquidos.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ FERNANDO RUBIO

38. O dispositivo representado foi montado para medir a pressão de um gás contido em um recipiente. O gás comprime uma coluna de mercúrio, cuja densidade é $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, de modo que o desnível h vale 0,380 m.

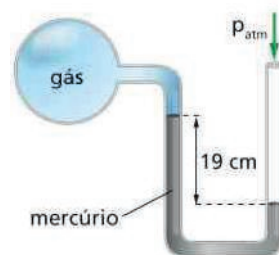


Sabendo que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e que a pressão atmosférica vale $p_{\text{atm}} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, calcule:

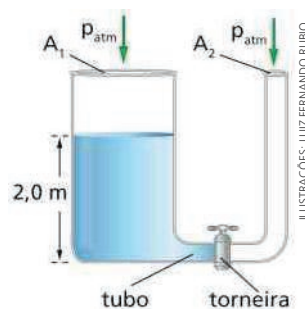
- a pressão manométrica do gás;
 - a pressão absoluta do gás.
39. Sabendo que $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, que a pressão atmosférica é $1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e que a densidade do

mercúrio é $13,6 \text{ g/cm}^3$, para o sistema em equilíbrio representado, calcule:

- a pressão manométrica do gás;
- a pressão absoluta do gás.



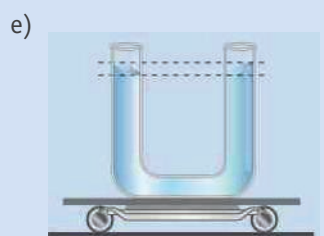
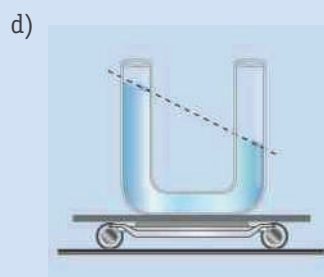
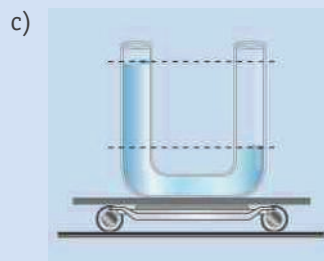
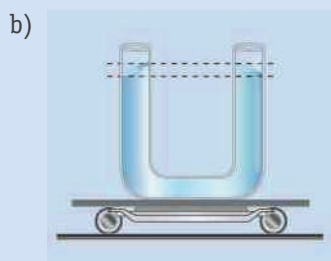
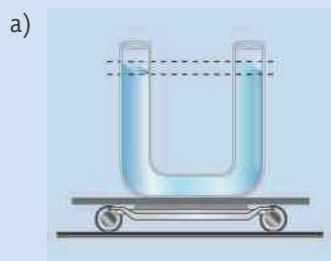
40. Dois vasos cilíndricos cujas áreas da base são $A_1 = 6,0 \text{ m}^2$ e $A_2 = 2,0 \text{ m}^2$ estão ligados por um tubo de dimensões desprezíveis. Inicialmente o vaso da esquerda contém água até uma altura de 2,0 m, abrindo-se, então, a torneira. Após estabelecer-se o equilíbrio, calcule a altura da coluna de água:



- no vaso da esquerda;
- no vaso da direita.

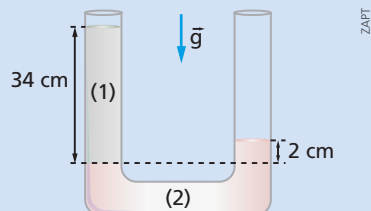
Exercícios de Reforço

41. (Fuvest-SP) Um tubo em forma de U, parcialmente cheio de água, está montado sobre um carrinho que pode mover-se sobre trilhos horizontais e retilíneos, como mostra a figura. Quando o carrinho se move com aceleração constante para a direita, a figura que melhor representa a superfície do líquido é:



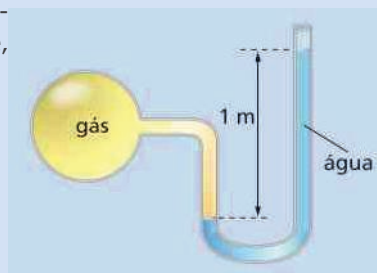
ILUSTRAÇÕES: LUIZ FERNANDO RUBIO

42. (UF-RJ) Um tubo em U, aberto em ambos os ramos, contém dois líquidos não miscíveis em equilíbrio hidrostático. Observe, como mostra a figura, que a altura da coluna do líquido (1) é de 34 cm e que a diferença de nível entre a superfície livre do líquido (2), no ramo da direita, e a superfície de separação dos líquidos, no ramo da esquerda, é de 2,0 cm. Considere que a densidade do líquido (1) é igual a $0,80 \text{ g/cm}^3$. Nesses termos, calcule a densidade do líquido (2).



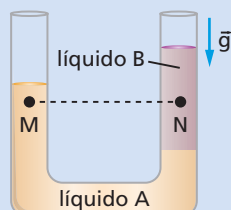
43. (U. F. Santa Maria-RS) Um dos ramos de um tubo em forma de U está aberto à atmosfera e o outro conectado a um balão, contendo um gás, conforme ilustra a figura. O tubo contém água, cuja densidade é $1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Sabendo que a pressão exercida pela atmosfera é $1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, e considerando a aceleração da gravidade 10 m/s^2 , a pressão exercida pelo gás é, em N/m^2 :

- $0,9 \cdot 10^5$
- $1,0 \cdot 10^5$
- $1,1 \cdot 10^5$
- $1,2 \cdot 10^5$
- $1,3 \cdot 10^5$



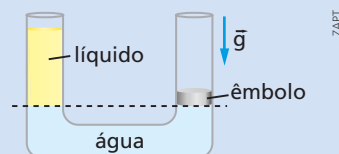
44. (UF-AM) A figura mostra um tubo em U, aberto nas duas extremidades. Esse tubo contém dois líquidos A e B que não se misturam e que têm densidades diferentes. Sejam p_M e p_N as pressões nos pontos M e N, respectivamente. Esses pontos estão no mesmo nível, como indicado pela linha tracejada, e as densidades dos dois líquidos são tais que $d_A = 2d_B$. Nessas condições, é correto afirmar que:

- $p_M < p_N$
- $p_M = p_N$
- $p_M > p_N$
- $p_M = 2p_N$
- nada se pode afirmar a respeito das pressões.



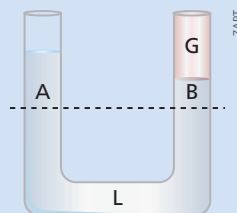
45. (UF-PE) Um tubo em U, aberto em ambas as extremidades e de seção reta uniforme, contém uma certa quantidade de água. Adicionam-se 500 mL de um líquido imiscível, de densidade

$\rho = 0,80 \text{ g/cm}^3$, no ramo da esquerda. Qual o peso do êmbolo, em newtons, que deve ser colocado no ramo da direita, para que os níveis de água nos dois ramos sejam iguais? Despreze o atrito do êmbolo com as paredes do tubo.

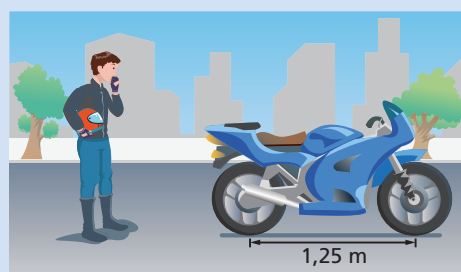


46. (Unifesp-SP) A figura representa um tubo em U, contendo um líquido L e fechado em uma das extremidades, onde está confinado um gás G; A e B são dois pontos no mesmo nível. Sendo p_0 a pressão atmosférica local, p_G a pressão do gás confinado, p_A e p_B a pressão total nos pontos A e B (pressão devida à coluna líquida somada à pressão que atua na sua superfície), pode-se afirmar que:

- $p_0 = p_G = p_A = p_B$
- $p_0 > p_G$ e $p_A = p_B$
- $p_0 < p_G$ e $p_A = p_B$
- $p_0 > p_G > p_A > p_B$
- $p_0 < p_G < p_A < p_B$



47. (UF-MG) Paulo Sergio verifica a calibração dos pneus de sua motocicleta e encontra 26 lb/pol^2 ($1,8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$) no dianteiro e 32 lb/pol^2 ($2,2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$) no traseiro. Em seguida, ele mede a área de contato dos pneus com o solo, obtendo 25 cm^2 em cada um deles. A distância entre os eixos das rodas, especificada no manual da motocicleta, é de 1,25 m, como mostrado nesta figura. Sabe-se que um calibrador de pneus mede a diferença entre a pressão interna e a pressão atmosférica.



Com base nessas informações:

- Calcule o peso aproximado dessa motocicleta;
- O centro de gravidade dessa motocicleta está mais próximo do eixo da roda traseira ou do eixo da roda dianteira?

(Sugestão dos autores: use $p_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.)

7. Princípio de Pascal

Em 1651, o matemático e físico francês Blaise Pascal (1623-1662) enunciou o seguinte princípio:

Uma pressão externa aplicada a um líquido dentro de um recipiente se transmite, sem diminuição, a todo o líquido e às paredes do recipiente.

Mecanismos hidráulicos

Uma das aplicações do Princípio de Pascal é a “multiplicação” de forças por meio dos chamados **mecanismos hidráulicos**.

Consideremos, por exemplo, a situação mostrada na figura 35a. Um líquido está dentro de um tubo de seção variável, tendo um êmbolo de área A_1 e um êmbolo de área A_2 . Aplicando ao êmbolo da esquerda uma força de intensidade F_1 , estamos transmitindo ao líquido uma pressão que se transmite sem diminuição a todo o fluido, inclusive ao êmbolo da direita, de modo que, sobre este, aparece uma força de intensidade F_2 . Como a pressão deve ser a mesma nos dois êmbolos, devemos ter:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (1)$$

Sendo $A_2 > A_1$, pela equação acima concluímos que $F_2 > F_1$. Assim, aplicando uma força de “pequena” intensidade, podemos obter uma força de “grande” intensidade.

Comparemos a figura 35a com a figura 35b. Enquanto o êmbolo da esquerda faz um percurso x_1 , o êmbolo da direita faz um percurso x_2 . Porém, sendo o líquido incompressível, os volumes V_1 e V_2 devem ser iguais.

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = A_1 \cdot x_1 \\ V_2 = A_2 \cdot x_2 \end{array} \right\} V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 \cdot x_1 = A_2 \cdot x_2 \quad (2)$$

Multiplicando membro a membro as equações (1) e (2), temos:

$$\frac{F_1}{A_1} \cdot A_1 x_1 = \frac{F_2}{A_2} \cdot A_2 x_2 \Rightarrow F_1 x_1 = F_2 x_2$$

Mas $F_1 x_1$ é o trabalho realizado pela força de intensidade F_1 e $F_2 x_2$ é o trabalho realizado pela força de intensidade F_2 . Portanto, **os trabalhos são iguais**. Isso significa que **um mecanismo hidráulico multiplica força, mas não energia**.

Os mecanismos hidráulicos são usados, por exemplo, em freios de automóveis (fig. 36a) e elevadores usados em postos de gasolina (fig. 36b). No caso do elevador hidráulico, um compressor envia ar sob grande pressão que comprime o óleo de um reservatório, o qual comprime o pistão.

Usam-se os mecanismos hidráulicos também na direção hidráulica dos veículos.

A transmissão de pressão ocorre também no interior de gases, mas o processo é mais demorado que no caso dos líquidos pelo fato de os gases serem facilmente compressíveis.

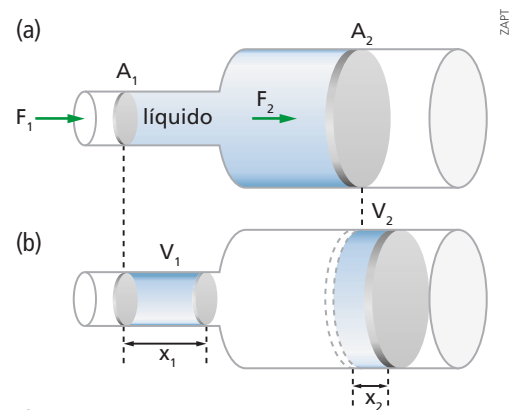


Figura 35.

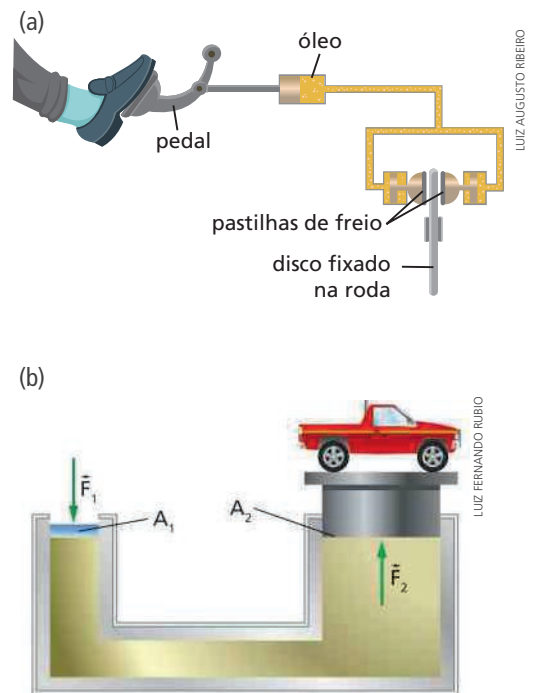
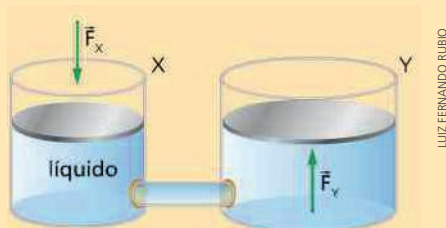


Figura 36.

Exercícios de Aplicação

48. No sistema hidráulico esquematizado, os êmbolos X e Y , de massas desprezíveis, têm áreas $A_X = 20 \text{ cm}^2$ e $A_Y = 50 \text{ cm}^2$. Aplicando-se, durante um intervalo de tempo Δt , uma força de intensidade $F_X = 60 \text{ N}$ ao êmbolo X , este sofre um deslocamento $d_X = 5 \text{ cm}$.



Calcule:

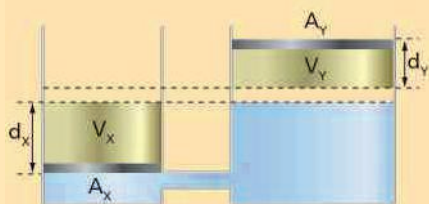
- a intensidade da força \vec{F}_Y exercida pelo líquido no êmbolo Y ;
- o deslocamento sofrido pelo êmbolo Y ;
- os trabalhos de \vec{F}_X e \vec{F}_Y .

Resolução:

- De acordo com o Princípio de Pascal, a pressão deve ser a mesma nos êmbolos:

$$p = \frac{F_X}{A_X} = \frac{F_Y}{A_Y} \Rightarrow \frac{60 \text{ N}}{20 \text{ cm}^2} = \frac{F_Y}{50 \text{ cm}^2} \Rightarrow F_Y = 150 \text{ N}$$

- Como o líquido é incompressível, os volumes V_X e V_Y devem ser iguais:



$$V_X = V_Y \Rightarrow A_X d_X = A_Y d_Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (20)(5,0) = 50(d_Y) \Rightarrow$$

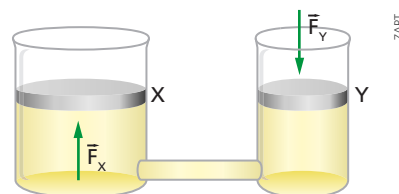
$$d_Y = 2,0 \text{ cm}$$

- Os trabalhos de \vec{F}_X e \vec{F}_Y devem ser iguais. Sendo $d_X = 5,0 \text{ cm} = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ e $d_Y = 2,0 \text{ cm} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, temos:

$$\mathcal{W}_{F_X} = F_X \cdot d_X = (60 \text{ N})(5,0 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow \mathcal{W}_{F_X} = 3,0 \text{ J}$$

$$\mathcal{W}_{F_Y} = F_Y \cdot d_Y = (150 \text{ N})(2,0 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow \mathcal{W}_{F_Y} = 3,0 \text{ J}$$

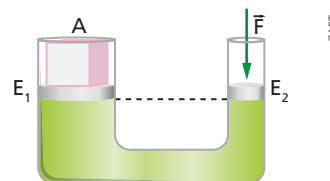
49. O sistema hidráulico representado estava inicialmente em repouso, tendo os êmbolos X e Y áreas respectivamente iguais a 50 cm^2 e 20 cm^2 e pesos desprezíveis.



Aplicando-se durante um intervalo de tempo Δt uma força de intensidade $F_Y = 400 \text{ N}$ ao êmbolo Y , este desce 15 cm . Responda:

- Quanto subirá o êmbolo X no intervalo de tempo Δt ?
- Qual é a intensidade da força \vec{F}_X exercida pelo líquido sobre o êmbolo X ?
- No intervalo de tempo Δt , quais são os trabalhos realizados pelas forças \vec{F}_X e \vec{F}_Y ?

50. No sistema hidráulico representado, os êmbolos (de pesos desprezíveis) E_1 e E_2 têm raios 15 cm e 5 cm , respectivamente. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e sabendo que a massa do bloco A é 36 kg , qual é a intensidade da força \vec{F} que equilibra o sistema?



51. Nas figuras representamos um líquido de densidade $2,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ dentro de um recipiente que contém um êmbolo E , de área $A = 0,15 \text{ m}^2$, o qual pode mover-se sem atrito.

Na situação da figura a , a pressão no ponto X é $1,2 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^2$. Sabe-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$.

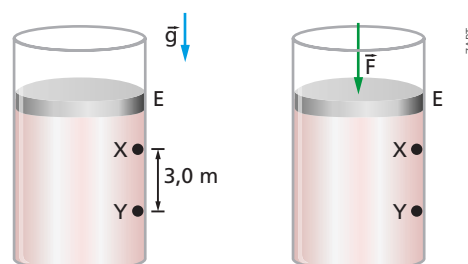


Figura a .

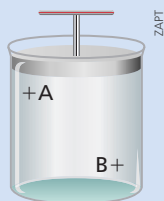
Figura b .

- Na situação da figura a , qual é a pressão no ponto Y ?
- Se aplicarmos ao êmbolo uma força \vec{F} , como mostra a figura b , cuja intensidade é $F = 3,0 \cdot 10^3 \text{ N}$, quais as novas pressões nos pontos X e Y ?

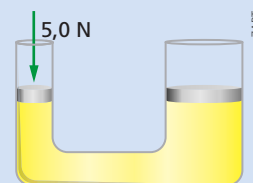
Exercícios de Reforço

52. (U. F. Ouro Preto-MG) Um recipiente, dotado de um êmbolo, contém água. Quando a pressão exercida pelo êmbolo é $2 \cdot 10^5$ Pa, a diferença entre as pressões dos pontos B e A é $6 \cdot 10^4$ Pa. Se a pressão do êmbolo for elevada para $20 \cdot 10^5$ Pa, a diferença entre as pressões dos pontos B e A será:

- a) $120 \cdot 10^4$ Pa
- b) $60 \cdot 10^4$ Pa
- c) $22 \cdot 10^4$ Pa
- d) $6 \cdot 10^4$ Pa



53. (UF-PE) Dois tubos cilíndricos interligados, conforme a figura, estão cheios de um líquido incompressível. Cada tubo tem um pistão capaz de ser movido verticalmente e, assim, pressionar o líquido. Os raios internos dos cilindros são 5,0 cm e 20 cm. Se uma força de intensidade 5,0 N é aplicada no pistão do tubo menor, conforme a figura, qual a intensidade da força, em newtons, transmitida ao pistão do tubo maior?



8. Pressão atmosférica

Já mencionamos o fato de a atmosfera exercer uma pressão que, próximo da superfície da Terra, vale aproximadamente 10^5 pascals. Hoje, com a tecnologia disponível, há sofisticados aparelhos para medir a pressão atmosférica, chamados **barômetros** (do grego *báros*, que significa “pressão”). Apesar disso, vamos descrever o experimento por meio do qual, pela primeira vez, foi determinado o valor da pressão atmosférica, pois, a partir desse experimento, foram definidas algumas unidades de pressão que são usadas até hoje.

Em 1643, o matemático e físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) encheu com mercúrio (Hg) um tubo de vidro de aproximadamente 1 metro de comprimento (fig. 37a). Em seguida, mantendo fechado o tubo, inverteu-o e mergulhou-o num recipiente que também continha mercúrio (fig. 37b). Depois, abrindo a extremidade inferior, notou que o mercúrio descia um pouco (fig. 37c), estabilizando num comprimento de aproximadamente 76 cm acima da superfície livre do mercúrio.

A parte superior fica vazia, isto é, ali temos vácuo. Na realidade, como veremos no estudo da Termologia (volume 2 desta Coleção), esse vácuo não é perfeito, pois uma pequena quantidade de mercúrio se evapora preenchendo o espaço. Mas a pressão desse vapor é tão pequena que podemos admitir que nessa região há um “quase” vácuo, sendo a pressão quase nula ($p_x \approx 0$).

Torricelli interpretou esse resultado afirmando que o que mantinha a coluna nessa altura era a pressão atmosférica. O ar comprime a superfície livre do mercúrio, “empurrando-o” para cima. Se for feito um orifício na parte superior do tubo (fig. 37d), o ar penetrará por cima, e a coluna de mercúrio abaixará. Já se esse experimento for realizado por um astronauta na Lua (coisa que Torricelli não podia fazer), a coluna abaixará mesmo com a parte superior fechada, pois lá não há ar para “segurar” essa coluna.

Vimos que, para gases contidos em recipientes de dimensões não maiores que 10 m, devido à baixa densidade dos gases, podemos admitir que a pressão do gás é praticamente a mesma em todos os pontos. Porém, a camada atmosférica tem espessura de várias dezenas de quilômetros e, assim, a diferença de nível influi no valor da pressão atmosférica. Por exemplo, a uma altitude de 90 m a pressão atmosférica é cerca de 1% menor que ao nível do mar.

No experimento de Torricelli, a coluna de mercúrio tem comprimento de aproximadamente 76 cm quando o experimento é realizado ao nível do mar, mas, à medida que nos afastamos da superfície da Terra, o comprimento da coluna vai diminuindo. Além

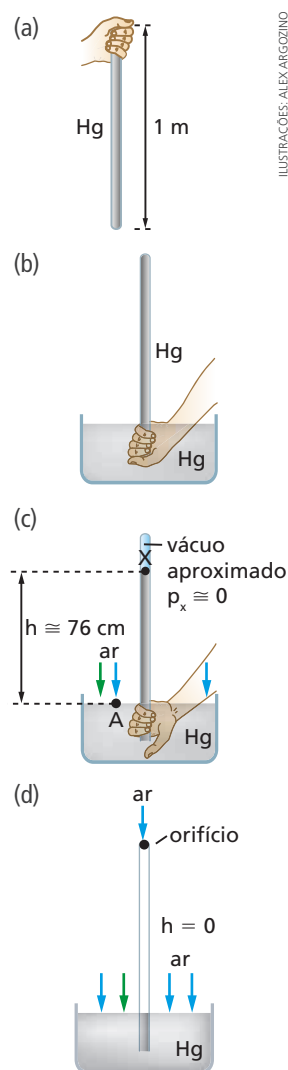


Figura 37. Descrição do experimento de Torricelli com mercúrio. Não tente repeti-lo, pois o mercúrio é um líquido tóxico.

disso, devemos levar em conta que, em geral, um aumento de temperatura provoca uma dilatação dos materiais e, portanto, pequenas variações no comprimento da coluna. Outro aspecto a ser ressaltado é que a atmosfera não é estática. Ela se movimenta (ventos), principalmente, devido ao aquecimento.

Assim, num mesmo local, a coluna de mercúrio pode apresentar alturas diferentes em momentos diferentes. Por exemplo, ao nível do mar, durante um furacão numa ilha do Oceano Pacífico, a pressão atmosférica assumiu um valor correspondente a uma coluna de mercúrio de comprimento 66 cm e, durante um rigoroso inverno na Sibéria, a pressão atmosférica assumiu um valor correspondente a uma coluna de mercúrio de comprimento 82 cm.

Levando-se em conta que, quando não há ventos, a altura da coluna de mercúrio é 76 cm, ao nível do mar e a 0 °C, definiu-se uma unidade de pressão denominada **atmosfera (atm)**.

Definimos **1 atmosfera (1 atm)** como a pressão equivalente à exercida por uma coluna de mercúrio de altura 76 cm, à temperatura de 0 °C, num local em que a gravidade é normal ($g = 9,80665 \text{ m/s}^2$).

Na situação da figura 38, temos:

$$p_A = p_x + dgh$$

Mas $p_x = 0$, e p_A é a pressão atmosférica (p_{atm}). Assim:

$$p_{\text{atm}} = 0 + dgh = dgh$$

Consultando uma tabela, podemos verificar que a 0 °C a densidade do mercúrio é $d = 13,5955 \text{ kg/m}^3$. Assim:

$$p_{\text{atm}} = dgh = (13,5955 \text{ kg/m}^3) (9,80665 \text{ m/s}^2) (0,760 \text{ m})$$

$$p_{\text{atm}} \cong 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \Rightarrow 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Esse é o valor aproximado da pressão atmosférica ao nível do mar, que é **quase** igual a 10^5 Pa . Os meteorologistas definiram outra unidade de pressão, o **bar (b)** que é exatamente igual a 10^5 Pa :

$$1 \text{ b} = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \cong 1 \text{ atm} \cong 14,7 \text{ lb/in}^2$$

Os meteorologistas usam com frequência o **milibar**:

$$1 \text{ mb} = 1 \text{ milibar} = 10^{-3} \text{ bar} = 10^{-3} (10^5 \text{ Pa}) = 100 \text{ pascals}$$

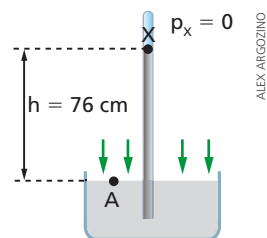


Figura 38.

Coluna de água

Antes de usar o mercúrio, Torricelli usou outros líquidos, como, por exemplo, a água e o mel. Entretanto, como esses líquidos têm densidades muito menores que o mercúrio, as colunas eram muito altas, de difícil manipulação.

Torricelli preferiu o mercúrio, que, embora fosse mais difícil de obter, era de mais fácil manipulação, pois produzia colunas menores.

Vamos calcular a altura da coluna para o caso da água. Sabemos que o valor da pressão atmosférica é dado pelo produto dgh .

$$d_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h_{\text{Hg}} = d_{\text{água}} \cdot g \cdot h_{\text{água}} \Rightarrow h_{\text{água}} = \frac{d_{\text{Hg}}}{d_{\text{água}}} \cdot h_{\text{Hg}}$$

Temos:

$$d_{\text{Hg}} \cong 13,6 \text{ g/cm}^3, d_{\text{água}} = 1 \text{ g/cm}^3 \text{ e } h_{\text{Hg}} = 0,76 \text{ m}$$

Assim:

$$h_{\text{água}} \cong \frac{13,6}{1} \cdot 0,76 \text{ m} \Rightarrow h_{\text{água}} \cong 10 \text{ m}$$

Portanto, a pressão de 1 atmosfera é aproximadamente igual à pressão exercida por uma coluna de água de altura de 10 metros.

Outras unidades de pressão

O mercúrio é o líquido de maior densidade à temperatura ambiente, daí ser o preferido para a construção de barômetros. Por causa disso, na prática foram adotadas as unidades de pressão **centímetro de mercúrio** (cmHg) e **milímetro de mercúrio** (mmHg), definidas, respectivamente, como as pressões exercidas por colunas de mercúrio de alturas 1 cm e 1 mm, a 0 °C e num local em que a gravidade é normal. Assim:

$$1 \text{ atm} = 76 \text{ cmHg} = 760 \text{ mmHg}$$

ou:

$$1 \text{ cmHg} = \frac{1 \text{ atm}}{76} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{76} = 1,333 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mmHg} = \frac{1 \text{ atm}}{760} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{760} = 1,333 \cdot 10^2 \text{ Pa}$$

O milímetro de mercúrio é também chamado de **torricelli** (torr):

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg}$$

No exercício 7, vimos que, na prática, também é usada a unidade de pressão kgf/cm² e que:

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cong 10^5 \text{ Pa}$$

Assim:

$$1 \text{ kgf/cm}^2 \cong 1 \text{ atm}$$

Variação da pressão atmosférica com a altitude

À medida que nos afastamos da superfície da Terra, a pressão atmosférica vai diminuindo, mas a redução não é linear como no caso dos líquidos, pelo fato de a densidade do ar diminuir com a altitude, isto é, à medida que subimos o ar torna-se cada vez mais rarefeito (fig. 39). Assim, a variação da pressão atmosférica (p) com a altitude (h) obedece, aproximadamente, ao gráfico da figura 40.

Observamos que, a cada 5,5 km, a pressão atmosférica fica dividida por 2.

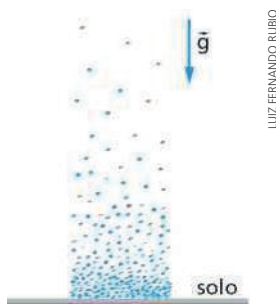


Figura 39. À medida que subimos, o ar torna-se menos denso.

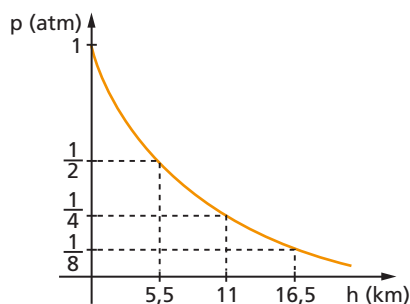


Figura 40. Variação da pressão atmosférica (p) com a altitude (h).

Usando o Cálculo Diferencial e Integral é possível demonstrar que o gráfico da figura 40 obedece, aproximadamente, à seguinte equação:

$$p = \frac{1}{e^{\frac{h}{8}}}$$

com p em atmosferas e h em quilômetros.

O número e que aparece na equação é a constante de Euler:

$$e = 2,718...$$

Por exemplo, para $h = 5,5$ km temos:

$$\frac{h}{8} = \frac{5,5}{8} \cong 0,6875$$

Usando uma calculadora eletrônica obtemos:

$$e^{\frac{h}{8}} = e^{0,6875} \cong 1,9794$$

Portanto:

$$\frac{1}{e^{\frac{h}{8}}} \cong \frac{1}{1,9794} \cong 0,5$$

Concluimos então que, a uma altitude de 5,5 km, a pressão atmosférica vale aproximadamente 0,5 atm, o que está de acordo com o gráfico.

Para calcularmos a pressão atmosférica em altitudes de até 1 200 m, podemos usar a seguinte regra prática:

A pressão atmosférica diminui, aproximadamente,
1 mmHg para cada 12 metros que subimos.

Do gráfico da figura 40 concluimos que, a uma altitude de 11 quilômetros, que é aproximadamente a altitude em que voam os aviões comerciais, a pressão é $\frac{1}{4}$ da pressão ao nível do mar. Portanto, quando viajamos, para que possamos respirar normalmente, o interior do avião é **pressurizado**, isto é, existem bombas que forçam o ar para dentro do avião, mantendo a pressão interna próxima da pressão ao nível do mar.

O fato de a pressão atmosférica variar com a altitude possibilita que o barômetro possa ser usado como **altímetro**, isto é, depois de tabelar a pressão em função da altitude, o barômetro pode nos dar a altitude de um local qualquer.

O canudinho

Quando estudarmos Termologia, aprenderemos que, mantendo-se a temperatura constante, se o volume de um gás aumenta, sua pressão diminui. A partir desse fato podemos entender como é possível tomar um líquido usando um canudinho (fig. 41). O que fazemos é aumentar levemente o volume do nosso tórax, o que resulta em diminuição da pressão do ar dentro de nossos pulmões.

Desse modo, a pressão atmosférica torna-se maior que a pressão do ar dentro dos pulmões e o líquido é empurrado para cima do canudinho.



Figura 41.

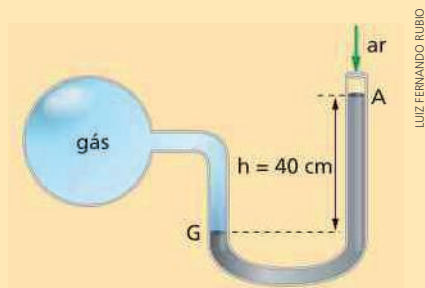
ALAMY/OTHER IMAGES

PROCURE NO CD

No CD, apresentamos outros fatos ligados à pressão atmosférica e alguns fatos sobre a pressão sanguínea.

Exercícios de Aplicação

54. Na figura representamos um manômetro, num local em que a pressão atmosférica é 76 cmHg. Calcule a pressão do gás, em cmHg.



Resolução:

Pela Lei de Stevin, temos:

$$p_G = p_A + \underbrace{dgh}_{40 \text{ cmHg}}$$

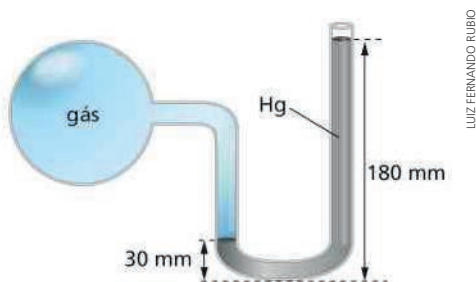
Mas:

$$p_A = p_{\text{atm}} = 76 \text{ cmHg} \text{ e } dgh = 40 \text{ cmHg}$$

Assim:

$$p_G = 76 \text{ cmHg} + 40 \text{ cmHg} \Rightarrow p_G = 116 \text{ cmHg}$$

55. Para determinar a pressão de um gás contido em um recipiente utilizou-se um manômetro de mercúrio, como representado na figura. Sabendo que a pressão atmosférica local é de 740 mmHg, qual o valor da pressão do gás, em mmHg?



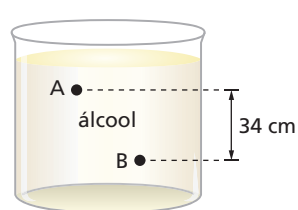
56. Sabendo que a densidade do mercúrio é $13,6 \text{ g/cm}^3$ e a de determinado tipo de óleo é $0,80 \text{ g/cm}^3$, a pressão de uma atmosfera corresponde a que altura de uma coluna desse óleo?

57. Em seu caderno faça as seguintes transformações:

- 95 mmHg em atm;
- 1,2 atm em cmHg.

58. Se o experimento de Torricelli fosse feito em um planeta onde a pressão atmosférica correspondesse a $\frac{1}{4}$ da pressão na Terra e cuja aceleração da gravidade fosse o dobro da gravidade na Terra, qual seria a altura da coluna de mercúrio?

59. Na figura representamos um recipiente contendo álcool, cuja densidade é $0,80 \text{ g/cm}^3$. Sabendo que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, a densidade do mercúrio é $13,6 \text{ g/cm}^3$ e a pressão no ponto A é 800 mmHg, calcule a pressão no ponto B, em mmHg.



60. Um submarino está submerso a uma profundidade de 60 metros. Qual é o valor aproximado da pressão suportada pelo submarino, em atmosferas?
61. Leia, neste capítulo, o item "Variação da pressão atmosférica com a altitude". Em seguida, calcule:
- o valor aproximado da pressão atmosférica, em atm, a uma altitude de 8 km;
 - o valor aproximado da pressão atmosférica, em mmHg, a uma altitude de 720 m.
62. Na Lua, seria possível tomar água de um copo usando um canudinho?

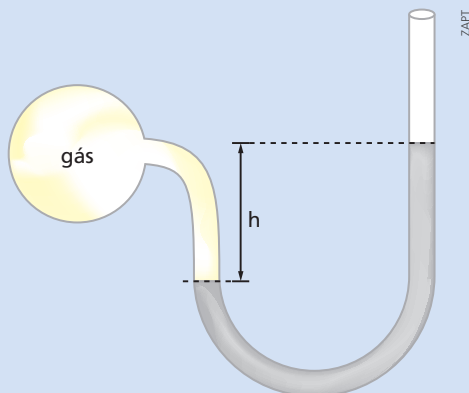
Exercícios de Reforço

63. (Fuvest-SP) A janela retangular de um avião, cuja cabine é pressurizada, mede 0,5 m por 0,25 m. Quando o avião está voando a uma certa altitude, a pressão em seu interior é de, aproximadamente, 1,0 atm, enquanto a pressão ambiente fora do avião é de 0,60 atm. São dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Nessas condições, a janela está sujeita a uma força, dirigida de dentro para fora, igual ao peso na superfície da Terra, da massa de:

- 50 kg
- 320 kg
- 480 kg
- 500 kg
- 750 kg

64. (UF-PR) Em um manômetro de tubo aberto, a diferença de alturas entre as colunas de mercúrio é 38 cm. Sendo a experiência realizada ao nível do mar, pode-se afirmar que a pressão do gás é:



- a) 0,50 atm c) 1,5 atm e) 3,8 atm
b) 1,0 atm d) 1,9 atm
65. (UF-BA) A pressão atmosférica, medida por um barômetro de mercúrio a uma certa altitude, vale $6,528 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. O barômetro tem massa de 3 kg e, nessa altitude, o peso é igual a 28,8 N. Determine, em cm, a altura da coluna líquida, sabendo-se que a densidade do mercúrio vale $13,6 \text{ g/cm}^3$.
66. (Fuvest-SP) O organismo humano pode ser submetido, sem consequências danosas, a uma pressão de no máximo $4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e a uma taxa de variação de pressão de no máximo 10^4 N/m^2 por segundo. Nessas condições:

- a) qual a máxima profundidade recomendada a um mergulhador? Adote pressão atmosférica igual a 10^5 N/m^2 .
b) qual a máxima velocidade de movimentação na vertical recomendada para um mergulhador?
(Dados: densidade da água $d = 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

67. (Unifor-CE) Sendo conhecidas: a densidade do mercúrio igual a $13,6 \text{ g/cm}^3$, a densidade da água igual a $1,0 \text{ g/cm}^3$ e a aceleração da gravidade $= 10 \text{ m/s}^2$, a razão entre a pressão total no fundo de uma piscina de 5,0 m de profundidade e a pressão atmosférica normal é, aproximadamente:

- a) 3,0 d) 1,5
b) 2,5 e) 1,0
c) 2,0

68. (UE-RJ) Um submarino encontra-se a uma profundidade de 50 m. Para que a tripulação sobreviva, um descompressor mantém o seu interior a uma pressão constante igual à pressão atmosférica ao nível do mar. Considerando $p_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a diferença entre a pressão, junto a suas paredes, fora e dentro do submarino, é da ordem de:

- a) $1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
b) $2,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
c) $5,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
d) $1,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$
e) $5,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$

Exercícios de Aprofundamento

69. Na figura a um mergulhador “tenta” respirar por meio de um tubo ligado à atmosfera. Isso só deve ser feito quando muito próximo da superfície, pois abaixo dela o mergulhador terá seu peito submetido a uma pressão externa **maior** que a atmosférica, enquanto a pressão no interior do pulmão é igual à atmosférica; desse modo talvez ele não consiga respirar. É por isso que os mergulhadores usam tubos com **ar comprimido**, isto é, cuja pressão é maior que a pressão atmosférica (fig. b). Na situação da figura a, calcule o valor aproximado da pressão sobre o peito do nadador, em atmosferas.



Figura a.



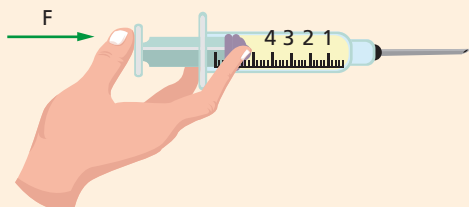
Figura b.

70. Na figura representamos uma situação em que uma pessoa está recebendo soro na veia. Sabe-se que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, a densidade do soro é $1,00 \text{ g/cm}^3$, a densidade do mercúrio é $13,6 \text{ g/cm}^3$ e a pressão na veia é 12 mmHg acima da atmosférica. Qual é o valor mínimo de h de modo que o soro consiga penetrar na veia?



Observação: Na prática, a altura h é maior que a calculada, devido ao atrito do líquido com as paredes internas do tubo.

71. Uma seringa cujo êmbolo tem diâmetro $1,0 \text{ cm}$ e cuja agulha tem diâmetro $0,20 \text{ mm}$ é usada para dar uma injeção na veia de uma pessoa. Supondo que a sobrepressão venosa seja 12 mmHg , calcule o valor mínimo da intensidade da força \vec{F} a ser aplicada ao êmbolo.



72. (UF-MG) A figura 1 mostra uma caixa de aço cúbica e oca, formada por duas metades. A aresta do cubo mede $0,30 \text{ m}$. Essas duas metades são unidas e o ar do interior da caixa é retirado até que a pressão interna seja de $0,10 \text{ atm}$. Isso feito, duas pessoas puxam cada uma das

metades da caixa, tentando separá-las, como mostra a figura 2. A pressão atmosférica é de $1,0 \text{ atm}$ ($1 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$). Considerando as informações dadas, responda: Nessa situação, as pessoas conseguirão separar as duas metades dessa caixa?



Figura 1.

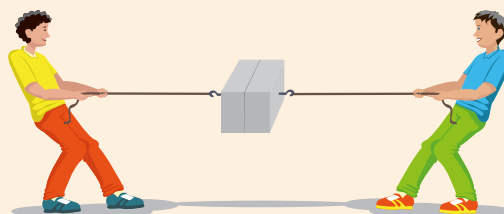
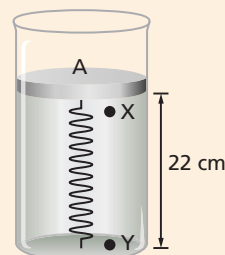


Figura 2.

73. Numa região do espaço em que a gravidade é praticamente nula, um líquido de densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$ está dentro de um cilindro vedado por um êmbolo de área $A = 0,05 \text{ m}^2$ que pode deslizar sem atrito. Ligando o fundo do recipiente ao êmbolo, há uma mola de constante elástica 200 N/cm cujo comprimento natural é 20 cm . Quais são as pressões nos pontos X e Y ?



ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

74. Sabendo que o raio da Terra é aproximadamente igual a 6380 km , faça uma estimativa da massa da atmosfera terrestre.

Fluidostática – Princípio de Arquimedes

1. Empuxo

No capítulo anterior, usando a Lei de Stevin, calculamos a força total exercida por um líquido num corpo cilíndrico cujo eixo é vertical, como o da figura 1a. (Isso foi feito nos exercícios 18 e 20.)

Porém, se o cilindro estiver na posição da figura 1b ou se o corpo tiver um formato arbitrário, como o da figura 1c, é mais complicado calcular a força exercida pelo líquido a partir da Lei de Stevin; seria necessário recorrer ao Cálculo Diferencial e Integral (desde que soubéssemos exatamente a forma do corpo).

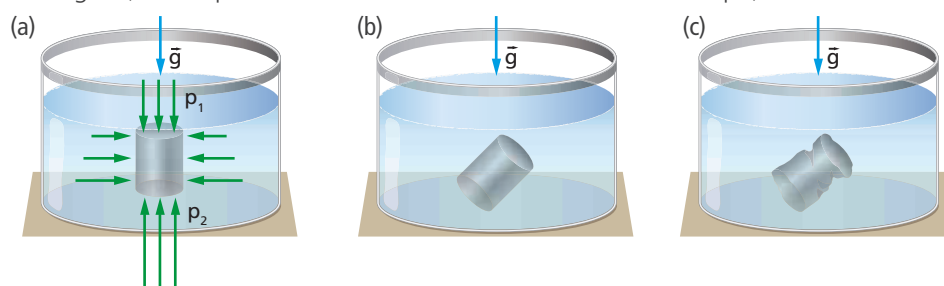


Figura 1.

Felizmente, o grande matemático e físico Arquimedes (287-212 a.C.) descobriu um modo simples de calcular essa força, a qual ele chamou **empuxo**. A seguir apresentaremos esse modo, usando a linguagem atual dos físicos (que Arquimedes obviamente não conhecia, pois viveu há mais de dois mil anos). É importante ressaltar que o raciocínio que desenvolveremos vale para um corpo no interior de um fluido qualquer: líquido ou gás.

Arquimedes fez uso de um raciocínio que, mais tarde, o físico Albert Einstein (1879-1955), criador da Teoria da Relatividade, chamou de “experimento de pensamento”, isto é, um experimento que é apenas imaginado, mas que nos permite tirar conclusões sem realmente fazer o experimento.

No interior de um fluido em equilíbrio e sob a ação da gravidade, consideremos uma porção desse fluido delimitada por uma superfície S (fig. 2a). Uma das forças que atuam nessa porção de fluido é o peso \vec{P}_F . Se essa porção está em equilíbrio, deve estar atuando sobre ela uma força vertical \vec{E} , de sentido oposto a \vec{P}_F e de mesmo módulo que \vec{P}_F :

$$E = P_F$$

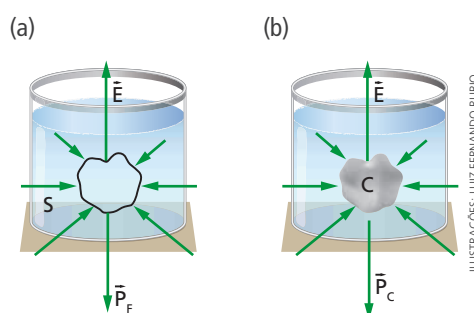


Figura 2.

1. Empuxo
2. Empuxo e densidade
3. Centro de empuxo
4. O significado do empuxo

Suponhamos agora que o fluido no interior de S seja substituído por um corpo C que ocupa todo o espaço no interior de S (fig. 2b). Como a superfície S não mudou, as forças exercidas sobre S pelo fluido que está fora de S são as mesmas, tanto no caso da figura 2a como no da figura 2b. Portanto, nos dois casos o empuxo é o mesmo, tendo módulo dado por:

$$E = P_F \quad (1)$$

isto é:

O módulo do empuxo é igual ao módulo do peso do fluido que caberia no espaço ocupado pelo corpo no interior do líquido.
(Princípio de Arquimedes)

Se o corpo estiver parcialmente submerso em um líquido, como o navio da figura 3a, o empuxo terá módulo igual ao peso do líquido que caberia no espaço ocupado pela parte submersa do corpo (fig. 3b). A parte submersa é também chamada de parte **imersa** e a parte do corpo que está acima da superfície livre do líquido é a parte **emersa**.

Arquimedes chamou o fluido que caberia no espaço ocupado pela parte submersa do corpo de **fluido deslocado** e, por isso, o Princípio de Arquimedes frequentemente é enunciado do seguinte modo:

O empuxo exercido por um fluido sobre um corpo total ou parcialmente submerso no fluido tem módulo igual ao módulo do peso do fluido deslocado pelo corpo.

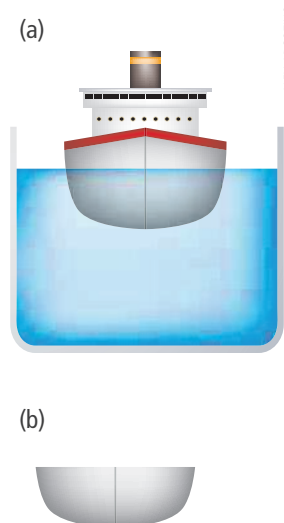


Figura 3.

O nome **fluido deslocado** é útil no desenvolvimento das argumentações. Porém ele tem um problema, que analisaremos mais adiante no item 4 (O significado do empuxo).

Seja m_F , d_F e V_F , respectivamente, a massa, a densidade e o volume do fluido deslocado, a partir da equação $E = P_F$ temos:

$$\left. \begin{array}{l} E = P_F \\ P_F = m_F \cdot g \\ m_F = d_F \cdot V_F \end{array} \right\} \Rightarrow E = d_F \cdot V_F \cdot g \quad (2)$$

Exemplo

Um corpo homogêneo de volume $V_C = 0,16 \text{ m}^3$ flutua em um líquido de massa específica $d_L = 0,80 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, de modo que o volume da parte emersa é $V_1 = 0,04 \text{ m}^3$. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, vamos calcular:

- o módulo do empuxo que atua sobre o corpo;
- o peso do corpo;
- a densidade do corpo.

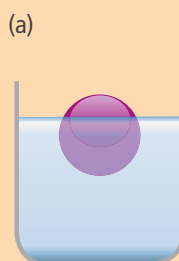


Figura 4.

- a) O volume total do corpo é $V_C = 0,16 \text{ m}^3$ e o volume da parte emersa é $V_1 = 0,04 \text{ m}^3$. Portanto, o volume da parte submersa, isto é, o volume do líquido deslocado, é:

$$V_L = V_C - V_1 = 0,16 \text{ m}^3 - 0,04 \text{ m}^3 = 0,12 \text{ m}^3$$

A intensidade do empuxo (\vec{E}) é igual ao peso do líquido deslocado, isto é, o peso do líquido que caberia no espaço ocupado pela parte submersa do corpo, que é o espaço de volume V_L :

$$E = P_L = m_L \cdot g = d_L \cdot V_L \cdot g = (0,80 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)(0,12 \text{ m}^3)(10 \text{ m/s}^2) \Rightarrow E = 9,6 \cdot 10^2 \text{ N}$$

(b)

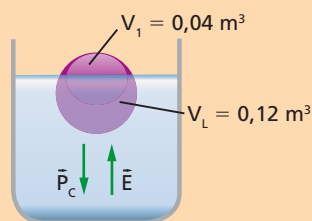


Figura 4.

- b) Dizer que o corpo flutua significa dizer que ele está em equilíbrio. Portanto, o peso do corpo (\vec{P}_C) e o empuxo têm a mesma intensidade:

$$P_C = E = 9,6 \cdot 10^2 \text{ N}$$

- c) $P_C = E = P_L \Rightarrow P_C = P_L \Rightarrow m_C \cdot g = m_L \cdot g \Rightarrow m_C = m_L \Rightarrow d_C \cdot V_C = d_L \cdot V_L \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_C = \frac{V_L}{V_C} d_L \Rightarrow d_C = \frac{0,12}{0,16} \cdot (0,80 \cdot 10^3) \Rightarrow d_C = 0,60 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

2. Empuxo e densidade

Abandonemos um corpo qualquer, de densidade d_C , no interior de um fluido de densidade d_F (fig. 5). Estando o corpo totalmente imerso, o volume do fluido deslocado é igual ao volume do corpo: $V_F = V_C = V$. As intensidades do peso e do empuxo serão dadas, então, por:

$$P_C = d_C V g \quad \text{e} \quad E = d_F V g \quad (3)$$

Em relação às densidades d_C e d_F há três possibilidades:

1ª) $d_C > d_F$

Das equações (3) temos:

$$d_C > d_F \Rightarrow P_C > E$$

Portanto, neste caso, a força resultante \vec{F}_R terá sentido para baixo (fig. 6a), e o corpo afundará até atingir o fundo do recipiente.

2ª) $d_C = d_F$

Neste caso, de (3) concluímos que $P_C = E$, e a força resultante será nula. O corpo ficará em equilíbrio em qualquer posição em que for colocado.

3ª) $d_C < d_F$

De (3) temos:

$$d_C < d_F \Rightarrow P_C < E$$

Neste caso, a força resultante \vec{F}_R terá sentido para cima (fig. 6b), e o corpo subirá até ficar flutuando com uma parte emersa (fig. 6c).

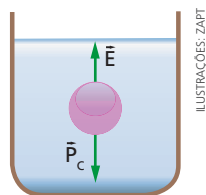


Figura 5.

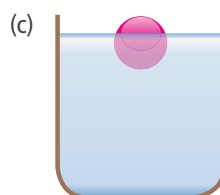
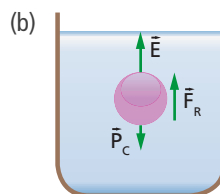
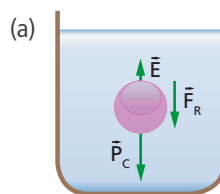


Figura 6.

Navios e submarinos

A densidade do aço é maior que a da água. Assim, de acordo com os casos considerados na discussão sobre empuxo e densidade, se jogarmos na água um bloco maciço de aço, ele afundará. No entanto, embora tenham cascos feitos de aço, os navios não afundam; eles flutuam na água, parcialmente submersos (fig. 7). Isso acontece porque um navio não é um bloco maciço de aço. O fato de os navios terem partes ocas faz com que sua densidade seja menor que a da água e, assim, eles não afundam.

Para um submarino (fig. 8) emergir ou imergir, há um tanque no seu interior. Para submergir, esse tanque é cheio de água, aumentando sua densidade. Para emergir, essa água é expulsa. Quando se movimenta submerso, para efetuar pequenos deslocamentos para cima e para baixo, ele utiliza pequenas asas móveis, semelhantes às dos aviões.



Figura 7.



Figura 8.

Flutuação do gelo

De modo geral, ao passar do estado líquido para o estado sólido, as substâncias sofrem contração, isto é, diminuem seu volume e consequentemente aumentam sua densidade. No entanto, a água tem comportamento diferente. Ao passar do estado líquido para o estado sólido (transformando-se em gelo), a água sofre uma expansão, aumentando seu volume e, desse modo, diminuindo sua densidade. À temperatura de 0 °C, a densidade do gelo é 0,917 g/cm³. É por isso que o gelo flutua na água (fig. 9), ficando com uma parte para fora.

Devido a essa expansão do volume da água ao solidificar-se, não é recomendável guardar garrafas de vidro cheias de água (ou refrigerante) no congelador. Ao passar para o estado sólido, a água se expande e pode quebrar a garrafa.

Façamos uma estimativa da fração do volume total do gelo que fica acima do nível da água. Sendo V o volume do gelo, V_1 o volume emerso, V_L o volume submerso (fig. 10), d_G a densidade do gelo e d_L a densidade da água, temos:



ALEX ARGOZINO

Figura 9.

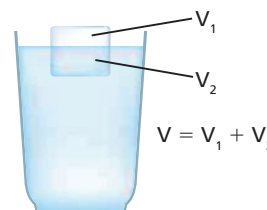


Figura 10.

$$\begin{aligned} \text{empuxo} &= \text{peso} \Rightarrow d_L V_L g = d_G V g \Rightarrow V_L = \frac{d_G}{d_L} V \Rightarrow V_L = \frac{0,917}{1} V \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_L = 0,917 V = 91,7\% \text{ de } V \end{aligned}$$

Portanto, a parte imersa é 91,7% do volume total, e a parte emersa (fora da água) é apenas 8,3%.

Próximo dos polos da Terra, aparecem no mar blocos de gelo flutuantes, denominados **icebergs** (fig. 11). Essa palavra parece ter sido derivada do dinamarquês (ou norueguês) *isberg*, em que *is* significa "gelo" e *berg* significa "montanha". A palavra *is* aparece também em **Islândia** (que significa "terra de gelo").

Por causa do sal, a densidade da água do mar é um pouco maior que a da água pura, variando de 1,01 a 1,03 g/cm³. Por isso, no caso do *iceberg*, a fração do volume que está fora da água é pouco maior que a calculada acima: aproximadamente 10%.

Suponhamos que um cubo de gelo feito de água pura esteja flutuando em um copo com água pura até a boca (fig. 12) com o gelo começando a derreter. Quando o gelo acabar de derreter, o que acontecerá com o nível da água no copo?



Figura 11.



ALEX ARGOZINO

Figura 12.

Estando o gelo em equilíbrio, o empuxo deve ser igual ao peso, isto é, o peso do gelo (P_G) deve ser igual ao peso da água deslocada (P_L), que é o peso da água que caberia no espaço de volume V_L (fig. 13):

$$P_G = P_L \Rightarrow m_G \cdot g = m_L \cdot g \Rightarrow m_G = m_L$$

Portanto, a massa do gelo é igual a m_L , isto é, igual à massa de água que cabe no espaço de volume V_L . Quando o gelo derreter, sua densidade será igual à da água; assim, a água resultante do derretimento preencherá exatamente o espaço de volume V_L , não se alterando, portanto, o nível da água.

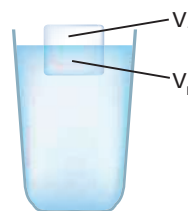


Figura 13.

Queda em um fluido

No capítulo 15 vimos que, quando um corpo se move no interior de um fluido, há uma força de resistência (\vec{F}_r) ao movimento, que, para baixas velocidades, tem módulo dado por:

$$F_r = kv$$

sendo v o módulo da velocidade e k uma constante que depende da natureza do fluido e da forma e do tamanho do corpo (fig. 14a).

Suponhamos agora que uma bolinha B , cuja densidade é d_B , seja abandonada no interior de um fluido de densidade d_f tal que $d_B > d_f$. A bolinha vai afundar sob a ação de três forças (fig. 14b): o peso \vec{P} , a força da resistência \vec{F}_r e o empuxo \vec{E} (no capítulo 15 desprezamos o empuxo). O módulo de \vec{F}_r vai aumentando com a velocidade até que:

$$E + F_r = P \quad (1)$$

quando a bolinha atinge a velocidade limite (v_L). Sendo V o volume da bolinha e g a aceleração da gravidade, sabemos que:

$$E = d_f V g; F_r = kv; P = d_B V g$$

Substituindo em (1), temos:

$$d_f V g + kv_L = d_B V g \Rightarrow v_L = \frac{(d_B - d_f) V}{k} \cdot g \quad (2)$$

Sedimentação

Se você misturar bastante açúcar na água contida em um copo, verá que, depois de certo tempo, haverá um pouco de açúcar no fundo do copo: dizemos que houve **sedimentação**. Algumas partículas de açúcar descenderam, atingindo uma velocidade limite dada pela equação (2) do item anterior.

Em laboratórios de Física, Química e Biologia, às vezes há necessidade de provocar a sedimentação de partículas contidas em um líquido. Porém, em alguns casos, a sedimentação é muito lenta, pelo fato de a velocidade limite ser muito pequena. Mas há um modo de aumentar a velocidade limite, sugerido pela inspeção da equação (2) acima: aumentando artificialmente o valor de g . Isso é feito usando-se uma centrífuga. Inicialmente o líquido (com as partículas dissolvidas) é colocado num tubo de ensaio preso a uma haste. Quando o sistema girar, o tubo ficará “quase” na horizontal, de modo que a aceleração centrífuga \vec{a}_{cf} (para o referencial do tubo) faz o papel de g . Lembrando que $a_{cf} = \omega^2 r$, em que ω é a velocidade angular e r o raio da trajetória, vemos que, quanto

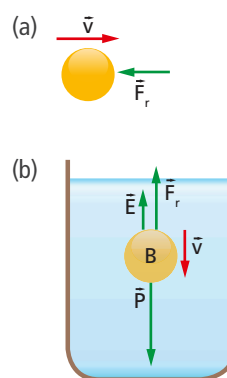
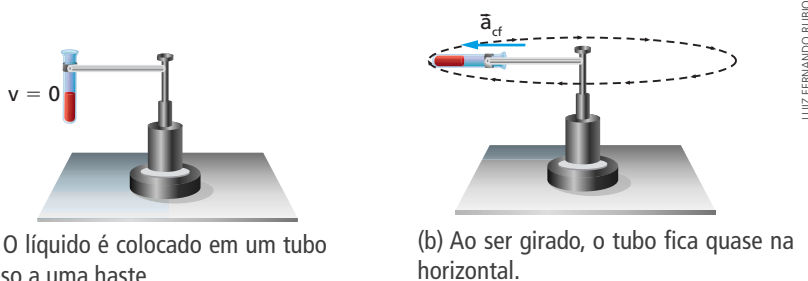


Figura 14.

maior for o valor de ω , maior será o valor de \vec{a}_{cf} e, assim, maior será o valor da velocidade de limite. Em alguns laboratórios há centrífugas que atingem frequência de 50 000 rpm. Na figura 15, apresentamos um esquema do funcionamento de uma centrífuga.



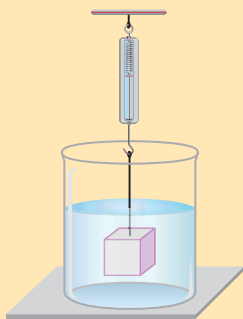
(a) O líquido é colocado em um tubo preso a uma haste.

(b) Ao ser girado, o tubo fica quase na horizontal.

Figura 15.

Exercícios de Aplicação

1. Na figura representamos um bloco de massa $m_B = 60 \text{ kg}$ e densidade $d_B = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, imerso em um líquido de densidade $d_L = 0,90 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e preso por um fio ideal a um dinamômetro. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e calcule:



- o volume do bloco;
- o módulo do empuxo exercido pelo líquido sobre o bloco;
- o peso aparente do bloco.

Resolução:

- a) Sendo V o volume do bloco, temos:

$$d_B = \frac{m_B}{V} \Rightarrow V = \frac{m_B}{d_B} = \frac{60 \text{ kg}}{3,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}$$

$$V = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

- b) A intensidade do empuxo é igual ao peso do líquido que caberia no volume ocupado pelo bloco:

$$E = P_L = m_L \cdot g = \underbrace{d_L \cdot V}_{(0,90 \cdot 10^3)(2,0 \cdot 10^{-2})} \cdot g =$$

$$E = 180 \text{ N}$$

- c) As forças que atuam no bloco são o peso (\vec{P}), o empuxo (\vec{E}) e a tração (\vec{T}) exercida pelo fio.

$$P = m_B \cdot g = (60 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 600 \text{ N}$$

Como o bloco está em equilíbrio, temos:

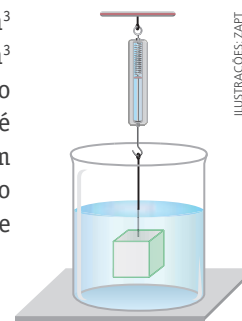
$$\begin{aligned} T + E &= P \Rightarrow T = P - E = \\ &= 600 \text{ N} - 180 \text{ N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T = 420 \text{ N} \end{aligned}$$

Portanto, o dinamômetro está marcando 420 N, e esse é o peso aparente, que é a diferença entre P e E :

$$\text{peso aparente} = P - E = 420 \text{ N}$$

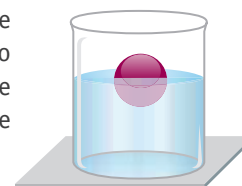


2. Um bloco de volume $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ e densidade $3,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ está totalmente submerso na água, cuja densidade é $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, e preso por um fio a um dinamômetro, como mostra a figura. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. Calcule:



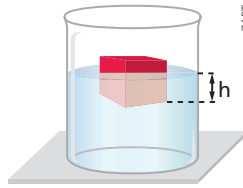
- a massa do bloco;
- o empuxo sobre o bloco;
- a marcação do dinamômetro (peso aparente).

3. Um corpo esférico de volume 12 cm^3 flutua em um líquido de densidade $0,80 \text{ g/cm}^3$, de modo que o volume da parte imersa é $3,0 \text{ cm}^3$.

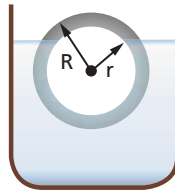


- Qual é a massa do corpo?
- Qual é a densidade do corpo?

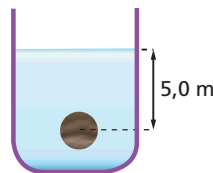
4. Um bloco de madeira em forma de cubo de aresta igual a 10 cm flutua na água, como mostra a figura. Sabendo que as densidades dessa madeira e da água são respectivamente iguais a $0,75 \text{ g/cm}^3$ e $1,00 \text{ g/cm}^3$, calcule a altura da parte submersa.



5. Um corpo em forma de casca esférica de raio interno $r = 9,0 \text{ cm}$ e raio externo $R = 10 \text{ cm}$ é feito de alumínio, cuja massa específica é $2,7 \text{ g/cm}^3$. Colocado em um líquido, ele flutua com $\frac{3}{5}$ de seu volume submerso. Calcule:
- a) a massa do corpo;
 - b) a densidade do corpo;
 - c) a densidade do líquido.

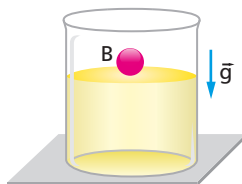


6. Uma bolinha de madeira, cuja densidade é $0,80 \text{ g/cm}^3$, é abandonada no interior da água de uma piscina, a uma profundidade de 5,0 metros.



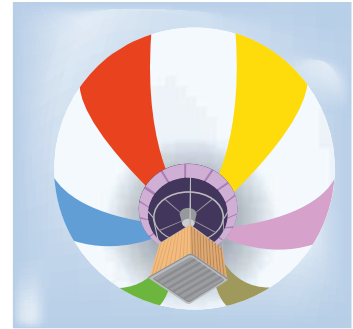
Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, que a densidade da água é $1,0 \text{ g/cm}^3$ e desprezando os atritos, responda:

- Qual é a aceleração adquirida pela bolinha?
 - Depois de quanto tempo a bolinha atinge a superfície livre da água?
7. Uma bolinha (B), de volume $4,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$ e densidade $7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, é abandonada na superfície do óleo contido em um recipiente, como ilustra a figura. A força de resistência sobre a bolinha tem módulo dado por $F = kv$, sendo v o módulo da velocidade e $k = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{s/m}$. Sabendo que a densidade do óleo é $0,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a velocidade limite atendida pela bolinha.

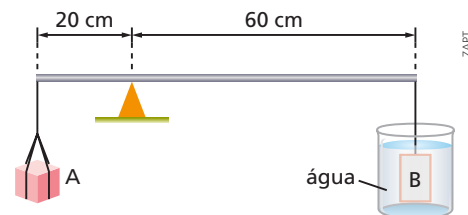


8. Um balão esférico de raio $R = 10 \text{ m}$ foi cheio com gás hélio, cuja densidade é $0,16 \text{ kg/m}^3$. O balão vazio, os cabos e a cesta têm massa

total de 200 kg. Desprezando o volume da cesta e sabendo que a densidade do ar é $1,21 \text{ kg/m}^3$, calcule o valor máximo da massa da carga que esse balão pode sustentar.

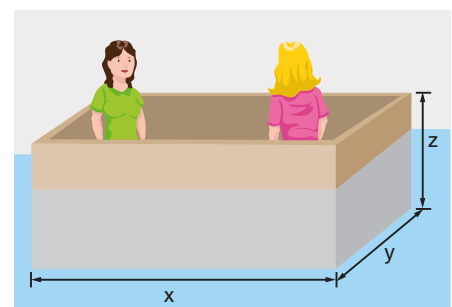


9. Na situação representada na figura, a barra, de peso desprezível, está em equilíbrio. Em suas extremidades há fios ideais que sustentam os corpos A e B, sendo a massa de A igual a 9,0 kg e o volume do corpo B igual a 2,0 litros.



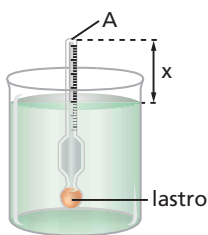
Sendo a densidade da água igual a $1,0 \text{ g/cm}^3$, calcule:

- a) a massa do corpo B;
 - b) a densidade do corpo B.
10. Uma caixa prismática, de massa 400 kg e dimensões $x = 2,0 \text{ m}$, $y = 1,0 \text{ m}$ e $z = 0,50 \text{ m}$, flutua na água, cuja densidade é $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Quantas pessoas de massa 70 kg podem entrar na caixa sem que entre água?

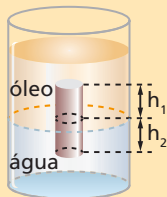


11. Na figura a seguir representamos um densímetro, instrumento usado para medir densidades de líquidos. Ele é constituído de um tubo de vidro com um pouco de uma substância mais densa que o vidro no fundo (o lastro), para dar estabilidade. Suponhamos que o volume do

densímetro seja 60 cm^3 , sua massa seja 50 g e a área da seção reta do trecho cilíndrico seja $A = 2,0 \text{ cm}^2$. Supondo que a densidade do líquido seja $1,0 \text{ g/cm}^3$, calcule o valor de x .



- 12.** Um corpo cilíndrico e homogêneo flutua parcialmente imerso na água e parcialmente imerso no óleo, como ilustra a figura ao lado. Sabe-se que a densidade do óleo é $d_1 = 0,90 \text{ g/cm}^3$, a densidade da água é $d_2 = 1,0 \text{ g/cm}^3$, $h_1 = 8,0 \text{ cm}$ e $h_2 = 2,0 \text{ cm}$. Calcule a densidade do corpo (d_c).



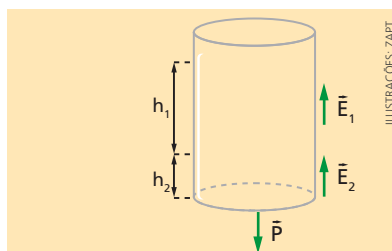
Resolução:

Este exercício é idêntico ao exercício 24 do capítulo anterior, o qual resolvemos usando a Lei de Stevin. Vamos agora resolvê-lo usando o Princípio de Arquimedes.

O peso do corpo (\vec{P}) é equilibrado pelo empuxo total \vec{E} , que é a soma de dois empuxos: o empuxo da água (\vec{E}_2) e o empuxo do óleo (\vec{E}_1).

$$E = E_1 + E_2 = P \quad (1)$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} E_1 = d_1 V_1 g = d_1 A h_1 g \\ E_2 = d_2 V_2 g = d_2 A h_2 g \\ P = d_c V g = d_c \cdot A(h_1 + h_2)g \end{cases}$$



Substituindo em (1):

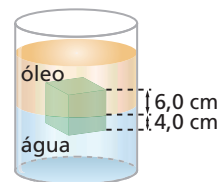
$$d_1 A h_1 g + d_2 A h_2 g = d_c A (h_1 + h_2) g$$

ou

$$d_c = \frac{d_1 h_1 + d_2 h_2}{h_1 + h_2} = \frac{(0,90)(8,0) + (1,0)(2,0)}{8,0 + 2,0}$$

$$d_c = 0,92 \text{ g/cm}^3$$

- 13.** Um corpo em forma de cubo de aresta 10 cm flutua parcialmente imerso no óleo e parcialmente imerso na água, como mostra a figura. Sabendo que as densidades do óleo e da água são, respectivamente, $0,90 \text{ g/cm}^3$ e $1,00 \text{ g/cm}^3$, calcule a densidade do corpo.



- 14.** Um corpo de densidade $0,64 \text{ g/cm}^3$ flutua com 20% de seu volume acima da superfície de um líquido. Qual a densidade do líquido?
- 15.** Um recipiente está cheio de água, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. Colocando-se na água um corpo de massa $0,30 \text{ kg}$, há um transbordamento de água cuja massa é $0,20 \text{ kg}$. Calcule a intensidade do empuxo exercido pela água sobre o corpo.

Exercícios de Reforço

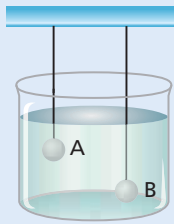
- 16.** (UE-PI) A existência de empuxo é um fenômeno observado:
- tanto em gases quanto em líquidos.
 - apenas em substâncias líquidas.
 - apenas em materiais sólidos.
 - apenas na atmosfera terrestre.
 - apenas na água.
- 17.** (Fuvest-SP) Imagine que, no final deste século XXI, os habitantes da Lua vivam em um grande complexo pressurizado, em condições equivalentes às da Terra, tendo como única diferença a aceleração da gravidade, que é menor na Lua. Considere as situações imaginadas bem como as possíveis descrições de seus resultados, se realizadas dentro desse complexo, na Lua:

- Ao saltar, atinge-se uma altura maior do que quando o salto é realizado na Terra.
- Se uma bola está boiando em uma piscina, essa bola manterá maior volume fora da água do que quando a experiência é realizada na Terra.
- Em pista horizontal, um carro, com velocidade V_0 consegue parar completamente em uma distância maior do que quando o carro é freado na Terra.

Assim, pode-se afirmar que estão corretos apenas os resultados propostos em:

- I
- I e II
- I e III
- II e III
- I, II e III

18. (PUC-RS) Duas esferas metálicas, A e B, de mesmo volume e massas diferentes, estão totalmente imersas na água. Analisando essa situação, é possível afirmar que a intensidade do empuxo que a água exerce nas esferas:



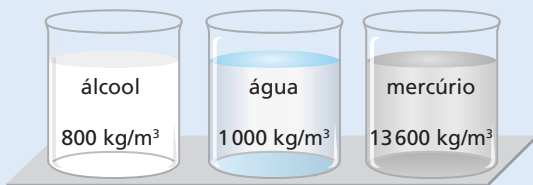
MARCOS ZOLEZI

- a) é a mesma nas duas esferas.
b) é maior na esfera A.
c) é maior na esfera B.
d) depende das massas das esferas.
e) depende da quantidade de água no recipiente.

19. (UF-MA) Um menino segura, através de um fio ideal, um balão de gás em equilíbrio na vertical, em uma região onde não há vento. As forças que atuam no balão são: o seu peso \vec{P} , a tração no fio \vec{T} e o empuxo \vec{E} que o ar exerce sobre o balão. A relação entre essas forças está expressa na opção:

- a) $\vec{P} + \vec{T} = \vec{E}$ d) $\vec{P} - \vec{T} = \vec{E}$
b) $\vec{P} + \vec{T} = -\vec{E}$ e) $\vec{P} + \vec{T} = 2\vec{E}$
c) $\vec{P} - \vec{T} = -\vec{E}$

20. (UE-PA) Saturno, denominado planeta dos anéis, está muito distante do Sol, levando quase trinta anos para dar uma volta completa em sua órbita. Possui um volume de aproximadamente 10^{24} m^3 e massa da ordem de $6 \cdot 10^{26} \text{ kg}$. Suponha que uma esfera de densidade igual à do planeta Saturno seja colocada em cada um dos recipientes contendo líquidos de densidades de acordo com a figura.



ZAPT

Analisar as afirmativas abaixo sobre o que acontecerá com a esfera nos três líquidos:

- I. Afundará no álcool e flutuará na água e no mercúrio.
II. Flutuará nos três recipientes.
III. Sofrerá o mesmo empuxo nos três líquidos.
IV. Sofrerá maior empuxo no mercúrio.

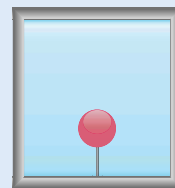
Estão corretas somente as afirmativas:

- a) I, II e IV d) II e III
b) I e III e) II e IV
c) I, III e IV

21. (Unifor-CE) Uma esfera de volume $4,0 \text{ dm}^3$ e massa 24 kg é colocada no fundo de uma piscina de $2,0 \text{ m}$ de profundidade. Considerando a ação da água sobre a esfera, a aceleração local da gravidade igual a 10 m/s^2 e a densidade da água igual a $1,0 \text{ g/cm}^3$, a intensidade da força exercida pela esfera sobre o fundo da piscina, em newtons, vale:

- a) 40 d) 200
b) 120 e) 240
c) 160

22. (UF-MS) Uma esfera maciça de volume $2,0$ litros e que pesa $1,0 \text{ kgf}$ no vácuo, presa a um cabo de massa desprezível, repousa no interior de um tanque contendo água (densidade $1,0 \text{ g/cm}^3$) (figura). A aceleração da gravidade local é $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

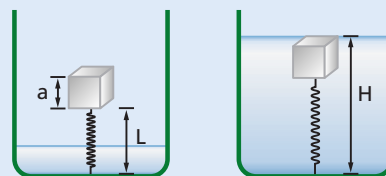


ZAPT

Analisar as sentenças a seguir e dê como resposta a soma dos números que antecedem as sentenças verdadeiras.

- (01) A força tensora no cabo que prende a esfera é de $1,0 \text{ kgf}$.
(02) Se o cabo se romper, no final, a esfera flutuará na superfície da água com 20% do seu volume submerso.
(04) O empuxo atuante sobre a esfera, que está totalmente dentro do tanque, tem módulo menor do que seu peso.
(16) Se o cabo se romper, a esfera adquire uma aceleração vertical para cima de $2,0 \text{ m/s}^2$.
(64) O empuxo atuante sobre a esfera presa é de $2,0 \text{ kgf}$.

23. (UF-PE) Uma mola ideal de comprimento $L = 65 \text{ cm}$ está presa no fundo de uma piscina que está sendo cheia. Um cubo de isopor de aresta $a = 10 \text{ cm}$ e massa desprezível é preso na extremidade superior da mola. O cubo fica totalmente coberto no instante em que o nível da água atinge a altura $H = 1,0 \text{ m}$ em relação ao fundo da piscina. Calcule a constante elástica da mola, em N/m .



ZAPT

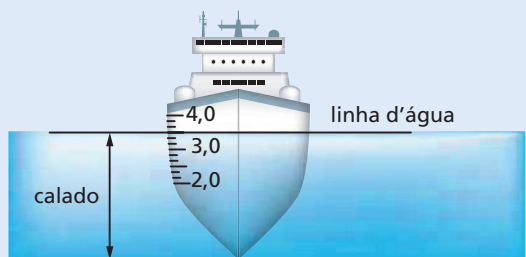
24. (UF-SC) A figura representa um navio flutuando em equilíbrio, submetido à ação apenas do seu próprio peso e do empuxo exercido pela água.



ALEX ARGOZINO

Considerando a situação descrita, verifique a(s) proposição(ões) correta(s) e dê como resposta a soma dos números que antecedem as sentenças verdadeiras:

- (01) Mesmo sendo construído com chapas de aço, a densidade média do navio é menor do que a densidade da água.
- (02) O empuxo exercido sobre o navio é igual ao seu peso.
- (04) Um volume de água igual ao volume submerso do navio tem o mesmo peso do navio.
- (08) O empuxo exercido sobre o navio é maior do que o seu peso. Caso contrário, um pequeno acréscimo de carga provocaria o seu afundamento.
- (16) Se um dano no navio permitir que água penetre no seu interior, enchendo-o, ele afundará totalmente, porque, cheio de água, sua densidade média será maior do que a densidade da água.
- (32) Sendo o empuxo exercido sobre o navio igual ao seu peso, a densidade média do navio é igual à densidade da água.
25. (UF-PA) A distância vertical entre a superfície da água em que uma embarcação navega e a parte mais baixa de sua quilha é chamada de calado. Nos navios a marcação do calado é feita com uma escala visível na lateral, na qual aparece a medida em metros. Dependendo das condições de flutuação, o calado de um navio pode variar.



ALEX ARGOZINO

Substância	Densidade (g/cm ³)
gasolina	0,65
óleo lubrificante	0,91
água doce	1,015
água salgada	1,025

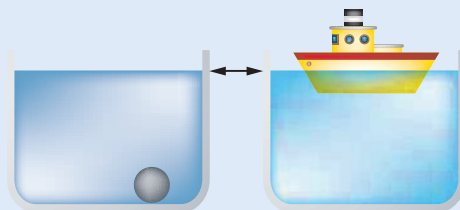
Com base na definição do calado de um navio e nos dados da tabela de densidades, analise as afirmativas abaixo:

- I. Se o navio estiver em um porto como o de Fortaleza, no oceano Atlântico, seu calado será maior do que se estiver no porto de Santarém, no rio Tapajós.
- II. Se um navio-tanque está carregado com óleo lubrificante, seu calado será maior do que se estiver carregado com volume igual de gasolina.
- III. Quando o calado de um navio aumenta, a pressão total na parte mais baixa do seu casco também aumenta.
- IV. Se a pressão atmosférica no local onde o navio se encontra aumentar, seu calado também aumentará.

Estão corretas as afirmativas:

- a) I e II c) II e III e) III e IV
b) I e IV d) II e IV

26. (UF-RJ) Dois recipientes idênticos estão cheios de água até a mesma altura. Uma esfera metálica é colocada em um deles, vai para o fundo e ali permanece em repouso. No outro recipiente, é posto um barquinho que termina por flutuar em repouso com uma pequena parte submersa. Ao final desses procedimentos, volta-se ao equilíbrio hidrostático e observa-se que os níveis de água nos dois recipientes subiram até uma mesma altura. Indique se, na situação final de equilíbrio, o módulo E_e do empuxo sobre a esfera é maior, menor ou igual ao módulo E_b do empuxo sobre o barquinho. Justifique sua resposta.



ALEX ARGOZINO

27. (Fuvest-SP) Um objeto menos denso que a água está preso por um fio fino, fixado no fundo de um aquário cheio de água, conforme a figura a seguir. Sobre esse objeto atuam as forças peso, empuxo e tensão no fio. Imagine que tal aquá-

rio seja transportado para a superfície de Marte, onde a aceleração gravitacional é de aproximadamente $\frac{g}{3}$, sendo g a aceleração da gravidade na Terra. Em relação aos valores das forças observadas na Terra, pode-se concluir que, em Marte:

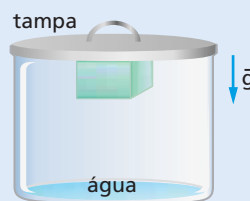
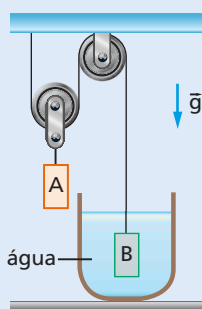
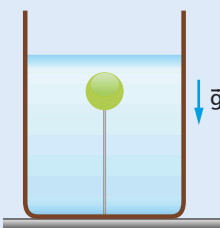
- a) o empuxo é igual e a tensão é igual.
- b) o empuxo é igual e a tensão aumenta.
- c) o empuxo diminui e a tensão é igual.
- d) o empuxo diminui e a tensão diminui.
- e) o empuxo diminui e a tensão aumenta.

28. (Unifor-CE) O esquema representa dois corpos A e B em equilíbrio. As roldanas e os fios são considerados ideais.

Nessas condições, sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, a massa do corpo A igual a $8,0 \text{ kg}$ e a massa do corpo B igual a $7,0 \text{ kg}$, o empuxo sobre o corpo B vale, em newtons:

- a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

29. (UF-PE) Um bloco homogêneo e impermeável, de densidade $\rho = 0,25 \text{ g/cm}^3$, está em repouso, imerso em um tanque completamente cheio de água e vedado, como mostrado na figura a seguir. Calcule a razão entre os módulos da força que o bloco exerce na tampa superior do tanque e do peso do bloco.



30. Um recipiente contendo água está sobre uma balança graduada em newtons que assinala 420 N (fig. a). Um corpo cilíndrico de massa 12 kg e densidade $6,0 \text{ g/cm}^3$, preso a um dinamômetro, é parcialmente mergulhado na água (fig. b), de modo que fica com metade de seu volume submerso. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a densidade da água é de $1,0 \text{ g/cm}^3$, calcule, para a situação da figura b:

- a) a marcação do dinamômetro;
- b) a marcação da balança.

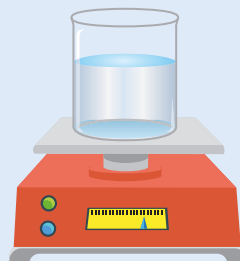


Figura a.

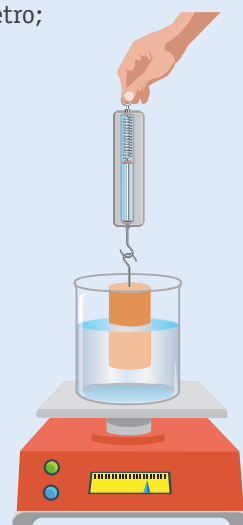


Figura b.

3. Centro de empuxo

No interior de um fluido qualquer, sob a ação da gravidade, consideremos uma superfície S de formato qualquer (fig. 16a). Se o fluido estiver em equilíbrio, o peso do fluido que está no interior de S (\vec{P}) deve ter o mesmo módulo do empuxo (\vec{E}) que o resto do fluido exerce sobre o fluido interno: $|\vec{E}| = |\vec{P}|$. Além disso, para haver equilíbrio de rotação, o ponto de aplicação do empuxo deve coincidir com o centro de gravidade (C) do fluido interno. O ponto C é chamado **centro de empuxo**.

Substituamos agora o fluido interno por um corpo que preenche todo o espaço no interior de S . Se o corpo for homogêneo, seu centro de gravidade (G) coincidirá com C . Mas, se o corpo não for homogêneo, G será diferente de C , como no caso da figura 16b.

No caso de um corpo que flutua, com uma parte emersa (fig. 17), mesmo que ele seja homogêneo, o centro de gravidade não coincide com o centro de empuxo.

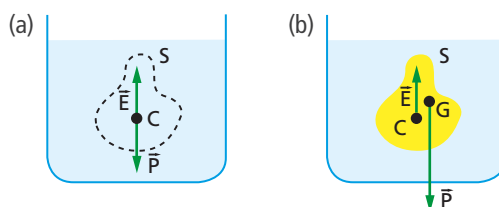


Figura 16.

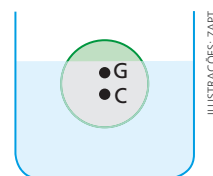


Figura 17.

Na figura 18a representamos a seção reta de um corpo que flutua, em equilíbrio, em um líquido. Para que haja equilíbrio de rotação, o centro de empuxo (C) e o centro de gravidade (G) do corpo devem estar em uma mesma reta vertical.

Se provocarmos no corpo uma pequena inclinação (figs. 18b e 18c), o centro de gravidade não se altera, mas o centro de empuxo muda de posição (em relação ao corpo) e, então, temos duas possibilidades:

- 1ª) Se acontecer o que está representado na figura 18b, haverá um torque resultante que tenderá a fazer o corpo voltar a sua posição inicial.
- 2ª) Se acontecer o que está representado na figura 18c, o torque resultante provocará um aumento da inclinação e o corpo “tombará”.

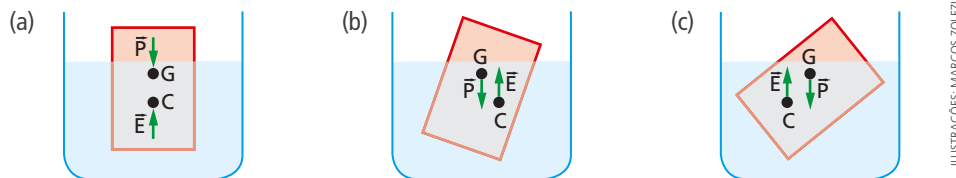


Figura 18.

ILUSTRAÇÕES: MARCOS ZOLEZI

Exercícios de Aplicação

31. Uma barra cilíndrica é feita metade de aço e metade de madeira. Essa barra é abandonada dentro da água na posição horizontal, como mostra a figura a. Em que sentido vai girar a barra?

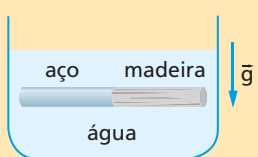


Figura a.

Resolução:

Como a barra é cilíndrica, o centro de gravidade (G) da água que caberia no espaço ocupado pela barra está no centro dela, isto é, o centro de empuxo é o centro da barra.

Porém, sendo o aço mais denso que a madeira, o centro de gravidade (G) da barra estará à esquerda do centro.

Percebemos, então, a partir da figura b, que o peso \vec{P} e o empuxo produzem um torque resultante no sentido anti-horário.

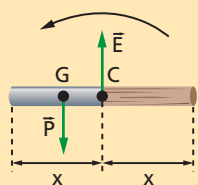
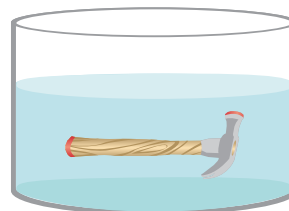


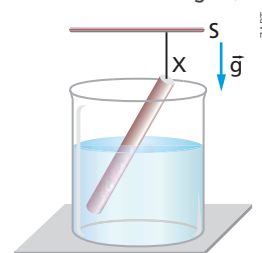
Figura b.

32. Um martelo de cabo de madeira e cabeça de aço é abandonado dentro da água na posição indicada na figura. Em que sentido ele irá inicialmente girar?



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

33. Uma barra cilíndrica e homogênea flutua com metade de seu comprimento submerso na água, como indica a figura, tendo sua extremidade X presa a um fio que, por sua vez, está preso a um suporte S. Sabendo que a densidade da água é $1,0 \text{ g/cm}^3$, calcule a densidade da barra.



4. O significado do empuxo

No início do capítulo afirmamos que o empuxo, calculado pelo peso do fluido deslocado, é a força que o fluido faz num corpo total ou parcialmente imerso no fluido. Isso é certamente verdade quando o corpo está totalmente imerso, como você pode verificar seguindo o raciocínio de Arquimedes. Porém, quando o corpo está parcialmente submerso, tal afirmação pode não ser verdade.

Para percebermos isso, consideremos a situação ilustrada na figura 19. Um corpo cilíndrico, cujo eixo está na vertical e cuja área da base é A , está parcialmente submerso em um líquido de densidade d_L , sendo h a altura da parte submersa. A face superior sofre a ação de uma força \vec{F}_1 , em decorrência da pressão atmosférica:

$$F_1 = p_{\text{atm}} \cdot A$$

A pressão na face inferior (p_2) é dada pela Lei de Stevin:

$$p_2 = p_{\text{atm}} + d_L g h$$

Assim, a força exercida pelo líquido na face inferior é \vec{F}_2 , cujo módulo é:

$$F_2 = p_2 \cdot A = (p_{\text{atm}} + d_L g h) \cdot A = \underbrace{(p_{\text{atm}} \cdot A)}_{F_1} + \underbrace{d_L g h A}_{V_L}$$

Mas o produto hA é o volume da parte submersa, isto é, o volume do líquido deslocado (V_L). Assim, a equação acima fica:

$$F_2 = F_1 + \underbrace{d_L V_L g}_{P_L}$$

ou:

$$\underbrace{F_2 - F_1}_E = P_L$$

sendo P_L o peso do líquido deslocado.

Portanto, o empuxo \vec{E} é a resultante de \vec{F}_2 e \vec{F}_1 , sendo \vec{F}_2 a força exercida pelo líquido e \vec{F}_1 a força exercida pela atmosfera. O empuxo só será igual à força exercida pelo líquido se $F_1 = 0$, isto é, se não houver ar acima da superfície do líquido.

A situação aqui descrita é semelhante à que foi discutida no exercício 12.

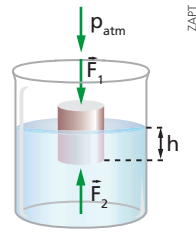


Figura 19.

Empuxo e fluido deslocado

A expressão **fluido deslocado** significa **fluido afastado**. Assim, quando dizemos que um corpo (total ou parcialmente submerso em um fluido) deslocou uma quantidade de fluido de volume V_L , estamos dizendo que o corpo ocupa um volume V_L anteriormente ocupado pelo fluido.

Usualmente, na apresentação do Princípio de Arquimedes, afirma-se:

“O empuxo é igual ao peso do fluido deslocado”.

Porém **essa afirmação nem sempre é verdade**.

Para percebermos isso, consideremos a situação ilustrada na figura 20, em que representamos a seção reta de um corpo prismático flutuando em um líquido contido em um recipiente também prismático, sendo V_e o volume da parte emersa e V_i o volume da parte imersa.

Usando as medidas dadas na figura, é fácil concluir que o volume do líquido é menor que o volume imerso, isto é:

“o volume do líquido deslocado é maior que o volume total de líquido disponível no recipiente”.

Portanto, quando há pouco líquido disponível, é possível que o corpo flutue de modo que o empuxo não seja igual ao volume de líquido deslocado. Assim, o modo mais adequado de apresentar o Princípio de Arquimedes é:

“O empuxo tem o mesmo módulo do fluido que caberia no espaço ocupado pela parte submersa do corpo”.

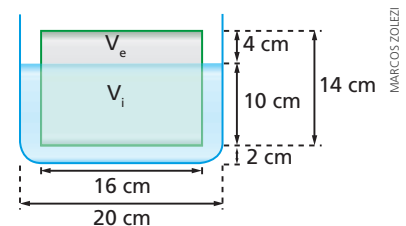


Figura 20.

Um caso especial

A densidade do mercúrio é maior que a densidade do vidro. Assim, se colocarmos um bloco de vidro no mercúrio, o bloco deverá flutuar.

No entanto, se colocarmos um cubo de vidro bem polido no fundo de um recipiente, também muito liso, inicialmente vazio e, a seguir, colocarmos o mercúrio lentamente sobre o vidro até cobri-lo, pode acontecer de o vidro não subir, ficando no fundo (fig. 21a). Por quê?

Para entender essa situação precisamos nos lembrar de que o empuxo é na realidade a resultante das forças de pressão exercidas sobre o corpo. Ao procedermos da maneira descrita, o mercúrio não penetra na parte de baixo do vidro, isto é, não há mercúrio entre o vidro e o fundo. Assim, na vertical, o mercúrio só exerce forças na parte superior do bloco (fig. 21b), ocasionando uma resultante para baixo (\vec{F}_R), comprimindo o bloco contra o fundo.

Se levantarmos um pouco o bloco, permitindo que o mercúrio penetre entre o vidro e o fundo (fig. 21c), aparecerão forças de pressão para cima e aí a resultante das forças na vertical será o empuxo \vec{E} (para cima), cuja intensidade será igual ao peso do fluido deslocado.

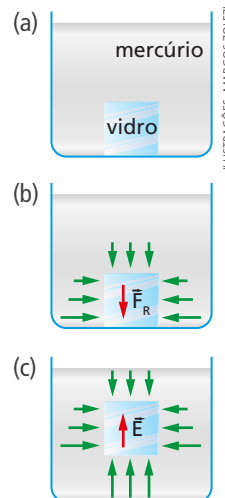


Figura 21.

Exercícios de Aprofundamento

34. Um vaso de vidro de paredes finas e cuja área da base é $A = 120 \text{ cm}^2$ (fig. a) contém água até uma altura de 20 cm. Um corpo de volume 400 cm^3 e densidade $0,60 \text{ g/cm}^3$ é posto a flutuar na água (fig. b). Sabendo que a densidade da água é $1,0 \text{ g/cm}^3$, calcule o novo valor (x) do nível da água.

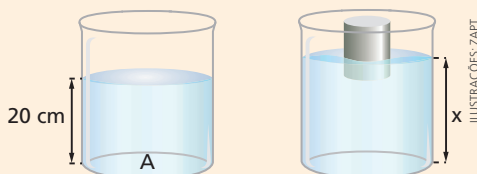


Figura a.

Figura b.

35. Quando penduramos um corpo C em um dinamômetro (fig. a), este marca 60 N. Ao mergulharmos o corpo na água (fig. b), o dinamômetro registra 40 N e, ao mergulharmos o corpo num outro líquido (fig. c), o dinamômetro marca 45 N. Sabendo que a densidade da água é $1,0 \text{ g/cm}^3$, calcule a densidade do outro líquido ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

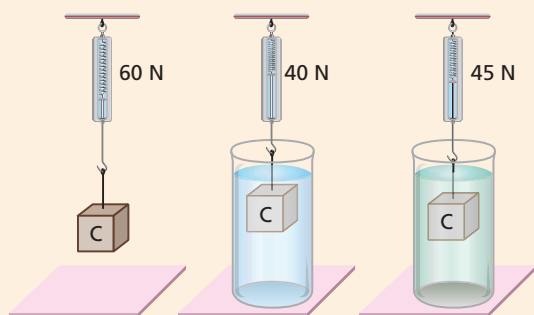


Figura a.

Figura b.

Figura c.

36. (UF-GO) Considere um líquido de densidade 1000 kg/m^3 , adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e suponha que $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ N/m}^2$. Verifique, entre as sentenças a seguir, quais são verdadeiras.

- I. Se um submarino de $150\,000 \text{ kg}$, com suas turbinas desligadas, permanece em repouso no interior do líquido, então seu volume é de 150 m^3 .
- II. A pressão hidrostática no interior do líquido aumenta 1 atm a cada 1 m de profundidade.
- III. Um objeto é capaz de permanecer em repouso a qualquer profundidade, se sua densidade for igual à do líquido.
- IV. Se um corpo flutua com 95% do seu volume submerso, sua densidade é 95% menor do que a do líquido.

37. Um corpo esférico e homogêneo de raio $3,0 \text{ cm}$ flutua em um líquido de densidade $2,7 \text{ g/cm}^3$, de modo que a altura da parte submersa é $4,0 \text{ cm}$. Qual é a densidade do corpo? Dado: volume do segmento esférico $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$.

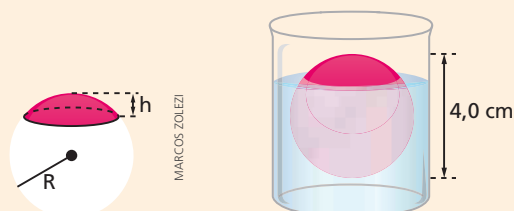
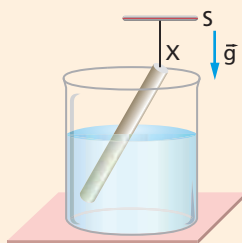


Figura a.

Figura b.

38. Uma barra cilíndrica e homogênea flutua com metade de seu comprimento submerso na água, como indica a figura, tendo sua extremidade X presa a um fio que, por sua vez, está preso a um suporte S . O comprimento da barra é $2,0\text{ m}$, a área de sua seção reta é $4,0\text{ cm}^2$ e $g = 10\text{ m/s}^2$.



ZAPFT

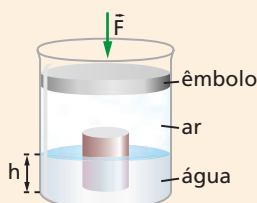
Calcule:

- o volume da barra;
 - a massa da barra;
 - a intensidade da tração no fio.
39. Descartes imaginou um interessante brinquedo para ilustrar as propriedades dos fluidos. Ele pegou um pequeno tubo de vidro, parcialmente cheio de água, e o colocou invertido dentro de uma garrafa contendo água, como mostra a figura. A seguir, tapou a garrafa com uma rolha. Verificou então que, comprimindo a rolha, o tubo descia. Como explicar isso?



RODVAL MATIAS

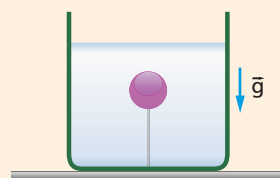
40. Dentro de um cilindro há um corpo flutuando em água, sendo h a altura da parte submersa na água. Um êmbolo que pode mover-se sem atrito impede que o ar interno escape. Se aplicarmos ao êmbolo uma força vertical \vec{F} , aumentando a pressão do ar, o que acontecerá com h ? Aumentará, diminuirá ou continuará igual?



ZAPFT

41. O plástico é menos denso que a água. No entanto, se tivermos um tanque cujo ralo está fechado com uma tampa de plástico, precisamos exercer mais força para destampar o ralo com o tanque cheio de água do que quando vazio. Por quê?

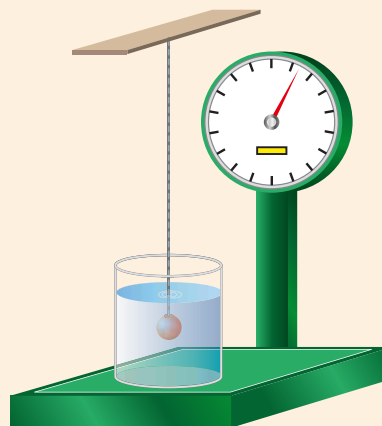
42. A figura mostra uma pequena esfera, de volume 300 cm^3 e densidade $0,200\text{ g/cm}^3$, em equilíbrio e imersa em água, presa por um fio ideal ao fundo do recipiente.



ZAPFT

Adotando $g = 10\text{ m/s}^2$, calcule:

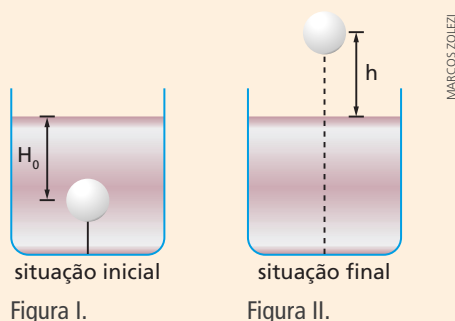
- o módulo do empuxo sobre a esfera;
 - o peso da esfera;
 - a tração no fio.
43. Suponhamos que o recipiente da questão anterior adquira movimento acelerado para a direita, com aceleração de módulo $a = \frac{25}{6}\text{ m/s}^2$.
- Em seu caderno, faça um desenho mostrando a nova situação de equilíbrio da esfera.
 - Determine os módulos do empuxo e da tração.
44. (UF-RJ) Um aluno, primeiramente, colocou água em um recipiente e o posicionou sobre uma balança, obtendo uma leitura m_0 em gramas. Depois imergiu na água uma bola de acrílico com massa igual a 600 g e volume 400 cm^3 , presa por um fio ao teto. Considere a densidade da água igual a 1000 kg/m^3 e a aceleração da gravidade 10 m/s^2 . Calcule:



LUIZ FERNANDO RUBIO

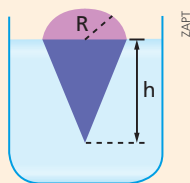
- a tensão do fio;
- a variação em gramas da medida da balança devido à introdução da bola de acrílico na água.

45. (Fuvest-SP) Uma bolinha de isopor é mantida submersa, em um tanque, por um fio preso ao fundo. O tanque contém um líquido de densidade d igual à da água (1 g/cm^3). A bolinha, de volume $V = 200 \text{ cm}^3$ e massa $m = 40 \text{ g}$, tem seu centro mantido a uma distância $H_0 = 50 \text{ cm}$ da superfície (fig. I). Cortando o fio, observa-se que a bolinha sobe, salta fora do líquido, e que seu centro atinge uma altura $h = 30 \text{ cm}$ acima da superfície (fig. II). Desprezando os efeitos do ar e adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

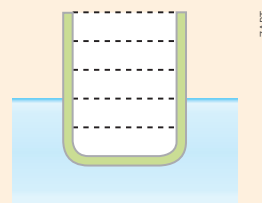


- a altura h' , acima da superfície do líquido, que a bolinha atingiria se não houvesse atrito com o líquido;
- a energia mecânica dissipada entre a situação inicial e a final.

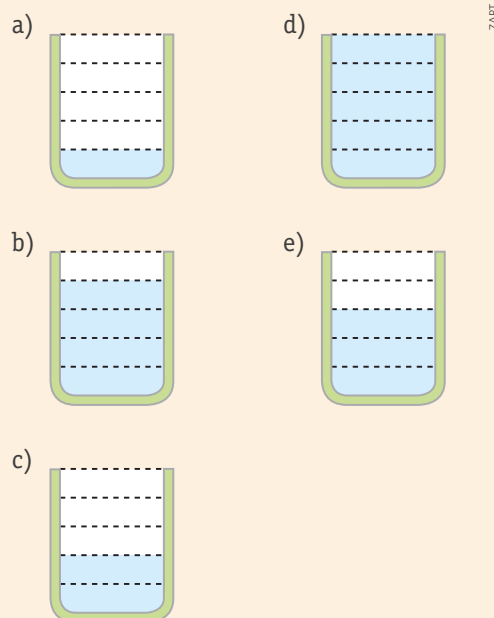
46. (UF-GO) Uma boia de sinalização tem a forma de um cone invertido encimado por um hemisfério e está presa por um fio, de massa desprezível, ao fundo de um reservatório de água, de maneira a ter apenas a parte cônica submersa, como mostra a figura. O cone tem altura $h = 1 \text{ m}$ e o raio de sua base, que é o mesmo do hemisfério, é $R = 30 \text{ cm}$. A boia é maciça e construída de um material de densidade $0,45 \text{ g/cm}^3$. Estime o valor da tensão no fio, considerando $\pi = 3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade da água $1,0 \text{ g/cm}^3$.



47. (Fuvest-SP) um recipiente cilíndrico vazio flutua em um tanque de água com parte de seu volume submerso, como na figura a seguir.



O recipiente possui marcas graduadas igualmente espaçadas, paredes laterais de volume desprezível e um fundo grosso e pesado. Quando o recipiente começa a ser preenchido, lentamente, com água, a altura máxima que a água pode atingir em seu interior, sem que ele afunde totalmente, é melhor representada por:



SUGESTÃO DE LEITURA

Bendick, Jeanne. *Arquimedes, uma porta para a Ciência*. São Paulo: Odysseus, 2002.
Este livro apresenta uma boa exposição da vida e da obra de Arquimedes.

Fluidodinâmica

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades referentes a fluidos em movimento. Esse estudo é chamado **Fluidodinâmica**. Antes, porém, recomendamos ao aluno que reveja o conceito de vazão, no capítulo 1, página 25, e o item "Equação de continuidade", no capítulo 3, página 59.

1. Escoamento de fluidos

O escoamento de um fluido real tem um comportamento bastante complexo; assim, faremos quatro hipóteses simplificadoras, as quais definem um **fluido ideal**. Sob certas condições, o comportamento de um fluido real é muito semelhante ao do fluido ideal.

1ª hipótese: O escoamento é não viscoso

A **viscosidade** é uma espécie de atrito interno ao fluido; há uma resistência ao deslizamento de uma parte do fluido sobre a outra, que provoca perda de energia mecânica, a qual é transformada em energia térmica. Consideremos, por exemplo, um copo cheio de água e outro cheio de mel. Se virarmos os dois copos, de modo a derramar seus conteúdos, verificaremos que a água é derramada com mais facilidade; o mel escoar mais lentamente, com mais "dificuldade". Isso porque o mel é mais viscoso que a água. Em certos casos, a viscosidade é desejável, como nos óleos lubrificantes. No fluido ideal a viscosidade é **nula**.

2ª hipótese: O escoamento é incompressível

O escoamento é dito incompressível quando a densidade do fluido não varia ao longo do percurso e também não varia em relação ao tempo. Com os líquidos, que são pouco compressíveis, isso é fácil de conseguir, mas com os gases é mais difícil, pois eles são facilmente compressíveis. Porém, há uma série de situações em que a variação de densidade é pequena e pode ser desprezada.

3ª hipótese: O escoamento é irrotacional

O escoamento é irrotacional quando nenhuma porção do fluido efetua movimento de rotação. A figura 1 mostra um caso em que ocorre movimento de rotação do fluido.

1. Escoamento de fluidos
2. Pressão e velocidade
3. Equação de Bernoulli
4. Equação de Torricelli
5. Tubo de Venturi
6. Tubo de Pitot



Figura 1. Escoamento rotacional de um fluido.

4ª hipótese: O escoamento é estacionário

O escoamento é chamado **estacionário** (ou **permanente**) quando a velocidade vetorial do fluido num ponto qualquer não varia com o tempo. Na figura 2 representamos algumas trajetórias das partículas de um fluido em escoamento estacionário. Nesse caso, todas as partículas que passam pelo ponto A têm a mesma velocidade \vec{v}_A e todas as partículas que passam pelo ponto B têm a mesma velocidade \vec{v}_B ; porém, \vec{v}_A pode ser diferente de \vec{v}_B . Qualquer partícula que passe por A seguirá a trajetória x; do mesmo modo, toda partícula que passar por C seguirá a trajetória y; e assim sucessivamente. Essas trajetórias são denominadas **linhas de corrente** (fig. 3).

Num movimento **não estacionário** (ou **turbulento**), a velocidade em um ponto qualquer não é a mesma para todas as partículas que passam por esse ponto, e cada partícula que passar por esse ponto poderá seguir uma trajetória diferente.

Na região central de um rio em que a água se move com velocidade baixa, o movimento é aproximadamente **estacionário**. Porém, numa região em que a velocidade é alta e há pedras no leito do rio (corredeiras) o movimento é **turbulento**.

Tubo de escoamento

No interior de um fluido em movimento estacionário, consideremos uma superfície S_A (fig. 4) e, entre as várias linhas de corrente, consideremos as que passam por S_A . Essas linhas definem uma região denominada **tubo de escoamento** ou **tubo de fluxo**. É como se esse tubo fosse um cano. Nenhum fluido atravessa as paredes do tubo e todo fluido que passa por S_A passará também por S_B .

2. Pressão e velocidade

Na Fluidostática vimos a Lei de Stevin, que nos dá a diferença de pressão entre dois pontos situados dentro de um fluido em repouso, em função do desnível entre esses dois pontos; através dessa lei, vimos que a pressão em um ponto do fluido **depende do nível** desse ponto. Porém, quando o fluido está em movimento, é fácil perceber que, além do nível, há um outro fator que afeta o valor da pressão: a **velocidade**.

Consideremos, por exemplo, o tubo da figura 5, disposto horizontalmente e pelo qual escoam um fluido ideal. Tomemos, sobre as seções retas S_x e S_y , os pontos X e Y, situados no mesmo nível. No ponto X o fluido tem velocidade \vec{v}_x e no ponto Y tem velocidade \vec{v}_y . Sendo A_x e A_y as áreas de S_x e S_y , temos, pela equação de continuidade:

$$A_x \cdot v_x = A_y \cdot v_y$$

Assim:

$$A_y < A_x \Rightarrow v_y > v_x$$

Portanto, ao passar do trecho “largo” para o trecho “estreito”, a velocidade aumentou. Isso significa que as partículas do fluido foram aceleradas e, assim, há uma força, com o sentido indicado na figura, produzindo essa aceleração. O fato de o sentido da força ser da esquerda para a direita significa que a pressão à esquerda é maior que a pressão à direita:

$$p_x > p_y$$

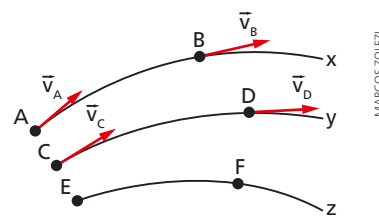


Figura 2. Representação das partículas de um fluido em escoamento estacionário.



Figura 3. Automóvel em túnel de vento. A linha de corrente torna-se visível com as partículas da fumaça introduzida no túnel.

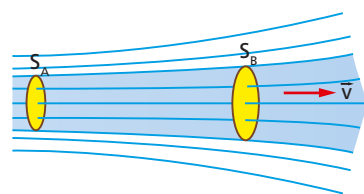


Figura 4.

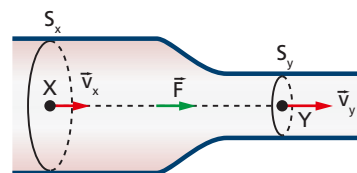


Figura 5.

Se o fluido estivesse em repouso, as pressões em X e Y seriam iguais, pois esses pontos estão no mesmo nível. Porém, como o fluido está em movimento, as pressões em X e Y são diferentes: de $v_x < v_y$ concluímos que $p_x > p_y$, isto é:

No trecho em que a **velocidade é maior, a pressão é menor**.

Na figura 5, consideramos o fluido indo da esquerda para a direita (do trecho largo para o trecho estreito). Se o fluido fosse da direita para a esquerda (do trecho estreito para o largo), a força \vec{F} teria o mesmo sentido da figura, pois, ao passar de S_y para S_x , as partículas diminuiriam a velocidade, sendo, portanto, retardadas.

Da análise que fizemos, percebemos que precisamos de um teorema mais amplo que o de Stevin, um que relacione a **pressão** com o **nível** e com a **velocidade** do fluido. Esse teorema (ou lei) será visto no próximo item. Antes, porém, vamos apresentar algumas aplicações da variação da pressão com a velocidade.

Imaginemos um avião em movimento horizontal (fig. 6a), com velocidade constante, da esquerda para a direita. Podemos analisar essa situação considerando um referencial fixo no avião, isto é, supomos que o avião está em repouso e o ar se movimenta da direita para a esquerda. A asa do avião é projetada de modo que as linhas de corrente próximas dela se curvam como mostra a figura 6b. Na região acima da asa, as linhas de corrente estão mais próximas do que na região abaixo da asa. Isso significa que, acima da asa, a velocidade é maior do que abaixo e, portanto, acima da asa a pressão é menor que abaixo; como resultado, há uma força ascensional \vec{F}_s , como indica a figura. Essa força costuma ser chamada de força de **sustentação**.

Na figura 7a temos representadas duas bolas de pingue-pongue, suspensas por fios leves. Se soprarmos na região **entre** as bolas, a pressão nessa região ficará menor que a pressão nos pontos X e Y (fig. 7b), provocando uma aproximação das bolas. O mesmo ocorre quando soprarmos no espaço entre duas folhas de papel, como ilustra a figura 8: as folhas se aproximam. Uma situação semelhante ocorre numa estrada quando um veículo passa por outro, ambos com alta velocidade. Durante a ultrapassagem, os veículos são “puxados” um em direção ao outro.

Quando venta paralelamente a uma janela aberta de uma residência, a pressão do ar externo fica menor que a pressão do ar interno e a cortina é “puxada” para fora. Se o vento for muito intenso (como durante um furacão), os vidros da janela poderão quebrar. Do mesmo modo, um vento em alta velocidade passando por cima do teto de uma residência faz com que a pressão acima do teto fique menor que a pressão do ar interno, podendo ocasionar um levantamento do teto.

Dois exemplos de fluido real

Por hipótese, um fluido **ideal** tem viscosidade nula. Porém, os fluidos **reais** têm viscosidade, e isso acarreta alguns efeitos interessantes.

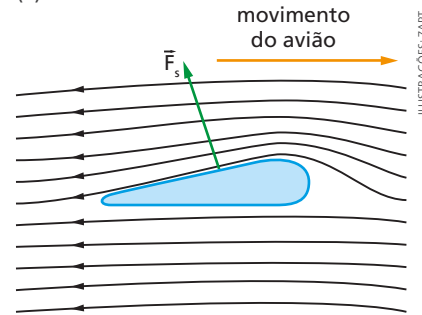
Os animais que vivem em tocas, como, por exemplo, os coelhos, precisam construí-las de modo que o ar circule por elas, evitando que eles se sufoquem. Assim, constroem as tocas com, pelo menos, duas entradas em níveis diferentes (fig. 9). Devido ao atrito do ar com o solo, a velocidade do ar próximo ao solo é menor que um pouco acima. Isso acarreta uma diferença de pressão entre as duas entradas, havendo, em consequência, um fluxo de ar dentro da toca.

(a)



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

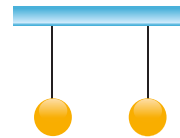
(b)



ILUSTRAÇÕES: ZAPIT

Figura 6.

(a)



(b)

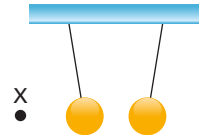
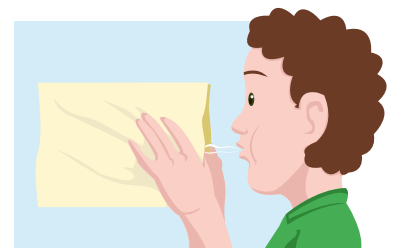


Figura 7.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Figura 8.

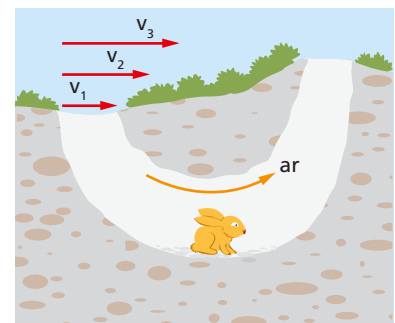


Figura 9.

Outro efeito interessante você já deve ter observado em jogos de futebol, quando um jogador de grande habilidade, ao bater uma falta (fig. 10), consegue imprimir uma trajetória curva à bola. Ao sair do pé do jogador, a bola tem velocidade \vec{v}_0 , dando a impressão de que não atingirá o gol. No entanto, a bola adquire uma trajetória curva, atingindo o gol, para surpresa do goleiro e dos jogadores da defesa. Esse efeito pode ser obtido também em jogos de tênis, beisebol e golfe, sendo chamado de **efeito Magnus**, pois foi explicado pela primeira vez pelo físico alemão Heinrich Gustav Magnus (1802-1870).

O efeito Magnus ocorre quando a bola é lançada de tal maneira que, além do movimento de translação, ela tem um movimento de rotação.

Suponhamos inicialmente que a bola tenha apenas movimento de translação, por exemplo, para a esquerda. Para um referencial na bola, as linhas de corrente têm a forma da figura 11a.

Suponhamos agora que a bola tenha apenas movimento de rotação, por exemplo, no sentido horário (fig. 11b). Por causa do atrito, a bola arrasta o ar que está próximo, produzindo linhas de corrente aproximadamente circulares.

Na figura 11c temos a superposição das duas figuras. Na parte inferior, as velocidades têm sentidos opostos e na parte superior as velocidades têm o mesmo sentido. Por isso, a velocidade resultante é maior acima que abaixo. A consequência é que a pressão embaixo é maior que a pressão em cima, ocasionando uma força \vec{F} sobre a bola, que será responsável pelo desvio.

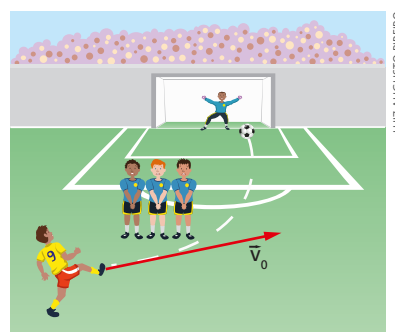


Figura 10.

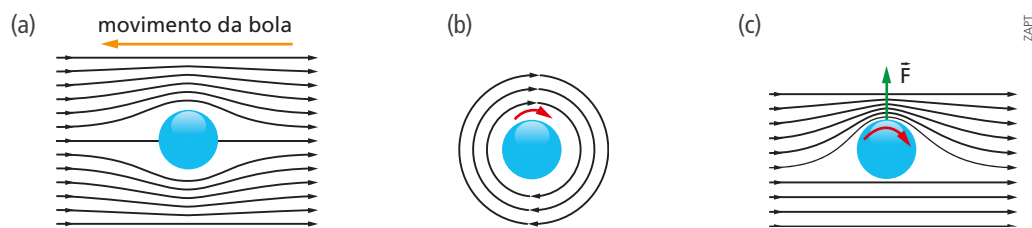


Figura 11.

3. Equação de Bernoulli

A equação que relaciona a pressão, o nível e a velocidade de um fluido foi obtida pelo físico e matemático suíço Daniel Bernoulli (1700-1782).

A seguir vamos apresentar essa equação sem demonstração e faremos algumas aplicações. A demonstração será dada mais adiante, nas páginas 543 e 544.

Na figura 12, s é uma linha de corrente, situada no interior de um tubo de corrente de um fluido ideal. Sobre s tomamos os pontos 1 e 2, cujas alturas, em relação a um plano horizontal (α) qualquer, são y_1 e y_2 . Nesses pontos, as pressões são p_1 e p_2 e as velocidades são \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Sendo d a densidade do fluido e g a aceleração da gravidade, Bernoulli demonstrou que:

$$p_1 + dgy_1 + \frac{dv_1^2}{2} = p_2 + dgy_2 + \frac{dv_2^2}{2} \quad (\text{equação de Bernoulli})$$

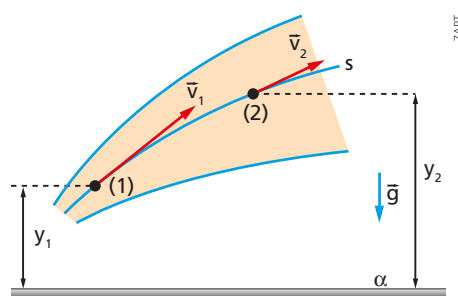


Figura 12.

Casos particulares

1º) Se o fluido estiver em repouso, teremos $v_1 = v_2 = 0$ e a equação de Bernoulli se reduzirá à equação de Stevin, vista na Fluidostática:

$$p_1 + dgy_1 = p_2 + dgy_2 \Rightarrow p_1 = p_2 + dg \underbrace{(y_2 - y_1)}_h \Rightarrow p_1 = p_2 + dgh$$

2º) Se os pontos 1 e 2 estiverem no mesmo nível (fig. 13), teremos $y_1 = y_2$, e a equação de Bernoulli se reduzirá a:

$$p_1 + \frac{dv_1^2}{2} = p_2 + \frac{dv_2^2}{2}$$

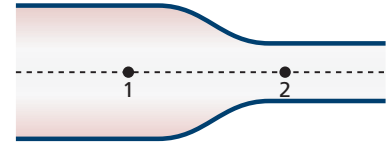


Figura 13.

OBSERVAÇÕES

1ª) Na equação de Bernoulli, a pressão p é chamada **pressão estática** ou **absoluta**; o termo $\frac{dv^2}{2}$ é chamado **pressão dinâmica**. Alguns autores chamam a soma $p + \frac{dv^2}{2}$ de **pressão total**.

2ª) Sendo p_a a pressão atmosférica e p a pressão estática em um ponto, a diferença $p - p_a$ é chamada **pressão efetiva nesse ponto**.

4. Equação de Torricelli

Um recipiente (fig. 14) contém um líquido de densidade d que escoa por um pequeno orifício de área A_2 , situado a uma altura y_2 em relação a um plano horizontal α . O nível superior do líquido está a uma altura y_1 , a qual obviamente diminui à medida que o líquido escoa pelo orifício. Seja A_1 a área da seção reta do recipiente na altura y_1 .

Como o recipiente é aberto, tanto na parte superior como no orifício a pressão é igual à pressão atmosférica (p_a):

$$p_1 = p_2 = p_a$$

Vamos supor que A_1 seja muito maior que A_2 ($A_1 > A_2$). Assim, pela equação de continuidade ($A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$), podemos admitir que $v_1 \cong 0$. Apliquemos então a equação de Bernoulli aos pontos 1 (situado na parte mais alta do líquido) e 2 (situado no orifício):

$$\underbrace{p_1}_{p_a} + dgy_1 + \frac{dv_1^2}{2} = \underbrace{p_2}_{p_a} + dgy_2 + \frac{dv_2^2}{2}$$

\downarrow
 \downarrow
 \downarrow

0
 0

Assim:

$$v_2^2 = \underbrace{2g(y_1 - y_2)}_h = 2gh \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \quad (\text{equação de Torricelli})$$

É interessante observar que essa velocidade é a mesma que obteríamos para uma partícula que tivesse sido abandonada em repouso, de uma altura h , desprezando a resistência do ar.

Devemos observar também que h diminui à medida que o líquido escoa; no entanto, na hipótese A_1 sendo muito maior que A_2 , essa diminuição é bastante lenta.

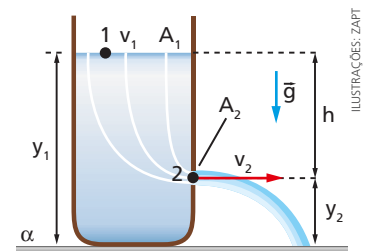
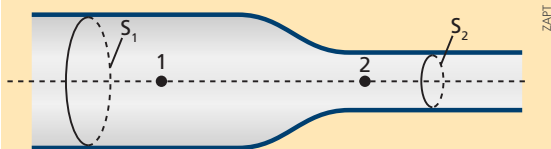


Figura 14.

ILUSTRAÇÕES: ZAPET

Exercícios de Aplicação

1. A figura mostra uma tubulação disposta horizontalmente, por dentro da qual escoam um fluido ideal de densidade $6,0 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$. As áreas das seções retas S_1 e S_2 são, respectivamente, $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ e $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Sabendo que no ponto 1 a velocidade é $2,0 \text{ m/s}$ e a pressão é $5,40 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, calcule a velocidade e a pressão no ponto 2.



Resolução:

Pela equação de continuidade temos:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 = \left(\frac{5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \right) \cdot (2,0 \text{ m/s}) \Rightarrow v_2 = 4,0 \text{ m/s}$$

Apliquemos agora a equação de Bernoulli sem os termos dgy_1 e dgy_2 , pois os dois pontos estão no mesmo nível:

$$p_1 + \frac{dv_1^2}{2} = p_2 + \frac{dv_2^2}{2}$$

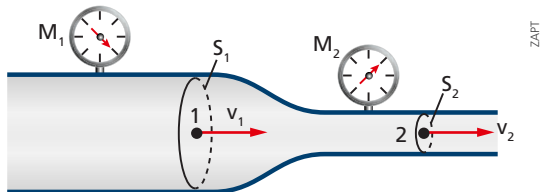
ou

$$p_2 = p_1 + \frac{d}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

$$p_2 = (5,40 \cdot 10^4) + \frac{6,0 \cdot 10^2}{2} [(2,0)^2 - (4,0)^2]$$

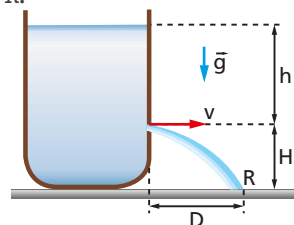
$$p_2 = 5,04 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

2. Por uma tubulação disposta horizontalmente (veja a figura), escoam um líquido de densidade $0,80 \text{ g/cm}^3$. Os medidores de pressão M_1 e M_2 assinalam, respectivamente, as pressões: $p_1 = 6,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ e $p_2 = 5,4 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Sabendo que as áreas das seções retas S_1 e S_2 são, respectivamente, iguais a $4,0 \text{ cm}^2$ e $3,0 \text{ cm}^2$, calcule os módulos das velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .



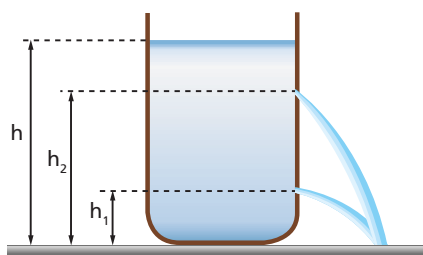
3. Um vento de 144 km/h sopra acima do teto de uma casa. Admitindo que a densidade do ar seja $1,2 \text{ kg/m}^3$ e que a área do teto seja 50 m^2 , calcule:
- a diferença de pressão entre um ponto logo abaixo e outro logo acima do teto;
 - a intensidade da força que resulta dessa diferença de pressão e que tende a levantar o teto.

4. A figura representa um recipiente contendo água que escoam por um pequeno orifício situado à altura $H = 20 \text{ cm}$ e cuja área é $0,10 \text{ cm}^2$. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$, despreze a resistência do ar e suponha que a área da seção reta do recipiente seja muito maior que a área do orifício. No instante em que $h = 1,8 \text{ m}$, o jato de líquido atinge o solo no ponto R.

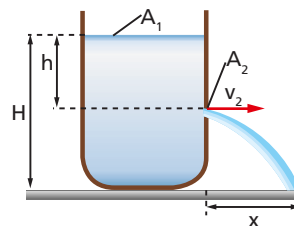


Para esse instante, calcule:

- a velocidade com que a água sai pelo orifício;
 - a vazão através do orifício;
 - a distância D assinalada na figura.
5. Um tanque de água de "grande" seção reta possui dois "pequenos" orifícios situados às alturas h_1 e h_2 , como indica a figura. Para determinado nível h da superfície livre da água, observa-se que os dois jatos de água atingem o solo no mesmo ponto.



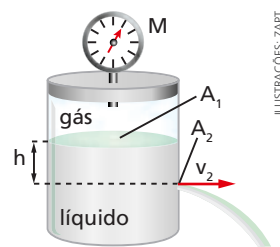
- Calcule o valor de h sabendo que $h_1 = 20 \text{ cm}$, $h_2 = 45 \text{ cm}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.
 - Sendo h_1 e h_2 quaisquer, determine a relação entre h , h_1 e h_2 .
6. Um tanque cilíndrico de seção reta cuja área é A_1 contém um líquido que escoam por um orifício cuja área é A_2 .



- Supondo A_2 muito menor que A_1 , determine a relação entre h e H de modo que o alcance x do jato seja máximo.

- b) Qual o valor do alcance máximo?
 c) Supondo que A_2 não seja desprezível em relação a A_1 , mostre que $v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$.

7. A figura representa um cilindro cuja área da seção reta é A_1 . Dentro do cilindro há, na parte de cima, um gás e, na parte de baixo, um líquido de densidade $8,0 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$, que escoa por um orifício de área A_2 , com velocidade v_2 .

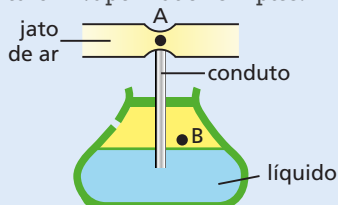


ILUSTRAÇÕES: ZAPT

Num determinado instante, a pressão do gás (lida no medidor M) é $2,2 \text{ atm}$ e $h = 5,0 \text{ m}$. Determine o valor de v_2 nesse instante, supondo A_1 muito maior que A_2 . (Dados: aceleração da gravidade $= 10 \text{ m/s}^2$; pressão atmosférica $= 1,0 \text{ atm} \approx 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.)

Exercícios de Reforço

8. (U. F. Santa Maria-RS) Observe a figura que representa um vaporizador simples.



Sabendo que, normalmente, o herbicida líquido é vaporizado sobre a plantação, um jato de ar, passando por A , ocasiona nesse ponto um $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$ na pressão quando comparado com B , onde o ar está $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$. Então, o líquido sobe pelo conduto porque sempre se desloca da $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$ pressão.

Verifique a alternativa que completa corretamente as lacunas.

- a) acréscimo – em movimento – menor para a maior
 b) abaixamento – em movimento – maior para a menor
 c) acréscimo – praticamente parado – menor para a maior
 d) acréscimo – em movimento – maior para a menor
 e) abaixamento – praticamente parado – maior para a menor
9. (UF-BA) Um fenômeno bastante curioso, associado ao voo dos pássaros e do avião, pode ser visualizado através de um experimento simples, no qual se utiliza um carretel de linha para empinar pipa, um prego e um pedaço circular de cartolina. O prego é colocado no centro da cartolina e inserido no buraco do carretel, conforme a figura. Soprando pelo buraco superior do carretel, verifica-se que o conjunto cartolina-prego não cai. Considere a



massa do conjunto cartolina-prego igual a 10 g , o raio do disco igual a 2 cm e a aceleração da gravidade local, 10 m/s^2 . A partir dessas informações, calcule a diferença de pressão mínima, entre as faces da cartolina, necessária para impedir que o conjunto caia.

10. Uma bola de pingue-pongue pode ser mantida suspensa por um jato de ar produzido por um secador de cabelo ou por um aspirador de pó (ligando a mangueira na parte de trás do aspirador).

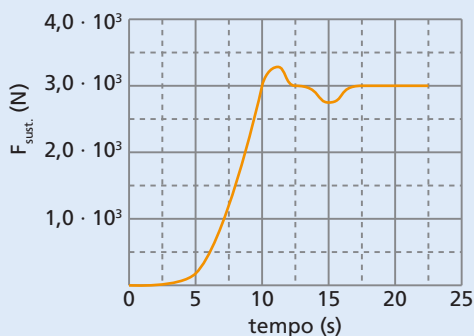


TRISH GANT/DORLING KINDERSLEY/GETTY IMAGES

Podemos observar que, se a bolinha sofre um pequeno deslocamento lateral, há uma força que faz que ela retorne à região central. Explique como isso ocorre.

11. (Unicamp-SP) O avião estabeleceu um novo paradigma nos meios de transporte. Em 1906, Alberto Santos-Dumont realizou em Paris um voo histórico com o 14 Bis. A massa desse avião, incluindo o piloto, era de 300 kg , e a área total das duas asas era de aproximadamente 50 m^2 . A força de susten-

tação de um avião, dirigida verticalmente de baixo para cima, resulta da diferença de pressão entre a parte inferior e a parte superior das asas. O gráfico representa, de forma simplificada, o módulo da força de sustentação aplicada ao 14 Bis em função do tempo, durante a parte inicial do voo.

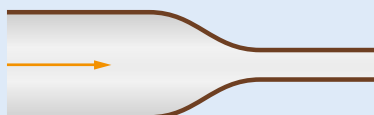


- Em que instante a aeronave decola, ou seja, perde contato com o chão?
- Qual é a diferença de pressão entre a parte inferior e a parte superior das asas, $\Delta p = p_{\text{inf.}} - p_{\text{sup.}}$, no instante $t = 20$ s?

12. (ITA-SP) Durante uma tempestade, Maria fecha as janelas do seu apartamento e ouve zumbido do vento lá fora. Subitamente o vidro de uma janela se quebra. Considerando que o vento tenha soprado tangencialmente à janela, o acidente pode ser melhor explicado pelo(a):

- Princípio de Conservação da Massa.
- Equação de Bernoulli.
- Princípio de Arquimedes.
- Princípio de Pascal.
- Princípio de Stevin.

13. (UF-MS) Em um tubo cilíndrico horizontal, onde o líquido escoá no sentido mostrado na figura, a pressão estática no eixo central da tubulação de maior diâmetro é (p_1), enquanto no eixo central da tubulação de menor diâmetro a pressão estática é (p_2). A densidade do líquido escoante é (d).



Análise as sentenças a seguir e dê como resposta a soma dos números que antecedem as sentenças verdadeiras.

- A pressão cinética na tubulação de maior diâmetro é menor do que na tubulação de menor diâmetro.
- A pressão estática na tubulação de maior diâmetro é menor do que na tubulação de menor diâmetro.

(04) A vazão na tubulação de maior diâmetro é igual à da tubulação de menor diâmetro.

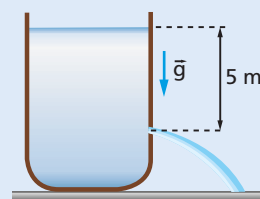
(08) A velocidade de escoamento na tubulação de maior diâmetro é maior do que na tubulação de menor diâmetro.

(16) A vazão na tubulação de maior diâmetro é maior do que a da tubulação de menor diâmetro.

14. (AFA-SP) Através de uma tubulação horizontal, de seção reta variável, escoá água, cuja densidade é $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Numa certa seção da tubulação, a pressão estática e o módulo da velocidade valem, respectivamente, $1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e $2,0 \text{ m/s}$. A pressão estática em outra seção da tubulação, onde o módulo da velocidade vale $8,0 \text{ m/s}$, é, em N/m^2 :

- $1,2 \cdot 10^5$
- $1,8 \cdot 10^5$
- $3 \cdot 10^5$
- $6 \cdot 10^5$

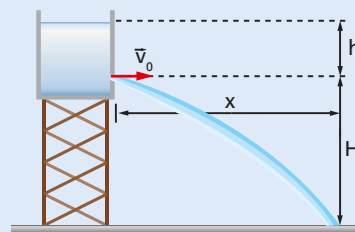
15. (Mackenzie-SP) A figura ilustra um reservatório contendo água. A 5 m abaixo da superfície livre existe um pequeno orifício de área igual a 3 cm^2 .



Admitindo $g = 10 \text{ m/s}^2$, podemos afirmar que a vazão instantânea através desse orifício é:

- 2 l/s
- 3 l/s
- 1 l/s
- 10 l/s
- 15 l/s

16. (FEI-SP) Uma caixa-d'água, conforme a figura abaixo, apresenta um furo pelo qual jorra água. Calcule o alcance horizontal x do jato d'água nessas condições. Dados: $h = 1,8 \text{ m}$; $H = 20,0 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.



ILUSTRAÇÕES: ZAPT

17. (U. F. São Carlos-SP) Quase terminada a arrumação do novo escritório, o engenheiro lamenta profundamente o acontecido...



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

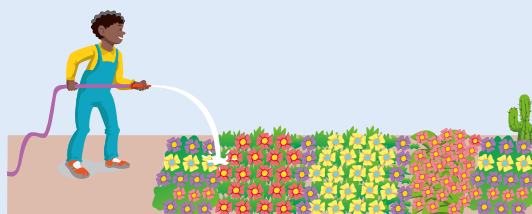
A partir da análise da figura e supondo que a água esguichada do furo venha de um cano proveniente de uma caixa-d'água, analise as três afirmações seguintes.

- I. O nível de água da caixa que alimenta o encanamento se encontra acima do furo na parede.
- II. Se o furo tivesse sido feito em um ponto mais baixo do que o indicado, a pressão que faz a água esguichar seria maior.
- III. De todos os esguichos enviezados pelo prego, aquele que sair pelo furo sob um ângulo de 45° com a horizontal terá o maior alcance.

É certo o que se afirma em:

- a) I, apenas.
- b) I e II, apenas.
- c) I e III, apenas.
- d) II e III, apenas.
- e) I, II e III.

18. (Unirio-RJ) A figura representa um menino regando um jardim, segurando uma mangueira na posição horizontal, que tem vazão ϕ . Para que a água da mangueira atinja a planta mais distante no jardim, ele percebe que o alcance inicial deve ser quadruplicado. A mangueira tem em sua extremidade um dispositivo com orifício circular de raio variável.



LUIZ AUGUSTO RIBEIRO

Para que consiga molhar todas as plantas do jardim sem molhar o resto do terreno, ele deve:

- a) reduzir o raio do orifício em 50% e quadruplicar a vazão de água.
- b) manter a vazão constante e diminuir a área do orifício em 50%.
- c) manter a vazão constante e diminuir o raio do orifício em 50%.
- d) manter constante a área do orifício e dobrar a vazão de água.
- e) reduzir o raio do orifício em 50% e dobrar a vazão de água.

5. Tubo de Venturi

O tubo de Venturi (ou medidor de Venturi) é usado para medir a velocidade de fluidos. Na figura 15 representamos um de seus modelos. Um líquido corre por uma canalização (cuja área da seção reta é A_1) com velocidade v_1 , a qual queremos determinar. Intercalamos na canalização um tubo cuja área da seção reta (A_2) é menor que A_1 . No ponto 1, a velocidade é v_1 e a pressão é p_1 . No ponto 2, a velocidade é v_2 e a pressão é p_2 . Como $A_2 < A_1$, temos $v_2 > v_1$ e $p_2 < p_1$. Desse modo, o líquido sobe a alturas diferentes nos tubos T_1 e T_2 .

Pelo Teorema de Stevin, temos:

$$p_1 - p_2 = dgh \quad (1)$$

em que d é a densidade do líquido.

Por outro lado, pela equação de Bernoulli, temos:

$$p_1 + \frac{d \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{d \cdot v_2^2}{2} \quad \text{ou} \quad p_1 - p_2 = \frac{d}{2} (v_2^2 - v_1^2) \quad (2)$$

Mas, pela equação de continuidade, temos:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \quad \text{ou} \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

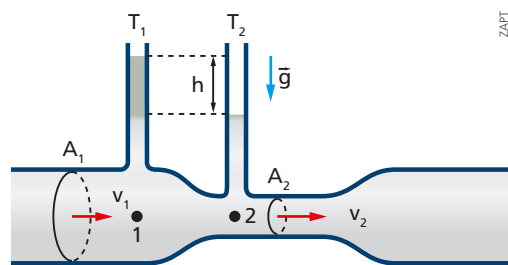


Figura 15.

ZAPT

Substituindo em ②:

$$p_1 - p_2 = \frac{d}{2} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot v_1^2 - v_1^2 \right] = \frac{d}{2} \cdot v_1^2 \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Assim:

$$v_1^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{d \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]} \quad \text{ou} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{d \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad ③$$

Usando a igualdade ①:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2dgh}{d \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} \quad ④$$

Outro modelo de tubo de Venturi está representado na figura 16. Esse é o modelo que devemos usar se o fluido cuja velocidade queremos medir for um gás, cuja densidade é d e está representado pelo trecho na cor clara (mas, obviamente, pode ser usado para medir a velocidade de líquidos). O trecho na cor escura representa um líquido de densidade $d' > d$, denominado **líquido manométrico**, que pode ser, por exemplo, o mercúrio. Pelo Teorema de Stevin, estando o líquido manométrico em equilíbrio estático, as pressões nos pontos C e D devem ser iguais:

$$p_C = p_D \quad ⑤$$

Mas, ainda, pelo Teorema de Stevin, temos:

$$p_C = p_1 + dg(x + h) \quad \text{e} \quad p_D = p_2 + dgx + d'gh$$

Substituindo em ⑤:

$$p_1 + dg(x + h) = p_2 + dgx + d'gh$$

ou:

$$p_1 - p_2 = (d' - d)gh \quad ⑥$$

Substituindo em ③:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(d' - d)gh}{d \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad ⑦$$

Se o fluido cuja velocidade queremos determinar for um gás, teremos d' muito maior que d e, portanto: $d' - d \cong d'$. Nesse caso as equações ⑥ e ⑦ ficam:

$$p_1 - p_2 = d'gh \quad \text{e} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2d'gh}{d \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad (\text{velocidade de um gás})$$

Esse segundo modelo de tubo de Venturi pode ser usado, por exemplo, para medir a velocidade de um avião.

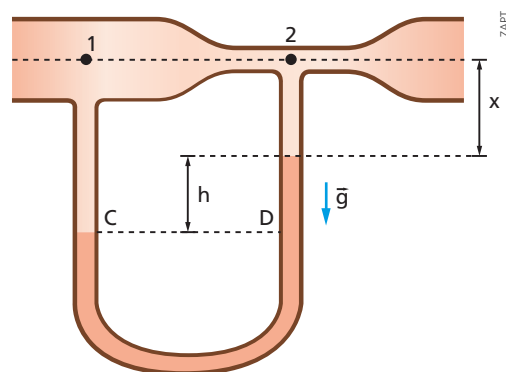


Figura 16.

6. Tubo de Pitot

Outro dispositivo usado para medir a velocidade de um fluido com densidade d é o tubo de Pitot, esquematizado na figura 17. A região na cor mais escura representa um líquido manométrico de densidade d' . No ponto 2 a velocidade do fluido é nula. Aplicando a equação de Bernoulli aos pontos 1 e 2, temos:

$$p_1 + \frac{dv_1^2}{2} = p_2 + \frac{dv_2^2}{2}$$

Como $v_2 = 0$, obtemos:

$$p_2 - p_1 = \frac{dv_1^2}{2} \quad (1)$$

Usando o mesmo raciocínio desenvolvido para o tubo de Venturi, obtemos:

$$p_2 - p_1 = (d' - d)gh \quad (2)$$

Comparando as equações (1) e (2), vem:

$$\frac{dv_1^2}{2} = (d' - d)gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(d' - d)gh}{d}} \quad (3)$$

Se o fluido for um gás, teremos d' muito maior que d , portanto $d' - d \cong d'$. Assim, as equações (2) e (3) ficam:

$$p_2 - p_1 = d'gh \quad \text{e} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2d'gh}{d}}$$

Para medir a velocidade em relação ao ar, os aviões usam um tubo de Pitot (fig. 18) um pouco mais complexo que o da figura 17.

Na figura 19 representamos uma variação do tubo de Pitot, conhecido como tubo de Prandtl. No ponto 2 a velocidade é nula e a velocidade v_1 também pode ser obtida pela equação (3).

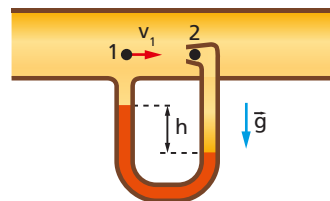


Figura 17.



Figura 18.

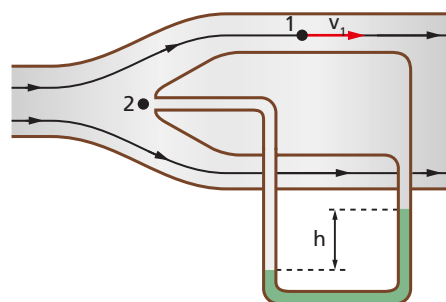


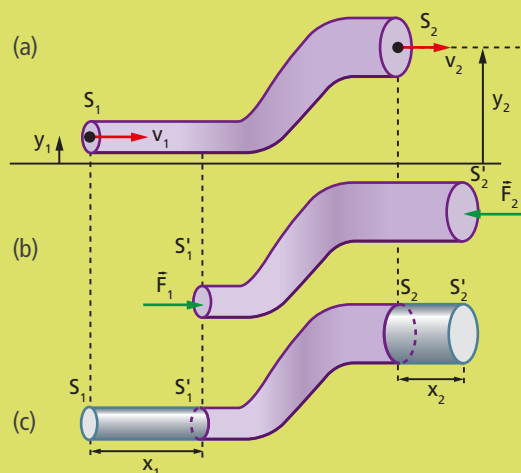
Figura 19.

DEMONSTRAÇÃO

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Na figura a, S_1 e S_2 são duas seções transversais de um tubo de corrente em fluido ideal. Supondo que o tubo seja bastante "fino", podemos admitir que em todos os pontos de S_1 a velocidade é v_1 , a pressão é p_1 e a altura em relação a um plano horizontal de referência é y_1 . Do mesmo modo, para os pontos de S_2 , a velocidade é v_2 , a pressão é p_2 e a altura é y_2 . Sejam A_1 e A_2 as áreas de S_1 e S_2 .

Depois de um "pequeno" intervalo de tempo Δt , a porção de fluido que estava entre S_1 e S_2 estará entre S'_1 e S'_2 (fig. b). Esse movimento se deu sob a ação das forças \vec{F}_1 (que o fluido à esquerda de S'_1 exerce sobre a porção considerada) e \vec{F}_2 (que a porção à direita de S'_2 exerce sobre a porção de fluido considerada). Tudo se passa como se o fluido situado entre S_1 e S'_1 (fig. c) fosse transportado para a região entre S_2 e S'_2 . A essa porção de fluido que se movimentou chamaremos **sistema**.



Como o fluido é incompressível, o volume entre S_1 e S'_1 deve ser igual ao volume entre S_2 e S'_2 :

$$A_1 \cdot x_1 = A_2 \cdot x_2 = V$$

Sendo d a densidade do fluido e m a massa do sistema, temos:

$$A_1 \cdot x_1 = A_2 \cdot x_2 = V = \frac{m}{d}$$

O trabalho realizado pelas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 sobre o sistema é:

$$\mathcal{W}_F = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2$$

Como $F_1 = p_1 \cdot A_1$ e $F_2 = p_2 \cdot A_2$, temos:

$$\mathcal{W}_F = p_1 \cdot \underbrace{A_1 \cdot x_1}_V - p_2 \cdot \underbrace{A_2 \cdot x_2}_V = (p_1 - p_2)V = (p_1 - p_2) \frac{m}{d} \quad (1)$$

O trabalho realizado sobre o sistema pelas forças gravitacionais é igual à diferença entre a energia potencial inicial e a energia potencial final:

$$\mathcal{W}_G = mgy_1 - mgy_2 \quad (2)$$

Aplicando o Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\mathcal{W}_F + \mathcal{W}_G = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (3)$$

De (1) e (2) vem:

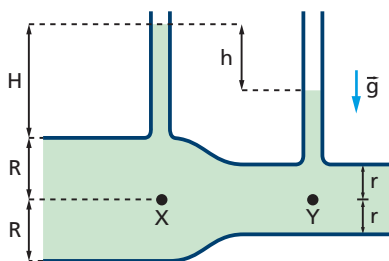
$$(p_1 - p_2) \frac{m}{d} + (mgy_1 - mgy_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (4)$$

Multiplicando os termos de (4) por $\frac{d}{m}$, temos a equação de Bernoulli:

$$p_1 + dgy_1 + \frac{dv_1^2}{2} = p_2 + dgy_2 + \frac{dv_2^2}{2}$$

Exercícios de Aplicação

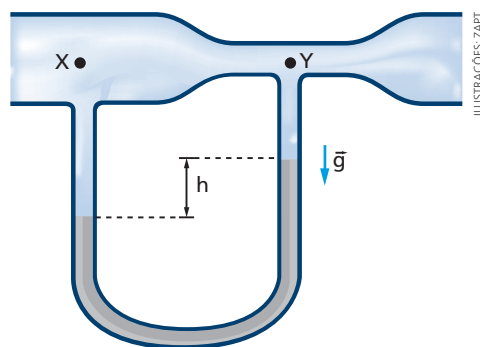
19. Pelo tubo de Venturi representado flui um líquido de densidade $1,5 \text{ g/cm}^3$. Nos pontos X e Y as seções retas do tubo têm raios respectivamente iguais a $R = 2,0 \text{ cm}$ e $r = 1,0 \text{ cm}$.



São dados: $H = 310 \text{ cm}$; $h = 300 \text{ cm}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; pressão atmosférica = $1,05 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Calcule:

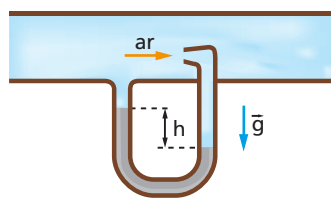
- a velocidade nos pontos X e Y ;
 - a vazão através do tubo;
 - a pressão efetiva no ponto X ;
 - a pressão estática no ponto X .
20. A figura representa um tubo de Venturi por onde flui ar, cuja densidade é $1,25 \text{ kg/m}^3$. O

líquido manométrico é o mercúrio, cuja densidade é $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, e o desnível h é igual a $2,0 \text{ cm}$. As áreas das seções retas nos pontos X e Y são, respectivamente, iguais a $4,0 \text{ cm}^2$ e $2,0 \text{ cm}^2$. Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a velocidade do ar no ponto X .

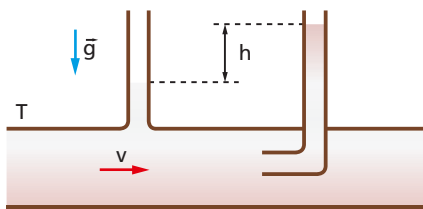


21. O tubo de Pitot esquematizado na figura foi usado para medir a velocidade de um avião em relação ao ar, cuja densidade é $1,25 \text{ kg/m}^3$. O líquido manométrico é o mercúrio, cuja densidade é

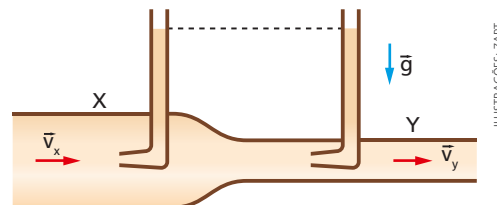
$13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.
Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$
e $h = 10 \text{ cm}$, calcule a velocidade do avião.



22. Pelo tubo T , representado na figura, escoam um líquido ideal com velocidade v . Sendo g a aceleração da gravidade, determine o valor de v em função de g e h .



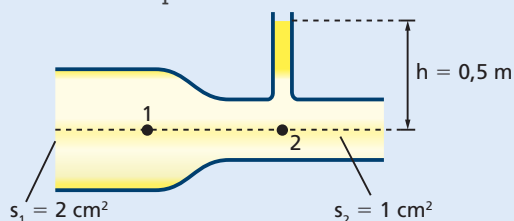
23. A figura representa um líquido ideal que escoam por uma canalização de modo que no trecho X a velocidade é v_x e no trecho Y a velocidade é v_y .



As áreas das seções retas nos trechos X e Y são A_x e A_y . Mostre que o líquido atinge o mesmo nível nos dois tubos.

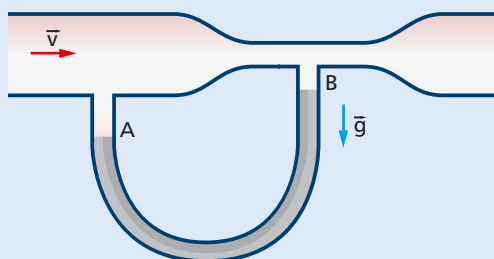
Exercícios de Reforço

24. (Mackenzie-SP) Na tubulação horizontal indicada na figura, o líquido escoa com vazão de $400 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ e atinge a altura de $0,5 \text{ m}$ do tubo vertical. A massa específica do líquido (suposto ideal) é $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Adotar $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e supor o escoamento permanente e irrotacional.



A pressão efetiva no ponto 1 é:

- a) $11 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ d) $2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
b) $5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ e) $1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
c) $3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
25. (AFA-SP) Um fluido ideal escoa através do tubo horizontal indicado na figura, segundo o sentido indicado, e o tubo em U contém mercúrio.



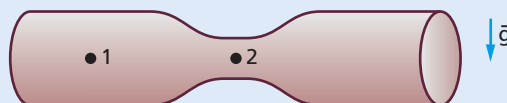
A partir da situação apresentada, pode-se afirmar que o nível do mercúrio em B é mais elevado do que em A porque a pressão:

- I. estática em A é maior do que em B .
II. dinâmica é maior no estrangulamento.
III. total é igual em qualquer ponto do tubo.

As afirmações são, respectivamente:

- a) falsa, falsa e verdadeira.
b) verdadeira, falsa e falsa.
c) falsa, verdadeira e falsa.
d) verdadeira, verdadeira e verdadeira.

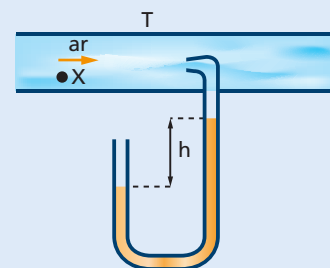
26. (AFA-SP) Um medidor do tipo Venturi está inserido numa tubulação, com finalidade de medir a vazão de um fluido ideal. Instalaram-se dois manômetros para medir as pressões nos pontos 1 e 2, indicados na figura.



Pode-se afirmar que a vazão é diretamente proporcional à(ao):

- a) soma das pressões ($p_1 + p_2$).
b) diferença das pressões ($p_1 - p_2$).
c) quadrado da diferença de pressão ($p_1 - p_2$).
d) raiz quadrada da diferença de pressão ($p_1 - p_2$).

27. Pelo tubo T representado na figura escoam ar com velocidade $50,0 \text{ m/s}$. A densidade do ar é $1,25 \text{ kg/m}^3$ e a do líquido manométrico é $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Sendo $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, $h = 10,0 \text{ cm}$ e a pressão atmosférica igual a $1,05 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, calcule a pressão estática no ponto X .



Respostas

1 • Introdução à Física

1. a) $5,29 \cdot 10^2$
b) $7,843 \cdot 10^3$
c) $5,971432 \cdot 10^6$
d) $7,3 \cdot 10^1$
e) $7 \cdot 10^{-1}$
f) $5,2 \cdot 10^{-1}$
g) $2,78 \cdot 10^{-1}$
h) $5,697 \cdot 10^{-1}$
i) $7,49 \cdot 10^9$
j) $5,947 \cdot 10^{-8}$
k) $3,8 \cdot 10^3$
l) $7,159 \cdot 10^{-13}$
2. a) km e) dm i) nm
b) Mm f) cm j) pm
c) Gm g) mm k) dam
d) Tm h) μm l) hm
3. a) $5 \cdot 10^{-12}$ L g) $3 \cdot 10^2$ L
b) $6 \cdot 10^{-9}$ L h) $2 \cdot 10^3$ L
c) $7 \cdot 10^{-6}$ L i) $6 \cdot 10^6$ L
d) $8 \cdot 10^{-3}$ L j) $5 \cdot 10^9$ L
e) $9 \cdot 10^{-2}$ L k) $7 \cdot 10^{12}$ L
f) $4 \cdot 10^{-1}$ L l) $2 \cdot 10^{-15}$ L
4. a) 10^2 d) 10^{12} g) 10^{-2}
b) 10^3 e) 10^{-3} h) 10^{-3}
c) 10^3 f) 10^{-7} i) 10^{-3}
6. 10^{11}
8. 720
9. 10^9
10. a) $x = 1$; $y = 30$
b) $x = 3$; $y = 12$
c) $x = 1$; $y = 15$; $z = 20$
d) $x = 2$; $y = 20$
11. 2 h 43 min 41 s
12. c
13. a
14. c
15. e
16. d
17. e
19. a) 10^{-2} m h) 10^9 m
b) 10^2 cm i) 10^3 mm
c) 10 dm j) 10^{-3} m
d) 10^{-1} m k) 10^{-6} m
e) 10^3 m l) 10^{-9} m
f) 10^{-3} km m) 10^{-12} m
g) 10^6 m n) 10^{-10} m
20. a) 10^2 dm² g) 10^3 dm³
b) 10^{-4} m² h) 10^{-3} m³
c) 10^6 mm² i) 1 dm³
d) 10^{-6} m² j) 10^3 cm³
e) 10^2 mm² k) 10^3 L
f) 10^{-2} cm² l) 10^{-3} L
21. a) 7,3152 m b) 2,4384 m
22. 127 cm
23. $1,5 \cdot 10^4$ km²
24. a) $5 \cdot 10^{-2}$ cm³ b) 10^5
25. d
26. b
27. b
28. c
29. b
30. a
31. b
32. a
33. a
34. a) 25 cm b) $1,92 \cdot 10^4$ L
36. a) $6,0$ L/s = $6,0 \cdot 10^3$ cm³/s = $6,0 \cdot 10^{-3}$ m³/s
b) 45 s c) 20 L
37. 2 h 24 min
38. a) 10^3 L/s
- b) 10^3 L/min
- c) $\frac{50}{3}$ L/s
- d) $7,2 \cdot 10^{-2}$ m³/min
39. a) 300 L/min = 5 L/s = $5 \cdot 10^{-3}$ m³/s
b) 2 h 30 min
40. 1 h 15 min
41. 16 L/h
42. a) 10^{-3} kg c) 10^{-3} g
b) 10^3 g d) $2 \cdot 10^3$ kg
43. a) $\cong 3,3 \cdot 10^{-19}$ mg
b) $\cong 3,3 \cdot 10^{-25}$ kg
44. b
45. c
46. c
48. $3,00$ g/cm³ = $3,00$ kg/L = $3,00 \cdot 10^3$ kg/m³
49. $8,35$ g/cm³
50. a) 81 g b) 800 cm³
51. $2,6$ g/cm³
52. 70 L
53. $\cong 2,45$
54. $\cong 70,62$ kg
55. 17 g
56. $\cong 3,3$
57. a) $\cong 55$ L b) 10^8
58. a
59. oca
60. a) 4 b) 2 c) 3
61. a) 5,68 b) 5,67 c) 8,57
62. a) 7,5 b) 12,6
63. a) 9,6 b) 1,69 c) 90,0
64. c
65. a) M⁰ L³ T⁰ b) M¹ L⁻³ T⁰
66. 15 h 7 min 12 s

67. a
68. e
69. $3,08568 \cdot 10^{16}$ m
70. b
71. b
72. 216 L
73. e
74. c
75. c
76. 15 min
77. d
78. e
79. $\cong 3,9$ cm
80. e
81. c

82. b
83. e

2 • Introdução à Mecânica

2. c
3. a) Repouso.
b) Movimento.
c) Retilínea e vertical.
4. a) Movimento. c) Repouso.
b) Repouso.
5. b
6. b

7. c
8. d

3 • Velocidade escalar

2. a) 1850 m b) 266,4 km/h
3. 65,4 km/h
5. 45 km/h
6. 48 km/h
7. 3,0 m/s
9. a) $d_A = 27$ km; $d_B = 90$ km
b) 26 m/s ou 93,6 km/h
10. a) $\cong 37$ km/h b) $\cong 74$ km
11. b
14. 30 anos

15. $\frac{2c}{3}$ ou $2,0 \cdot 10^8$ m/s
16. 8,0 min
17. a
21. 20 m
22. a) 200 m b) 40 s
24. d
25. a
26. b
27. a) 1 h 30 min b) 6,0 km/h
28. a
29. d
31. e
32. b
33. c
35. a) $3,0 \cdot 10^{-3}$ m/s b) 10,8 m/h
37. a) 4,0 s b) 80 m c) 120 m
38. d
40. c
41. b
43. a) 0,10 s b) 64 m
44. a) 60 s b) 1200 m
46. a) 15 h b) 20 mm/h
47. b
49. a) 0,10 m/s b) $0,10 \cdot \pi$ m³/s
50. $6,25 \cdot 10^{-2}$ cm/s
51. a
52. e
54. a) 60 km/h b) 40 km/h
55. a) 180 km b) 80 km
56. a) 5,0 m e -14 m, respectivamente.
b) 1,0 m/s e -4,0 m/s, respectivamente.
c) $\Delta s = 0$; $v_M = 0$
57. a
58. a) 3 m b) 3 m/s c) -1 m/s
59. a) 2,0 m
b) 0,50 m/s
c) 12 m
61. d

62. a) A: progressivo; B: progressivo
b) 3 m/s c) 3 m d) 6 m
63. c
64. e
65. 152 s
66. a) • Segmento de reta vertical.
• Arco de parábola.
b) 10^2
67. d
68. 45 km/h
69. a) 204 m
b) $T_1 = 0,4$ s e $T_2 = 0,8$ s
70. a) 2,4 km b) 24 min
71. c 72. b 73. c

4 • Movimento Uniforme (MU)

2. a) 150 km c) Retrógrado.
b) 4,0 h
6. a) $v = 2,0$ m/s
b) $s_0 = 50$ km
c) Progressivo.
7. $s = 120 - 15t$ (o tempo em s e a posição em cm); $v = -15$ cm/s
8. a) $v = 3,0$ m/s
b) $s_0 = -1,0$ m; $s = -1,0 + 3,0t$ (SI)
c) $s_1 = 5,0$ m
d) $t_2 = 6,0$ s
10. a) $t_{enc} = 1,0$ h b) $s_{enc} = 65$ km
13. a) 100 s b) 2000 m
14. a) $\begin{cases} s_A = 4,0t \text{ (SI)} \\ s_B = 500 - 60t \text{ (SI)} \end{cases}$
b) $t_E = 50$ s
c) $s_E = 200$ m
15. a
16. a
17. a) 5,0 s
b) 50 s
c) Retrógrado e $v = -4,0$ m/s.
18. d

19. a) $\begin{cases} s_1 = -12 + 1,0t \text{ (SI)} \\ s_2 = 18 - 5,0t \text{ (SI)} \end{cases}$

b) $\begin{cases} t_E = 5,0 \text{ s} \\ s_E = -7,0 \text{ m} \end{cases}$

c) 15 s

20. d

21. d = 38 m

23. a) $v_{REL} = 10,5 \text{ m/s}$

b) $v_{REL} = 1,3 \text{ m/s}$

c) $v_{REL} = 8,9 \text{ m/s}$

25. a) 2,0 m/s b) 124 m

26. 3,0 s

28. 18 s

29. 2,0 s

30. a) 108 s

b) 21,6 s

31. $\Delta t = \frac{L}{v}$

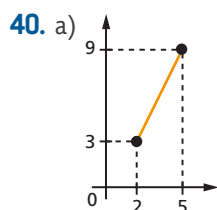
34. a

35. b

36. a) 20 km/h b) 108 s

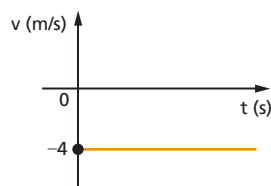
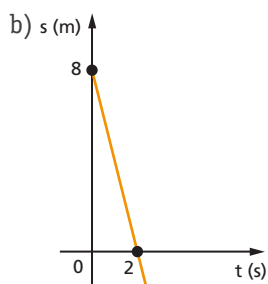
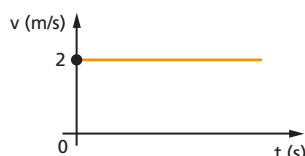
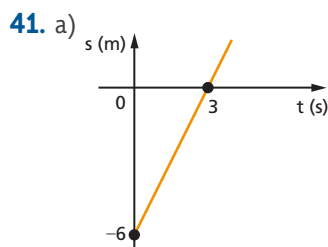
37. a) 5,0 h b) 350 km

38. $\frac{3L_1}{4v}$



b) 2,0 m/s

c) $s = -1,0 + 2,0t \text{ (SI)}$



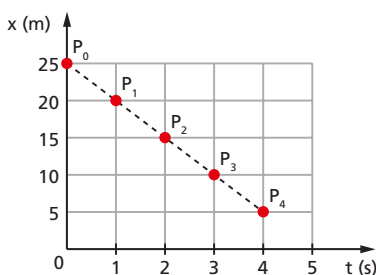
43. $s_A = 20 - 2,0t \text{ (SI)}$

$s_B = 3t \text{ (SI)}$

$s_C = 16 + 4t \text{ (SI)}$

44. d

45. a)



b) Movimento uniforme; retrógrado.

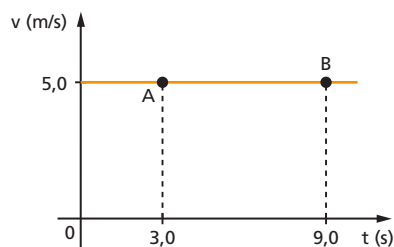
c) $s = 25 - 5t \text{ (SI)}$

d) 20 m

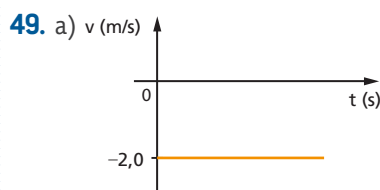
46. c

47. c

48. a)



b) 30 m



b) -6,0 m

c) Movimento retrógrado.

50. 40 s

51. b

52. c

53. a) 0,40 s b) 0,80 s

54. a) 8 L b) $9 \frac{v}{4}$

55. c

56. d

57. b

58. b

5 • Movimento Uniformemente Variado (MUV)

2. c

3. a) 10 m/s^2 c) $1,3 \cdot 10^5 \text{ km/h}^2$

b) $0,01 \text{ km/s}^2$

4. b

5. b

6. e

9. Figura a: acelerado. Figura b: retardado. Figura c: acelerado.

10. a) Progressivo; retardado.

b) Progressivo; acelerado.

11. Figura a: acelerado.

Figura b: retardado.

12. Movimento retrógrado e acelerado.

14. a) $v_0 = -15 \text{ m/s}$; $\alpha = 2,5 \text{ m/s}^2$

b) $t = 6,0 \text{ s}$

15. a) $v = 4,0 + 2,0t \text{ (unidades SI)}$

b) $t_1 = 9,0 \text{ s}$

17. a) $s = 15 - 12t + 3,0t^2 \text{ (unidades SI)}$

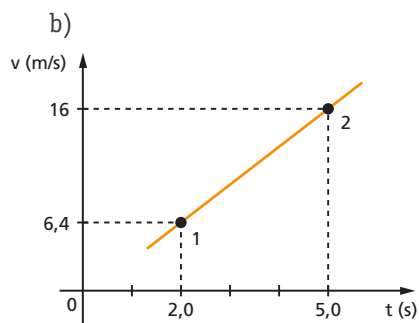
b) $s_1 = 15 \text{ m}$

c) $t = 2,0 \text{ s}$

18. a) 30 m/s

b) 98 m

20. a) $v_1 = 6,4 \text{ m/s}$; $v_2 = 16 \text{ m/s}$



21. a) $-5,0 \text{ m/s}^2$
 b) 60 m/s
 c) 12 s
 d) Progressivo e retardado.

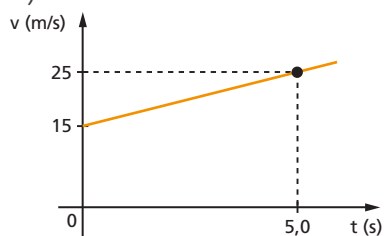
22. a) $d = 50 \text{ m}$ b) $v_c \cong 11,4 \text{ m/s}$

23. a) $9,0 \text{ m}$ b) $6,0 \text{ m/s}$

24. b

25. b

27. a)



- b) $\alpha = +2,0 \text{ m/s}^2$
 c) $s = 10 + 15t + 1,0t^2$ (unidades SI)

28. a) $\alpha_A = -3,0 \text{ m/s}^2$; $\alpha_B = -4,0 \text{ m/s}^2$

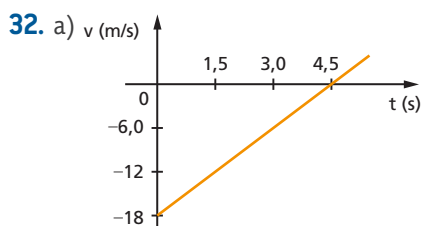
- b) $\begin{cases} s_A = 20t - 1,5t^2 \text{ (unidades SI)} \\ s_B = 25t - 2,0t^2 \text{ (unidades SI)} \end{cases}$

- c) $v_A = 20 - 3,0t$ (unidades SI);
 $v_B = 25 - 4,0t$ (unidades SI)

- d) $d = 12,5 \text{ m}$

29. a) $2,0 \text{ s}$ b) 10 m/s

31. a) $t = 4,0 \text{ s}$ c) $s = 132,5 \text{ m}$
 b) $s_{\text{inv}} = 140 \text{ m}$



- b) $4,0 \text{ m/s}^2$ c) 18 m/s

33. a) $2,0 \text{ s}$ (para ambos)

- b) $|v_A| = 12 \text{ m/s}$

- c) $D = 12 \text{ m}$

- d) Retardado e acelerado.

34. a) $t_i = 2,0 \text{ s}$; $v = 0$; $s_i = 9,0 \text{ m}$

- b) $\Delta s = 5,0 \text{ m}$

- c) $v_m = 2,5 \text{ m/s}$

35. a) 160 m/s b) $0,80 \text{ s}$

37. a) $\alpha = 10 \text{ m/s}^2$ c) $2,0 \text{ s}$

- b) 10 m/s

39. a) -10 m/s^2 c) $(4 + 3\sqrt{2}) \text{ s}$

- b) $4,0 \text{ s}$

40. c

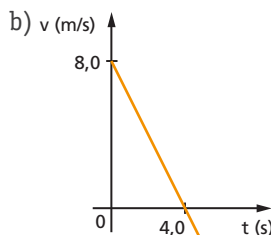
41. e

42. a) 50 m b) $|\alpha_{\text{min}}| = 3,13 \text{ m/s}^2$

45. a) -60 m/s c) zero

- b) 1000 m d) $t = 2,0 \text{ min}$

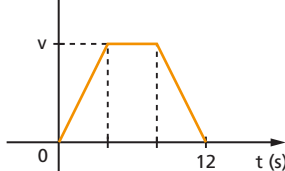
46. a) $t = 4,0 \text{ s}$



48. a) $t = 14 \text{ s}$ c) 160 m

- b) 16 m/s

49. a) $v \text{ (m/s)}$



- b) $5,0 \text{ m/s}$ c) $2,5 \text{ m/s}^2$

50. a) $-2,0 \text{ m/s}^2$ b) 16 m

51. 704 m

52. c

54. a) 20 m/s b) $-1,0 \text{ m/s}^2$

55. a) $\frac{v}{2}$ b) $\frac{v^2}{2\alpha}$ c) $\frac{v}{\alpha}$

56. a) 10 s b) $8,0 \text{ m/s}$

58. a) $3,0 \text{ s}$ c) $4,0 \text{ m/s}^2$
 b) -12 m/s

59. a

60. a) $\frac{2d}{v}$ b) $\frac{4d}{v}$ c) $\frac{v}{2}$

61. a) 150 m b) 15 m/s

62. a) 160 m/s
 b) $t = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ s} \cong 3,5 \text{ s}$

63. a) $3,0 \text{ m/s}^2$ b) 10 s

64. a) 10 s
 b) $v_0 = 20 \text{ m/s}$
 c) $J = -20 \text{ m/s}$

65. d

66. a) $v_0 = -2 \text{ m/s}$; $v_2 = 2 \text{ m/s}$

- b) 2 m

- c) $s = -2t + 1t^2$ (SI)

67. a) $\alpha = \frac{v^2}{2d}$ c) $v_c = 2 \text{ V}$

- b) $v_A = 0$

68. a) 250 m b) 65 s

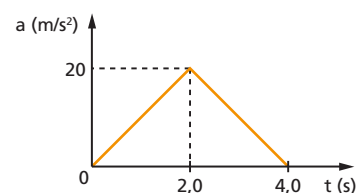
69. d

70. e

71. a) 27 m
 b) O carro vai percorrer, em $0,5 \text{ s}$, 15 m e colidirá.

72. a) $6,0 \text{ s}$ b) $1,0 \text{ m/s}^2$

73. a)



- b) 40 m c) 10 m/s

74. c

75. a) $\Delta t = 1 \text{ s}$ c) $\Delta t_{1,2} = 3,1 \text{ s}$
 b) $s_c = 320 \text{ m}$

6 • Movimento vertical no vácuo

2. a) $v = 4,0 + 10t$ (SI) e
 $y = 4,0t + 5,0t^2$ (SI)

- b) $v = 24 \text{ m/s}$

- c) $H = 28 \text{ m}$

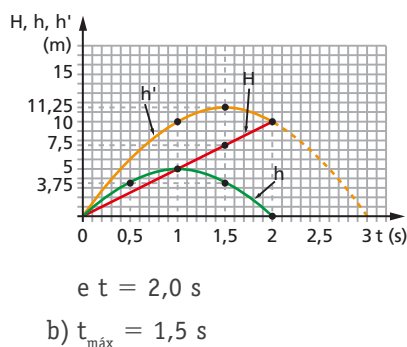
4. a) $v = 10t$ (SI) e $y = 5,0t^2$ (SI)

- b) $t = 2,0 \text{ s}$

- c) $v = 20 \text{ m/s}$

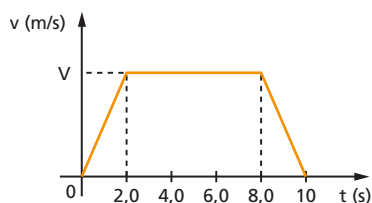
5. $H = 240 \text{ m}$
 7. $v_B = 0,9 \text{ m/s}$
 8. b
 10. $v_2 = 12 \text{ m/s}$
 11. c
 12. e
 13. a) $3,2 \text{ m}$ b) 16° andar
 14. a
 16. a) $t = 4 \text{ s}$ c) $\Delta t = 4,5 \text{ s}$
 b) $t_s = 0,5 \text{ s}$
 17. e
 18. b
 19. a) $t_1 = 4,0 \text{ s}$ e $t_2 = 3,0 \text{ s}$
 b) $v_1 = 40,0 \text{ m/s}$
 c) $v_{3i} = 30,0 \text{ m/s}$
 20. d
 23. c
 24. a) $T' = 2T$
 b) $H' = 4H$
 25. a) $t_{\text{sub}} = 1 \text{ s}$ e $t_{\text{voo}} = 2 \text{ s}$
 b) $H = 5 \text{ m}$
 26. a) $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$
 b) $t_{\text{voo}} = 0,6 \text{ s}$
 27. b
 28. d
 29. $H = 20 \text{ m}$
 31. a) $t_1 = 1,0 \text{ s}$ e $t_2 = 3,0 \text{ s}$
 b) $v_1 = 10 \text{ m/s}$ e $v_2 = -10 \text{ m/s}$
 c) $t = 6,0 \text{ s}$
 32. c
 33. d
 35. a) $v_0 = 10 \text{ m/s}$ b) $H = 5,0 \text{ m}$
 37. a) $H = 19,8 \text{ m}$ b) $g = 9,9 \text{ m/s}^2$
 38. a
 39. c
 40. c
 41. a
 42. c
 43. d

44. $\Delta t' = 0,20 \text{ s}$
 45. d
 46. a) $d = 3,0 \text{ m}$ e $v_{\text{rel}} = 6,0 \text{ m/s}$
 b) $d = 0$ e $v_{\text{rel}} = 4,0 \text{ m/s}$
 47. a) $|v_{AB}| = 60 \text{ m/s}$
 b) $v_{OB} = 60 \text{ m/s}$
 48. c
 49. c
 50. a)



7 • Diagramas horários

2. a) I: $v > 0$; II: $v < 0$; III: $v > 0$
 b) Em ambos: $v = 0$.
 3. a) $v = 10 \text{ m/s}$
 b) $t_1 = 7,5 \text{ s}$ e $s_1 = 125 \text{ m}$
 c) $t_2 = 2,0 \text{ s}$ e $s_2 = 70 \text{ m}$
 5. a) $\alpha = -3,0 \text{ m/s}^2$
 b) $v_1 = 9,0 \text{ m/s}$
 6. a) Progressivo e retardado.
 b) $\alpha = -10 \text{ m/s}^2$
 c) $v_0 = 144 \text{ km/h}$ e $t = 4,0 \text{ s}$
 7. a) • $v = 4,0 \text{ m/s}$
 • $v = 0$
 b) O homem permaneceu em repouso.
 9. a
 12. a)



- b) $v = 10 \text{ m/s}$
 c) $v_m = 8,0 \text{ m/s}$
 d) $\alpha_i = 5,0 \text{ m/s}^2$ e $\alpha_f = -5,0 \text{ m/s}^2$

13. $v = 10 \text{ m/s}$ e $\alpha = 5,0 \text{ m/s}^2$
 14. c
 15. c
 16. b
 17. a
 18. c
 20. $d = 50 \text{ m}$
 22. a) $5,0 \text{ m}$ b) 10 m
 23. c
 24. b
 25. a
 26. $38,0 \text{ cm/s}$
 27. a) $T = 4 \text{ s}$ b) $x = 8 \text{ m}$
 28. a) $-\frac{1}{2}$
 b) $v_{OB} = 24 \text{ m/s}$
 c) $v = 12 \text{ m/s}$
 d) 54 m

29. c
 30. d
 31. d
 32. Corretas: (01), (02) e (16)
 33. 40 m
 34. c
 35. a) (6 s; 16 s) c) 200 m
 b) (0; 6 s) d) 10 m/s
 36. b

8 • Vetores

2. a) $|\vec{s}| = 2\sqrt{19} \approx 8,17$ b) $\approx 23^\circ$
 4. a) $\approx 7,8$ b) $4\sqrt{7} \approx 10,6$
 8. a) 20 d) $\approx 3,7$ g) zero
 b) 8 e) 5
 c) 13 f) 10
 10. 5
 11. 150 cm

13. a) 33

b) 7

14. d

15. b

16. d

17. 48

18. b

19. e

20. d

21. d

22. d

23. d

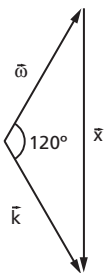
26. a) $\approx 6,1$

c) 2

b) $2\sqrt{19}$

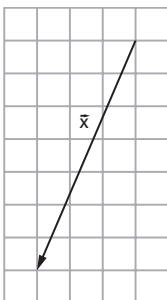
d) 10

27.



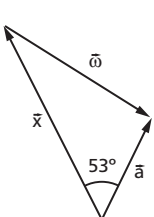
$x = 2\sqrt{37}$

29.



$|\vec{x}| = \sqrt{58}$

30.



$|\vec{w}| \approx 8$

31. b

32. b

34. $2\sqrt{39}$

35. d

37. a) $a_x = 10$; $a_y = 10\sqrt{3}$

b) $a_x \approx -24$; $a_y = 18$

40. a) $\vec{s} = 3\vec{i} + 1\vec{j}$ b) $|\vec{s}| = \sqrt{10}$

41. a

42. c

43. $\vec{R} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$ $|\vec{R}| = 2\sqrt{17}$

44. 2 e 4

47. 30°

45. e

48. 6k

46. d

49. a

9 • Cinemática vetorial

2. a) 20 m

c) 5,0 m/s

b) 20 m

d) 5,0 m/s

3. a) $\frac{20\pi}{3}$ m

c) $\frac{10\pi}{3}$ m/s

b) 20 m

d) 10 m/s

4. d

5. $2,0\sqrt{2}$ m

6. a) 5,5 cm/s

b) 2,5 cm/s

7. zero

8. a) F

b) V

9. a) F

b) V

c) V

10. a) F

b) V

c) F

11. a) F

b) F

c) V

12. 2,0 m/s²

13. $\approx 1,6$ m/s²

14. 5 m/s²

15. a) zero

c) $\frac{32}{\pi}$ m/s²

b) $\frac{32\sqrt{2}}{\pi}$ m/s²

17. a) zero

c) 100 m/s²

b) 100 m/s²

19. a) 3,0 m/s²

c) 5,0 m/s²

b) 4,0 m/s²

20. a) zero

c) zero

b) zero

d) zero

21. a) 8 m/s²

b) zero

c) 8 m/s²

22. a) zero

c) 9,0 m/s²

b) zero

d) 9,0 m/s²

23. a) 12 m/s

c) 8,0 m/s²

b) 6,0 m/s²

d) 10 m/s²

24. d

25. I) V; II) F; III) F; IV) V; V) F

26. a

27. b

28. a

29. a) 12 m/s²

c) 20 m/s

b) 16 m/s²

d) 25 m

30. a) 18 m

b) $2\sqrt{3}$ m/s²

31. d

34. a

32. e

35. d

33. c

10 • Composição de movimentos

1. a) 10 m/s

b) 2,0 m/s

2. zero

4. a) 30 s

c) 36 s

b) 6,0 s

d) 120 s

5. 2,0 h

6. a) 8,0 m/s

b) 2,5 s

7. a

8. b

9. b

11. a) 13 m/s

c) 20 m

b) 4,0 s

d) 52 m

13. a) $\approx 14^\circ$

b) $50\sqrt{15}$ km/h

c) 2,06 h = 2 h 3 min 36 s

14. 24 m

15. 150 km/h

16. a) 120 km/h

b) 5 h

c) $\approx 67^\circ$

18. a) 13 m/s

b) $\approx 67^\circ$

19. d

20. a

21. 100 km/h

22. -1

23. 20 m/s

24. a) 7,0 m/s

b) 3,0 m/s

25. a) $\sqrt{3}$ m/s

b) 1,0 m/s

26. 15 s

27. a) Arco de parábola de equação

$$y = \frac{x^2}{32}$$

- b) $4\sqrt{5}$ m/s
28. 3,0 m/s
29. 24 s
30. c
31. $\cong 2,3$ m/s
32. I. F; II. V; III. F; IV. V
33. 3 km/h
34. a) 8,0 s
b) $x = 96$ m; $y = 128$ m
35. b
36. a) $4,0\sqrt{3}$ m/s b) 8,0 m/s

11 • Cinemática angular

2. a) $\cong 10,47$ cm c) $\cong 100,48$ cm
b) $\cong 4,19$ m
3. a) 120° ; $\frac{2\pi}{3}$ rad; $\frac{1}{3}$ rev
b) $\cong 20,9$ cm
c) $\cong 10,47$ cm
4. $x = 2$ rev $= 1440^\circ = 4\pi$ rad
 $y = 24$ rev $= 8640^\circ = 48\pi$ rad
 $z = 1440$ rev $= 518400^\circ = 2880\pi$ rad
5. $\frac{\pi}{3}$ rad/s
6. $\cong 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s
7. a) 0,40 s b) 1,5 rad
8. a) $1,3$ rev/s $= 2,6\pi$ rad/s
b) 0,58 s
c) 13π rad
d) 82 cm/s; $6,7 \cdot 10^2$ cm/s²
e) 32 cm/s; $2,7 \cdot 10^2$ cm/s²
9. $\cong 0,314$ m/s
11. a) 3 m/s
b) $v = \frac{3}{4k+1}$ m/s
(com $k = 0, 1, 2, 3, \dots$)
12. a) $\frac{\pi}{6}$ rad/h; 2π rad/h
b) $\cong 10$ h 54 min 32 s
13. $\frac{\pi}{20}$ rad/h
14. 5π rad/s; $1,25\pi$ m/s
15. 20 s
16. b
17. b
18. b
20. a) 5,0 Hz c) 10π rad/s
b) 0,20 s d) 20π m/s
21. a) 4,0 Hz b) 8π rad/s
22. 0,50 s
23. a) 4 min b) 4 e 3 c) 20 min
24. d
25. a) 297 000 km/s
b) 99%
c) Prestígio e benefício econômico.
26. b
27. d
28. b
29. a) 0,5 Hz b) 2 s
30. d
31. $10,75 \cdot 10^3$ km/h
32. a
33. a
35. a) Horário. b) 20 rad/s
36. a) Anti-horário. b) 30 Hz
37. 200 rpm
38. $\cong 31,4$ m/s
39. $v_A = 0$; $v_D = 8$ m/s
 $v_B = v_E = 4\sqrt{2}$ m/s
40. e
41. 400 Hz
42. a) $\cong 2,5$ m/s b) $\cong 3,14$ m/s
43. a
44. a) 2 b) 1,5 m/s
45. a) $f = \frac{8,0}{k}$ Hz ($k = 1, 2, 3, \dots$)
b) $f = \frac{24}{k}$ Hz ($k = 1, 2, 3, \dots$)
46. a) $f = (12k)$ Hz ($k = 1, 2, 3, \dots$)
b) $f = (3k)$ Hz ($k = 1, 2, 3, \dots$)
47. a) 11 520 b) 64 quadros/s
48. d
49. c

50. b
51. a) $f = 30k$ voltas por segundo
($k = 1, 2, 3, \dots$)
b) 180 rad/s
c) 54 m/s
52. 18 Hz
53. 16 km/h
54. c
55. a) $\cong 98,3$ km/h
b) $\cong 98,3$ km
56. 23 h 56 min 4 s
57. b
58. π rad/s; 3π rad/s
59. d
60. 60 cm/s; para a esquerda.

12 • As leis de Newton

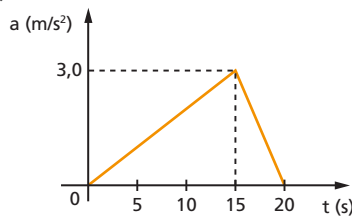
2. 14 N
3. 12 m/s²
4. a) 6,0 m/s² b) 32 m/s c) 67 m
5. a) 4,0 m/s² b) 6,0 s c) 72 m
7. a) 3,0 m/s² b) \leftarrow
8. 2,5 m/s²
9. Aceleração nula \Rightarrow repouso ou movimento retilíneo e uniforme.
10. $\cong 22$ m/s²
11. a) 1,3 m/s² c) 3,0 m/s²
b) $\cong 0,6$ m/s²
12. zero
14. 90 N
15. 68 N
16. 24 N
17. Lei da Inércia.
18. Retilínea.
19. a) V b) F c) V d) V e) V
20. Por inércia a moeda tende a ficar "para trás".
21. a) F b) F c) V
22. a

23. $5,0 \text{ m/s}^2$
 24. d
 25. a
 26. b
 27. $2\sqrt{3} \text{ m/s}^2$
 28. 20 N
 29. e
 30. e
 31. a) $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn}$
 b) $1 \text{ lb} \cong 4,447 \text{ N}$
 32. a) 98 N b) 16 N
 33. $7,5 \text{ m/s}^2$
 34. $\cong 0,98 \text{ m/s}^2$
 35. $\cong 0,453 \text{ kg}$
 36. a) 60 N c) 35 N
 b) 40 N d) 50 N
 37. e
 38. III, V
 39. 3 kgf
 41. a) 60 N b) 80 N
 43. a) 13 N b) $8,0 \text{ m/s}^2$
 45. a) $3,0 \text{ m/s}^2$ c) 24 N
 b) 24 N d) 36 N
 46. As forças de ação e reação não atuam no mesmo campo.
 47. d
 48. b
 49. c
 50. c
 51. II, III, V
 52. c
 54. a) $2,0 \text{ m/s}^2$ b) 12 N
 55. 80 N
 56. c
 57. d
 58. d
 59. 24 N
 60. a
 61. c

62. a) 30 m/s b) 4,0 s

63. e

64. a)



- b) 30 m/s

65. a) $1,5 \text{ m/s}^2$ b) 1800 N

66. a) $\frac{1}{3,6} \cong 0,278$ c) 0,24

- b) $\frac{5}{1,2} \cong 4,167$

67. e

68. a

69. a) $5,0 \text{ m/s}^2$ b) 10 N c) 40 N

70. a

71. d

72. a) $5,0 \text{ m/s}^2$ b) 60 N

73. a) 10 m/s^2 b) zero

74. a) $8,0 \text{ m/s}^2$ b) 48 N c) 88 N

13 • Algumas aplicações das leis de Newton

1. a) 500 N c) 600 N e) 350 N

- b) 500 N d) 300 N f) 800 N

2. a) Não.

- b) Subindo acelerado ou descendo retardado.

- c) $2,0 \text{ m/s}^2$

3. $t = 0,60 \text{ s}$

4. e

5. d

6. b

7. Não.

9. a) $2,0 \text{ m/s}^2$ b) 96 N c) 192 N

11. a) $4,0 \text{ m/s}^2$ b) 48 N c) $48\sqrt{2} \text{ N}$

12. a) 12 kg b) 6 kg

13. No mesmo nível.

14. a) $2,0 \text{ m/s}^2$ b) 72 N c) 144 N

15. d

16. Não.

17. a

18. a) $F > 600 \text{ N}$

- b) Não com o indivíduo mantendo contato com o solo. Seria possível se o indivíduo subisse pelo fio com movimento acelerado de aceleração maior que $2,0 \text{ m/s}^2$.

19. 300 N

20. a) $\frac{1}{19} \text{ kg}$ b) 0,5 N

22. a) 140 N b) $4,0 \text{ m/s}^2$

24. $T_1 \cong 161 \text{ N}$; $T_2 \cong 101 \text{ N}$;

- $T_3 \cong 200 \text{ N}$

25. $m = 60 \text{ kg}$

26. a) 150 N

- b) $\tan \theta = 0,75$; $\theta \cong 37^\circ$

28. a) $7,5 \text{ m/s}^2$ b) 50 N

30. a) I c) II e) III

- b) I d) III f) II

31. c

32. d

33. 22 N

34. d

35. a) 24 m/s^2 b) 130 N

36. a) $100\sqrt{3} \text{ N}$ b) $5,0 \text{ m/s}^2$

38. $2\sqrt{5} \text{ m/s}^2$

39. a) 3,0 s b) 12 m/s

41. a) 135 N c) 75 N

- b) 15 N d) 75 N

43. a) $1,0 \text{ m/s}^2$ c) $36\sqrt{3} \text{ N}$

- b) 36 N

44. a) $g \cdot \sin \theta$ b) zero

45. c

46. c

47. b

48. I – F; II – V; III – V; IV – V

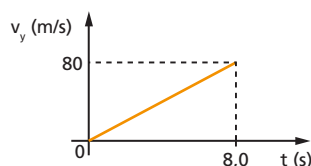
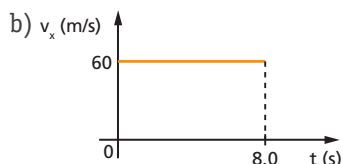
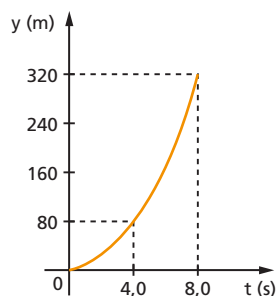
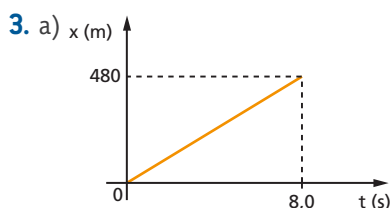
49. a) $6,5 \text{ m/s}^2$ b) 45,5 N c) 19,5 N

51. 1020 N; 180 N

52. a) $4,0 \text{ m/s}^2$
 b) 240 N
 c) 32 N
53. a) $a_A = a_B = 0$
 b) $a_A = 0$; $a_B = 5,0 \text{ m/s}^2$
 c) $a_A = 5,0 \text{ m/s}^2$; $a_B = 15 \text{ m/s}^2$
54. a) $4,0 \text{ m/s}^2$
 b) 100 N
 c) 140 N; 460 N
55. a) $7,5 \text{ m/s}^2$; 150 N b) 750 N
56. $a = 1,0 \text{ m/s}^2$; $F_N \cong 8,3 \text{ N}$
57. a) $7,5 \text{ m/s}^2$ b) 30 N
58. a) $3,0 \text{ m/s}^2$ b) 45 N

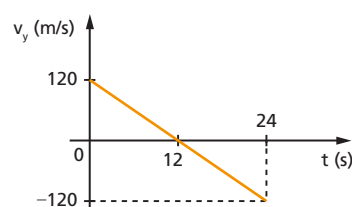
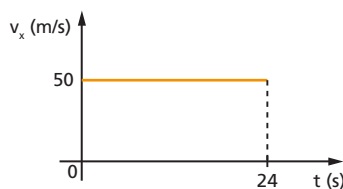
14 • Lançamento não vertical

2. a) $x = 60t$; $y = 5,0t^2$
 b) $v_y = 10t$
 c) $x = 240 \text{ m}$; $y = 80 \text{ m}$
 d) $20\sqrt{13} \text{ m/s}$
 e) $\cong 34^\circ$
 f) 8,0 s
 g) 480 m
 h) 100 m/s
 i) $y = \frac{x^2}{720}$



4. a) 12 s b) 1440 m c) 5 s
5. c
6. a) 2000 m
 b) $\tan \theta = 0,25$; $\theta \cong 14^\circ$
7. 40 m
8. Sim, desde que h seja suficientemente grande para que o choque ocorra antes de atingirem o solo.

9. a
10. $h > 45 \text{ m}$
12. a) $x = 50t$; $y = 120t - 5,0t^2$
 b) $v_y = 120 - 10t$
 c) $x = 300 \text{ m}$; $y = 540 \text{ m}$
 d) $v \cong 78 \text{ m/s}^2$; descendo
 e) $\cong 50^\circ$ i) 720 m
 f) 12 s j) 130 m/s
 g) 24 s k) 50 m/s
 h) 1200 m
 l)



$$m) y = \frac{12}{5}x - \frac{x^2}{500}$$

13. 60 m/s
14. 160 m/s
15. $\cong 24^\circ$
16. a) 4,0 s d) 300 m
 b) 180 m e) $30\sqrt{5} \text{ m/s}$
 c) 10 s
17. c

18. a
19. 15 m
20. Todas.
21. c
22. d
23. a) 0,8 s b) 2,4 m c) 6,0 m/s
24. 25 m/s
25. a
26. a) $5\sqrt{2} \text{ m/s}$ b) $30\sqrt{2} \text{ N}$
27. a) 3,0 s b) 27 m
28. a) 4000 m b) 1000 m
29. a) $H = \frac{(v_0 \cdot \sin \theta)^2}{2g}$
 b) Demonstração.
30. c
31. d
32. b
34. a) 900 m b) 125 m c) 540 m
35. 3,0 s
36. 8,0 m
37. a) $\cong 21,9 \text{ m}$ c) $\cong 2,1 \text{ s}$
 b) $\cong 42,5^\circ$
38. a) 180 m b) 300 m
39. a) 27 m/s b) 4 m
40. 16 m
41. 12° de grau.
42. 2 m
43. c
44. a) 400 m/s b) $\cong 4,6 \text{ s}$
45. a) $10\sqrt{19} \text{ m/s}$ b) $\cong 36,6^\circ$
46. c
47. 0,72 m
48. 40 m
50. a) $\cong 27^\circ$ b) $\cong 335 \text{ m/s}$
51. Atingirá.
52. a) 3,0 s b) 5 m
53. 45 m
54. a) 5 s
 b) 80 m/s

- c) $d = 180 \text{ m}$; $h = 115 \text{ m}$
d) Descendo.

55. c

15 • Forças de atrito

1. a) 32 N b) 40 N
2. a) 10 N b) $10\sqrt{5} \text{ N}$
3. a) $4,0 \text{ m/s}^2$ c) $4\sqrt{17} \text{ N}$
b) 4,0 N
5. a) $5,0 \text{ m/s}^2$ c) 10 N
b) 30 N d) $10\sqrt{5} \text{ N}$
6. a) 40 N b) 80 N c) e
7. a) I b) III c) II d) IV
8. c
9. e
10. a) F b) V c) V
11. a) $3,0 \text{ m/s}^2$ b) 12 N c) estático
12. $01 + 08 + 32 = 41$
14. $5,0 \text{ m/s}^2$
15. $0,50 \text{ m/s}^2$
16. a) $|a| = \mu g$ b) $d = \frac{v_0^2}{2\mu g}$
17. a) $1,0 \text{ m/s}^2$ b) 36 N
18. 2,5 N
19. 0,25
20. c
21. d
22. 3 m/s^2
23. 96 N
24. a) 60 N; zero
b) 84 N; zero
c) 48 N; $3,5 \text{ m/s}^2$
26. a) $m_B \leq 6,0 \text{ kg}$ b) $\mu_e \geq 0,40$
28. 40 N
29. $2,0 \text{ m/s}^2$
30. $AB \rightarrow \cong 78 \text{ N}$ $BD \rightarrow 60 \text{ N}$
 $BC \rightarrow 50 \text{ N}$ $\alpha \cong 40^\circ$
31. Não
32. b

33. e

34. a) zero; zero c) 0,15
b) 0,20 d) 0,10
35. a) 0,25 b) 2,0 N

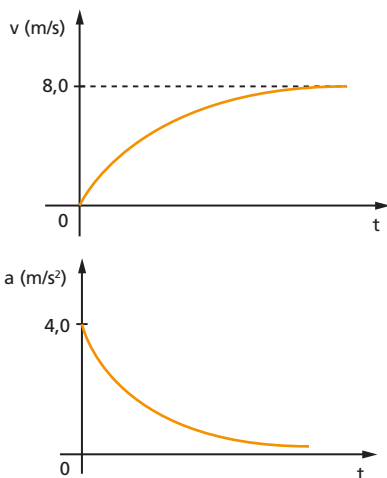
36. c

37. a

38. $F > \mu mg$

39. Escorrega.

40. a) $8,0 \text{ m/s}$
b)



41. $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

42. a) Os dois chegam juntos.
b) A

44. $5,0 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$

45. 20 m/s

46. a) 50 m/s b) 0,30 c) $7,5 \text{ m/s}^2$

47. b

48. b

49. a) 80 N e) 4,0 s
b) 20 N f) 64 m
c) $8,0 \text{ m/s}^2$ g) $4\sqrt{2} \text{ s}$
d) $4,0 \text{ m/s}^2$

50. a) $a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$

b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \cdot \sin \theta}}$

51. 0,5

52. a) $F \geq 200 \text{ N}$ b) $\mu_e \geq 0,20$

53. 0,40 s

54. a) 70 N c) $3,0 \text{ m/s}^2$
b) 30 N d) 48 N

55. a

56. $02 + 04 + 16 = 22$

57. 90 N

58. a) 56 N b) 116 N

59. a) $6,0 \text{ kg} \leq m_c \leq 8,0 \text{ kg}$
b) 7,0 kg

60. a) $a \geq 25 \text{ m/s}^2$
b) $F > 250 \text{ N}$
c) $\mu \geq 0,50$

16 • Força elástica

2. 60 N/m
3. $1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$
4. 0,25 m
5. 3,0 cm
6. 0,20 m
7. 1,5 m
8. 0,40 m
9. b
10. c
11. 9,5 kg
12. b
13. a) 200 N b) $3,2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$
14. a
15. a) $5,0 \text{ m/s}^2$ b) 30 N
16. a
17. a
18. a
19. e

17 • Movimento plano em trajetórias curvas

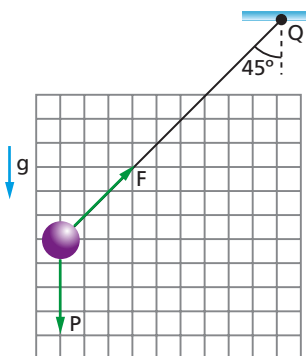
2. $v_{\text{máx}} = 2,0 \text{ m/s}$
5. $F_N = 984 \text{ N}$
6. $T = 4,5 \text{ N}$

9. d
10. a) $F_N = 611 \text{ N}$ b) $v_{\text{máx}} = 12 \text{ m/s}$
12. a) alto: $\frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}$
baixo: $9\sqrt{2} \text{ m/s}$
b) $F_N = 13\,000 \text{ N}$
13. e
14. d
15. a
16. a) $F_{\text{res}_y} = 8,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
b) $F_N = 2,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
17. $F_N = 3,3 \cdot 10^4 \text{ N}$
18. a
19. a) $v_{\text{máx}} \cong 12,2 \text{ m/s}$
b) $L_{\text{mín}} = 4,0 \text{ m}$
21. $F_{N_A} = 357,5 \text{ N}$; $F_{N_B} = 362,5 \text{ N}$
22. b
23. b
24. a
25. c
26. c
28. a) $v = -4,0 \text{ m/s}$;
 $d = -4,0 \text{ m/s}^2$
b) $F_t = 0,4 \text{ N}$
c) $F_c = 1,6 \text{ N}$
d) $F_R = \sqrt{2,72} \text{ N}$
30. $k = 50 \text{ N/m}$
31. $R = 1,2 \text{ m}$
33. $\mu = 0,05$
36. a) $v \cong 16 \text{ m/s}$
b) $F_N = 1,68 \cdot 10^4 \text{ N}$
37. d
39. $T_A = 5,0 \text{ N}$
 $T_c = 68,7 \text{ N}$
41. c
42. a) O estudante não conseguirá realizar a curva.
b) Não.
c) Sim, a direção varia.
43. d

44. a) $F_c = 7,5 \cdot 10^3 \text{ N}$
b) $F_{\text{at}} = 9,6 \cdot 10^3 \text{ N}$. O carro continuará a realizar a curva.
c) $\mu = 0,40$

45. a) $F_{\text{el}} = 200 \text{ N}$ b) $\ell_0 = 40 \text{ cm}$

46. a)



b) $t_A = 4,2 \text{ s}$

c) $M_0 \cong 252 \text{ kg}$

47. a) $f = \frac{1}{3} \text{ Hz}$ b) $T = 10 \text{ N}$

48. a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_e \cdot R}}$

b) $F_t = \frac{\mu_d}{\mu_e} \cdot m \cdot g$

49. a) $F = 2,5 \cdot m \cdot g$

b) $k = 2$

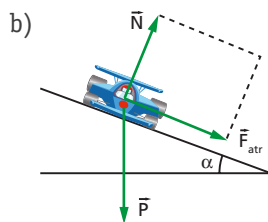
c) $N = 2,5$

50. a) $F_R \cong 4,18 \text{ N}$

b) $F_N = 2,4 \text{ N}$

c) $a = g = 10 \text{ m/s}^2$

51. a) $\tan \alpha = \frac{v^2}{Rg}$



52. a) zero b) $2,0 \text{ m/s}$

53. a

54. a) $m = 0,4 \text{ kg}$ b) $v_2 = 2,0 \text{ m/s}$

18 • Trabalho e energia cinética

2. $\mathcal{E}_{\text{cin}_i} = 27 \text{ J}$; $\mathcal{E}_{\text{cin}_f} = 12 \text{ J}$;
 $\Delta \mathcal{E}_{\text{cin}} = -15 \text{ J}$

5. -200 J

7. $\mathcal{E}_1 = -8,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$;
 $\mathcal{E}_2 = -8,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$;
 $\mathcal{E}_3 = 16 \cdot 10^{-3} \text{ J}$; e $\mathcal{E}_{\text{res}} = 0$

8. d

9. c

10. c

11. a) $30\sqrt{3} \text{ J}$ b) -80 J

12. a) 150 J d) -50 J

- b) zero e) 100 J

- c) zero f) 100 J

13. a) zero b) $-0,4 \text{ J}$

14. a) -2160 J c) zero

- b) 2160 J d) zero

16. $6,0 \text{ J}$

17. a

18. b

19. a

21. a) 1000 J c) zero

- b) -800 J d) $+200 \text{ J}$

23. a) 45 J b) 105 J

24. a) 144 J b) 198 J c) 342 J

26. a) -18 J b) $-6,0 \text{ J}$ c) zero

27. a) 10 J b) -10 J c) zero

29. a) 400 J b) 40 N

32. 16 J

33. 55 N

35. $37,5 \text{ N}$

37. a) $\mathcal{E}_1 = 60 \text{ J}$ e $\mathcal{E}_2 = 60 \text{ J}$

b) $\mathcal{E}_{\text{res}} = 120 \text{ J}$

c) $v = 20\sqrt{3} \text{ m/s}$

38. a) 18 J b) $4,0 \text{ m/s}$

39. a) zero b) -12 J c) 12 J

40. 16 m/s

41. a) 49 J b) $9,0 \text{ m/s}$

42. b

43. a) $\mu = 0,5$ b) $\mathcal{E}_{\text{at}} = -30\,000 \text{ J}$

44. d

45. $v = v_0 \sqrt{\frac{\pi - 2}{\pi}}$

46. e
 47. d
 49. a) 40 J b) -40 J c) zero
 50. a) 5 J b) -5 J c) zero
 51. a) 40 N/m b) -20 J c) -60 J
 53. e
 54. 0,40 J
 56. a) 240 J b) zero c) -176 J
 57. -32 J
 58. e
 60. a) • -1000 J
 • 5000 J
 • zero
 • 4000 J
 b) 20 m/s
 61. c
 62. a) O módulo da força normal varia, mas a direção e o sentido permanecem constantes.
 b) $\mathcal{E}_{el} \cong 42 \text{ J}$
 c) $v \cong 3,9 \text{ m/s}$
 63. a) $2kR^2$ b) zero c) zero
 64. $h = \frac{mgH}{F}$
 65. d
 66. c
 67. a
 68. zero
 69. $v = \sqrt{\frac{5gb}{2}}$; $v = \frac{\sqrt{5gb}}{2}$
 70. a) 8,0 m b) 160 J c) $4,0\sqrt{10} \text{ m/s}$
 71. a) $F_{at\text{m}\acute{a}x} = 1,0 \cdot M$ (unidades SI)
 b) $v_o = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ m/s}$
 72. a) 0,10 m b) +2,0 J
 73. a) 7,5 J b) $-2,5\sqrt{3} \text{ J}$ c) -3,2 J

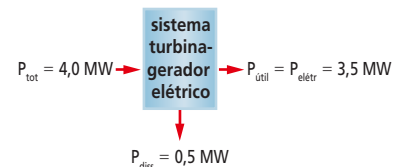
19 • Energia e potência

2. $\mathcal{E}_{pot_A} = 40 \text{ J}$; $\mathcal{E}_{pot_B} = 0$
 3. $\mathcal{E}_{pot_A} = 0$; $\mathcal{E}_{pot_B} = 80 \text{ J}$; $\mathcal{E}_{pot_C} = 20 \text{ J}$
 4. a) Em B.
 b) Em A e C, sendo $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_C$.

6. a
 8. a) $k = 200 \text{ N/m}$ c) 16 J
 b) 4,0 J
 9. a
 10. a) $F_{res} = 2,0 \text{ N}$
 b) $\mathcal{E}_{el\acute{a}st} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
 11. d
 13. a) 40 J b) 28 J
 16. a) $v_B = 10 \text{ m/s}$ b) $\mathcal{E}_{cin\acute{c}} = 3,0 \text{ J}$
 18. e
 19. e
 21. a
 22. c
 23. d
 24. d
 25. a) $\sqrt{60} \text{ m/s} \cong 7,7 \text{ m/s}$
 b) $2\sqrt{5} \text{ m/s} \cong 4,5 \text{ m/s}$
 26. e
 27. e
 29. $T = m \left(g + \frac{v^2}{R} \right)$
 31. a) $v_{min} = 2\sqrt{5} \text{ m/s}$
 b) $h_1 = 5,0 \text{ m}$
 32. $F_N = 10 \text{ N}$
 34. $v_A = \sqrt{5Rg}$
 37. $\mathcal{E}_{diss} = 30 \text{ J}$
 38. $v_B = 10 \text{ m/s}$
 40. A distância entre elas diminuiu.
 42. $h = \frac{5R}{3}$
 44. $v = 4,0 \text{ m/s}$
 46. $h = 2,5 \text{ m}$
 48. a) $v_{m\acute{a}x} = 6,0 \text{ m/s}$
 b) $x_{m\acute{a}x} = 1,6 \text{ m}$
 50. $x = 20,4 \text{ cm}$
 51. $v_B = 2,0 \text{ m/s}$
 53. a) $\mathcal{E}_{cin_0} = 0$; $\mathcal{E}_{cin_1} = 100 \text{ J}$
 b) $v_2 = 10 \text{ m/s}$; $v_5 = 5,0 \text{ m/s}$
 54. c
 56. a) $h_B = 2,5 \text{ m}$ b) $v_B = 5,0 \text{ m/s}$
 57. a) $v_c = 2,0 \text{ m/s}$

b) $v_B = 2\sqrt{5} \text{ m/s}$
 c) $H_{min} = 1,0 \text{ m}$

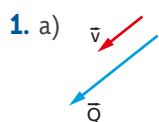
58. c
 59. a) $\mathcal{E}_{pot_B} = 2 \text{ J}$ b) $v_B = 4 \text{ m/s}$
 60. b
 61. a) $T = 1,0 \text{ s}$; $v_B = 2,0 \text{ m/s}$ e
 $v_c \cong 10,2 \text{ m/s}$
 b) $v_c \cong 10,2 \text{ m/s}$ (TCE)
 62. c
 63. c
 66. $\mathcal{E}_{term} = 30 \text{ J}$
 67. d
 69. e
 70. a) $[E] = M L^2 T^{-2}$
 $[P] = M L^2 T^{-3}$
 b) $W = kg \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$
 72. e
 75. 25 kW
 77. $20 \text{ m}^3/\text{s}$
 79. a) 500 J b) 1500 J
 81. a) 9,0 kWh b) 270 kWh
 82. a) 100 cal/min b) 8,0 min
 83. a
 84. d
 85. a
 86. c
 87. d
 88. b
 90. a) 87,5%
 b) $P_{diss} = 0,5 \text{ MW}$; $P_{\acute{u}til} = 3,5 \text{ MW}$



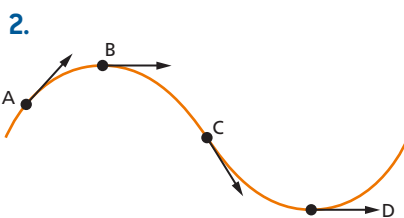
91. 80%
 93. a) 32,4 MW
 b) $6,48 \cdot 10^4$ habitantes
 94. d
 95. b

96. 75 J
 97. a) $T_0 = 2,0 \text{ N}$
 b) $T_1 = 1,0 \text{ N}$; $T_2 = 4,0 \text{ N}$
 98. 5,0 cm
 99. a) 200 s b) 8,0 kN c) $0,20 \text{ m/s}^2$
 100. b
 101. c
 102. a
 103. $x = \sqrt{\frac{3R}{g} \cdot (v^2 + Rg)}$
 104. b
 105. a) $a_t \cong 9,6 \text{ m/s}^2$
 b) $v_3 = 8,9 \text{ m/s}$
 106. c
 107. b
 108. $v_A = 2\sqrt{\frac{2gL}{11}}$; $v_B = \sqrt{\frac{2gL}{11}}$
 109. 3,0 kW

20 • Quantidade de movimento e impulso



b) $6,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$



3. É constante.
 4. I. F; II. V; III. V
 5. Demonstração.
 6. $80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 7. a) B b) A
 8. b
 9. $[Q] = \text{M L T}^{-1}$
 10. c
 11. b
 12. $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 13. O automóvel tem energia cinética maior.
 14. $8,0 \text{ m/s}$
 15. a) $2,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 b) $1,2 \cdot 10^3 \text{ N}$
 16. a) $3,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ b) $3,5 \cdot 10^2 \text{ N}$
 17. a) $20\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ c) zero
 b) $40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 18. a) Não, pois \vec{F}_c não é constante.
 b) $20\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{s}$
 c) $10\sqrt{2} \text{ N}$
 19. a) $60 \text{ N} \cdot \text{s}$ c) $6,0 \text{ N}$
 b) 20 m/s
 20. a) $15 \text{ N} \cdot \text{s}$ c) $9,0 \text{ N} \cdot \text{s}$
 b) $6,0 \text{ N} \cdot \text{s}$ d) $4,5 \text{ m/s}$
 21. c
 22. b
 23. d
 24. I. V; II. F; III. F; IV. V
 25. d
 26. a) $\frac{5}{3} mv_0$ b) $-\frac{5}{18} mv_0^2$
 27. $3,8 \cdot 10^3 \text{ N}$
 28. 28 m/s
 29. d
 30. 15 m/s
 31. d
 32. a) $31 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ c) $25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 b) zero d) $50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 33. a) $5,0 \text{ m/s}$ c) 125 J
 b) 140 J d) -15 J
 34. a) 12 m/s b) 480 J
 35. a) $0,10 \text{ m/s}$
 b) Da energia química armazenada no corpo do garoto.
 37. a) $0,80 \text{ m/s}$; para a direita.
 b) $-100,8 \text{ J}$
 38. a) $7,0 \text{ m/s}$; para a esquerda.
 b) zero
 40. a) $16,2 \text{ m}$ b) $1,8 \text{ m}$
 42. $5,0 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

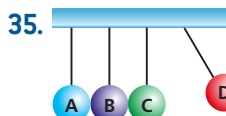
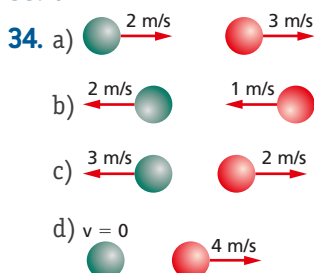
43. $5,4 \text{ m/s}$
 44. Não, pois as forças internas não alteram a quantidade de movimento do sistema.
 45. $\cong 2,6 \cdot 10^2 \text{ m/s}$
 46. a) $7,5 \text{ m/s}$ b) $-7,5 \text{ J}$
 47. a) 20 kg c) 19 J
 b) 49 J d) -30 J
 48. a) $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ b) 2
 49. c
 50. e
 51. 72 J
 52. d
 53. a
 54. b
 55. a) $\cong 1,04 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 b) $2,4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
 56. $09 = 01 + 08$
 57. c
 59. a) $0,04 \text{ N}$ b) $0,16 \text{ W}$
 60. 20 N
 61. c
 62. a) $\cong 29,6 \text{ m/s}$ b) $\cong 78^\circ$
 63. $3,2 \text{ m/s}$
 64. $\frac{108}{\pi} \text{ N} \cong 34 \text{ N}$
 65. a) $10,64 \text{ m/s}$ b) $6,64 \text{ m/s}$
 66. a) 1 m/s b) $0,3 \text{ m}$
 67. Demonstração.
 68. a) $120 \text{ N} \cdot \text{s}$
 b) 30 N
 c)
 d) 70 m e) $\frac{180}{7} \text{ N}$ f) Não.

21 • Colisões

2. a) 0,800 m/s b) 0,032 m
3. 300 m/s
4. 8 cm
5. $\cong 600$ m/s
6. e
7. a) 5 cm b) $\frac{3}{4}$
8. a) 10 m/s b) 250 m/s
10. a) Parcialmente elástico.
b) Elástico.
c) Inelástico.
d) Elástico.
12. a) $v_A = 3,0$ m/s (para a direita)
 $v_B = 9,0$ m/s (para a direita)
b) 24 J
13. 3,0 m/s; 6,0 m/s
14. a) 6,0 m/s
b) -2,0 m/s; 4,0 m/s
c) 0,2 m; 0,8 m
16. a) 10 m/s; 15 m/s
b) Para a direita.
17. 20 m/s; 40 m/s
18. a) 12,4 m/s; 11,6 m/s
b) $\cong 390$ J
19. $\cong 152$ km/h
20. a
21. 0,7 m/s; 1,0 m/s
22. e
23. a) 0,80 b) $\frac{1}{3}$
24. a) 12 m/s b) 9,0 m/s
25. 20 m
26. I. $\beta = \alpha$; II. $\alpha > \beta$; III. $\alpha < \beta$
27. b
28. a) 4,8 m
b) $v = 10$ m/s
 $\theta = \arctg \frac{4}{3} \cong 53^\circ$
30. a) $2,0 \cdot 10^3$ N b) $1,0 \cdot 10^3$ N
31. a) 0,80 b) 11,3 m/s

$$32. \frac{\sqrt{32}}{2} \cong 0,7$$

33. c



- 35.
36. a) 90° b) 2,0 m/s
37. a) $\sqrt{10}$ m/s; zero b) $\frac{1}{3}$ m
38. b
39. b
40. c
41. 30°
42. a) 1,2 m/s; 1,6 m/s b) zero
43. e
44. 200 m/s
45. a) $\cong 1,0$ m/s b) 5,0 cm; $\cong 57$ N
46. a) $\sqrt{2gL}$ b) $\arccos \frac{3}{4} \cong 41^\circ$
47. b
48. a
49. a) 0,80 b) 0,90 N · s c) 90 N
50. a) 10 m/s (para a direita)
b) 96 J
c) 8 cm
51. $6\sqrt{2}$ cm $\cong 8,5$ cm
52. 9,0 m/s; 18 m/s
53. 80 N
54. 4,8 N
55. $10\sqrt{5}$ m/s; $\arctg 2 \cong 63^\circ$
56. a
57. 50 cm
58. a) 45 m
b) 240 m
c) 20 m/s
d) 36 m/s

$$e) (2 + \sqrt{13}) s \cong 5,6 s$$

$$f) (36\sqrt{13} - 48) m \cong 82 m$$

22 • Centro de massa

2. 9 cm
3. 4 cm
4. $x = 3,7$ cm; $y = 3,4$ cm
5. $x = -2,5$; $y = 2,5$
6. 16 cm
7. b
9. a) $\cong 4630$ km
b) No interior da Terra.
10. $x = 3,25$ m; $y = 2,5$ m
11. Está à distância de $\frac{7R}{6}$ do ponto D.
12. $x \cong 3,2$ cm; $y \cong 2,3$ cm
13. c
15. a) Está a 3,0 m de A.
b) $3,2 \text{ m/s}^2$
16. a) Permanece em repouso.
b) 0,60 m; 0,40 m
17. 1,8 m; 16,2 m
18. 200 m
19. Fazendo um experimento semelhante ao do exercício 16.
20. 21 (01 + 04 + 16)
21. 5,0 m/s
22. $\sqrt{37}$ m/s
23. b

23 • Estática dos corpos rígidos

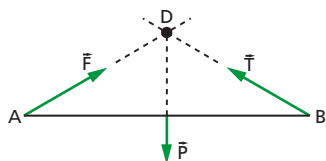
2. a) 30 N b) 30 N
3. 80 N
4. $P_A = 2$ N; $P_B = 4$ N; $P_C = 2$ N
5. 60 N
6. 9 N
7. 25 kg
8. Não, pois o centro de massa passa pelo ponto de rotação (E).

9. a) 500 N b) 700 N
 10. 50 N
 11. a
 12. e
 13. b
 14. c

15. a) 56 N b) 86 N
 18. 60 N; 100 N
 19. 70 cm

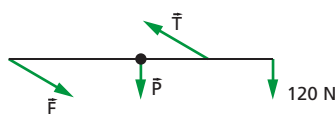
20. a) $T = F = 200 \text{ N}$

b)



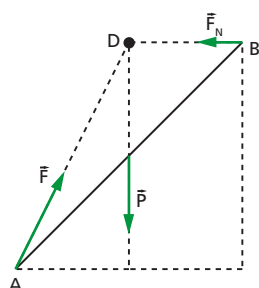
21. a) $T = 350 \text{ N}$; $F \approx 282 \text{ N}$

b)



22. $F_B = 150 \text{ N}$; $F_A = 50\sqrt{73} \text{ N}$

23.



As retas suportes das três forças devem passar por um mesmo ponto (D).

24. a) 10 000 N b) 20 000 N

25. $90 \text{ N} \cdot \text{m}$

26. a) 510 N c) 510 N
 b) 1000 N d) 0,51

28. $T = \frac{L}{h+R} P$; $F_N = \frac{R}{h+R} P$

30. a)

Como há apenas três forças, suas retas suportes passam por C.

b) $\frac{4}{3}$

c) $T \approx 391 \text{ N}$; $F \approx 326 \text{ N}$

31. $x \approx 1,4 \text{ m}$

32. 25 cm

33. e

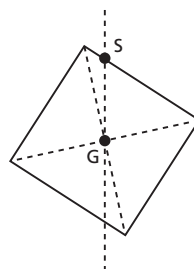
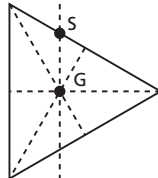
34. 0,30

35. a) $M_P = 0,08 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_C = 0$

b) $M_T = -0,08 \text{ N} \cdot \text{m}$; $T = 0,5 \text{ N}$

c) $C = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N}$

- 36.



37. a) Tombará. b) Não tombará.

38. Se o garoto não se inclinar, seu centro de massa ficará atrás do ponto de apoio dos pés com o chão e a tendência é a de que ele volte a se sentar.

39. $\frac{y}{x}$

40. d

41. 100 N

42. $\frac{13}{3} \text{ m}$

43. Os trabalhos são iguais.

44. d

45. a) $F > 36 \text{ N}$ b) $F_2 = 39 \text{ N}$

46. $5,0 \text{ m/s}^2$

47. a) $\mu_e < 0,5$ b) $\mu_e > 0,5$

48. $a = \frac{L}{2}$; $z = \frac{L}{6}$;

$y = \frac{L}{4}$; $w = \frac{L}{8}$

49. a) $F_A = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N}$; $F_B = 40 \text{ N}$;

$F_C = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N}$

b) $\frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ N}$

50. $\frac{1}{6}$

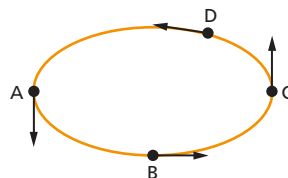
51. a) Tombamento.

- b) Deslizamento.

24 • Gravitação

2. $\approx 20,7 \text{ anos}$

3. a)



- b) A

- d) Acelerado.

- c) C

- e) Retardado.

4. $7,79 \cdot 10^{11} \text{ m}$

6. 8 anos

7. 24 horas

8. a) $\approx 41 900 \text{ km}$ b) $\approx 35 500 \text{ km}$

9. b

10. b

11. a

12. a) $5,0 \cdot 10^2 \text{ s}$; $2,0 \cdot 10^4 \text{ s}$

b) 256 anos

13. d

16. $\approx 2 \cdot 10^{20} \text{ N}$

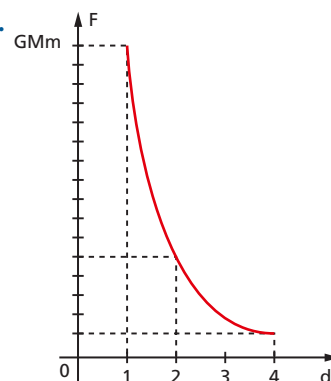
17. 20 N

18. $\approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

19. 342 000 km

20. Não. O equilíbrio é instável.

- 21.



22. a

23. a
 24. d
 25. c
 26. d
 28. a) $\cong 6,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
 b) $\cong 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$
 c) $\cong 9,9 \cdot 10^3 \text{ s}$
 29. $\cong 3,6 \cdot 10^7 \text{ m}$
 30. 42 anos
 31. zero
 32. $\cong 7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
 33. a
 34. 2
 35. 24
 36. c
 37. e
 38. $\cong 4,96 \text{ m/s}^2$
 39. $h = R(\sqrt{2} - 1) \cong 2,6 \cdot 10^6 \text{ m}$
 41. 30 m/s^2
 42. 20 N
 43. $9,8 \text{ m/s}^2$
 44. $\cong 5,1 \cdot 10^3 \text{ s} \cong 1,4 \text{ h}$
 46. a) 50 kgf b) zero c) 25 kgf
 47. 45 (01 + 04 + 08 + 32)
 48. 20 m/s^2
 49. a) $4,0 \text{ m/s}^2$ b) 30,0 m
 50. e
 51. e
 52. e
 53. a) $E_p = -\frac{GMm}{d}$
 b) Demonstração.
 c) Demonstração.
 54. a) $-2,5 \cdot 10^{10} \text{ J}$
 b) $1,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$
 c) $-1,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$
 56. $\cong 4,1 \cdot 10^6 \text{ m}$
 57. 11,2 km/s
 58. 21,7 km/s

59. a) $\frac{R}{2}$
 b) $\frac{150 \text{ GM}}{R}$
 c) $-\frac{150 \text{ GM}}{R}$
 60. a) $\cong 5 \text{ km/s}$ b) $\cong 3,6 \text{ m/s}^2$
 61. e
 62. c
 63. $\cong 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m}$
 64. $7,53 \cdot 10^6 \text{ m}$
 65. $d = \frac{3\pi}{GT^2}$
 66. b
 67. c

25 • Fluidostática – Lei de Stevin

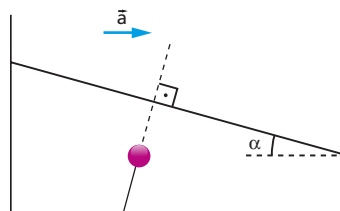
2. $2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$
 3. $1,2 \cdot 10^5 \text{ N}$
 4. $4,0 \cdot 10^3 \text{ m}^2$
 5. $[p] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$
 6. Grandeza escalar.
 8. a) $1 \text{ Pa} \cong 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ kgf/cm}^2$
 b) $1 \text{ Pa} \cong 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ psi}$
 9. $\cong 1,06 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 10. a
 11. a
 12. 34 (02 + 32)
 13. a) $1,3 \cdot 10^2 \text{ N}$
 b) 26 N
 14. a) $7,5 \text{ m/s}^2$ b) 2048 cm^3
 15. $8,0 \text{ m/s}^2$
 16. A tensão superficial da água segura os fios de cabelo.
 17. A tensão superficial faz a bolha contrair.
 19. $1,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 20. a) $1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ c) $1,0 \cdot 10^4 \text{ N}$
 b) $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ d) $4,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
 21. a) $1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 b) $2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
 22. $2,4 \cdot 10^4 \text{ N}$
 23. a) $1,09 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 b) $1,28 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 24. $0,92 \text{ g/cm}^3$
 25. $1,2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
 26. $3,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
 27. $14,7 \text{ lb/in}^2$
 28. a
 29. $1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
 30. a
 31. c
 32. e
 33. b
 34. a
 35. $5,0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$
 37. 20 cm
 38. a) $5,2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ b) $1,53 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 39. a) $p_M \cong -2,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
 b) $p_A \cong 7,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
 40. a) 1,5 m b) 1,5 m
 41. a
 42. $13,6 \text{ g/cm}^3$
 43. c
 44. a
 45. 4 N
 46. c
 47. a) 1500 N b) Traseira.
 49. a) 6,0 cm b) 1000 N c) 60 J
 50. 40 N
 51. a) $1,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ b) $2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 52. d
 53. 80 N
 55. 890 mmHg
 56. 12,5 m
 57. a) 0,125 atm b) 91,2 cmHg
 58. 9,5 cm
 59. 820 mmHg
 60. 7 atm

61. a) 0,37 atm b) 700 mmHg
 62. Não.
 63. d
 64. c
 65. 50 cm
 66. a) 30 m b) 1 m/s
 67. d
 68. c
 69. 1,05 atm
 70. 16,3 cm
 71. 0,12 N
 72. Não.
 73. $p_x = p_y = 8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$
 74. $5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$

26 • Fluidostática – Princípio de Arquimedes

2. a) 6,0 kg c) 40 N
 b) 20 N
 3. a) 2,4 g b) 0,20 g/cm³
 4. 7,5 cm
 5. a) $\cong 3,1 \cdot 10^3 \text{ g}$
 b) $\cong 0,74 \text{ g/cm}^3$
 c) $\cong 1,2 \text{ g/cm}^3$
 6. a) 2,5 m/s² b) 2,0 s
 7. 1,0 cm/s
 8. 4 200 kg
 9. a) 5,0 kg b) 2,5 g/cm³
 10. 8
 11. 5 cm
 13. 0,94 g/cm³
 14. 0,80 g/cm³
 15. 2,0 N
 16. a
 17. c
 18. a
 19. b
 20. d

21. d
 22. 65 (1 + 64)
 23. 40 N/m
 24. 23 (01 + 02 + 04 + 16)
 25. c
 26. $E_e = E_b$
 27. d
 28. c
 29. 3
 30. a) 110 N
 b) 430 N
 32. Horário.
 33. 0,75 g/cm³
 34. 22 cm
 35. 0,75 g/cm³
 36. I, III
 37. 2,0 g/cm³
 38. a) $8,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$
 b) 0,60 kg
 c) 2,0 N
 39. Ao apertar a rolha, a pressão aumenta, comprimindo o ar. O empuxo diminui e o tubo afunda.
 40. Diminuirá.
 41. O líquido só exerce força na parte de cima.
 42. a) 3,0 N b) 0,6 N c) 2,4 N
 43. a)



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} = \frac{5}{12}$$

$$\alpha \cong 23^\circ$$

$$\text{b) } E = 3,25 \text{ N; } T = 2,6 \text{ N}$$

44. a) 2,0 N b) 400 g
 45. a) 2,0 m b) 0,68 J
 46. $\cong 2,5 \cdot 10^2 \text{ N}$
 47. c

27 • Fluidodinâmica

2. $v_1 \cong 4,4 \text{ m/s}$; $v_2 \cong 5,8 \text{ m/s}$
 3. a) $9,6 \cdot 10^2 \text{ Pa}$
 b) $4,8 \cdot 10^4 \text{ N}$
 4. a) 6,0 m/s
 b) $6,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$
 c) 1,2 m
 5. a) 65 cm
 b) $h = h_1 + h_2$
 6. a) $h = \frac{H}{2}$
 b) H
 c) Demonstração.
 7. 20 m/s
 8. e
 9. $\cong 80 \text{ N/m}^2$
 10. Próximo da região onde há fluxo de ar a pressão é menor.
 11. a) 10 s
 b) 60 N/m²
 12. b
 13. 5 (01 + 04)
 14. a
 15. b
 16. 12 m
 17. b
 18. c
 19. a) 2,0 m/s; 8 m/s
 b) $8\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
 c) $\cong 4,7 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
 d) $\cong 1,52 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 20. 38 m/s
 21. 148 m/s
 22. $\sqrt{2gh}$
 23. Demonstração.
 24. b
 25. d
 26. d
 27. $\cong 9 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

Bibliografia

- BLACKWOOD, O. H.; HERRON, W. B.; KELLY, W. C. *Física na escola secundária*. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1958.
- BOYLER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL, N. I. do. *Sistema Internacional de Unidades*. Rio de Janeiro: Interciência, 2002.
- BUECHE, F. J.; JERDE, D. A. *Principles of physics*. New York: McGraw-Hill, 1995.
- CHALMERS, A. *O que é ciência afinal?*. São Paulo: Brasiliense, 1993.
- DAMPIER, W. *Historia de la ciencia y sus relaciones con la filosofía y la religión*. Madrid: Editorial Tecnos, 1986.
- ELLIADÉ, M. *Mito e realidade*. São Paulo: Perspectiva, 2000.
- FEYMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lectures on physics*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1964.
- FISHBANE, P. M.; GASIOROWICZ, S.; THORNTON, S. T. *Physics for scientists and engineers*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- GEYMONAT, L. *Galileu Galilei*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- GIANCOLI, D. C. *Physics*. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física*. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- HENDERSON, W. O. *A Revolução Industrial*. São Paulo: Verbo/Edusp, 1979.
- HENRY, J. *A revolução científica*. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.
- KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books, 1999.
- KUHN, T. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Perspectiva, 1975.
- _____. *A revolução copernicana*. Lisboa: Edições 70, 1990.
- MACEDO, H. *Dicionário de física*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.
- MARICONDA, P. R.; VASCONCELOS, J. *Galileu e a nova Física*. São Paulo: Odysseus, 2006.
- MOURÃO, R. R. F. *Copérnico, pioneiro da revolução astronômica*. São Paulo: Odysseus, 2003.
- _____. *Dicionário enciclopédico de astronomia e astronáutica*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.
- _____. *Kepler – A descoberta das leis do movimento planetário*. São Paulo: Odysseus, 2003.
- NEWTON, I. *Princípios matemáticos de filosofia natural*. São Paulo: Nova Stella/Edusp, 1990.
- REALE, G.; ANTISERI, D. *História da filosofia*. São Paulo: Paulus, 2003.
- RODITI, I. *Dicionário Houaiss de Física*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2005.
- RONAN, C. A. *História ilustrada da ciência*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.
- ROSSI, P. *O nascimento da ciência moderna na Europa*. Bauru: Edusc, 2001.
- RUSSEL, B. *História da filosofia ocidental*. São Paulo: Nacional, 1967.
- SEARS E ZEMANSKY; YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.
- SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. Jr. *Princípios de Física*. São Paulo: Cengage Learning, 2004.
- TATON, R. (org.). *História geral das ciências*. São Paulo: Difel, 1960.
- TIPLER, P. *Física*. Rio de Janeiro: LTC, 1995.
- WESTFALL, R. S. *A vida de Isaac Newton*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

Significado das siglas de vestibulares e olimpíadas

Acafe-SC — Associação Catarinense das Fundações Educacionais, Santa Catarina

AFA-SP — Academia da Força Aérea, São Paulo

Aman-RJ — Academia Militar de Agulhas Negras, Rio de Janeiro

Ceeteps-SP — Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza, São Paulo

Cefet-AL — Centro Federal de Educação Tecnológica de Alagoas

Cefet-CE — Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará

Cefet-MG — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Cefet-PR — Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná

Cefet-PB — Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba

Cefet-RJ — Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Cefet-SP — Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo

Centec-BA — Centro de Educação Tecnológica da Bahia

Cescem-SP — Centro de Seleção de Candidatos às Escolas Médicas, São Paulo

Cesesp-PE — Centro de Estudos Superiores do Estado de Pernambuco

Cesgranrio-RJ — Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio, Rio de Janeiro

Cesubra-DF — Centro de Ensino Superior Unificado de Brasília, Distrito Federal

Cesupa-PA — Centro Universitário do Pará

Ceub-DF — Centro de Ensino Unificado de Brasília

Covest-PE — Comissão de Vestibulares de Pernambuco

C. U. Belas Artes-SP — Centro Universitário Belas Artes, São Paulo

C. U. Belo Horizonte-MG — Centro Universitário de Belo Horizonte, Minas Gerais

ECM-AL — Escola de Ciências Médicas de Alagoas

EEM-SP — Escola de Engenharia Mauá, São Paulo

Efei-MG — Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Minas Gerais

Efoa-MG — Escola de Farmácia e Odontologia de Alfenas, Minas Gerais

Efomm-RJ — Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante, Rio de Janeiro

E. Naval-RJ — Escola Naval do Rio de Janeiro

Enade — Exame Nacional de Desempenho de Estudantes

Enem-MEC — Exame Nacional do Ensino Médio, Ministério da Educação

EPM-SP — Escola Paulista de Medicina, São Paulo

Esal-MG — Escola Superior de Agricultura de Lavras, Minas Gerais

Esam-RN — Escola Superior de Agricultura de Mossoró, Rio Grande do Norte

Escai-MG — Escola Superior de Ciências Contábeis e Administrativas de Ituiutaba, Minas Gerais

ESCSCM-ES — Escola Superior de Ciências da Santa Casa de Misericórdia, Espírito Santo
 Escola Técnica Federal-RJ — Escola Técnica Federal do Rio de Janeiro
 EsPCEX-SP — Escola Preparatória de Cadetes do Exército, São Paulo
 ESPM-SP — Escola Superior de Propaganda e Marketing, São Paulo
 Estácio-RJ — Universidade Estácio de Sá, Rio de Janeiro
 Faap-SP — Fundação Armando Álvares Penteado, São Paulo
 Fafeod-MG — Faculdade Federal de Odontologia de Diamantina, Minas Gerais
 Fafibh-MG — Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Belo Horizonte, Minas Gerais
 Famih-MG — Faculdades Metodistas Integradas Izabela Hendrix, Minas Gerais
 Fameca-SP — Faculdade de Medicina de Catanduva, São Paulo
 Fasp-SP — Faculdades Associadas de São Paulo
 Fatec-SP — Faculdade de Tecnologia de São Paulo
 Fazu-MG — Faculdades Associadas de Uberaba, Minas Gerais
 FCAP-PA — Faculdade de Ciências Agrárias do Pará
 FCM-MG — Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais
 FCMSC-SP — Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
 FDC-BA — Fundação para o Desenvolvimento das Ciências, Bahia
 Fecolinas-TO — Fundação Municipal de Ensino Superior de Colinas do Tocantins
 Fefisa-SP — Faculdades Integradas de Santo André, São Paulo
 FEI-SP — Faculdade de Engenharia Industrial, São Paulo
 Fepar-PR — Faculdade Evangélica do Paraná
 Fesp-SP — Faculdade de Engenharia de São Paulo
 Fesp-PE — Faculdade Especial de Educação e Cultura, Pernambuco
 F. E. Edson Queiroz-CE — Fundação Educacional Edson Queiroz, Ceará
 FFCL Belo Horizonte-MG — Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Belo Horizonte, Minas Gerais
 FGV-SP — Fundação Getúlio Vargas, São Paulo
 FIB-BA — Faculdade Integrada da Bahia
 FISFS-SP — Faculdades Integradas de Santa Fé do Sul, São Paulo
 F. Luiz Meneghel-PR — Faculdades Luiz Meneghel, Paraná
 F. M. ABC-SP — Faculdade de Medicina do ABC, São Paulo
 F. M. Bragança-SP — Faculdade de Medicina de Bragança, São Paulo
 F. M. Itajubá-MG — Faculdade de Medicina de Itajubá, Minas Gerais
 F. M. Jundiaí-SP — Faculdade de Medicina de Jundiaí, São Paulo
 F. M. Pouso Alegre-MG — Faculdade de Medicina de Pouso Alegre, Minas Gerais
 F. M. Triângulo Mineiro-MG — Faculdade de Medicina do Triângulo Mineiro, Minas Gerais
 FMU/Fiam/Faam-SP — Faculdades Metropolitanas Unidas, Faculdades Integradas Alcântara Machado e Faculdade de Artes Alcântara Machado, São Paulo
 F. M. Vassouras-RJ — Faculdade de Medicina de Vassouras, Rio de Janeiro
 FOC-SP — Faculdades Oswaldo Cruz, São Paulo
 FRB-BA — Faculdade Ruy Barbosa, Bahia

FUA-AM — Fundação Universidade do Amazonas
 FUC-MT — Faculdades Unidas Católicas do Mato Grosso
 Fuern-RN — Fundação Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
 Fund. Carlos Chagas-BA — Fundação Carlos Chagas, Bahia
 Fund. Carlos Chagas-SP — Fundação Carlos Chagas, São Paulo
 Funioeste-PR — Fundação Universidade Estadual do Oeste do Paraná
 Funrei-MG — Fundação de Ensino Superior de São João del Rei, Minas Gerais
 Furg-RS — Fundação Universidade do Rio Grande, Rio Grande do Sul
 FUR-RN — Fundação Universidade Regional do Rio Grande do Norte
 Fuvest-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade de São Paulo, São Paulo
 F. Visconde de Cairú-BA — Faculdade Visconde de Cairú, Bahia
 Gave-Portugal — Gabinete de Avaliação Educacional, Ministério da Educação, Portugal
 IISO — Olimpíada Internacional de Ciências — Júnior
 IFSP-SP — Instituto Federal São Paulo
 IME-RJ — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
 Imes-SP — Centro Universitário Municipal de São Caetano do Sul, São Paulo
 Inatel-MG — Instituto Nacional de Telecomunicações, Minas Gerais
 ITA-SP — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo
 ITE-SP — Instituto Toledo de Ensino, São Paulo
 Mackenzie-SP — Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo
 Marinha do Brasil
 OAF-Argentina — Olimpíada Argentina de Física
 OBF-Brasil — Olimpíada Brasileira de Física
 OCF-Colômbia — Olimpíada Colombiana de Física
 OEF-Espanha — Olimpíada Espanhola de Física
 OIJC-Coreia — Olimpíada Internacional Júnior de Ciências, Coreia
 OIJC-Brasil — Olimpíada Internacional Júnior de Ciências, Brasil
 Omec-SP — Organização Mogiana de Educação e Cultura, São Paulo
 OPF-Portugal — Olimpíada Portuguesa de Física, Portugal
 OPF-SP — Olimpíada Paulista de Física, São Paulo
 Osec-SP — Organização Santamarense de Educação e Cultura, São Paulo
 Pisa — Programa Internacional de Avaliação de Alunos
 PUC-BA — Pontifícia Universidade Católica da Bahia
 Puccamp-SP — Pontifícia Universidade Católica de Campinas, São Paulo
 PUC-MG — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
 PUC-PR — Pontifícia Universidade Católica do Paraná
 PUC-RJ — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
 PUC-RS — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
 PUC-SP — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
 U. C. Brasília-DF — Universidade Católica de Brasília, Distrito Federal

U. Caxias do Sul-RS — Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul
 UCB-DF — Universidade Católica de Brasília, Distrito Federal
 UCDB-MS — Universidade Católica Dom Bosco, Mato Grosso do Sul
 UC-GO — Universidade Católica de Goiás
 UC-MG — Universidade Católica de Minas Gerais
 UCPel-RS — Universidade Católica de Pelotas, Rio Grande do Sul
 UCS-RS — Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul
 Ucsal-BA — Universidade Católica de Salvador, Bahia
 Udesc-SC — Universidade do Estado de Santa Catarina
 UE-CE — Universidade Estadual do Ceará
 U. E. Feira de Santana-BA — Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia
 UE-GO — Universidade Estadual de Goiás
 U. E. Londrina-PR — Universidade Estadual de Londrina, Paraná
 UE-MA — Universidade Estadual do Maranhão
 U. E. Maringá-PR — Universidade Estadual de Maringá, Paraná
 UE-MG — Universidade Estadual de Minas Gerais
 UE-MS — Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
 U. E. Norte Fluminense-RJ — Universidade Estadual do Norte Fluminense, Rio de Janeiro
 UE-PA — Universidade do Estado do Pará
 UE-PB — Universidade Estadual da Paraíba
 UE-PI — Universidade Estadual do Piauí
 U. E. Ponta Grossa-PR — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná
 UE-RJ — Universidade do Estado do Rio de Janeiro
 UE-RS — Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
 U. E. Santa Cruz-BA — Universidade Estadual de Santa Cruz, Bahia
 U. E. Sudoeste Baiano — Universidade Estadual do Sudoeste Baiano, Bahia
 U. F. ABC-SP — Universidade Federal do ABC, São Paulo
 UF-AC — Universidade Federal do Acre
 UF-AL — Universidade Federal de Alagoas
 UF-AM — Universidade Federal do Amazonas
 UF-BA — Universidade Federal da Bahia
 U. F. Campina Grande-PB — Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba
 UF-CE — Universidade Federal do Ceará
 UF-ES — Universidade Federal do Espírito Santo
 UFF-RJ — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro
 UF-GO — Universidade Federal de Goiás
 U. F. Juiz de Fora-MG — Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais
 U. F. Lavras-MG — Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais
 UF-MA — Universidade Federal do Maranhão
 UF-MG — Universidade Federal de Minas Gerais

UF-MS — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
 UF-MT — Universidade Federal do Mato Grosso
 U. F. Ouro Preto-MG — Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais
 UF-PA — Universidade Federal do Pará
 UF-PB — Universidade Federal da Paraíba
 UF-PE — Universidade Federal de Pernambuco
 U. F. Pelotas-RS — Universidade Federal de Pelotas, Rio Grande do Sul
 UF-PI — Universidade Federal do Piauí
 UF-PR — Universidade Federal do Paraná
 UF-RS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 UF-RJ — Universidade Federal do Rio de Janeiro
 UF-RN — Universidade Federal do Rio Grande do Norte
 UF-RR — Universidade Federal de Roraima
 UFR-RJ — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
 UF-RS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 U. F. Rural da Amazônia-PA — Universidade Federal Rural da Amazônia, Pará
 U. F. Santa Maria-RS — Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul
 UF-SC — Universidade Federal de Santa Catarina
 U. F. São Carlos-SP — Universidade Federal de São Carlos, São Paulo
 UF-SE — Universidade Federal de Sergipe
 UF-TO — Universidade Federal de Tocantins
 U. F. Triângulo Mineiro-MG — Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Minas Gerais
 U. F. Uberlândia-MG — Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais
 U. F. Viçosa-MG — Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais
 U. Gama Filho-RJ — Universidade Gama Filho, Rio de Janeiro
 Ulbra-DF — Universidade Luterana do Brasil, Distrito Federal
 Ulbra-RS — Universidade Luterana do Brasil, Rio Grande do Sul
 UMC-SP — Universidade de Mogi das Cruzes, São Paulo
 Umesp-SP — Universidade Metodista de São Paulo
 Unaerp-SP — Universidade de Ribeirão Preto, São Paulo
 Unama-PA — Universidade do Amazonas, Pará
 UnB-DF — Universidade de Brasília, Distrito Federal
 Uneb-BA — Universidade do Estado da Bahia
 U. Negócios e Administração-MG — Universidade de Negócios e Administração, Minas Gerais
 Unemat-MT — Universidade do Estado de Mato Grosso
 Unesp-SP — Universidade Estadual Paulista, São Paulo
 Unespar — Universidade Estadual do Paraná
 UniBH-MG — Centro Universitário de Belo Horizonte, Minas Gerais
 Unic-MT — Universidade de Cuiabá, Mato Grosso
 Unicamp-SP — Universidade Estadual de Campinas, São Paulo

Unicap-PE — Universidade Católica de Pernambuco
Unicenp-PR — Centro Universitário Positivo, Paraná
Unicentro-PR — Fundação Universidade Estadual do Centro-Oeste, Paraná
UniEvangélica-GO — Centro Universitário de Anápolis, Goiás
Unifap-AP — Universidade Federal do Amapá
Unifei-MG — Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais
Unifenas-MG — Universidade de Alfenas, Minas Gerais
Unifesp-SP — Universidade Federal de São Paulo
Unifoa-RJ — Centro Universitário de Volta Redonda, Rio de Janeiro
Unifor-CE — Universidade de Fortaleza, Ceará
Unijuí-RS — Universidade de Ijuí, Rio Grande do Sul
Unimep-SP — Universidade Metodista de Piracicaba, São Paulo
Unimes-SP — Universidade Metropolitana de Santos, São Paulo
Unimontes-MG — Universidade Estadual de Montes Claros, Minas Gerais
Unip-SP — Universidade Paulista Objetivo, São Paulo
Unir-RO — Fundação Universidade Federal de Rondônia
Unirio-RJ — Universidade do Rio de Janeiro
Unirp-SP — Centro Universitário de Rio Preto, São Paulo
Unisa-SP — Universidade de Santo Amaro, São Paulo
Unisantos-SP — Universidade Católica de Santos, São Paulo
Unisinos-RS — Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Rio Grande do Sul
Unit-SE — Universidade Tiradentes, Sergipe
Unitau-SP — Universidade de Taubaté, São Paulo
Unitins-TO — Universidade do Tocantins, Tocantins
Uniube-MG — Universidade de Uberaba, Minas Gerais
Univale-MG — Universidade do Vale do Rio Doce, Minas Gerais
Univali-SC — Universidade do Vale do Itajaí, Santa Catarina
Unopar-PR — Universidade do Norte do Paraná, Paraná
U. Passo Fundo-RS — Universidade de Passo Fundo, Rio Grande do Sul
UPE-PE — Universidade do Estado de Pernambuco, Pernambuco
Urca-CE — Universidade Regional do Cariri, Ceará
USF-SP — Universidade São Francisco, São Paulo
USJT-SP — Universidade São Judas Tadeu, São Paulo
UTF-PR — Universidade Teológica Federal do Paraná
UVA-CE — Universidade Estadual Vale do Acaraú, Ceará
Vunesp-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista, São Paulo

Índice remissivo

A

abscissa, 42
na trajetória, 63
variação de, 63

aceleração, 88
angular – CD Cap. 11; p. 1, 2 e 3
centrífuga, 326
centrípeta, 167 – CD Cap. 9; p. 1
da gravidade, 111 e 478
escalar
instantânea, 89
média, 88
normal, 167
tangencial, 167
vetorial
instantânea, 167
média, 165

acelerômetro, 249

afélio, 467

air bag, 348

alavanca, 454

alcance de um projétil, 260, 264, 272 e 273
máximo, 272 e 276

algarismos significativos, 32

análise dimensional, 35

angström, 23

ângulo de atrito, 293

ano-luz, 23 e 53

are, 25

área
unidades de, 24

Aristóteles, 203, 204 e 465

Arquimedes, 517

associação de molas – CD Cap. 16; p. 1 e 2

Astrofísica, 14

atmosfera (atm), 511

B

balança
de braços iguais, 28
de molas, 217

bar, 511

barômetro, 510

binário, 455

Bernouilli, Daniel, 536

Brahe, Tycho, 466

C

Cálculo Diferencial e Integral – CD Cap. 5; p. 1

campo gravitacional, 478

cavalo-vapor (cv), 388

Cavendish, Henty, 472 e 473

Cavendish, experimento de – CD Cap. 24; p. 2

centro de empuxo, 527

centro de gravidade, 365 e 451 – CD p. 23

centro de massa, 365, 440, 442, 444, 446 e 447

centro de pressão, 499

cicloide, 195

Cinemática, 40
angular, 182
escalar, 46

vetorial, 46

circunferência osculadora, 168

coeficiente

- angular, 128
- de atrito
 - cinético, 289
 - dinâmico, 289
 - estático, 292
- de restituição, 428
- linear, 128

colisão, 423

- central direta, 426
- elástica, 426 e 435
- frontal, 426
- inelástica, 426
- oblíqua, 426 e 435
- parcialmente elástica, 426
- superelástica, 427
- unidimensional, 426 e 428

componentes de um vetor, 157 e 158

composição de movimentos, 172

comprimento, 22

- unidades de, 22 e 23

conferência geral de pesos e medidas, 16

constante

- de Euler, 513
- de gravitação, 472 e 473
- elástica de uma mola, 304

Copérnico, Nicolau, 204 e 466

corpo extenso, 44

Cosmologia, 14

cosseno, 128

D

decomposição

- de forças, 245
- de vetores, 156

deformação de uma mola, 304

- elástica, 305

densidade, 30

- relativa, 31

derivada, 67 – CD Cap. 5; p. 2, 3 e 4

deslocamento

- angular, 183
- escalar, 63
- vetorial, 161

dia, 20

- sideral, 21 e 202
- solar, 21 e 202

diagramas horários,

- da aceleração no MUV, 93
- da posição no MU, 74
- da posição no MUV, 94
- da velocidade no MU, 74
- da velocidade no MUV, 93

dimensão de uma grandeza, 35

dina, 215

Dinâmica, 40 e 203

dinamômetro, 209, 217 e 222

direção, 45 e 142

E

ecliptica, 467

eco, 59

efeito

- estilingue, 485 – CD Cap. 24; p. 4 e 5
- estroboscópico, 198
- Magnus, 536

eletromagnetismo, 13

elipse, 467 – CD Cap. 24; p. 1 e 2

- excentricidade da, 467

Einstein, Albert, 232 e 517

empuxo, 517

energia
 cinética, 332
 de rotação – CD Cap. 23; p. 5, 6 e 12
 elétrica, 332
 mecânica, 332 e 369
 potencial, 362
 elástica,, 367
 gravitacional, 364 e 483

térmica, 332, 362, 376 e 397

epicentro, 466

epiciclo, 466

equação
 dimensional, 36
 de Bernouilli, 536 e 543
 de continuidade, 61
 de Torricelli, 100 e 537
 horária, 66
 da posição no MU, 73
 da posição no MUV, 94 e 103
 da posição angular no MCU, 186
 da posição angular no MCUV – CD Cap. 11; p. 1
 da velocidade escalar no MUV, 93

equilíbrio, 229
 de rotação, 456
 dinâmico, 229
 estático, 229
 estável, 229 e 461
 indiferente, 229
 instável, 229

escoamento
 estacionário, 534
 turbulento, 534

éter, 204

Euler, Leonhard, 420

F

fenômeno
 físico, 13

periódico, 191
químico, 13

Feynman, R. P., 333

filosofia, 203

fio ideal, 226

Física, 12
 clássica, 13
 moderna, 13
 partes da, 12

fluido ideal, 533

força
 centrífuga, 326
 centrípeta, 311
 conservativa, 361
 de ação à distância, 205
 de adesão, 285
 de atrito, 283
 cinético, 289
 de rolamento, 286
 dinâmico, 285 e 289
 estático, 285 e 291
 de campo, 205
 de coesão, 285
 de contato, 205
 de Coriolis, 328 – CD Cap. 17; p. 1 e 2
 de inércia, 231
 de resistência dos fluidos, 297
 de tração, 226
 dissipativa, 362
 elástica, 304 e 305
 externa, 410
 fictícia, 231
 gravitacional, 472
 interna, 410
 média, 233 e 405
 normal, 221
 tangencial, 311
 unidades de, 210

frequência, 190
unidades de, 210, 215 e 217

G

Galilei, Galileu, 40, 111, 116, 204, 261, 277 e 466

grama, 15

grandezas

adimensionais, 36

escalares, 44

vetoriais, 45

H

hectare (ha), 25

hertz (Hz), 210

hodógrafo, 260

homogeneidade dimensional, 36

Hooke, 304

horsepower (HP), 388

I

imponderabilidade, 236, 267 e 476

impulso de uma força, 401 e 404

inércia, 207

de rotação – CD Cap. 23; p. 5, 6 e 12

intervalo de tempo, 21

J

jarda (yd), 24

Joule, James Prescott, 332

joule (J), 332

K

Kepler, Johannes, 40 e 467

L

lâmpada estroboscópica, 198

lançamento

horizontal, 260

oblíquo, 259 e 264

vertical, 118

Lavoisier, Antoine Laurent de, 14

Lei

da Ação e Reação, 219

da Gravitação Universal, 472

da Inércia, 207 e 277

de Hooke, 304

de Stevin, 497, 498 e 499

dos Cossenos, 146

dos Senos, 146

leis

de Kepler, 467, 468 e 469

do atrito

cinético, 289

estático, 292

libra (lb), 215

linhas de corrente, 534

litro (ℓ), 15 e 24

looping, 318

M

mamômetro, 504

marés, 487 – CD Cap. 24; p. 5 e 6

massa, 28

específica, 30

gravitacional, 231

inercial, 231

unidades de, 28

Mecânica, 12

Quântica, 13

mecanismos hidráulicos, 508

mês

sideral, 202

sinódico, 202

metro, 15 e 23

milha

marítima, 23

terrestre, 23 e 24

mito, 203

momento

angular – CD Cap. 23; p. 2, 11, 12 e 13

de inércia – CD Cap. 23; p. 2, 3, 4 e 5

de um binário, 455

de uma força, 451 e 455

linear, 399

momentum, 399

movimento, 41

acelerado, 91

circular uniforme, 186

circular uniformemente variado – CD Cap. 11;
p. 1

de projéteis, 259

de rotação, 43

de translação, 43

progressivo, 69

retardado, 91

retrógrado, 69

uniforme, 5 e 73

uniformemente variado, 93

multiplicação de um vetor por um número, 155

N

Newton, Isaac, 40, 204, 205, 206 e 277

newton (N), 210

notação científica, 17

O

Ondulatória, 12

onda, 12

Óptica, 12

ordem de grandeza, 19

ordenada, 42

P

parábola, 43 e 94

paradoxo hidrostático, 498

parsec, 23, 37 e 38

partícula, 44

Pascal, Blaise, 490

pascal (Pa), 490

pé (ft), 24

pêndulo

balístico, 424

cônico, 324

simples, 248 e 324

periélio, 467

período, 190

persistência reteniana, 198

peso, 215

aparente, 235

physis, 12

plano inclinado, 251

polegada (in), 24

polia

fixa, 240

móvel, 242 – CD Cap. 13, p. 1

ponto material, 44

potência, 386

de uma força, 387

instantânea, 387

unidades de, 387

prefixos do SI, 17

pressão, 489
 atmosférica, 510
primeira Lei de Newton, 207
princípio
 da conservação
 da energia, 393
 da energia mecânica, 370
 da quantidade de movimento, 411
 do momento angular – CD Cap. 23; p. 11, 12 e 13
 de Arquimedes, 518
 de Pascal, 508
 de relatividade, 261 e 267
psi, 491
Ptolomeu, Cláudio, 466

Q

quantidade de movimento
 de um sistema, 409
 de uma partícula, 399
queda livre, 111
quilograma (kg), 15
quilograma-força (kgf), 217
quilowatt-hora (kWh), 390
Química, 13

R

radiano, 182 e 183
referenciais, 41
 inerciais, 209 e 230
 não inerciais, 231
regra do paralelogramo, 146
regra do polígono, 146
rendimento, 394
repouso, 41

Revolução Científica, 278
revolução por minuto (rpm), 184
revoluções por segundo (rps), 184
rolamento, 195 – CD Cap. 23; p. 8

S

satélite geoestacionário, 191
segmento orientado, 142
segunda Lei de Newton, 210 e 420
segundo (s), 20 e 21
seno, 128
sentido, 45 e 143
sifão – CD Cap. 25; p. 3
sistema
 britânico de unidades, 24
 CGS, 215
 de referência, 42
 geocêntrico, 465
 heliocêntrico, 465
 indeterminado, 461
 internacional de unidades, 16 – CD Cap.1; p. 1
 isolado, 410
 métrico decimal, 14
 solar, 467 e 468
sobrepessão, 505
Stevin, Simon, 497

T

Tales de Mileto, 203
tangente, 128
tempo, 20
 unidades de, 20
tensão superficial, 493 e 495
teorema
 da energia cinética, 347

das três forças, 456 – CD Cap. 23; p. 1
do impulso, 402 e 405

teoria da Relatividade, 13

terceira Lei de Newton, 219 e 222

Termologia, 12

tonelada (t), 29

torque, 451 e 455

torr, 512

Torricelli, Evangelista, 510

trabalho

da força elástica, 353

da força normal, 356

de uma força centrípeta, 356

de uma força constante, 334, 335 e 340

de uma força variável, 334 e 355

do peso, 339 e 341

tração, 226

trajetória, 42

transmissão de movimento circular, 194

tubo

de escoamento, 535

de Pitot, 543

de Venturi, 541

U

unidade astronômica (UA), 23

unidade de massa atômica (u), 29

unidades do SI, 16

de base, 16

derivadas, 16

suplementares, 16

V

vasos comunicantes, 504

vazão, 27 e 61

velocidade

angular

instantânea, 184

média, 184

de escape, 484

escalar

instantânea, 50 e 67

média, 49 e 64

linear, 185

relativa, 79, 172, 173, 176 e 178

tangencial, 185

vetorial

instantânea, 163 e 164

média, 162

versos, 144

vetor, 143

deslocamento, 151

módulo de um, 143

nulo, 144

oposto, 152

posição, 161

unitário, 144

vetores

adição de, 145

subtração de, 152 e 153

volume, 24

unidades de, 24

W

Watt, James, 387

watt (W), 387

FÍSICA

CLÁSSICA



Caio Sérgio Calçada

Bacharel em Matemática e engenheiro eletricitista pela
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Professor de Física na rede particular de ensino desde 1968.

José Luiz Sampaio

Bacharel em Física pelo Instituto de Física da Universidade
de São Paulo. Professor de Física na rede particular
de ensino desde 1968.

