

MATEMÁTICAS



THOMSON

8^a edición

TRIGONOMETRÍA

Swokowski

Cole

..... Trigonometría

Earl W. Swokowski

Jeffery A. Cole

Anoka-Ramsey Community College



**ESCUELA POLITECNICA
DEL EJERCITO
BIBLIOTECA ESPE-L
LATACUNGA**

No. 0106 Fecha: 2001

Precio: Donación:

International Thomson Editores, S. A. de C. V.
An International Thomson Publishing Company I T P

México • Bonn • Boston • Johannesburg • London • Madrid • Melbourne • New York • Singapore
Tokyo • Toronto • Albany, NY • Belmont, CA • Cincinnati, OH • San Juan, PR • Santiago • São Paulo

Traducción de la obra en inglés titulada: *Fundamentals of Trigonometry, 8th ed.*, ISBN 0-534-93211-8
Copyright © MCMXCIII by PWS Publishing Co. A Division of International Thomson Publishing, Inc.

Trigonometría

ISBN 968-7529-08-3

Derechos reservados © 1997 por International Thomson Editores, S. A. de C. V.

ITP International Thomson Editores, S. A. de C. V. es una empresa de International Thomson Publishing. La marca registrada ITP se usa bajo licencia.

MÉXICO

Séneca 53, Colonia Polanco

México, D. F.

C. P. 11560,

Tel. (525) 281-2906

Fax (525) 281-2656

e-mail:

clientes@mail.internet.com.mx

PUERTO RICO

Tel. (787) 759-2746

Fax (787) 756-8295

e-mail:

102154.1127@compuserve.com

CHILE

Tel./fax (562) 555-9751

e-mail: ldevore@ibm.net

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, registro número 2720

Presidente: José Wehnes Quintanilla

Director editorial: Miguel Ángel Toledo Castellanos

VP de ventas y mercadotecnia: Andrés Rodríguez

Gerente de mercadotecnia: Enrique Wintergerst

Equipo de edición y producción:

Traducción: Ing. Jorge Humberto Romo Muñoz, UNAM

Revisión técnica: Ing. Víctor Garza Joa, ITESM Estado de México

Ing. Adolfo Garza Rubalcava, ITESM Garza Lagüera

Editor Freelance: Claudio Castro Campillo

Tipografía: Ricardo Viesca Muriel

Lecturas: Isabel Morales de la Rosa

Diseño de portada: Maré Concepto Gráfico

9875432106

35421M

9RV6

Times 10/12

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del texto de la presente obra bajo cualesquiera formas, electrónica o mecánica, incluyendo el fotocopiado, el almacenamiento en algún sistema de recuperación de información, o el grabado, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

All rights reserved. No part of this work covered by the copyright hereon may be reproduced or used in any form or by any means —graphic, electronic, or mechanical, including photocopying, recording, taping or information storage and retrieval systems— without the written permission of the publisher.

Impreso en México

Printed in Mexico

Una de las metas principales que teníamos al preparar la octava edición de *Fundamentos de Trigonometría* era aumentar la claridad de los análisis. Deseábamos capacitar al estudiante para que comprendiera con más facilidad los conceptos presentados, pero no queríamos sacrificar la corrección matemática que ha sido de capital importancia para el buen logro de este texto. Al mejorar las explicaciones de los conceptos más difíciles e incluir comentarios paso a paso de las soluciones de los ejemplos, hemos avanzado en nuestra meta de ayudar al estudiante y, además, hemos conservado el rigor matemático.

Se ha actualizado el análisis de varios temas para incluir el uso de una calculadora graficadora. En todo el texto se encuentran ejercicios para este tipo de dispositivos, siempre que sean adecuados para el material que se presenta.

Las sugerencias de revisores e instructores para mejorar la disposición de temas y escritura, han dado como resultado una buena reorganización de esta edición. Los principales cambios hechos a cada capítulo se describen a continuación.

CAMBIOS PARA LA OCTAVA EDICIÓN

Capítulo 1 Los ejemplos y ejercicios para calculadora graficadora aparecen por primera vez en la sección 1.2. El tema de alargar o comprimir gráficas horizontalmente se ha agregado en la sección 1.4, con lo cual se tiene una sólida base para el estudio de periodos de funciones trigonométricas. Se ha intercalado un breve estudio de funciones exponenciales y logarítmicas como sección 1.5, para poner al corriente al estudiante de estas funciones, mismas que se usan en algunos de los nuevos ejercicios para calculadora de los capítulos 2, 3 y 4; en el capítulo 5 aparece un estudio completo de estas funciones.

Capítulo 2 En la sección 2.1 se ha añadido la fórmula para encontrar el área de un sector circular y en la sección 2.2 se ha profundizado el estudio de soluciones con calculadora para ecuaciones que requieran funciones trigonométricas inversas. La verificación de identidades trigonométricas simples se ha agregado a las secciones 2.2 y 2.3.

Capítulos 3 y 4 La inclusión del uso de calculadora y ejercicios ha reforzado estos capítulos, y el reacomodo general de los párrafos ha hecho que todas las secciones sean más fáciles de entender. En el capítulo 4 figuran los temas que se refieren a números complejos.

Capítulo 5 Dos nuevos teoremas destacan el hecho de que las funciones exponenciales y logarítmicas son biunívocas. Se ha dado importancia al cambio de formas exponenciales en formas logarítmicas equivalentes (y viceversa) en la solución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

CARACTERÍSTICAS

Ilustraciones Presentan breves demostraciones del uso de definiciones, leyes y teoremas.

Ejemplos Todos los ejemplos, bien estructurados y dispuestos según su grado de dificultad, tienen un título en esta edición. Muchos contienen gráficas o tablas para ayudar al estudiante a comprender procedimientos y soluciones.

Explicaciones paso a paso Con objeto de que el lector pueda seguir las con más facilidad, se añadieron explicaciones paso a paso a las soluciones de ejemplos.

Comprobaciones Se verificaron explícitamente las soluciones de algunos ejemplos para recordar a los alumnos que deben asegurarse de que sus soluciones satisfagan las condiciones de los problemas.



Ejemplos para calculadora En donde fue pertinente, se agregaron ejemplos que requieren el uso de una calculadora graficadora; estos ejemplos se distinguen por la figura de la izquierda y se ilustran con una gráfica tomada de la pantalla de dicho dispositivo.



Ejercicios con calculadora En las secciones adecuadas se incluyeron ejercicios especialmente estructurados para ser resueltos mediante una calculadora graficadora o software. En esta edición se añadieron más de 100 de estos ejercicios y se reconocen mediante la figura de la izquierda.

Aplicaciones de ejercicios Las aplicaciones de los conjuntos de ejercicios se identifican con títulos que muestran al estudiante la forma en que los problemas se relacionan con situaciones prácticas.

Conjuntos de ejercicios Después de comenzar con ejercicios de práctica, los problemas se van complicando. Se han agregado muchos ejercicios que contienen gráficas.



Precaución En todo el texto se encuentran advertencias intercaladas para alertar a los estudiantes respecto de errores comunes. Estas indicaciones precautorias están precedidas por la figura de la izquierda.

Dibujos en el texto Cada figura ha sido redibujada y se le han puesto nuevas leyendas; para mayor precisión, aparecen gráficas generadas por computadora y con la tecnología más avanzada. Se usan dos colores para distinguir entre diferentes partes de figuras. Por ejemplo, la gráfica de una función puede mostrarse en azul y la de una segunda función en gris. Las leyendas son del mismo color que las partes de la figura que identifican.

Diseño del texto El texto se ha diseñado de nuevo por completo, y se destacan los conceptos importantes para asegurarse de que los análisis sean fáciles de seguir. El color se utiliza pedagógicamente para hacer claras las gráficas complejas y ayudar al estudiante a visualizar los problemas aplicados.

3.1 Verificación de identidades trigonométricas

Una expresión trigonométrica contiene símbolos con funciones trigonométricas

ILUSTRACIÓN

Expresiones trigonométricas

$$\theta \neq x + \sin x \quad \square \frac{\sqrt{2} + 2^{\cos \theta}}{\cot \theta} \quad \blacksquare \frac{\csc \theta (2x + 1)}{t^2 + \tan^2 (2 - t^2)}$$

Suponemos que el dominio de cada variable de una expresión trigonométrica es el conjunto de números reales o ángulos para los que la expresión tiene sentido. Al fin de que te ejercites en la simplificación de expresiones trigonométricas complicadas, usaremos las identidades fundamentales (pág. 75) y procedimientos algebraicos como en los ejemplos 8 y 9 de la sección 2.2. En los primeros tres, nuestro método consiste en transformar el lado izquierdo de una identidad dada en el derecho o viceversa. Repetimos un aviso precautorio que dimos en la sección 2.2

Precaución



Si una identidad (supuesta) contiene fracciones, no multipliques ambos lados de la misma por el mínimo común denominador.

EJEMPLO 1

Verificar una identidad

Verifica la identidad $\sec \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha \tan \alpha$

Solución El lado izquierdo se transforma en el derecho:

$$\begin{aligned} \sec \alpha - \cos \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha && \text{identidad recíproca} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} && \text{combinar expresiones} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} && \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ &= \sin \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) && \text{expresión equivalente} \\ &= \sin \alpha \tan \alpha && \text{identidad tangente} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Verificar una identidad

Comprueba la identidad $\sec \theta = \sin \theta (\tan \theta + \cot \theta)$.

La parte de ilustraciones proporciona una breve demostración del uso de teoremas, definiciones y leyes.

Los avisos de precaución (dispuestos a lo largo del texto) advierten al lector respecto de errores habituales.

Se añadieron explicaciones paso por paso a fin de ayudar al alumno a seguir las respuestas con más facilidad.

Terminología	Definición	Demostración
Solución de una ecuación en x y y	Un par ordenado (a, b) que lleva a una expresión verdadera si $x = a$ y $y = b$	$(2, 3)$ es una solución de $y^2 = 3x - 1$, ya que al sustituir $x = 2$ y $y = 3$ se obtiene: Lado izquierdo: $3^2 = 9$ Lado derecho: $5(2) - 1 = 10 - 1 = 9$

Para cada solución (a, b) de una ecuación en x y y hay un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos esos puntos se llama **gráfica** de la ecuación. Para trazar la gráfica de una ecuación, se ilustran las características significativas de la gráfica en un plano coordenado. En casos simples se puede dibujar una gráfica con unos cuantos puntos, si los hay; para una ecuación complicada, trazar puntos puede dar muy poca información sobre la gráfica. En dichas situaciones, con frecuencia se utilizan métodos de cálculo o de graficación por computadora. Empecemos con un caso sencillo.

EJEMPLO 3

Trazar una gráfica sencilla por trazado de puntos

Traza la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$

Solución Deseamos encontrar los puntos (x, y) en un plano coordenado que correspondan a las soluciones de la ecuación. Es conveniente enumerar coordenadas de varios de dichos puntos en una tabla, en donde para cada x se obtiene el valor de y a partir de $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Está claro que los puntos con estas coordenadas se encuentran en una línea, y se puede trazar la gráfica de la figura 13. Por lo común, los pocos puntos trazados no bastarían para ilustrar la gráfica de una ecuación; sin embargo, en este caso elemental podemos estar razonablemente seguros de que la gráfica es una recta.

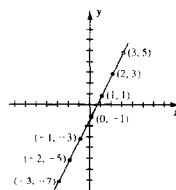


FIGURA 13

Los ejemplos, bien estructurados y planteados según su grado de dificultad, tienen títulos en esta edición.

Una buena cantidad de ejemplos contiene gráficas, cuadros o tablas que ayudan al estudiante a entender procedimientos y soluciones.

EJEMPLO 10 Calcular puntos de intersección de gráficas

Usa un equipo graficador para calcular los puntos de intersección de las gráficas de $y = 2x - 1$ y $y = x^2 - 3$.

Solución Primero se hacen las asignaciones.

$$Y_1 = 2x - 1 \quad y \quad Y_2 = x^2 - 3.$$

Con la pantalla estándar, $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$, vemos en las gráficas de Y_1 y Y_2 de la figura 21 que hay dos puntos de intersección: P_1 en el cuadrante I y P_2 en el cuadrante III.

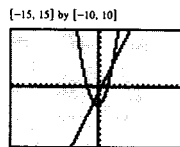


FIGURA 21

A continuación mueve el cursor ya sea en forma manual o con la función de *trace* (consulta las instrucciones específicas en el manual del usuario), para acercarte a P_1 . Con la función de *zoom* calcula las coordenadas de P_1 como $(2.7, 4.5)$.

Ahora puedes volver a dibujar las gráficas originales para ver P_2 . Con las funciones de *zoom* y *trace* obtienes $(-0.7, -2.5)$ como coordenadas aproximadas de P_2 .

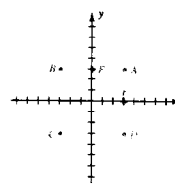
Siempre que fue adecuado, se agregaron ejercicios que precisan una calculadora graficadora. Cuentan con la reproducción de la pantalla de dicho dispositivo y se identifican mediante un icono.

Los apartados de ejercicios comienzan con problemas sencillos que derivan en otros más interesantes.

1.2 EJERCICIOS

1. Traza los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$, en un plano coordenado.
2. Traza los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$, y $E(2, -3)$ en un plano coordenado. Dibuja los segmentos AB , BC , CD , DE y EA .
3. Traza los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$, y $E(-2, -2)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a) en donde a es un número real.
4. Traza los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$, y $E(-3, 3)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$, en donde a es un número real.

Ejercicios 5 y 6: halla las coordenadas de los puntos A al F .



2.7 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 52: halla el periodo y traza la gráfica de la ecuación. Muestra las asíntotas.

1. $y = 4 \tan x$
2. $y = \frac{1}{2} \tan x$
3. $y = 3 \cot x$
4. $y = \frac{1}{2} \cot x$
5. $y = 2 \csc x$
6. $y = \frac{1}{2} \csc x$
7. $y = 3 \sec x$
8. $y = \frac{1}{2} \sec x$
9. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
10. $y = \tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
11. $y = \tan 2x$
12. $y = \tan \frac{1}{2}x$
13. $y = \tan \frac{1}{3}x$
14. $y = \tan 4x$
15. $y = 2 \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
16. $y = \frac{1}{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
17. $y = -\frac{1}{2} \tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$
18. $y = -3 \tan\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$
19. $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
20. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
21. $y = \cot 2x$
22. $y = \cot \frac{1}{2}x$
23. $y = \cot \frac{1}{3}x$
24. $y = \cot 3x$
25. $y = 2 \cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
26. $y = -\frac{1}{2} \cot(3x - \pi)$
27. $y = -\frac{1}{2} \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$
28. $y = 4 \cot\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$
29. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
30. $y = \sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
31. $y = \sec 2x$
32. $y = \sec \frac{1}{2}x$
33. $y = \sec \frac{1}{3}x$
34. $y = \sec 3x$
35. $y = 2 \sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
36. $y = \frac{1}{2} \sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
37. $y = -\frac{1}{3} \sec\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$
38. $y = -3 \sec\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$
39. $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
40. $y = \csc\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
41. $y = \csc 2x$
42. $y = \csc \frac{1}{2}x$
43. $y = \csc \frac{1}{3}x$
44. $y = \csc 3x$
45. $y = 2 \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
46. $y = -\frac{1}{2} \csc(2x - \pi)$
47. $y = -\frac{1}{4} \csc\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$
48. $y = 4 \csc\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$
49. $y = \tan \frac{\pi}{2}x$
50. $y = \cot \pi x$
51. $y = \csc 2\pi x$
52. $y = \sec \frac{\pi}{8}x$

53. Encuentra una ecuación usando la función cotangente que tenga la misma gráfica que $y = \tan x$.

54. Halla una ecuación empleando la función cosecante que tenga la misma gráfica que $y = \sec x$.

Ejercicios 55 al 60: usa la gráfica de una función trigonométrica para ayudar en el trazo de la gráfica de la ecuación sin trazar puntos.

55. $y = |\sin x|$
56. $y = |\cos x|$
57. $y = |\sin x| + 2$
58. $y = |\cos x| - 3$
59. $y = -|\cos x| + 1$
60. $y = -|\sin x| - 2$
61. $y = x + \cos x$
62. $y = x - \sin x$
63. $y = 2^{-x} \cos x$
64. $y = e^x \sin x$
65. $y = |x| \sin x$
66. $y = |x| \cos x$

C Ejercicios 67 y 68: identifica el factor de amortiguamiento $f(t)$ para la onda amortiguada. Trazo gráficas de la ecuación $y = \pm f(t)$ en el mismo plano coordenado para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

67. $y = e^{-0.1t} \sin 4x$
68. $y = 3^{-0.5t} \cos 2x$

C Ejercicios 69 y 70: grafica la función f en $[-\pi, \pi]$ y calcula los puntos alto y bajo.

69. $f(x) = \cos 2x + 2 \sin 4x - \sin x$
70. $f(x) = \tan \frac{1}{2}x - 2 \sin 2x$

C Ejercicios 71 y 72: usa una gráfica para calcular el máximo intervalo $[a, b]$ con $a < 0$ y $b > 0$, en que f es biunívoca.

71. $f(x) = \sin(2x + 2) \cos(1.5x - 1)$
72. $f(x) = 1.5 \cos\left(\frac{1}{2}x - 0.3\right) + \sin(1.5x + 0.5)$

C Ejercicios 73 y 74: resuelve la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con una gráfica.

73. $\cos(2x - 1) + \sin 3x \geq \sin \frac{1}{2}x + \cos x$
74. $\frac{1}{2} \cos 2x + 2 \cos(x - 2) < 2 \cos(1.5x + 1) + \sin(x - 1)$

75. **Campo magnético de la Tierra** La intensidad del campo magnético terrestre varía con la profundidad bajo la superficie. A la profundidad y y en el tiempo t , la intensidad se puede calcular a veces con la onda senooidal amortiguada $S = A_0 e^{-\alpha y} \sin(kt - \alpha z)$, donde A_0 , α , y k son constantes.

- a) ¿Cuál es el factor de amortiguamiento?
- b) Halla el desplazamiento de fase a la profundidad z .
- c) ¿A qué profundidad la amplitud de la onda es la mitad de la amplitud de la intensidad en la superficie?

Diversas secciones tienen ejercicios para calculadora graficadora (identificables por el icono respectivo). En esta edición se agregó casi un centenar de este tipo de problemas.

Los ejercicios de aplicación muestran a los estudiantes la relación del caso con la vida real.

Sección de respuestas Se encuentra al final del texto. Contiene las respuestas de la mayor parte de los ejercicios con número non y de los ejercicios de repaso de todos los capítulos. Se ha dedicado mucho esfuerzo para que esta sección sea una ayuda de aprendizaje; por ejemplo, se dan comprobaciones de identidades trigonométricas y se indican respuestas numéricas para muchos ejercicios, tanto en forma exacta como aproximada. En donde se consideró apropiado, se incluyeron gráficas, pruebas y sugerencias.

Flexibilidad Los comentarios que hemos recibido, provenientes de escuelas que han utilizado ediciones anteriores de este texto, son prueba de la flexibilidad del mismo. Las secciones y los capítulos se pueden reacomodar en muchas formas, dependiendo de los objetivos y de la duración del curso.

HERRAMIENTAS DE ENSEÑANZA PARA EL INSTRUCTOR

Manual de Soluciones del Instructor (*Instructor's Solutions Manual*) En el *Manual de Soluciones del Instructor* están las respuestas a todos los ejercicios, así como soluciones razonablemente detalladas de la mayor parte de los mismos. Para mayor precisión, el manual ha sido revisado por completo.

EXPTest El banco de pruebas computarizado para IBM y compatibles contiene más de 700 problemas, muchos de ellos nuevos en esta edición. Las preguntas son de opción múltiple, verdadero o falso y abiertas. Los instructores pueden interactuar con el programa, agregar preguntas y efectuar pruebas individuales.

ExamBuilder Este banco de pruebas computarizado para Macintosh tiene funciones y preguntas semejantes a las de EXPTest. Hay un disquete de demostración.

Banco de Pruebas con Pruebas de Capítulo Tanto las preguntas del EXPTest (y ExamBuilder) como sus respuestas aparecen impresas en el *Banco de Pruebas*. Se incluyen dos pruebas de muestra para cada capítulo.

Acetatos Acetatos a todo color con versiones amplificadas de ilustraciones del texto. Estas herramientas de enseñanza están disponibles sólo para los profesores que adopten este libro como texto.

HERRAMIENTAS DE APRENDIZAJE PARA EL ESTUDIANTE

Tarjeta de referencia rápida Con esta edición se cuenta con una nueva herramienta para resolver problemas: una tarjeta de fórmulas. Se encuentra en el apéndice III y ayudará a los estudiantes a dominar las fórmulas, ecuaciones y gráficas importantes. Al usarse como referencia rápida y reducir al mínimo la necesidad de buscar en el libro, disminuirá el tiempo que se utilice en tareas tediosas y permitirá que el alumno se concentre en los conceptos y principios importantes del curso.

RECONOCIMIENTOS

Agradecemos a Gary Rockswold, de la Mankato State University, por habernos proporcionado la mayor parte de los excelentes y variados problemas aplicados y los ejercicios para calculadora. También damos las gracias a Thomas Vanden Eynden, del Thomas More College, por su comprobación precisa de los ejercicios; a Joan Cole por su lectura de las pruebas, y a George

Morris, de Scientific Illustrators, por haber creado el paquete de dibujos de precisión matemática. Buena parte de las modificaciones a esta edición se deben a las siguientes personas, las cuales revisaron el manuscrito. Sus comentarios pedagógicos y sus recomendaciones acerca del contenido de los cursos de precálculo nos ayudaron a mejorar la obra:

Norma M. Agras
Miami-Dade Community College, South Campus

Daniel D. Anderson
University of Iowa

Duane E. Deal
Ball State University

Marcy Diles
University of Arkansas at Little Rock

David E. Dobbs
University of Tennessee

John P. Edwards, Jr.
Anne Arundel Community College

Norman Eric Ellis
Essex Community College

Lucinda Gallagher
Florida State University

Albert A. Grasser
Oakland Community College

Sarita Gupta
Northern Illinois University

Keith Kuchar
Northern Illinois University

Nancy Long
Trinity Valley Community College

Carl C. Maneri
Wright State University

Eldon L. Miller
University of Mississippi

Roger B. Nelsen
Lewis and Clark College

Bonny J. Peters
St. Petersburg Junior College

John M. Plachy
Metropolitan State College

Richard Quint
Ventura College

Gerald E. Rubin
Marshall University

Jean E. Rubin
Purdue University

Fred Safier
City College of San Francisco

David Fred Snyder
Southwest Texas State University

Shirley C. Sorenson
University of Maryland, College Park

Marvel D. Townsend
University of Florida

Jan Vandever
South Dakota State University

Arnold L. Villone
San Diego State University

Bruce Williamson
University of Wisconsin-River Falls

Mary Woods
University of Louisville

Estamos en deuda por la excelente cooperación del equipo de PWS-KENT y algunos miembros merecen especial mención. Los editores David Geggis y Tim Anderson supervisaron el proyecto y fueron constante fuente de información y recomendaciones. Elise Kaiser coordinó la producción del texto y fue responsable de su exquisito diseño. Sally Lifland, Denise Throckmorton y Gladys Moore, de Lifland et al., Bookmakers, tuvieron excepcional cuidado en evitar la presencia de toda inconsistencia y nos proporcionaron muchas útiles sugerencias.

Además de las personas que hemos nombrado, expresamos nuestra sincera gratitud a los alumnos y maestros que nos ayudaron en la definición de la enseñanza de las matemáticas.

Por favor, siéntase en total libertad de escribirnos respecto de cualquier punto de la obra, nosotros valoramos su opinión.

EARL W. SWOKOWSKI
JEFFERY A. COLE

1 Temas de álgebra 1

- 1.1 Números reales 3
- 1.2 Sistemas de coordenadas rectangulares y gráficas 9
- 1.3 Funciones 24
- 1.4 Gráficas de funciones 36
- 1.5 Funciones exponenciales y logarítmicas 47
- Ejercicios de repaso del capítulo 1 56*

2 Funciones trigonométricas 59

- 2.1 Ángulos 61
- 2.2 Funciones trigonométricas 71
- 2.3 Gráficas de las funciones trigonométricas 85
- 2.4 Funciones trigonométricas de ángulos 99
- 2.5 Valores de las funciones trigonométricas 109
- 2.6 Gráficas trigonométricas 116
- 2.7 Otras gráficas trigonométricas 131
- 2.8 Aplicaciones con triángulos rectángulos 141
- 2.9 Movimiento armónico 152
- Ejercicios de repaso del capítulo 2 158*

3 Trigonometría analítica 165

- 3.1 Verificación de identidades trigonométricas 167
- 3.2 Ecuaciones trigonométricas 171
- 3.3 Fórmulas de suma y resta 183
- 3.4 Fórmulas de ángulos múltiples 194
- 3.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto 205
- 3.6 Funciones trigonométricas inversas 210
- Ejercicios de repaso del capítulo 3 227*

4 Aplicaciones de la trigonometría 231

- 4.1 Ley de los senos 233
- 4.2 Ley de los cosenos 245
- 4.3 Números complejos 255
- 4.4 Forma trigonométrica para números complejos 261
- 4.5 Teorema de De Moivre y raíces n -ésimas de números complejos 266
- 4.6 Vectores 272
- 4.7 Producto punto 286

Ejercicios de repaso del capítulo 4 294

5 Funciones exponenciales y logarítmicas 299

- 5.1 Funciones exponenciales 301
- 5.2 Función exponencial natural 314
- 5.3 Funciones logarítmicas 324
- 5.4 Propiedades de los logaritmos 339
- 5.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 346

Ejercicios de repaso del capítulo 5 357

Apéndices

- I Uso de tablas logarítmicas y trigonométricas A2
- II Tablas A13
- III Tarjeta de referencia rápida A21
- IV Fórmulas de álgebra, geometría y trigonometría A21

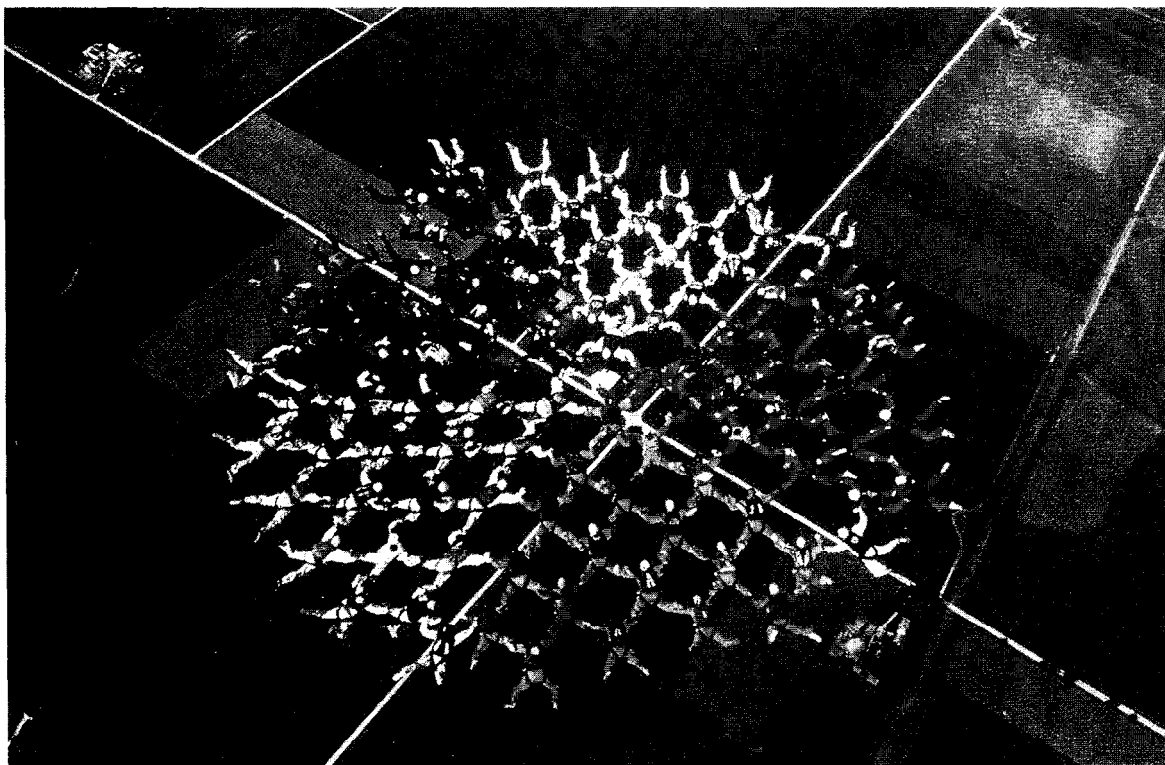
Respuestas a ejercicios seleccionados

Índice

.....*Temas de álgebra*

1

- 1.1 Números reales
- 1.2 Sistemas de coordenadas rectangulares y gráficas
- 1.3 Funciones
- 1.4 Gráficas de funciones
- 1.5 Funciones exponenciales y logarítmicas



Los números reales son esenciales para calcular distancias, velocidades de objetos en movimiento y magnitudes de cantidades físicas.

CONTENIDO

■ Este capítulo contiene temas que son requisito previo para el estudio de la trigonometría. Tras un repaso de los números reales, de los sistemas de coordenadas y de las gráficas de ecuaciones de dos variables, volvemos la atención a uno de los conceptos más importantes en matemáticas: la noción de función. La última sección contiene un breve estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas. ■

1.1 Números reales

Los números reales se usan con frecuencia en matemáticas y debes estar al corriente de los símbolos que los representan, como son:

$$1, \quad 73, \quad -5, \quad \frac{49}{12}, \quad \sqrt{2}, \quad 0, \quad \sqrt[3]{-85}, \quad 0.33333 \dots, \quad 596.25,$$

y así sucesivamente. Supondremos que estás familiarizado con las propiedades fundamentales de la suma, resta, multiplicación, división, exponentes y radicales. Muchas veces usamos letras minúsculas como a, b, c, x, y, \dots para representar números reales arbitrarios.

Los **enteros positivos**, $1, 2, 3, 4, \dots$, resultan de sumar el número real 1 sucesivamente. Los **enteros negativos** son $-1, -2, -3, -4, \dots$. Los **enteros** están formados por los enteros positivos y negativos junto con el número real 0.

Un **número racional** es un número real que se puede expresar en la forma a/b , en donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Los números reales que no son racionales son **números irracionales**. Un número irracional común es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, denotada por π . A veces se utiliza la notación $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π es *aproximadamente igual a* 3.1416. Otro ejemplo de un número irracional es $\sqrt{2}$. Todo número real se puede expresar como decimal. Las representaciones decimales para números racionales son finitas o infinitas y repetitivas, como $\frac{5}{4} = 1.25$ o $\frac{177}{55} = 3.2181818 \dots$, en donde los dígitos 1 y 8 se repiten indefinidamente. Las representaciones decimales para números irracionales son siempre infinitas y no repetitivas.

Hay una **correspondencia biunívoca** entre números reales y puntos en una línea l tal que a cada número real a le corresponde exactamente un punto de l y cada punto P de l le corresponde un número real (Fig. 1).

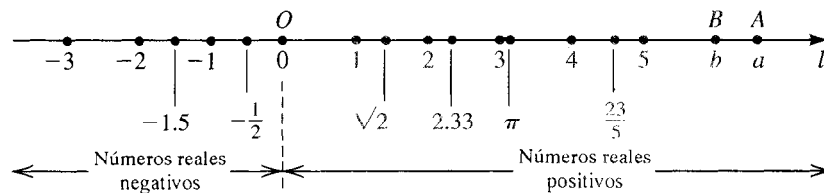


FIGURA 1

El número a que está asociado con el punto A en l es la **coordenada** de A . Nos referimos a estas coordenadas como un **sistema de coordenadas** y llamamos a l **línea coordenada** o **línea real**. Se puede asignar dirección a l al tomar la **dirección positiva** a la derecha y la **dirección negativa** a la izquierda. La dirección positiva se distingue si se coloca una punta de flecha en l , como se muestra en la figura 1.

Los números que corresponden a puntos situados a la derecha de O en la figura 1 son **números reales positivos**. Los números que corresponden a puntos situados a la izquierda de O son **números reales negativos**. *El número real 0 no es positivo ni negativo*. En la tabla siguiente se definen las nociones de **mayor que** y **menor que** para los números reales a y b . Los símbolos $>$ y $<$ son **signos de desigualdad**, y las expresiones $a > b$ y $a < b$ se llaman **desigualdades**.

Mayor que o menor que

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ positiva	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ negativa	a es menor que b

En relación con una línea coordenada, si los puntos A y B tienen coordenadas a y b , respectivamente, entonces $a > b$ es equivalente a la expresión “ A está a la derecha de B ”, en tanto que $a < b$ equivale a “ A está a la izquierda de B ”.

ILUSTRACIÓN

Mayor que ($>$) y menor que ($<$)

- $5 > 3$, porque $5 - 3 = 2$ es positivo.
- $-6 < -2$, porque $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ es negativo.
- $\frac{1}{3} > 0.33$, porque $\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$ es positivo.
- $7 > 0$, porque $7 - 0 = 7$ es positivo.
- $-4 < 0$, porque $-4 - 0 = -4$ es negativo.

Nos referimos al **signo** de un número real como positivo o negativo si el número es positivo o negativo, respectivamente. Notarás que a es positivo si y sólo si $a > 0$, y a es negativo si y sólo si $a < 0$.

La notación $a \geq b$ (a es mayor o igual que b) significa que $a > b$ o que $a = b$ (pero no ambas). Por ejemplo, $a^2 \geq 0$ para todo número real a . El símbolo $a \leq b$ (a es menor o igual que b) indica que $a < b$ o que $a = b$. La expresión $a < b < c$ implica que $a < b$ y que $b < c$, y se dice que b está entre a y c . Análogamente, la expresión $c > b > a$ denota que $c > b$ y que $b > a$.

ILUSTRACIÓN

Orden de tres números reales

$$\blacksquare 1 < 5 < \frac{11}{2} \quad \blacksquare -4 < \frac{2}{3} < \sqrt{2} \quad \blacksquare 3 > -6 > -10$$

Hay otros tipos de desigualdades; por ejemplo, $a < b \leq c$ significa que $a < b$ y que $b \leq c$. Asimismo, $a \leq b < c$ indica que $a \leq b$ y que $b < c$. Por último, $a \leq b \leq c$ quiere decir que $a \leq b$ y que $b \leq c$.

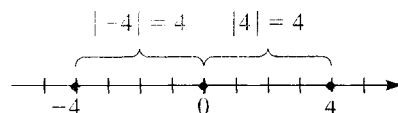


FIGURA 2

Si a es un entero, entonces a es la coordenada de algún punto A en una línea coordenada y el símbolo $|a|$ denota el número de unidades entre A y el origen, sin considerar dirección. El número no negativo $|a|$ recibe el nombre de *valor absoluto de a* . Con referencia a la figura 2, vemos que para el punto con coordenada -4 tendremos que $|-4| = 4$. Análogamente, $|4| = 4$. En general, si a es negativo, se cambia su signo para hallar $|a|$; si a es no negativo, entonces $|a| = a$. La siguiente definición amplía este concepto para todo número real.

Definición de valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a , denotado por $|a|$, se define como sigue:

(1) Si $a \geq 0$, luego $|a| = a$.

(2) Si $a < 0$, luego $|a| = -a$.

En la siguiente ilustración se dan algunos casos especiales de esta definición.

ILUSTRACIÓN

La notación de valor absoluto $|a|$

■ $|3| = 3$, porque $3 > 0$.

■ $|-3| = -(-3)$, porque $-3 < 0$. Así, $|-3| = 3$.

■ $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$ porque $2 - \sqrt{2} > 0$.

■ $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2)$, porque $\sqrt{2} - 2 < 0$. Así, $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$.

En el ejemplo precedente, $|-3| = |3|$ y $|2 - \sqrt{2}| = |\sqrt{2} - 2|$. En general, se tiene que:

$$|a| = |-a| \text{ para todo número real } a$$

Usaremos este concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos de una línea coordenada. Conviene advertir que la distancia entre los puntos con coordenadas 2 y 7 (Fig. 3), es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia obtenida al restar la coordenada menor de la mayor ($7 - 2 = 5$). Si se utilizan valores absolutos, entonces, como $|7 - 2| = |2 - 7|$, no hay que preocuparse del orden de la sustracción. Este hecho motiva la siguiente definición.

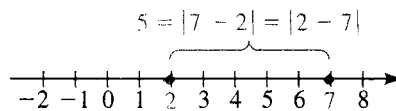


FIGURA 3

Definición de la distancia entre puntos de una línea coordenada

Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B , respectivamente, en una línea coordenada. La **distancia entre A y B** , denotada por $d(A, B)$, se define por

$$d(A, B) = |b - a|.$$

El número $d(A, B)$ es la **longitud del segmento AB** .

Como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$, vemos que

$$d(A, B) = d(B, A).$$

Puedes notar que la distancia entre el origen O y el punto A es

$$d(O, A) = |a - 0| = |a|,$$

lo que concuerda con la interpretación geométrica del valor absoluto ilustrada en la figura 2. La fórmula $d(A, B) = |b - a|$ es cierta, cualesquiera que sean los signos de a y b , como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Hallar distancias entre puntos

Haz que A , B , C y D tengan coordenadas -5 , -3 , 1 y 6 , respectivamente, sobre una línea coordenada (Fig. 4). Halla $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

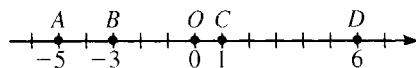


FIGURA 4

Solución Con la definición de la distancia entre puntos, se obtienen las distancias:

$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$

$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$

$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$

$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

El concepto de valor absoluto tiene otros usos además de hallar las distancias entre puntos; también se utiliza siempre que nos interese la magnitud o valor numérico de un número real sin considerar su signo. Dirijamos ahora nuestra atención a la función de los números reales en la solución de ecuaciones y desigualdades.

Sea x una **variable**, es decir, una letra a la que se pueden asignar valores distintos de un conjunto dado de números reales. En ocasiones, a estos valores se les da el nombre de **valores permisibles** para la variable. Expresiones como

$$x + 3 = 0, \quad x^2 - 5 = 4x, \quad \text{y} \quad (x^2 - 9)\sqrt[3]{x + 1} = 0$$

son **ecuaciones** en x . Un número a es una **solución**, o **raíz**, de una ecuación si se obtiene una expresión verdadera cuando a sustituye a x ; entonces decimos que a **satisface** la ecuación. La ecuación $x^2 - 5 = 4x$ tiene como una solución el 5, porque la sustitución da $(5)^2 - 5 = 4(5)$, o $20 = 20$, lo que es una expresión verdadera. **Resolver una ecuación** significa hallar todas las soluciones.

Una ecuación en x se llama **identidad** si todo valor permisible de x es una solución de la misma.

ILUSTRACIÓN**Identidad**

$$\blacksquare \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x + 2)(x - 2)}$$

Una ecuación en x se denomina **ecuación condicional** si hay valores permisibles de x que *no* sean soluciones. Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen soluciones idénticas.

En el siguiente ejemplo supondremos que dominas la solución de ecuaciones de una variable por factorización o mediante la **fórmula cuadrática**.

EJEMPLO 2 Solución de ecuaciones

Resolver

a) $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$ **b)** $2x^2 + 5x - 6 = 0$

Solución

a) Al factorizar el lado izquierdo se obtiene

$$x(x^2 + 3x - 10) = 0, \quad \text{o} \quad x(x - 2)(x + 5) = 0.$$

Al igualar cada factor a cero se obtienen las soluciones 0, 2 y -5.

b) Con la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

con $a = 2$, $b = 5$ y $c = -6$, se obtiene

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4}$$

Por lo tanto, las soluciones son $-\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{73}$ y $-\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{73}$.

Considera la desigualdad

$$2x + 3 > 11,$$

en donde x es una variable. Como se ilustra en la siguiente tabla, ciertos números dan lugar a expresiones verdaderas cuando se sustituyen por x , y otras dan expresiones falsas.

x	$2x + 3 > 11$	Conclusión
3	$9 > 11$	Expresión falsa
4	$11 > 11$	Expresión falsa
5	$13 > 11$	Expresión verdadera
6	$15 > 11$	Expresión verdadera

Si se obtiene una expresión cierta cuando un número a sustituye a x , entonces a es una **solución** de la desigualdad; por lo tanto, 5 y 6 son soluciones de $2x + 3 > 11$, no así 3 y 4. **Resolver** una desigualdad quiere decir hallar *todas* las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

La mayor parte de las desigualdades tiene un número infinito de soluciones. Para ilustrar esto, las soluciones de la desigualdad

$$2 < x < 5$$

son *todo* número real x entre 2 y 5. Este conjunto de números se llama **intervalo abierto** y se denota por $(2, 5)$. La **gráfica** del intervalo abierto $(2, 5)$ es el conjunto de todos los puntos en una línea coordenada que se encuentren entre (pero sin incluir) los puntos correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$. La gráfica se representa al sombrear una parte apropiada del eje (Fig. 5). Este proceso recibe el nombre de **trazar la gráfica** del intervalo. Los números 2 y 5 se llaman **puntos extremos** del



intervalo $(2, 5)$. Los paréntesis en la notación $(2, 5)$ y en la figura 5 se utilizan para indicar que los puntos extremos del intervalo no están incluidos.

Si se desea abarcar un punto extremo, se usa un corchete en lugar de paréntesis; por ejemplo, las soluciones de la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ se denotan por $[2, 5]$ y se conocen como un **intervalo cerrado**. La gráfica de $[2, 5]$ está trazada en la figura 6, en donde los corchetes indican que los puntos extremos están incluidos. También consideraremos **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ y $(a, b]$ así como **intervalos infinitos**, como se describe en la siguiente tabla. El símbolo ∞ (léase *infinito*) que se usa para intervalos infinitos es notación y *no representa* un número real.



FIGURA 6

Intervalos

Notación	Desigualdad	Gráfica
(a, b)	$a < x < b$	
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a, b)$	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	$a < x \leq b$	
(a, ∞)	$x > a$	
$[a, \infty)$	$x \geq a$	
$(-\infty, b)$	$x < b$	
$(-\infty, b]$	$x \leq b$	
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

1.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 y 2: si $x < 0$ y $y > 0$, determina el signo del número real.

1. a) xy b) x^2y c) $\frac{x}{y} + x$ d) $y - x$
 2. a) $\frac{x}{y}$ b) xy^2 c) $\frac{x-y}{xy}$ d) $y(y-x)$

Ejercicios 3 al 6: sustituye el símbolo \square con $<$, $>$ o $=$ para que sea cierta la expresión resultante.

3. a) $-7 \square -4$ b) $\frac{\pi}{2} \square 1.57$ c) $\sqrt{225} \square 15$

4. a) $-3 \square -5$ b) $\frac{\pi}{4} \square 0.8$ c) $\sqrt{289} \square 17$

5. a) $\frac{1}{11} \square 0.09$ b) $\frac{2}{3} \square 0.6666$ c) $\frac{22}{7} \square \pi$

6. a) $\frac{1}{7} \square 0.143$ b) $\frac{5}{6} \square 0.833$ c) $\sqrt{2} \square 1.4$

Ejercicios 7 y 8: expresa el enunciado como una desigualdad.

7. a) x es negativa.
 b) y no es negativa.
 c) q es menor que o igual a π .

- d) d está entre 4 y 2.
 e) t no es menor que 5.
 f) El negativo de z no es mayor que 3.
 g) El cociente de p y q es cuando mucho 7.
 h) El recíproco de w es al menos 9.
 i) El valor absoluto de x es mayor que 7.
8. a) b es positivo.
 b) s no es positivo.
 c) w es mayor que o igual a -4 .
 d) c está entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$.
 e) p no es mayor que -2 .
 f) El negativo de m no es menor que -2 .
 g) El cociente de r y s es al menos $\frac{1}{5}$.
 h) El recíproco de f es al menos 14.
 i) El valor absoluto de x es menor que 4.

Ejercicios 9 al 14: escribe de nuevo el número sin usar el símbolo de valor absoluto; simplifica el resultado.

9. a) $|-3 - 2|$ b) $|-5| - |2|$ c) $|7| + |-4|$
 10. a) $|-11 + 1|$ b) $|6| - |-3|$ c) $|8| + |-9|$
 11. a) $(-5)|3 - 6|$ b) $|-6|/(-2)$ c) $|-7| + |4|$
 12. a) $(4)|6 - 7|$ b) $5/|-2|$ c) $|-1| + |-9|$
 13. a) $|4 - \pi|$ b) $|\pi - 4|$ c) $|\sqrt{2} - 1.5|$
 14. a) $|\sqrt{3} - 1.7|$ b) $|1.7 - \sqrt{3}|$ c) $|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}|$

Ejercicios 15 al 18: los números dados son coordenadas de los puntos A , B y C , respectivamente, de una línea coordenada; hallar la distancia:

- a) $d(A, B)$ b) $d(B, C)$
 c) $d(C, B)$ d) $d(A, C)$
15. 3, 7, -5 16. -6 , -2 , 4
 17. -9 , 1, 10 18. 8, -4 , -1

Ejercicios 19 al 24: los dos números dados son coordenadas de los puntos A y B , respectivamente, de una línea coordenada. Expresa el enunciado indicado como desigualdad en donde intervenga el símbolo de valor absoluto.

19. x , 7; $d(A, B)$ es menor que 5

20. x , $-\sqrt{2}$; $d(A, B)$ es mayor que 1
 21. x , -3 ; $d(A, B)$ es al menos 8
 22. x , 4; $d(A, B)$ es cuando mucho 2
 23. 4, x ; $d(A, B)$ no es mayor que 3
 24. -2 , x ; $d(A, B)$ no es menor que 2

Ejercicios 25 al 28: resuelve la ecuación.

25. $4(2x + 5) = 3(5x - 2)$
 26. $6(2x + 3) - 3(x - 5) = 0$
 27. $8 - \frac{5}{x} - 2 + \frac{3}{x}$ 28. $\frac{3}{x} + \frac{6}{x} - \frac{1}{x} = 11$

Ejercicios 29 al 32: resuelve mediante factorización.

29. $6x^2 + x - 12 = 0$ 30. $4x^2 + x - 14 = 0$
 31. $15x^2 - 12 = -8x$ 32. $15x^2 - 14 = 29x$

Ejercicios 33 al 36: resuelve usando la fórmula cuadrática.

33. $x^2 + 4x + 2 = 0$ 34. $x^2 - 6x - 3 = 0$
 35. $2x^2 - 3x - 4 = 0$ 36. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Ejercicios 37 y 38: resuelve la ecuación.

37. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ 38. $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

Ejercicios 39 al 48: expresa la desigualdad como intervalo y traza su gráfica.

39. $x < -2$ 40. $x \leq 5$
 41. $x \geq 4$ 42. $x > -3$
 43. $-2 < x \leq 4$ 44. $-3 \leq x < 5$
 45. $3 \leq x \leq 7$ 46. $-3 < x < -1$
 47. $0 < x < \pi$ 48. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Ejercicios 49 al 58: expresa el intervalo como desigualdad en la variable x .

49. $(-5, 8]$ 50. $[0, 4)$
 51. $[-4, -1]$ 52. $(3, 7)$
 53. $[4, \infty)$ 54. $(-3, \infty)$
 55. $(-\infty, -5)$ 56. $(-\infty, 2]$
 57. $[0, 2\pi]$ 58. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

1.2 Sistemas de coordenadas rectangulares y gráficas

En la sección 1.1 estudiamos la forma de asignar un número real (coordenada) a cada punto de una línea. Ahora veremos cómo asignar un **par ordenado** (a, b) de números reales a cada punto

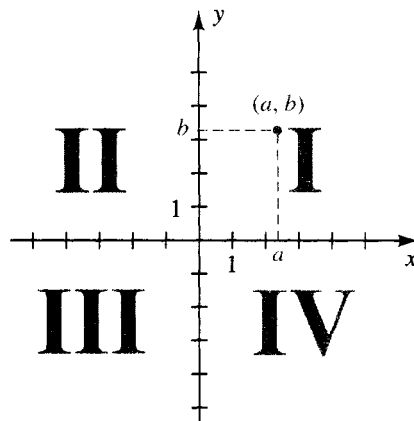


FIGURA 7

del plano. Aun cuando hemos utilizado la notación (a, b) para denotar un intervalo abierto, hay poca probabilidad de confusión puesto que siempre debe quedar claro por nuestro análisis si (a, b) representa un punto o un intervalo.

Introducimos un **sistema de coordenadas rectangulares** en un plano por medio de dos líneas coordenadas perpendiculares, llamadas **ejes coordenados**, que se cruzan en el **origen** O (Fig. 7). Muchas veces nos referimos a la línea horizontal como **eje x** y a la línea vertical como **eje y** , y los marcamos con x y y , respectivamente. El plano es entonces un **plano coordenado**,* o **plano xy** . Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro partes denominados **primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes**, marcados como I, II, III y IV, respectivamente (Fig. 7). Los puntos sobre los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.

A cada punto P en un plano xy se puede asignar un par ordenado (a, b) , como se muestra en la figura 7; a recibe el nombre de **coordenada x** (o **abscisa**) de P , y b es la **coordenada y** (u **ordenada**). Decimos que P *tiene coordenadas* (a, b) y nos referimos al *punto* (a, b) o al *punto* $P(a, b)$. A la inversa, todo par ordenado (a, b) determina un punto P con coordenadas a y b . Se **traza un punto** mediante un punto, como se ilustra en la figura 8.

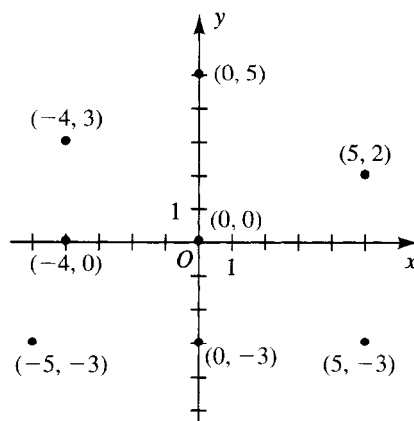


FIGURA 8

* N. del T.: el plano coordenado también se conoce como sistema coordenado.

Se puede usar la siguiente fórmula para hallar la distancia entre dos puntos de un plano coordenado.

Fórmula de distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre cualesquier dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

PRUEBA Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, según se ve en la figura 9, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

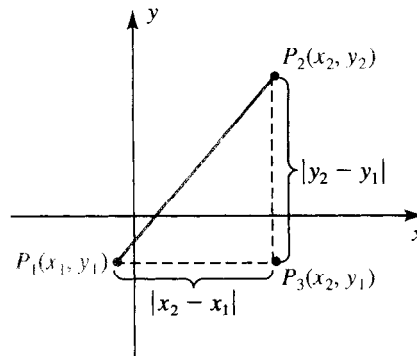


FIGURA 9

De la figura tenemos que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Como $|a|^2 = a^2$ para todo número real a , se puede escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Si se toma la raíz cuadrada de cada lado de la última ecuación y se usa el hecho de que $d(P_1, P_2) \geq 0$, se obtiene la fórmula de la distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran en la misma línea horizontal, y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Análogamente, si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma línea vertical, y

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

Éstos son casos especiales de la fórmula de la distancia.

Aun cuando se hizo referencia a los puntos mostrados en la figura 9, nuestra prueba es independiente de las posiciones de P_1 y P_2 . ■

Al aplicar la fórmula de la distancia, podrás notar que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ y, por lo tanto, el orden en que restamos las coordenadas x o y de los puntos no tiene importancia.

EJEMPLO 1 Hallar la distancia entre puntos

Traza los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$ y encuentra la distancia $d(A, B)$.

Solución Los puntos están trazados en la figura 10. Por la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43. \end{aligned}$$

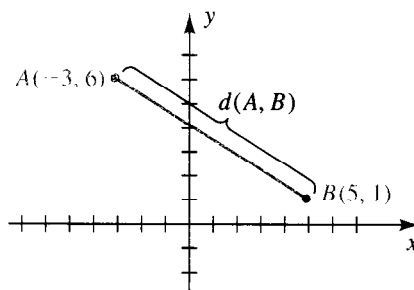


FIGURA 10

Se puede encontrar el punto medio de un segmento mediante esta fórmula.

Fórmula del punto medio

El punto medio M del segmento de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Las líneas que pasan por P_1 y P_2 , paralelas al eje y , cortan el eje de las x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. Por geometría plana, la línea que pasa por el punto medio M paralela al eje de las y bisecta el segmento A_1A_2 en el punto M_1 (Fig. 11). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por lo tanto, $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 está a la mitad de A_1 a A_2 ; la coordenada x de M_1 es igual a la coordenada x de A_1 , más la mitad de la distancia de A_1 a A_2 ; es decir,

$$\text{coordenada } x \text{ de } M_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

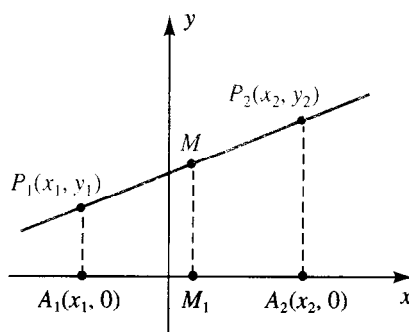


FIGURA 11

La expresión del lado derecho de la última ecuación se simplifica a

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

Éste es el *promedio* de los números x_1 y x_2 . Se deduce que la coordenada x de M también es $(x_1 + x_2)/2$. De manera análoga, la coordenada y de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas se cumplen para todas las posiciones de P_1 y P_2 .

EJEMPLO 2 Hallar un punto medio

Localiza el punto medio M del segmento de $P_1(2, 3)$ a $P_2(4, -2)$ y verifica que $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

Solución Por la fórmula del punto medio, las coordenadas de M son

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 + (-2)}{2} \right), \quad \text{o} \quad \left(1, \frac{1}{2} \right).$$

Los tres puntos P_1 , P_2 y M están trazados en la figura 12. Por la fórmula de la distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1 + 2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}$$

$$d(P_2, M) = \sqrt{(1 - 4)^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}.$$

Por lo tanto, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

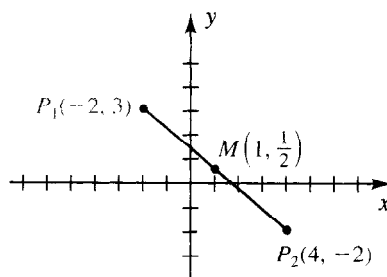


FIGURA 12

Si dos cantidades están relacionadas por medio de una ecuación en donde intervienen dos variables, a menudo cabe representar la ecuación en forma geométrica mediante una gráfica en un plano coordenado. Entonces la gráfica puede usarse para descubrir propiedades de las cantidades que no son evidentes a partir sólo de la ecuación. La tabla adjunta introduce el concepto básico de la *gráfica de una ecuación* en dos variables x y y . Por supuesto que también se pueden usar otras letras para las variables.

Terminología	Definición	Demostración
Solución de una ecuación en x y y	Un par ordenado (a, b) que lleva a una expresión verdadera si $x = a$ y $y = b$	$(2, 3)$ es una solución de $y^2 = 5x - 1$, ya que al sustituir $x = 2$ y $y = 3$ se obtiene: Lado izquierdo: $3^2 = 9$ Lado derecho: $5(2) - 1 = 10 - 1 = 9$

Para cada solución (a, b) de una ecuación en x y y hay un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos esos puntos se llama **gráfica** de la ecuación. Para *trazar la gráfica de una ecuación*, se ilustran las características significativas de la gráfica en un plano coordenado. En casos simples se puede dibujar una gráfica con unos cuantos puntos, si los hay; para una ecuación complicada, trazar puntos puede dar muy poca información sobre la gráfica. En dichas situaciones, con frecuencia se utilizan métodos de cálculo o de gráficas por computadora. Empecemos con un caso sencillo.

EJEMPLO 3 Trazar una gráfica sencilla por trazado de puntos

Traza la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

Solución Deseamos encontrar los puntos (x, y) en un plano coordenado que corresponda a las soluciones de la ecuación. Es conveniente enumerar coordenadas de varios de dichos puntos en una tabla, en donde para cada x se obtiene el valor de y a partir de $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Está claro que los puntos con estas coordenadas se encuentran en una línea, y se puede trazar la gráfica de la figura 13. Por lo común, los pocos puntos trazados no bastarían para ilustrar la gráfica de una ecuación; sin embargo, en este caso elemental podemos estar razonablemente seguros de que la gráfica es una recta.

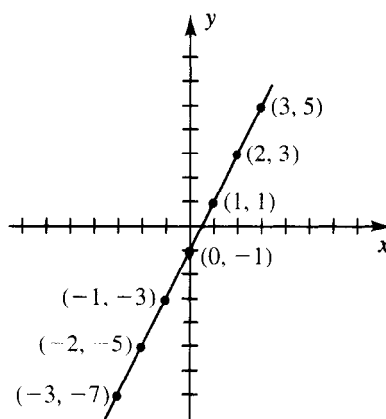


FIGURA 13

Las **intersecciones en x** de una gráfica son las coordenadas x de los puntos en que la gráfica corta el eje de las x . Las **intersecciones en y *** son las coordenadas y de los puntos en que la gráfica corta el eje de las y . La gráfica de la figura 13 tiene una intersección en x , $1/2$ y una intersección en y , -1 . En general, a fin de hallar las intersecciones en x de una gráfica, se hace $y = 0$ y se despeja x de la ecuación resultante. Para determinar las intersecciones en y , se hace $x = 0$ y se despeja y de la expresión resultante.

Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo 3 porque se pueden asignar valores numéricos a x tan grandes como se pretenda. Sin embargo, el dibujo de la figura 13 recibe el nombre de *gráfica de la ecuación* o *trazado de la gráfica*. En general, el trazado de una gráfica debe ilustrar sus características esenciales, de modo que las partes restantes (no trazadas) sean evidentes por sí mismas. Si una gráfica termina en algún punto (como sería el caso de una semirrecta o segmento de recta), se coloca un punto en el *punto extremo* apropiado de la gráfica. Como observación general final, *si no se ponen unidades a las divisiones de los ejes coordenados* (como en la Fig. 13), *entonces cada división representa una unidad*. Sólo se anotarán unidades cuando se usen unidades diferentes en los ejes. Para gráficas *arbitrarias*, en donde las unidades de medida no tengan importancia, éstas se omiten por completo (consulta, por ejemplo, Figs. 18 y 19).

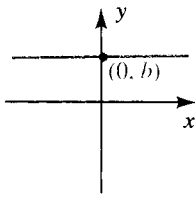
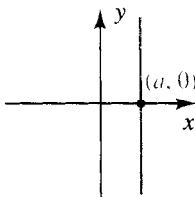
La ecuación del ejemplo 3 se puede reescribir como $2x - y = 1$, que tiene la forma $ax + by = c$ con $a = 2$, $b = -1$, y $c = 1$. Cualquier ecuación expresable como $ax + by = c$ se llama **ecuación lineal**, siempre que a y b no sean cero ambas. En el capítulo 6 demostraremos el siguiente enunciado.

Gráfica de una ecuación lineal

La gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta.

Para graficar una ecuación lineal basta hallar dos soluciones de la forma (x, y) , ya que una recta está determinada por dos puntos. Muchas veces las soluciones más sencillas se obtienen encontrando las intersecciones en x y en y .

Las líneas que son horizontales o verticales tienen ecuaciones simples, como se indica en la próxima tabla. (Estas ecuaciones son casos especiales de $ax + by = c$, ya sea con $a = 0$ o $b = 0$.)

Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación
Recta horizontal	Recta paralela al eje x		$y = b$
Recta vertical	Recta paralela al eje y		$x = a$

* *N. del T.*: las intersecciones en x también se conocen como abscisa al origen y las intersecciones en y , como ordenada al origen.

Un error común es considerar la gráfica de $y = b$ como formada sólo por un punto $(0, b)$. Si se expresa la ecuación en la forma $0x + y = b$, vemos que el valor de x no tiene importancia; por lo tanto, la gráfica de $y = b$ consta de los puntos (x, b) para *toda* x ; en consecuencia, es una recta horizontal. Análogamente, la gráfica de $x = a$ es la recta vertical formada por todos los puntos (a, y) , en donde y es un número real.

EJEMPLO 4 Trazado de gráficas de rectas horizontales y verticales

Traza la gráfica de

a) $y = 4$ **b)** $x = -3$

Solución Como se indica en la tabla precedente, se obtienen las rectas horizontales y verticales que se muestran en la figura 14.

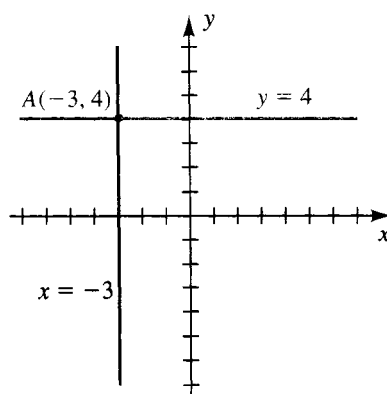


FIGURA 14

EJEMPLO 5 Trazado de la gráfica de una ecuación

Traza la gráfica de $y = x^2 - 3$.

Solución Al sustituir valores para x y hallar los correspondientes de y con $y = x^2 - 3$, se obtiene una tabla de coordenadas para varios puntos de la gráfica:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Los valores mayores de $|x|$ producen valores más grandes de y ; por ejemplo, los puntos $(4, 13)$, $(5, 22)$ y $(6, 33)$ están en la gráfica, al igual que $(-4, 13)$, $(-5, 22)$ y $(-6, 33)$. Puedes ver que la intersección en y (obtenida con $x = 0$) es -3 . Las intersecciones en x se encuentran si se hace $y = 0$, con lo que se obtiene $0 = x^2 - 3$, que tiene la solución $x = \pm\sqrt{3}$. Al trazar los puntos dados por la tabla y dibujar una curva suave que pase por estos puntos (en el orden de valores crecientes de x) tendremos el trazo de la figura 15.

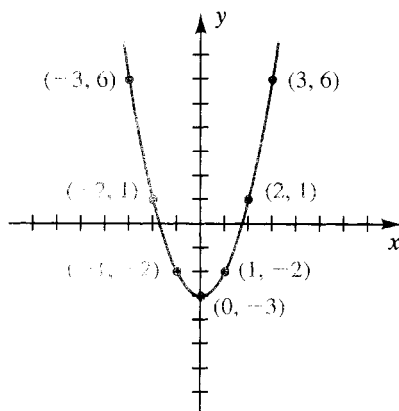


FIGURA 15

La gráfica de la figura 15 es una **parábola**, y el eje y es el **eje de la parábola**. El punto más bajo $(0, -3)$ es el **vértice** de la misma y se dice que **abre hacia arriba**. Si se invierte la gráfica, la parábola **abre hacia abajo** y el vértice es el punto más alto de la gráfica. En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma $y = ax^2 + c$ con $a \neq 0$ es una parábola con vértice $(0, c)$ que abre hacia arriba si $a > 0$, o hacia abajo, si $a < 0$. Cuando $c = 0$, la ecuación se reduce a la forma $y = ax^2$ y el vértice está en el origen $(0, 0)$. Las parábolas también pueden abrir hacia la derecha o la izquierda (consulta el ejemplo 6) o en otras direcciones. Estas figuras se estudian con mayor detalle en el capítulo 6.

Si el plano coordenado de la figura 15 se dobla a lo largo del eje y , la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano coincide con la de la mitad derecha y se dice que **la gráfica es simétrica con respecto al eje y** . Una gráfica es simétrica con respecto al eje y siempre que el punto $(-x, y)$ se encuentre en la gráfica cuando (x, y) también se halle en la gráfica. La gráfica de $y = x^2 - 3$ del ejemplo 5 tiene esta propiedad, ya que al sustituir $-x$ con x se obtiene la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$

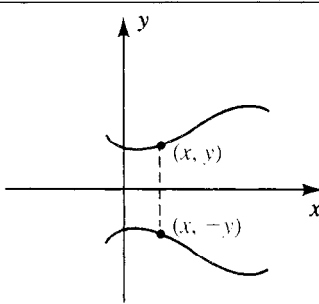
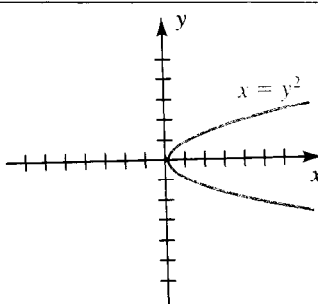
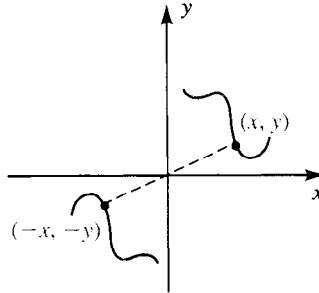
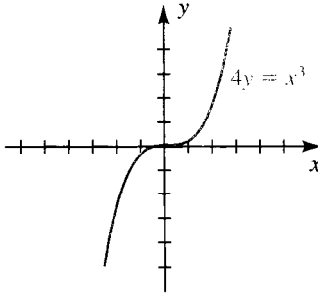
Esta sustitución es una aplicación de la prueba de simetría (1) de la siguiente tabla. También se enumeran otros dos tipos de simetría y pruebas adecuadas. En los ejemplos 6 y 7 se estudian las gráficas de $x = y^2$ y $4y = x^3$ de la columna de ilustración.

Simetrías de gráficas de ecuaciones en x y y

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Demostración
La gráfica es simétrica con respecto al eje y .		(1) Sustituir $-x$ con x da la misma ecuación.	

CUOLA POLIT
BES

Simetrías de gráficas de ecuaciones en x y y (continuación)

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Demostración
La gráfica es simétrica con respecto al eje x .		(2) Sustituir $-y$ con y da la misma ecuación.	
La gráfica es simétrica con respecto al origen.		(3) La sustitución simultánea de $-x$ con x y $-y$ con y da la misma ecuación.	

Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, basta determinar la gráfica en la mitad del plano coordenado. El resto se puede trazar tomando una *imagen espejo*, o *reflexión*, por el eje apropiado.

EJEMPLO 6 Una gráfica simétrica con respecto al eje x

Traza la gráfica de la ecuación $y^2 = x$.

Solución Como la sustitución de $-y$ con y no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje x [consulta la prueba de simetría (2)]. En consecuencia, es suficiente hallar puntos con coordenadas y no negativas y luego reflejar por el eje x . Como $y^2 = x$, las coordenadas y de puntos arriba del eje x están dadas por $y = \sqrt{x}$. A continuación se enumeran las coordenadas de algunos puntos de la gráfica, misma que se traza en la figura 16.

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

La gráfica es una parábola que abre hacia la derecha, con su vértice en el origen. En este caso el eje de las x es el eje de la parábola.

EJEMPLO 7 Una gráfica simétrica con respecto al origen

Traza la gráfica de $4y = x^3$.

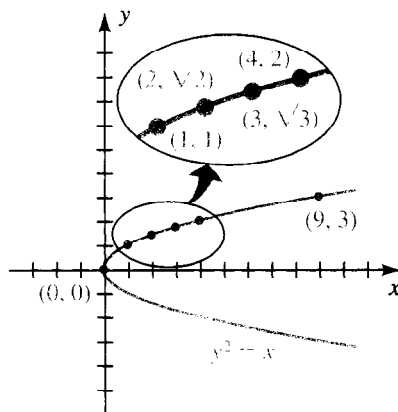


FIGURA 16

Solución Si en forma simultánea se sustituye $-x$ con x y $-y$ con y , entonces

$$4(-y) = (-x)^3, \quad \text{o} \quad -4y = -x^3.$$

Al multiplicar ambos lados por -1 se ve que la última ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $4y = x^3$; por lo tanto, por la prueba de simetría (3), la gráfica es simétrica con respecto al origen. La siguiente tabla detalla las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

Por simetría se advierte que los puntos $(-1, -\frac{1}{4})$, $(-2, -2)$, y así sucesivamente, también son de la gráfica (Fig. 17).

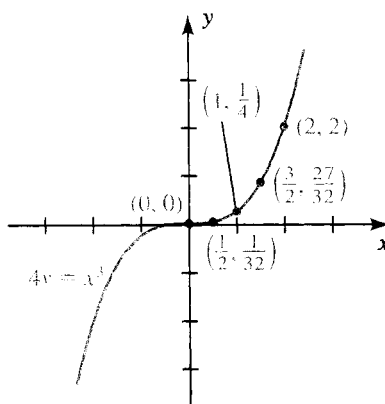


FIGURA 17

Si $C(h, k)$ es un punto de un plano coordenado, entonces un círculo con centro C y radio $r > 0$ está formado por todos los puntos del plano que se encuentren a r unidades desde C . Como se

muestra en la figura 18, un punto $P(x, y)$ está en el círculo siempre que $d(C, P) = r$ o bien, por la fórmula de la distancia

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

La ecuación de arriba equivale a la siguiente ecuación.

Ecuación estándar de un círculo con centro (h, k) y radio r

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

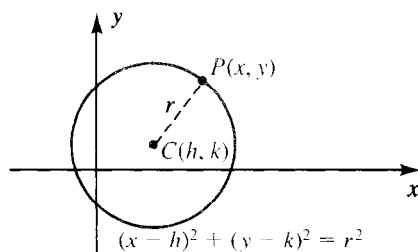


FIGURA 18

Si $h = 0$ y $k = 0$, esta expresión se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de un círculo de radio r con centro en el origen (Fig. 19). Si $r = 1$, la gráfica recibe el nombre de **círculo unitario**.

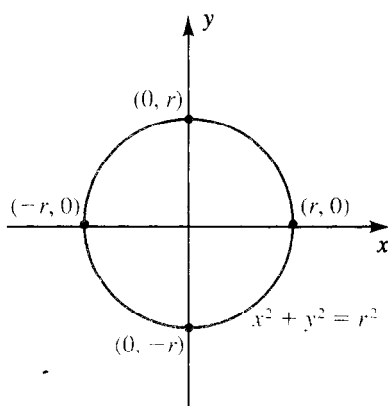


FIGURA 19

EJEMPLO 8 Hallar la ecuación de un círculo

Encuentra una ecuación del círculo cuyo centro es $C(-2, 3)$ y contiene el punto $D(4, 5)$.

Solución El círculo se ilustra en la figura 20. Como D está en el círculo, el radio r es $d(C, D)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

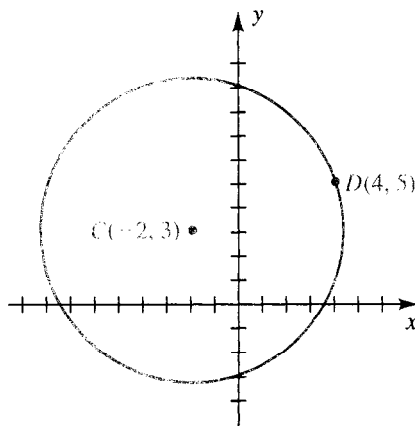


FIGURA 20

Al usar la ecuación estándar de un círculo con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, se obtiene

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40.$$

Si se elevan al cuadrado los términos y se simplifica la última ecuación, ésta se escribe

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$

Al igual que en la solución al ejemplo 8, elevar al cuadrado los términos de una ecuación de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y simplificar conduce a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

en donde a , b y c son números reales. A la inversa, si comenzamos con esta ecuación siempre será posible, *al completar cuadrados*, obtener una ecuación del tipo

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d.$$

Este método se ilustra en el ejemplo 9. Si $d > 0$, la gráfica es un círculo con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Ahora, si $d = 0$, la gráfica consta sólo del punto (h, k) . Por último, si $d < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales y, por lo tanto, no hay gráfica.

EJEMPLO 9 Hallar el centro y radio de un círculo

Determina el centro y radio de un círculo con la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

Solución Comenzamos por escribir la ecuación como sigue:

$$(x^2 - 4x + \underline{\quad}) + (y^2 + 6y + \underline{\quad}) = 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

en donde los espacios subrayados representan números por determinar. En seguida se completan los cuadrados para las expresiones con paréntesis, teniendo cuidado de agregar las cifras apropiadas a *ambos* lados de la ecuación. Con objeto de completar el cuadrado de una expresión de la forma $x^2 + ax$, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (es decir, $(a/2)^2$) a ambos lados

de la ecuación. Análogamente, para $y^2 + by$, se suma $(b/2)^2$ a ambos lados. En este ejemplo, $a = -4$, $b = 6$, $(a/2)^2 = (-2)^2 = 4$, y $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Estas sumas llevan a

$$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9} \quad \text{completando cuadrados}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \quad \text{ecuación equivalente}$$

Si se compara la última ecuación con la ecuación estándar de un círculo, se concluye que el círculo tiene centro $(2, -3)$ y radio $\sqrt{16} = 4$.

Ingenieros, científicos y matemáticos usan con frecuencia calculadoras graficadoras o programas de computadora para obtener trazados de gráficas. Estos equipos tienen funciones de *acercamiento* y *alejamiento* (**zoom**) de cualquier parte de una gráfica y permiten que el *usuario* calcule intersecciones en x o y , puntos altos y bajos y otros aspectos importantes de la gráfica. Debido a la gran variedad de dispositivos y software, no veremos aquí los métodos para usar algún tipo específico; por lo general, los manuales del usuario contienen instrucciones funcionales.

El término **equipo graficador** se refiere a una calculadora graficadora o a una computadora equipada con paquetes adecuados. El **rectángulo de observación** de un equipo graficador es simplemente la porción del plano xy que se ve en **pantalla** y aquí nos referiremos a aquél con este último término. Las fronteras (lados) de la pantalla se ajustan en forma manual asignándoles un valor x mínimo (X_{\min}), un x máximo (X_{\max}), un y mínimo (Y_{\min}) y un y máximo (Y_{\max}). En los ejemplos, a menudo usamos valores estándares (también llamados predeterminados o “por omisión”). Si deseamos una vista diferente de la gráfica, solemos recurrir a la frase “usa [X_{\min} , X_{\max}] por [Y_{\min} , Y_{\max}]” para indicar el cambio de pantalla. Los valores estándares de ésta dependen de sus dimensiones (en píxeles).

En muchas aplicaciones es esencial hallar los puntos en que se cortan las gráficas de dos ecuaciones en x y y . A fin de calcular dichos puntos de intersección con un equipo graficador, por lo general es necesario resolver cada ecuación para y en términos de x . Por ejemplo, supón que la ecuación es

$$4x^2 - 3x + 2y + 6 = 0.$$

Al despejar y se obtiene

$$y = \frac{-4x^2 + 3x - 6}{2} = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3.$$

La gráfica de la ecuación se encuentra al *hacer la asignación*

$$Y_1 = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3$$

en el equipo graficador. (El símbolo Y_1 indica la *primera* ecuación, o el primer valor y .) También se despeja y de la segunda ecuación en términos de x y se hace la asignación

$$Y_2 = \text{una expresión en } x.$$

Al presionar las teclas adecuadas se obtienen trazos de las gráficas, que se llaman gráficas de Y_1 y Y_2 . Se usa entonces el acercamiento (**zoom**) y el *rastreo* o *trazado* (**trace**) del equipo graficador para estimar las coordenadas de los puntos de intersección. Al calcular las coordenadas en los ejemplos, por lo general solicitamos aproximaciones a un lugar decimal, a menos de especificar algo distinto.

En el ejemplo siguiente se demuestra esta técnica para las gráficas estudiadas en los ejemplos 3 y 5.

EJEMPLO 10 Calcular puntos de intersección de gráficas

Usa un equipo graficador para calcular los puntos de intersección de las gráficas de $y = 2x - 1$ y $y = x^2 - 3$.

Solución Primero se hacen las asignaciones.

$$Y_1 = 2x - 1 \quad \text{y} \quad Y_2 = x^2 - 3.$$

Con la pantalla estándar, $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$, vemos en las gráficas de Y_1 y Y_2 de la figura 21 que hay dos puntos de intersección: P_1 en el cuadrante I y P_2 en el cuadrante III.

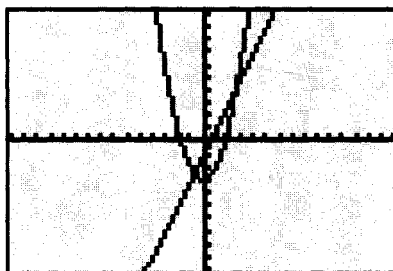


FIGURA 21

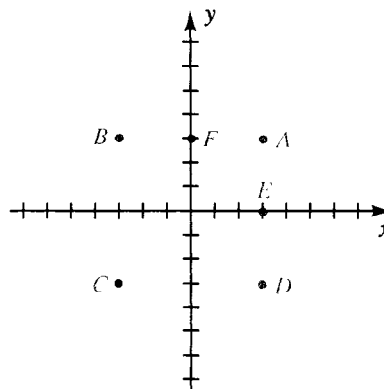
A continuación mueve el cursor ya sea en forma manual o con la función de *trace* (consulta las instrucciones específicas en el manual del usuario), para acercarte a P_1 . Con la función de *zoom* calcula las coordenadas de P_1 como $(2.7, 4.5)$.

Ahora puedes volver a dibujar las gráficas originales para ver P_2 . Con las funciones de *zoom* y *trace* obtienes $(-0.7, -2.5)$ como coordenadas aproximadas de P_2 .

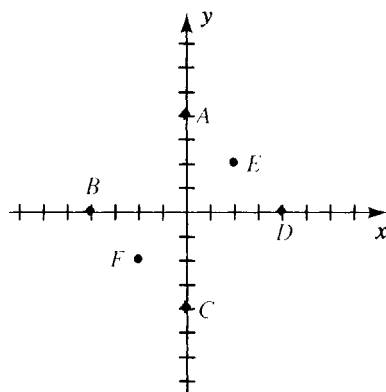
1.2 EJERCICIOS

1. Traza los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, y $E(3, 0)$, en un plano coordenado.
2. Traza los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$, y $E(2, -3)$ en un plano coordenado. Dibuja los segmentos AB , BC , CD , DE y EA .
3. Traza los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$, y $E(-2, -2)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a) en donde a es un número real.
4. Traza los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$, y $E(-3, 3)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$, en donde a es un número real.

Ejercicios 5 y 6: halla las coordenadas de los puntos A al F .



6.



Ejercicios 7 y 8: describe el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en un plano coordenado que satisfagan la condición dada.

- | | | |
|----------------|-------------|---------------|
| 7. a) $x = -2$ | b) $y = 3$ | c) $x \geq 0$ |
| d) $xy > 0$ | e) $y < 0$ | f) $x = 0$ |
| 8. a) $y = -2$ | b) $x = -4$ | c) $x/y < 0$ |
| d) $xy = 0$ | e) $y > 1$ | f) $y = 0$ |

Ejercicios 9 al 14: a) halla la distancia $d(A, B)$ entre A y B , b) Determina el punto medio del segmento AB .

9. $A(4, -3)$, $B(6, 2)$
 10. $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$
 11. $A(-5, 0)$, $B(-2, -2)$
 12. $A(6, 2)$, $B(6, -2)$
 13. $A(7, -3)$, $B(3, -3)$
 14. $A(-4, 7)$, $B(0, -8)$

Ejercicios 15 al 38: traza la gráfica de la ecuación y etiqueta a las intersecciones en x y en y .

- | | | |
|--------------------------|--------------------|--------------------|
| 15. $y = 2x - 3$ | 16. $y = 3x + 2$ | 17. $y = -x + 1$ |
| 18. $y = -2x - 3$ | 19. $y = 4$ | 20. $y = -2$ |
| 21. $x = -3$ | 22. $x = 1$ | 23. $y = -4x^2$ |
| 24. $y = \frac{1}{3}x^2$ | 25. $y = 2x^2 - 1$ | 26. $y = -x^2 + 2$ |

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 27. $x = \frac{1}{4}y^2$ | 28. $x = -2y^2$ | 29. $x = -y^2 + 3$ |
| 30. $x = 2y^2 - 4$ | 31. $y = -\frac{1}{2}x^3$ | 32. $y = \frac{1}{2}x^3$ |
| 33. $y = x^3 - 8$ | 34. $y = -x^3 + 1$ | 35. $y = \sqrt{x}$ |
| 36. $y = \sqrt{-x}$ | 37. $y = \sqrt{x} - 4$ | 38. $y = \sqrt{x - 4}$ |

Ejercicios 39 y 40: usa pruebas para simetría a fin de establecer cuáles gráficas de los ejercicios indicados son simétricas con respecto a: a) el eje y ; b) el eje x , y c) el origen.

39. Ejercicios de número non del 15 al 38.

40. Ejercicios de número par del 15 al 38

Ejercicios 41 al 44: traza la gráfica del círculo.

41. $x^2 + y^2 = 11$
 42. $x^2 + y^2 = 7$
 43. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
 44. $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$

Ejercicios 45 al 48: halla una ecuación del círculo que satisfaga las condiciones indicadas.

45. Centro $C(-4, 6)$, que pase por $P(1, 2)$
 46. Centro en el origen, que pase por $P(4, -7)$
 47. Puntos extremos de un diámetro $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$
 48. Puntos extremos de un diámetro $A(-5, 2)$ y $B(3, 6)$



Ejercicios 49 al 52: halla el centro y radio del círculo con la ecuación dada.

49. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$
 50. $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$
 51. $x^2 y^2 + 4y - 117 = 0$
 52. $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

Ejercicios 53 y 54: grafica las dos ecuaciones del mismo plano de coordenadas y calcula las coordenadas de sus puntos de intersección.

53. $y = x^3 + x$; $x^2 + y^2 = 1$
 54. $y = 3x^4 - \frac{3}{2}$; $x^2 + y^2 = 1$

1.3 Funciones

La noción de **correspondencia** se presenta muchas veces en la vida diaria. En la siguiente ilustración se dan algunos ejemplos.

ILUSTRACIÓN

Correspondencia

- A cada libro de una biblioteca le corresponde cierta cantidad de páginas.

- A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.
- Si la temperatura del aire se registra todo un día, a cada instante de tiempo le corresponde una temperatura.

En cada correspondencia de la ilustración anterior intervienen dos conjuntos: D y E . En la primera, D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D le corresponde un entero positivo y en E ; es decir, la cantidad de páginas.

A veces describimos correspondencias por diagramas del tipo que se muestra en la figura 22, en donde los conjuntos D y E están representados por puntos dentro de regiones en un plano. La flecha curva indica que al elemento y de E le corresponde el elemento x de D . Los dos conjuntos pueden tener elementos en común. En realidad, a menudo resulta que $D = E$. Es importante observar que *a cada x en D le corresponde exactamente una y en E* ; sin embargo, el mismo elemento de E puede corresponder a diferentes elementos de D ; por ejemplo, dos libros pueden tener la misma cantidad de páginas, dos personas pueden haber nacido el mismo día y la temperatura puede ser igual a diferentes horas.

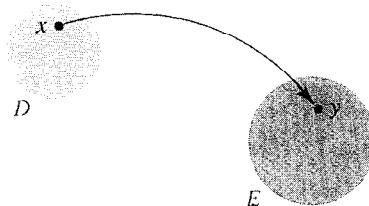


FIGURA 22

En buena parte de nuestro trabajo, D y E serán conjuntos de números. Para ilustrar esto, denota con D y E el conjunto \mathbb{R} de números reales, y asigna a cada número real x su cuadrado x^2 . Esto nos dará una correspondencia de \mathbb{R} a \mathbb{R} .

Cada una de nuestras ilustraciones de correspondencia es una *función*, que definimos como sigue:

Definición de función

Una función de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D exactamente un elemento y de E .

El elemento y de E es el **valor** de f en x y se denota con $f(x)$, (se lee “ f de x ”). El conjunto D es el **dominio** de la función. El **rango** de f es el subconjunto R de E , que está formado por todos los valores posibles de $f(x)$ para x en D .

Considera el diagrama de la figura 23. Las flechas curvas indican que los elementos $f(w)$, $f(z)$, $f(x)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos w , z , x y a de D . *A cada elemento en D hay asignado exactamente un valor de función en E* ; sin embargo, diferentes elementos de D , como w y z de la figura 23, pueden tener el mismo valor en E .

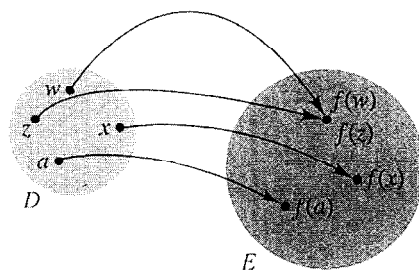


FIGURA 23

Los símbolos

$$D \xrightarrow{f} E, f: D \rightarrow E, \quad y$$

significan que f es una función de D a E . En un principio las notaciones f y $f(x)$ pueden ser confusas. Recuerda que f representa la función; no es D ni E . Sin embargo, $f(x)$ es un elemento del rango E ; es decir, el elemento que la función f asigna al elemento x , que está en el dominio D .

Dos funciones f y g de D a E son **iguales** y escribimos

$$f = g \text{ si } f(x) = g(x) \text{ para toda } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para toda x en \mathbb{R} , luego $g = f$.

EJEMPLO 1 Hallar valores de función

Sea f la función con dominio \mathbb{R} tal que $f(x) = x^2$ para toda x en \mathbb{R} .

- a)** Halla $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a+b)$ y $f(a) + f(b)$, en donde a y b sean números reales.
b) ¿Cuál es el intervalo de f ?

Solución **a)** Se encuentran valores de f al sustituir por x en la ecuación $f(x) = x^2$:

$$f(-6) = (-6)^2 = 36$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$f(a) + f(b) = a^2 + b^2$$

b) Por definición, el rango de f está formado por todos los números de la forma $f(x) = x^2$ para x en \mathbb{R} . Como el cuadrado de todo número real es no negativo, el rango está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Además, todo número real no negativo c es un valor de f , puesto que $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$; por lo tanto, el intervalo de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.

Si una función se define como en el ejemplo 1, los símbolos usados para la función y variable no tienen importancia; esto es, expresiones como $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$, y $k(r) = r^2$ definen la misma función. Esto es cierto porque si a es cualquier número en el dominio, entonces se obtiene el mismo valor a^2 , cualquiera que sea la expresión que se use.

En el resto de nuestro trabajo, la frase *f es una función* quiere decir que el dominio y rango son conjuntos de números reales. Si una función se define mediante una expresión, como en el ejemplo 1, y no se indica el dominio D , entonces consideraremos que D es la totalidad de los números reales x tales que $f(x)$ es real. Esto recibe a veces el nombre de **dominio implícito** de f . Para ilustrarlo, $f(x) = \sqrt{x-2}$, entonces el dominio implícito es el conjunto de números reales x tales que $\sqrt{x-2}$ es real; esto es, $x-2 \geq 0$, o bien, $x \geq 2$. En consecuencia, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, se dice que *f está definida en x* o que *f(x) existe*. Si un conjunto S está contenido en el dominio, *f está definida en S*. La terminología *f que no está definida en x* denota que x no se encuentra en el dominio de f .

Una función f puede tener el mismo valor para diferentes números en su dominio; por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Para que la inversa de una función se defina, es esencial que números distintos del dominio *siempre* den valores diferentes de f . Dichas funciones se llaman *funciones biunívocas*.*

Definición de función biunívoca

Una función f con dominio D y rango R es una **función biunívoca** si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- (1) Siempre que $a \neq b$ en D , entonces $f(a) \neq f(b)$ en R .
- (2) Siempre que $f(a) = f(b)$ en R , entonces $a = b$ en D .

El diagrama de flechas de la figura 24 ilustra una función biunívoca. Notarás que cada valor de función en el rango R corresponde *exactamente a un* elemento del dominio D . La función ilustrada en la figura 23 no es biunívoca porque $f(w) = f(z)$, pero $w \neq z$.

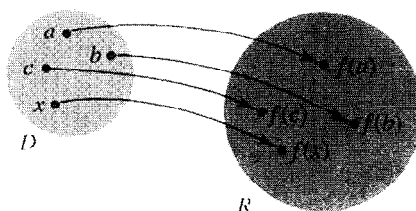


FIGURA 24

EJEMPLO 2 Determinar si una función es biunívoca

- a) Si $f(x) = 3x + 2$, demuestra que f es biunívoca.
- b) Si $g(x) = x^4 + 2x^2$, demuestra que g no es biunívoca.

Solución a) Usaremos la condición (2) de la definición precedente. En consecuencia, suponemos que $f(a) = f(b)$ para algunos números a y b del dominio de f . Esto da

* V del R.T.: forma de denotar este concepto es con los términos uno a uno.



$$3a + 2 = 3b + 2 \quad \text{definición de } f(x)$$

$$3a = 3b \quad \text{restar 2}$$

$$a = b \quad \text{dividir entre 3}$$

por lo tanto, f es biunívoca.

b) Para demostrar que una función *es* biunívoca se requiere una prueba *general*, como en la parte a). A fin de hacer ver que *g no es* biunívoca, bastan dos números reales distintos en el dominio con objeto de producir el mismo valor de función; por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $g(-1) = g(1)$. De hecho $f(-a) = f(a)$ para todo número real a .

Si se conoce la gráfica de una función f , es fácil determinar si f es biunívoca; por ejemplo, la función cuya gráfica se traza en la figura 25 no es biunívoca porque $a \neq b$, pero $f(a) = f(b)$. Puedes ver que la línea horizontal $y = f(a)$ (o bien $y = f(b)$) corta la gráfica en más de un punto. En general, la siguiente prueba gráfica sirve para determinar si una función es biunívoca.

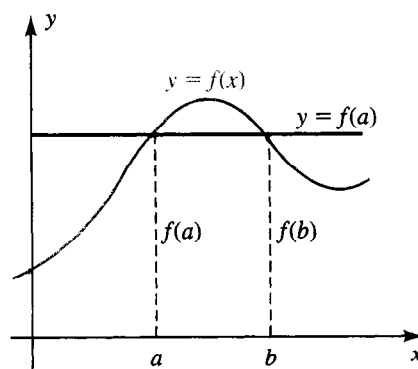


FIGURA 25

Prueba de la línea horizontal

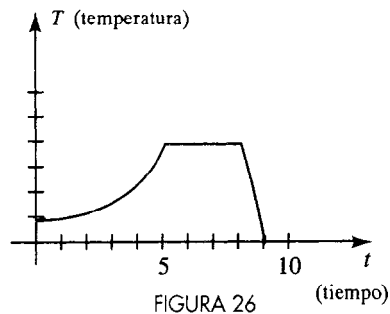
Una función f es biunívoca si y sólo si toda línea horizontal corta la gráfica de f cuando más en un punto.

Las gráficas se usan con frecuencia para describir la variación de las cantidades físicas; por ejemplo, un científico utiliza la gráfica de la figura 26 a fin de indicar la temperatura T de cierta solución en tiempos t diferentes durante un experimento. El dibujo muestra que la temperatura aumentó en forma gradual del tiempo $t = 0$ al tiempo $t = 5$, no cambió entre $t = 5$ y $t = 8$ y luego disminuyó con rapidez de $t = 8$ a $t = 9$.

Del mismo modo, si f es una función, se puede usar una gráfica para indicar el cambio en $f(x)$ a medida que x varía en todo el dominio de f . Específicamente, tenemos la siguiente definición.

Definición de gráfica de una función

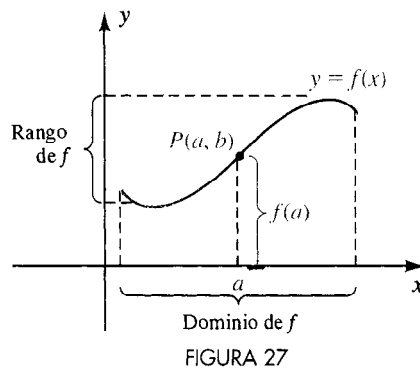
La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f .



A menudo se pone la leyenda $y = f(x)$ a un trazo de la gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto en la gráfica, entonces la coordenada b en el eje y es el valor de función $f(a)$, como se ilustra en la figura 27. La figura presenta el dominio de f (conjunto de posibles valores de x) y el rango de f (valores correspondientes de y). Aun cuando hemos descrito el dominio y el rango como intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos u otros conjuntos de números reales.

En vista de que hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a en el dominio de f , sólo *un* punto de la gráfica de f tiene coordenada a en el eje x ; por lo tanto, *toda recta vertical cruza la gráfica de una función cuando mucho en un punto*. En consecuencia, la gráfica de una función no puede ser una figura de tipo circular, pues una línea vertical podría cortarla en más de un punto.

Las intersecciones en x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se llaman **ceros** de la función. La intersección en y de la gráfica es $f(0)$, si existe.



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de una función

Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$.

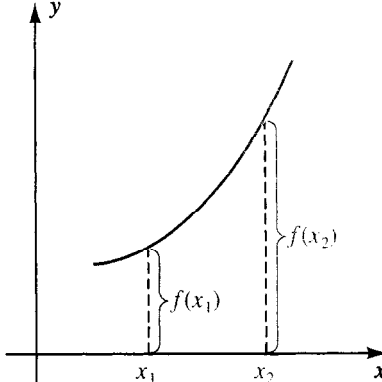
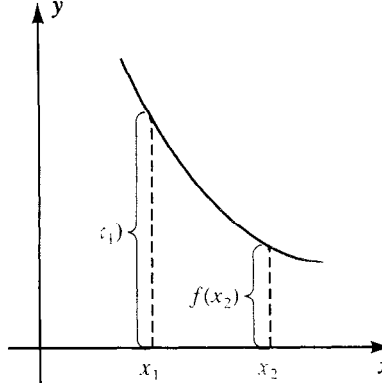
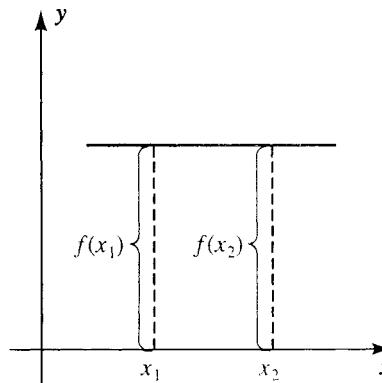
- a) Traza la gráfica de f .
- b) Halla el dominio y rango de f .

Solución a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x-1}$. La siguiente tabla enumera las coordenadas de varios puntos de la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

Al trazar puntos se obtiene la gráfica de la figura 28 (pág. 31). Puedes notar que la intersección en x es 1 y no hay intersección en y .

b) En la figura 28 verás que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ o, lo que es lo mismo, por el intervalo $[1, \infty)$. El intervalo de f es el conjunto de todos los números reales tales que $y \geq 0$ o por $[0, \infty)$.

Terminología	Definición	Interpretación gráfica
f es creciente en un intervalo I	$f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es decreciente en un intervalo I	$f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es constante en un intervalo I	$f(x_1) = f(x_2)$ para toda x_1 y x_2	

En el ejemplo 3, a medida que x aumenta, también se incrementa el valor de la función $f(x)$ y se dice que la gráfica de f *sube* (Fig. 28); una función de este tipo se conoce como *creciente*. Para

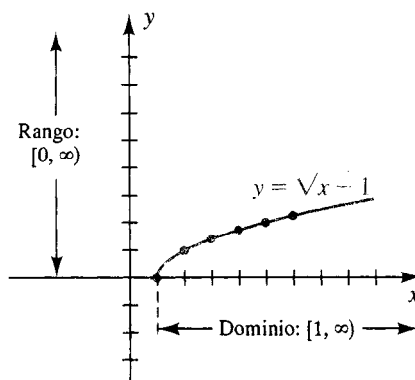


FIGURA 28

ciertas funciones, $f(x)$ decrece a medida que x crece. En este caso la gráfica *cae* y f es una función *decreciente*. En general, consideraremos funciones que crecen o decrecen en un intervalo I , como se describe en la siguiente tabla, en donde x_1 y x_2 denotan números en I .

Si $f(x) = c$ para todo número real x , entonces f se llama **función constante**.

Usaremos indistintamente las frases *f* es creciente y $f(x)$ es creciente; haremos lo mismo con los términos *decreciente* y *constante*.

Como toda función creciente o decreciente pasa la prueba de la recta horizontal, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema: las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

(1) Una función que es creciente en todo su dominio es biunívoca.

(2) Una función decreciente en todo su dominio es biunívoca.

EJEMPLO 4

Usar una gráfica para hallar dominio, rango y dónde crece o decrece una función

Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

- a) Traza la gráfica de f .
- b) Halla el dominio y rango de f .
- c) Halla los intervalos en que f es creciente o decreciente.

Solución

a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. De nuestro trabajo con círculos en la sección 1.2, sabemos que la gráfica $x^2 + y^2 = 9$ es un círculo de radio 3 con centro en el origen. Si se despeja la y de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ se obtiene $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$. Se deduce que la gráfica de f es la *mitad superior* del círculo, como se ilustra en la figura 29.

b) En la figura 29 se ve que el dominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$ y el rango de f es el campo $[0, 3]$.

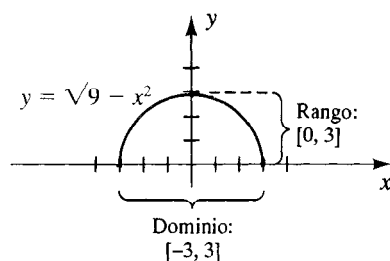


FIGURA 29

c) La gráfica sube a medida que x crece de -3 a 0 y, en consecuencia, f es creciente en el intervalo cerrado $[-3, 0]$; por lo tanto, como se muestra en la tabla precedente, si $x_1 < x_2$ en $[-3, 0]$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ (notarás que *posiblemente* $x_1 = -3$ o $x_2 = 0$).

La gráfica cae a medida que x crece de 0 a 3 , por lo que f es decreciente en el intervalo cerrado $[0, 3]$. En este caso, la tabla indica que si $x_1 < x_2$ en $[0, 3]$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$ (advertirás que *posiblemente* $x_1 = 0$ o $x_2 = 3$).

EJEMPLO 5 Uso de una gráfica para hallar dominio, rango y dónde crece o decrece una función

Sea $f(x) = -3x + 4$.

- a)** Traza la gráfica de f .
- b)** Halla el dominio y rango de f .
- c)** Determina en dónde f es creciente o decreciente.

Solución **a)** La gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = -3x + 4$ o, lo que es igual, $3x + y = 4$. De la sección 1.2 sabemos que la gráfica de esta ecuación lineal es una recta; por lo tanto, es suficiente hallar dos puntos en la gráfica. Se pueden encontrar los puntos correspondientes a las intersecciones en x y en y con $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente. Estos puntos son $(\frac{4}{3}, 0)$ y $(0, 4)$. Al trazarlos llegamos a la gráfica de la recta dibujada en la figura 30.

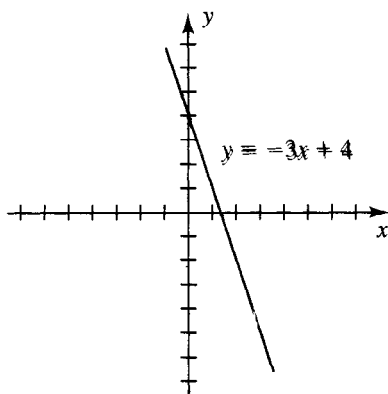


FIGURA 30

b) Como los valores de x y y pueden ser cualesquier números reales, tanto el dominio como el rango de f son \mathbb{R} .

c) A medida que x crece, la gráfica cae; es decir, $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. En consecuencia, f es decreciente en todo su dominio.

Muchas fórmulas que se presentan en matemáticas y en ciencias determinan funciones; por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para encontrar el área A de un círculo de radio r asigna a cada número real positivo r exactamente un valor de A . Esto determina una función de f tal que $f(r) = \pi r^2$ y se puede escribir $A = f(r)$. La letra r , que representa un número arbitrario del dominio de f , se llama **variable independiente**. La letra A , que denota un número del rango de f , es una **variable dependiente** porque su valor depende del número asignado a r . Si dos variables r y A están relacionadas de este modo, se dice que A es una función de r . En aplicaciones, las variables independiente y dependiente se conocen a veces como **variable de entrada** y **variable de salida**, respectivamente. Como otro ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad uniforme de 50 millas por hora, entonces la distancia d (millas) recorrida en el tiempo t (horas) estará dada por $d = 50t$ y, por lo tanto, la distancia d es una función del tiempo t .

En el siguiente ejemplo se ilustra la forma en que algunos de los conceptos presentados en esta sección se pueden estudiar con ayuda de un equipo graficador. De aquí en adelante, al hacer asignaciones en un equipo graficador, con frecuencia nos referiremos a variables del tipo Y_1 y Y_2 como las funciones Y_1 y Y_2 .

EJEMPLO 6 Análisis de la gráfica de una función



Sea $f(x) = x^{2/3} - 3$

- Halla $f(-2)$.
- Traza la gráfica de f .
- Establece el dominio y rango de f .
- Establece los intervalos en que f es creciente o decreciente.
- Calcula las intersecciones en x de la gráfica con precisión de un lugar decimal.

Solución

- Una representación de f en un equipo de cómputo puede tener la forma

$$X^{2/3} - 3 \quad \text{o} \quad (X^{1/3})^2 - 3 \quad \text{o} \quad (X^{2/3}) - 3.$$

Asignamos una de estas expresiones a la función Y_1 . Para hallar el valor de Y_1 en $x = -2$, primero damos el valor -2 a un lugar de memoria identificado como X . Por lo general esto se hace con una operación de “guardar” o “asignar” en un equipo de cómputo. A continuación se determina el valor de Y_1 si se pide al equipo que indique el contenido de la ubicación de memoria que contiene el valor de Y_1 . Este proceso de hallar el valor de Y_1 se conoce como “consultar Y_1 ”. Al consultar Y_1 vemos que su valor es aproximadamente -1.41 (esto es, $f(-2) \approx -1.41$). Debe observarse que no todos los equipos de cómputo procesan exponentes racionales de la misma manera. Si no obtuviste esta respuesta para $f(-2)$, cambia la representación de Y_1 antes de proseguir.

- El uso de la pantalla $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ para graficar Y_1 , dará una imagen similar a la de la figura 31.
- El dominio de f es \mathbb{R} , pues se puede teclear cualquier valor para x . La figura indica que $y \geq -3$, por lo que se concluye que el límite de f es $[-3, \infty)$.
- De la figura se ve que f está decreciendo en $(-\infty, 0]$ y creciendo en $[0, \infty)$.

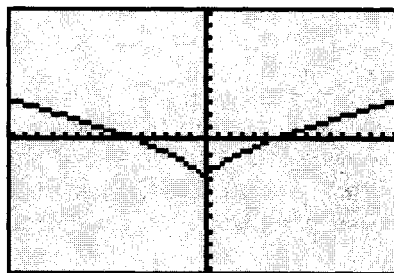


FIGURA 31

e) Con las funciones *trace* y *zoom* se encuentra que la intersección en x positiva de la figura 31 es aproximadamente 5.2. Como f es simétrica con respecto al eje y , la intersección en x negativa es alrededor de -5.2 .

1.3 EJERCICIOS

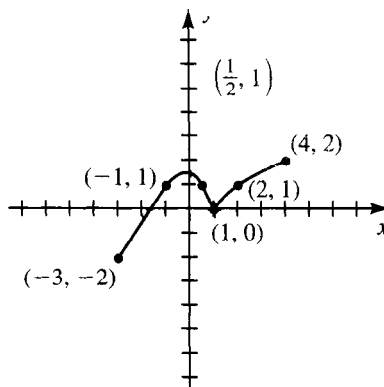
1. Si $f(x) = -x^2 - x - 4$, 2. hallar $f(-2)$, $f(0)$, y $f(4)$.

2. Si $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$, hallar $f(-3)$, $f(0)$, y $f(2)$.

3. Si $f(x) = \sqrt{x-4} - 3x$, hallar $f(4)$, $f(8)$, y $f(13)$.

4. Si $f(x) = \frac{x}{x-3}$, hallar $f(-2)$, $f(0)$, y $f(3)$.

13.



Ejercicios 5 al 8: si a y h son números reales, halla

a) $f(a)$ b) $f(-a)$ c) $-f(a)$ d) $f(a+h)$

e) $f(a) + f(h)$ f) $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si $h \neq 0$

5. $f(x) = 5x - 2$

6. $f(x) = 3 - 4x$

7. $f(x) = x^2 - x + 3$

8. $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

Ejercicios 9 al 12: si a es un número real positivo, encuentra

a) $g\left(\frac{1}{a}\right)$ b) $\frac{1}{g(a)}$ c) $g(\sqrt{a})$ d) $\sqrt{g(a)}$

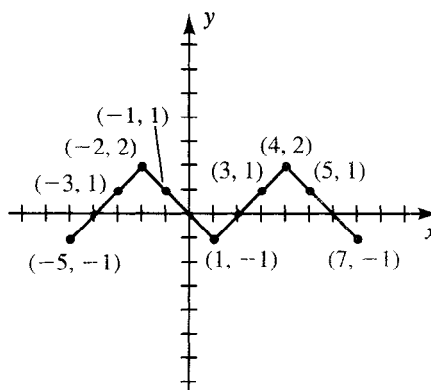
9. $gx = 4x^2$

10. $gx = 2x - 5$

11. $gx = \frac{2x}{x^2 + 1}$

12. $gx = \frac{x^2}{x+1}$

14.



Ejercicios 13 y 14: para la gráfica de la función f de la figura, determina

a) El dominio b) El intervalo c) $f(1)$

d) Toda x tal que $f(x) = 1$ e) Toda x tal que $f(x) > 1$

Ejercicios 15 al 22: determina si la función f es biunívoca.

15. $f(x) = 3x - 7$

16. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

17. $f(x) = x^2 - 9$

18. $f(x) = x^2 + 4$

19. $f(x) = \sqrt{x}$

20. $f(x) = |x|$

21. $f(x) = 3$

22. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Ejercicios 23 al 28: halla el dominio de f .

23. $f(x) = \sqrt{2x+7}$

24. $f(x) = \sqrt{8-3x}$

25. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

26. $f(x) = \sqrt{x^2-25}$

27. $f(x) = \frac{x+1}{x^3-4x}$

28. $f(x) = \frac{4x}{6x^2+13x-5}$

Ejercicios 29 al 36: a) traza la gráfica de f ; b) halla el dominio D e intervalo R de f ; c) define los intervalos en que f crece, decrece o es constante.

29. $f(x) = 3x - 2$

30. $f(x) = -2x + 3$

31. $f(x) = 4 - x^2$

32. $f(x) = x^2 - 1$

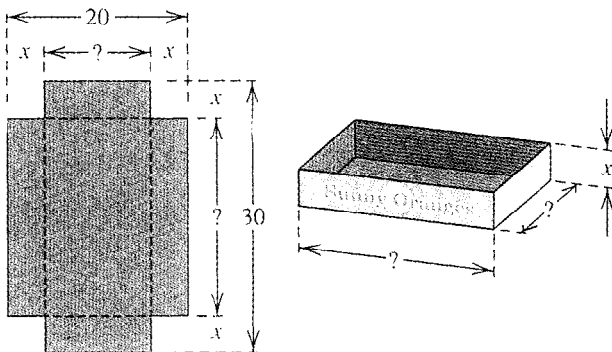
33. $f(x) = \sqrt{x+4}$

34. $f(x) = \sqrt{4-x}$

35. $f(x) = -2$

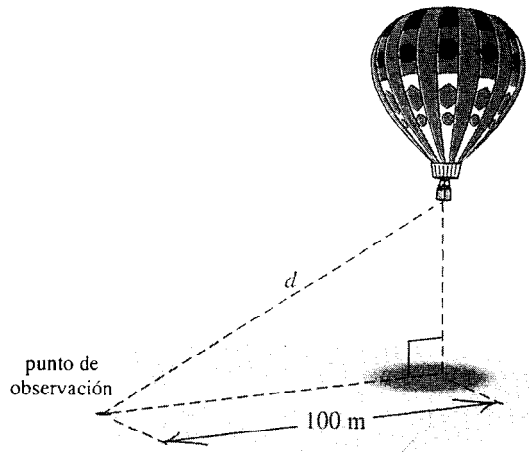
36. $f(x) = 3$

37. Construcción de una caja Haz una caja abierta con una pieza rectangular de cartón de 20×30 pulgadas (in) cortando cuadros idénticos de área x^2 de cada esquina y volteando hacia arriba los cuadros (consulta el modelo). Expresa el volumen V de la caja como función de x .



EJERCICIO 37

38. Distancia a un globo de aire caliente A la 1:00 p.m. se suelta un globo de aire caliente, que se eleva en sentido vertical a razón de 2 m/s. Se sitúa un punto de observación a 100 metros del punto del terreno que está directamente bajo el globo (ve la figura). Si t denota el tiempo (en segundos) después de la 1:00 p.m., expresa la distancia d entre el globo y el punto de observación como función de t .

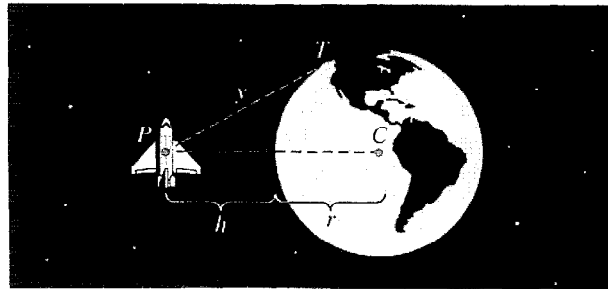


EJERCICIO 38

39. Distancia a la Tierra Desde un punto exterior P , que está a h unidades de un círculo de radio r , se traza una línea tangente al círculo (ve la figura). Denota con y la distancia desde el punto P al punto de tangencia T .

a) Expresa y como función de h . (Sugerencia: si C es el centro del círculo, PT es perpendicular a CT .)

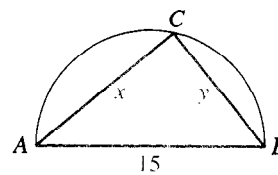
b) Si r es el radio de la Tierra y h es la altitud de un transbordador espacial, y es la distancia máxima a la Tierra que un astronauta puede ver desde el transbordador. Si $h = 200$ millas y $r \approx 4000$ millas, calcula y .



EJERCICIO 39

40. El triángulo ABC está inscrito en un semicírculo de diámetro 15 (ve la figura).

a) Si x denota la longitud del lado AC , expresa la longitud y del lado BC como función de x . (Sugerencia: el ángulo ACB es recto.)



EJERCICIO 40

- b) Expresa el área \mathcal{A} del triángulo ABC como función de x e indica el dominio de esta función.

C Ejercicios 41 al 44: a) traza la gráfica de f en el intervalo dado $[a, b]$; b) estima el intervalo de f en $[a, b]$, y c) calcula los intervalos en que f se creciente o decreciente.

$$41. f(x) = \frac{x^{1/3}}{1+x^4}; \quad [-2, 2]$$

$$42. f(x) = x^4 - 0.4x^3 - 0.8x^2 + 0.2x + 0.1; \quad [-1, 1]$$

$$43. f(x) = x^5 - 3x^2 + 1; \quad [-0.7, 1.4]$$

$$44. f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^4}; \quad [-4, 4]$$

1.4 Gráficas de funciones

En esta sección estudiamos algunas ayudas para trazar las gráficas de ciertos tipos de funciones. En particular, una función f se llama **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio. En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no cambia si $-x$ se sustituye con x ; por lo tanto, por la prueba de simetría (1) de la sección 1.2, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y .

Una función f se denomina **non** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio. Si se aplica la prueba de simetría (3) de la sección 1.2 a la ecuación $y = f(x)$, vemos que la gráfica de una función non es simétrica con respecto al origen. Estos hechos se resumen en las primeras dos columnas de la siguiente tabla.

Terminología	Definición	Demostración	Simetría de gráfica
f es una función par.	$f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio.	$y = f(x) = x^2$	eje y
f es una función non.	$f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio.	$y = f(x) = x^3$	el origen

EJEMPLO 1 Determinar si una función es par o non

Determina si f es par, non o ninguna de las dos.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ b) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$

c) $f(x) = x^3 + x^2$

Solución En cada caso el dominio de f es \mathbb{R} . Para determinar si f es par o non se comienza por examinar $f(-x)$, en donde x es cualquier número real.

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5$ sustituir $-x$ con x en $f(x)$

$$= 3x^4 - 2x^2 + 5$$
 simplificar

$$= f(x)$$
 definición de f

Como $f(-x) = f(x)$, f es una función par.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) && \text{sustituir } -x \text{ con } x \text{ en } f(x) \\
 &= -2x^5 + 7x^3 - 4x && \text{simplificar} \\
 &= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) && \text{factorizar } -1 \\
 &= -f(x) && \text{definición de } f
 \end{aligned}$$

Como $f(-x) = -f(x)$, f es una función non.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 && \text{sustituir } -x \text{ con } x \text{ en } f(x) \\
 &= -x^3 + x^2 && \text{simplificar}
 \end{aligned}$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$ (notarás que $-f(x) = -x^3 - x^2$), la función f no es par ni non.

En el ejemplo siguiente consideramos la **función de valor absoluto** f , definida por $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de la función de valor absoluto

Sea $f(x) = |x|$

- a) Determina si f es par o non.
- b) Traza la gráfica de f .
- c) Halla los intervalos en que f sea creciente o decreciente.

Solución a) El dominio de f es \mathbb{R} , porque el valor absoluto de f existe para todo número real x . Si x está en \mathbb{R} , entonces

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por lo tanto, f es una función par puesto que $f(-x) = f(x)$

b) Como f es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y . Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y, por lo tanto, la parte de la gráfica que está en el primer cuadrante coincide con la línea $y = x$. Trazar esta semirrecta y usar simetría da la figura 32.

c) Con referencia a la gráfica, vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$.

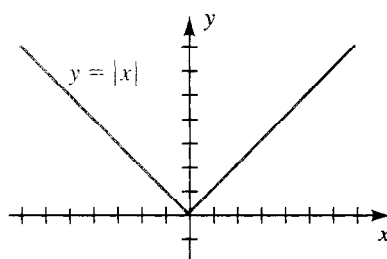


FIGURA 32



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de $f(x) = 1/x$

Traza la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de cero. La función es non porque

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Por consiguiente, la gráfica es simétrica con respecto al origen. Si x es positiva, así es $f(x)$ y, por lo tanto, ninguna parte de la gráfica está en el cuarto cuadrante. En la siguiente tabla se detallan las coordenadas de varios puntos de la gráfica de $y = 1/x$ para $x > 0$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Estas coordenadas llevan a la parte de la gráfica del primer cuadrante (Fig. 33). Al usar simetría con respecto al origen se obtienen los puntos $(-\frac{1}{4}, -4)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(-1, -1)$. . . , que dan la parte de la gráfica del tercer cuadrante.

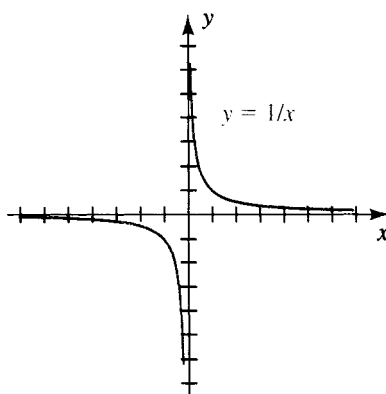


FIGURA 33

En el ejemplo 3, si x está cerca de cero y $x > 0$, entonces $f(x) = 1/x$ es grande, como se ve en la siguiente tabla.

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x) = 1/x$	10	100	1000	10 000	100 000

Se puede hacer $f(x)$ tan grande como se quiera si se escoge una x cercana a 0 y $x > 0$. Esto se denota al escribir

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow 0^+.$$

Se dice que “ $f(x)$ aumenta sin límite a medida que x se aproxima a 0 desde la derecha”; o sea, por valores de x mayores que 0. El símbolo ∞ (léase **infinito**) no representa un número real, pero se usa para denotar la variación descrita de $f(x)$.

Si x es cercana a 0 y $x < 0$, entonces $|f(x)|$ es grande, pero $f(x)$ es negativa, como se ve en la tabla vecina.

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$f(x) = 1/x$	-10	-100	-1000	-10 000	-100 000

En este caso usamos el símbolo $-\infty$ (**menos infinito**) y se escribe

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow 0^-,$$

que se puede leer “ $f(x)$ decrece sin límite a medida que x se aproxima a 0 desde la izquierda”; o sea, por valores de x menores que 0.

En general, la notación $x \rightarrow a^+$ significa que x se aproxima a a desde la *derecha*; esto es, por valores de x *mayores* que a . El símbolo $x \rightarrow a^-$ quiere decir que x se acerca a a desde la *izquierda*, por valores de x *menores* que a . En la figura 34 se muestran algunas ilustraciones de la manera en que una función f puede crecer o decrecer sin límite, junto con la notación correspondiente. En la figura, a es positiva pero también se puede tener $a \leq 0$.

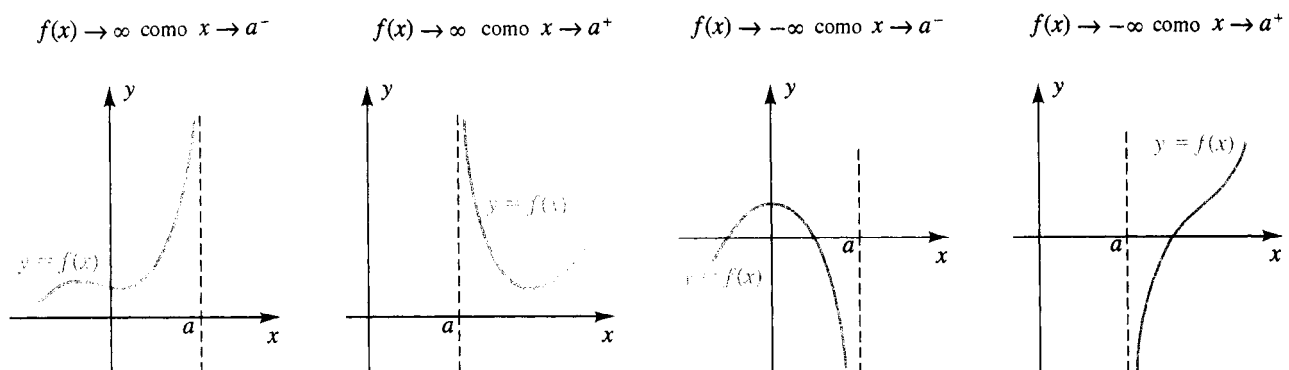


FIGURA 34

La línea punteada $x = a$ de la figura 34 se llama *asíntota vertical*, como en la definición que viene en seguida.

Definición de asíntota vertical

La línea $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ o bien } f(x) \rightarrow -\infty$$

a medida que x se aproxima a a desde la izquierda o la derecha.

En la figura 33 la línea $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical. Como se verá en el capítulo 2, las gráficas de algunas de las funciones trigonométricas tienen asíntotas verticales.

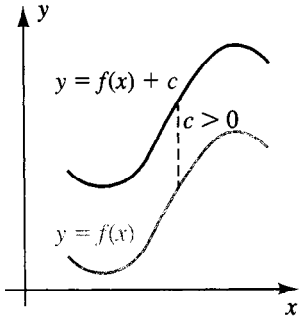
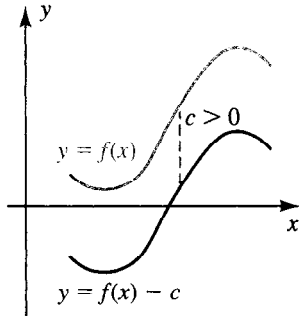
Si, para $f(x) = 1/x$, se asignan valores positivos más y más grandes, entonces los puntos de la gráfica de f se aproximan al eje x , como se indica en la figura 33. Lo mismo es cierto si $x < 0$ y $|x|$ es grande. Llamamos **asíntota horizontal** para la gráfica de $f(x) = 1/x$ a la línea horizontal $y = 0$ (el eje x).

Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$, es fácil trazar las gráficas de

$$y = f(x) + c \quad \text{y} \quad y = f(x) - c$$

para cualquier número real positivo c . Como se ve en la siguiente tabla, para $y = f(x) + c$, se suma c a la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = f(x)$. Esto *desplaza* la gráfica de f *hacia arriba* una distancia c . Para $y = f(x) - c$ con $c > 0$, se resta c de cada coordenada y , por lo que desplaza la gráfica de f una distancia c *hacia abajo*. Estos cambios se llaman **desplazamientos verticales** de gráficas.

Desplazamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(x) + c$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia c	
$y = f(x) - c$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia c	

EJEMPLO 4 Desplazamiento vertical de una gráfica

Traza la gráfica de f :

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 4$

c) $f(x) = x^2 - 4$

Solución Trazamos todas las gráficas en el mismo plano coordenado.

a) Como

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

la función f es par; así pues, su gráfica es simétrica con respecto al eje y . Varios puntos de la gráfica de $y = x^2$ son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 9)$. Si se dibuja una curva suave que pase por estos puntos y se refleja en el eje y , se obtiene el trazo de la figura 35. La gráfica es una parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba.

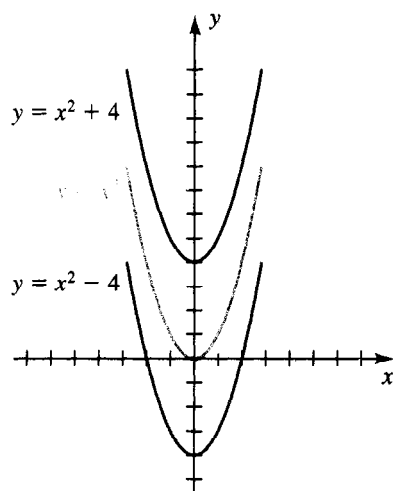


FIGURA 35

b) Para trazar la gráfica de $y = x^2 + 4$ se suma 4 a la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = x^2$; esto es, se desplaza la gráfica en a) hacia arriba cuatro unidades, como se muestra en azul en la figura.

c) Para trazar la gráfica de $y = x^2 - 4$, se resta 4 a la coordenada y de $y = x^2$; es decir, se desplaza la gráfica cuatro unidades hacia abajo en a).

También se pueden considerar **desplazamientos horizontales** de gráficas. Específicamente, si $c < 0$, consideramos las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$ trazadas en el mismo plano coordenado, como se ilustra en la tabla de abajo. Dado que

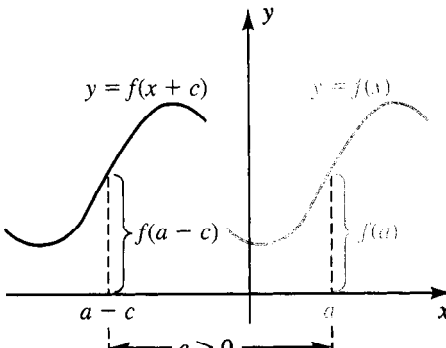
$$f(a) = f([a + c] - c),$$

se ve que el punto con coordenada a en x de la gráfica de $y = f(x)$ tiene la misma coordenada y que el punto con coordenada $a + c$ en x en la gráfica de $y = f(x - c)$. Esto implica que la gráfica de $y = f(x - c)$ se puede obtener si se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha una distancia c . Del mismo modo, la gráfica de $y = f(x + c)$ se tiene corriendo la gráfica de f a la izquierda una distancia c , como en la tabla.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(x - c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza en sentido horizontal a la derecha una distancia c .	

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ (continuación)

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(x + c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza en sentido horizontal a la izquierda una distancia c .	

Los desplazamientos horizontales y verticales se llaman *traslaciones*.

EJEMPLO 5 Desplazamiento horizontal de una gráfica

Traza la gráfica de f :

a) $f(x) = (x - 4)^2$

b) $f(x) = (x + 2)^2$

Solución La gráfica de $y = x^2$ está trazada en la figura 36.

a) Desplazar la gráfica de $y = x^2$ cuatro unidades a la derecha dará la gráfica de $y = (x - 4)^2$, que se muestra en la figura.

b) Correr la gráfica de $y = x^2$ dos unidades a la izquierda dará la gráfica de $y = (x + 2)^2$, que se ilustra en la figura.

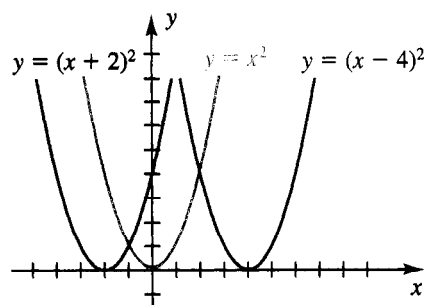
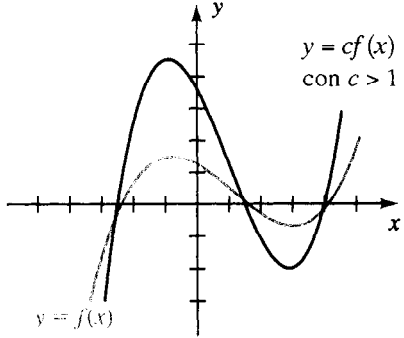
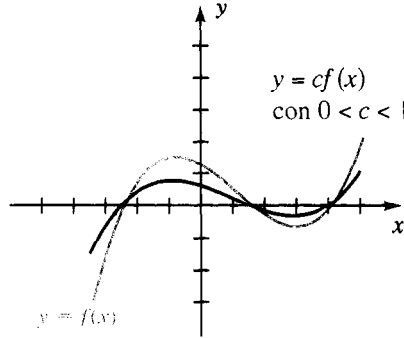


FIGURA 36

Para obtener la gráfica de $y = cf(x)$ de algún número real c , se pueden *multiplicar* por c las coordenadas y de puntos de la gráfica de $y = f(x)$; por ejemplo, si $y = 2f(x)$, se duplican las coordenadas y , o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, se multiplica cada coordenada y por $\frac{1}{2}$. Este procedimiento se conoce como **alargamiento vertical** de la gráfica de f (si $c > 1$) o **compresión vertical** de la gráfica (si $0 < c < 1$) y se resume en la tabla que sigue.

Alargamiento o compresión vertical de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = cf(x)$ con $c > 1$	La gráfica de f se alarga en sentido vertical en un factor c .	 El gráfico muestra una función $y = f(x)$ en gris y su transformación $y = cf(x)$ en negro para $c > 1$. La curva negra está más estirada verticalmente que la gris, manteniendo la misma forma pero con una mayor amplitud.
$y = cf(x)$ con $0 < c < 1$	La gráfica de f se comprime verticalmente en un factor $1/c$.	 El gráfico muestra una función $y = f(x)$ en gris y su transformación $y = cf(x)$ en negro para $0 < c < 1$. La curva negra está más comprimida verticalmente que la gris, manteniendo la misma forma pero con una menor amplitud.

EJEMPLO 6 Alargamiento o compresión vertical de una gráfica

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = 4x^2$ **b)** $y = \frac{1}{4}x^2$

Solución **a)** Para trazar la gráfica de $y = 4x^2$ se puede consultar la gráfica de $y = x^2$ de la figura 37 y multiplicar la coordenada y de cada punto por 4. Esto alarga la gráfica de $y = x^2$ verticalmente por un factor de 4 y da una parábola más estrecha que es más aguda en el vértice, como se aprecia en la figura.

b) La gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ puede trazarse si se multiplican por $\frac{1}{4}$ las coordenadas y de puntos de la gráfica de $y = x^2$. Esto comprime la gráfica de $y = x^2$ verticalmente por un factor $1/\frac{1}{4} = 4$ y nos dará una parábola más ancha que es más plana en el vértice, como se muestra en la figura 37 en la página siguiente.

La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene multiplicando la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$ por -1 . Así, todo punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentre arriba del eje x determina un punto $(a, -b)$ de la gráfica de $y = -f(x)$ que se halle abajo del eje x . En forma análoga, si (c, d) se encuentra abajo del eje x (es decir, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ está arriba del eje x . La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ por el eje x .

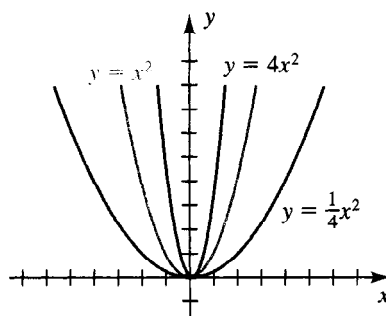


FIGURA 37

EJEMPLO 7 Reflexión de una gráfica por el eje x

Traza la gráfica de $y = -x^2$.

Solución La gráfica se puede encontrar al trazar puntos; sin embargo, dado que la gráfica de $y = x^2$ es conocida, se traza como en la figura 38 y luego las coordenadas y se multiplican por -1 . Este procedimiento dará la reflexión por el eje x indicado en la figura.

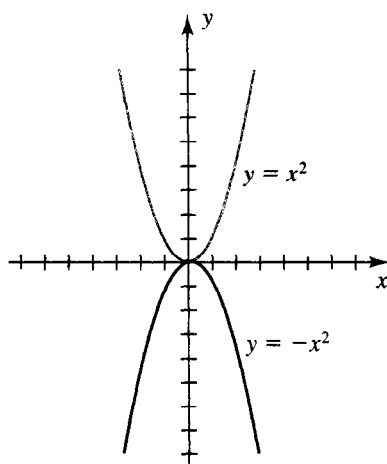


FIGURA 38

A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$, en donde c es una constante diferente de cero. En este caso los valores de función $f(x)$ para

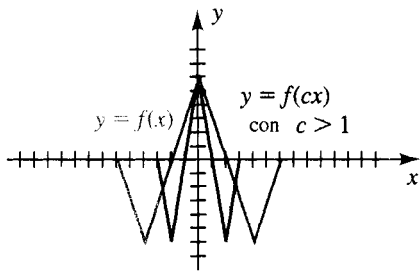
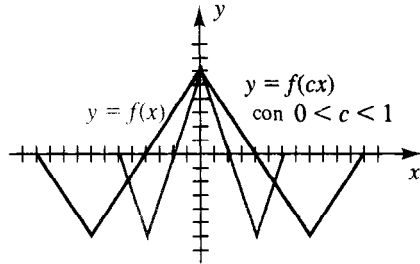
$$a \leq x \leq b$$

son los mismos que los valores de función $f(cx)$ para

$$a \leq cx \leq b \quad \text{o, lo que es igual,} \quad \frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}.$$

Esto implica que la gráfica de f está **horizontalmente comprimida** (si $c > 1$) u **horizontalmente alargada** (si $0 < c < 1$), como se resume en la siguiente tabla.

Compresión y alargamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(cx)$ con $c > 1$	La gráfica de f está horizontalmente comprimida por un factor c .	
$y = f(cx)$ con $0 < c < 1$	La gráfica de f está horizontalmente alargada por un factor $1/c$.	

Si $c < 0$, entonces la gráfica de $y = f(cx)$ se puede obtener al reflejar la gráfica de $y = f(|c|x)$ por el eje y ; por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, reflejamos la gráfica de $y = f(2x)$ por el eje y .

EJEMPLO 8**Alargamiento y compresión horizontal de una gráfica**

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, traza la gráfica de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(\frac{1}{2}x)$.

Solución Tenemos lo siguiente:

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$$

$$y = f(2x) = (2x)^3 - 4(2x)^2 = 8x^3 - 16x^2 = 8x^2(x - 2)$$

$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{8}x^3 - x^2 = \frac{1}{8}x^2(x - 8)$$

Notarás que las intersecciones x de la gráfica de $y = f(2x)$ son 0 y 2, que son $\frac{1}{2}$ de las intersecciones x de 0 y 4 para $y = f(x)$. Esto indica una compresión horizontal por un factor de 2.

Las intersecciones x de la gráfica de $y = f(\frac{1}{2}x)$ son 0 y 8, que son 2 veces las intersecciones x para $y = f(x)$. Esto significa un alargamiento horizontal por un factor de $1/\frac{1}{2} = 2$.

Las gráficas, obtenidas en un equipo graficador con pantalla $[-6, 15]$ por $[-10, 4]$, se muestran en la figura 39.

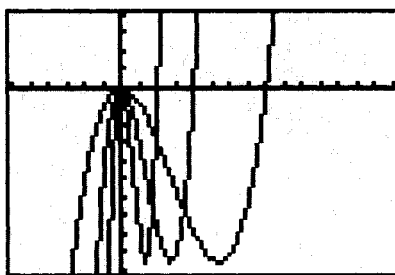


FIGURA 39

1.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: determina si f es par, non o ninguna.

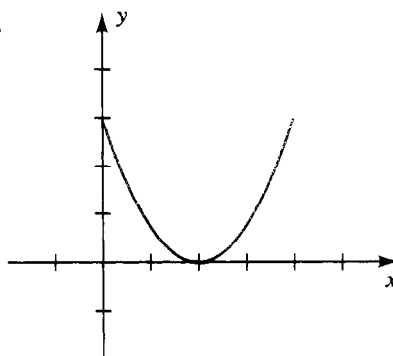
- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 1. $f(x) = 5x^3 + 2x$ | 2. $f(x) = x - 3$ |
| 3. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5$ | 4. $f(x) = 7x^5 - 4x^3$ |
| 5. $f(x) = 8x^3 - 3x^2$ | 6. $f(x) = 12$ |
| 7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ | 8. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ |

Ejercicios 9 al 20: traza, en el mismo plano de coordenadas, las gráficas de f para los valores dados de c . (Emplea simetría, desplazamiento, alargamiento, compresión o reflexión.)

- | | |
|------------------------------------|--------------------------|
| 9. $f(x) = x + c$, | $c = -3, 1, 3$ |
| 10. $f(x) = x - c $, | $c = -3, 1, 3$ |
| 11. $f(x) = -x^2 + c$, | $c = -4, 2, 4$ |
| 12. $f(x) = 2x^2 - c$, | $c = -4, 2, 4$ |
| 13. $f(x) = 2\sqrt{x} + c$, | $c = -3, 0, 2$ |
| 14. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c$, | $c = -3, 0, 2$ |
| 15. $f(x) = c\sqrt{4 - x^2}$, | $c = -2, 1, 3$ |
| 16. $f(x) = cx^3$, | $c = -\frac{1}{3}, 1, 2$ |
| 17. $f(x) = (cx)^3 + 1$, | $c = -1, 1, 4$ |
| 18. $f(x) = \sqrt{cx} - 1$, | $c = -1, \frac{1}{9}, 4$ |
| 19. $f(x) = \frac{2}{x - c}$, | $c = -3, 0, 2$ |
| 20. $f(x) = \frac{1}{(x + c)^2}$, | $c = -1, 0, 2$ |

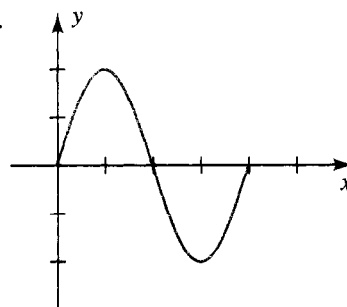
Ejercicios 21 y 22: en la figura se muestra la gráfica de una función f con dominio $[0, 4]$; traza la gráfica de la ecuación dada.

21.



- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $y = f(x + 3)$ | b) $y = f(x - 3)$ |
| c) $y = f(x) + 3$ | d) $y = f(x) - 3$ |
| e) $y = -3f(x)$ | f) $y = -\frac{1}{3}f(x)$ |
| g) $y = f(-\frac{1}{2}x)$ | h) $y = f(2x)$ |
| i) $y = -f(x + 2) - 3$ | j) $y = f(x - 2) + 3$ |

22.

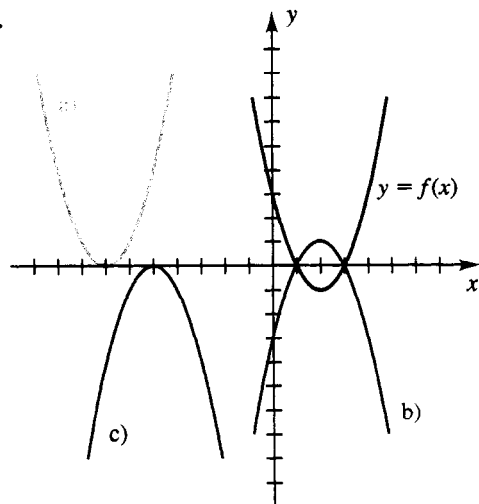


- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $y = f(x - 2)$ | b) $y = f(x + 2)$ |
| c) $y = f(x) - 2$ | d) $y = f(x) + 2$ |

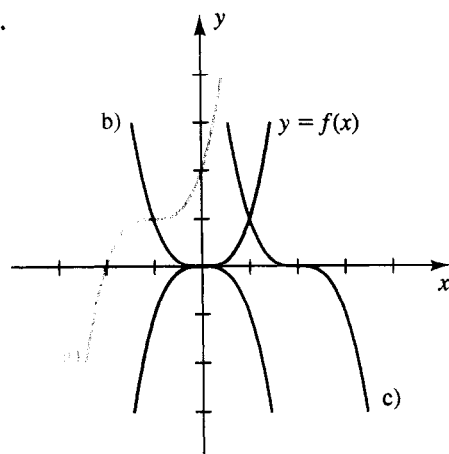
- e) $y = -2f(x)$ f) $y = -\frac{1}{2}f(x)$
 g) $y = f(-2x)$ h) $y = f(\frac{1}{2}x)$
 i) $y = -f(x+4) - 2$ j) $y = f(x-4) + 2$

Ejercicios 23 al 26: se muestran la gráfica de una función f , y las gráficas de tres funciones a), b) y c). Usa las propiedades de simetría, desplazamientos y reflexión para hallar las ecuaciones de las gráficas a), b) y c) en términos de f .

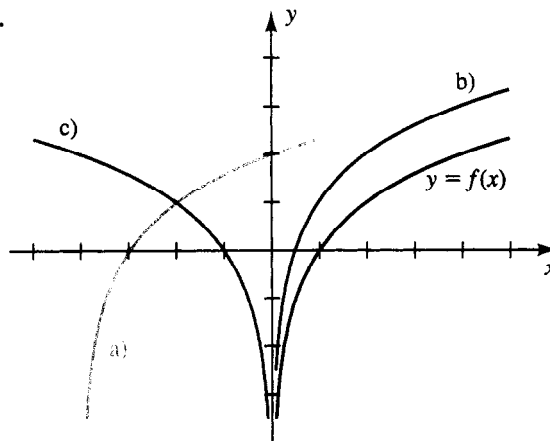
23.



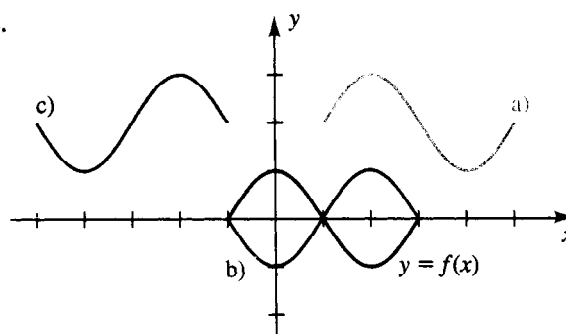
24.



25.



26.



Ejercicios 27 al 30: calcula las soluciones de la desigualdad.

27. $x^3 - 4x > 2$

28. $x^4 - 4x^2 > -1$

29. $-0.1x^4 + 0.7x^2 < 4 - x^2$

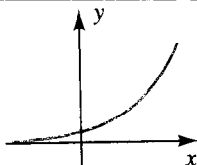
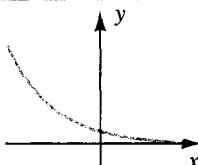
30. $0.2x^5 + 0.1x^3 < x$

1.5 Funciones exponenciales y logarítmicas

En varios ejercicios de este texto intervienen funciones exponenciales y logarítmicas; el breve estudio de la presente sección debe darte suficiente información para trabajarlos. El material de esta sección también aparece en el capítulo 5, que ofrece un análisis más completo de estas funciones.



Si a es un número real positivo diferente de 1, entonces se puede demostrar que a cada número real x le corresponde exactamente un número positivo a^x tal que se cumplen las leyes de los exponentes; por lo tanto, como en la siguiente tabla, se puede definir una función f cuyo dominio es \mathbb{R} y su rango es el conjunto de números reales positivos.

Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en \mathbb{R} , en donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Las gráficas de la tabla muestran que si $a > 1$, entonces f es creciente en \mathbb{R} , y si $0 < a < 1$, entonces f es decreciente en \mathbb{R} . (Esto se puede demostrar mediante cálculo.) Las gráficas indican el aspecto *general*; es decir, la forma *exacta* depende del valor de a . Pero advertirás que como $a^0 = 1$, la intersección y es 1 para toda a .

Si $a > 1$, entonces a medida que x *decrece* a través de valores negativos, la gráfica de f se aproxima al eje x (consulta la tercera columna de la tabla); por lo tanto, el eje x es una *asíntota horizontal*. A medida que x crece a través de valores positivos, la gráfica sube con rapidez. Este tipo de variación es característica de la **ley exponencial de crecimiento** y f se llama **función de crecimiento**.

Si $0 < a < 1$, entonces a medida que x *crece*, la gráfica de f se aproxima asintóticamente al eje x (consulta la última columna de la tabla). Este tipo de variación se conoce como **decremento** o **decaimiento exponencial**.

En los siguientes dos ejemplos se trazan las gráficas de varias funciones exponenciales diferentes.

EJEMPLO 1 Trazar gráficas de funciones exponenciales

Si $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ y $g(x) = 3^x$, traza las gráficas de f y g en el mismo plano de coordenadas.

Solución Como $\frac{3}{2} > 1$ y $3 > 1$, cada gráfica *sube* a medida que x crece. La siguiente tabla muestra las coordenadas para varios puntos de las gráficas.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\frac{4}{9} \approx 0.4$	$\frac{2}{3} \approx 0.7$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
$y = 3^x$	$\frac{1}{9} \approx 0.1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3$	1	3	9	27	81

Trazar puntos y familiarizarse con la gráfica general de $y = a^x$ lleva a las gráficas de la figura 40.

El ejemplo 1 ilustra que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x y $b^x < a^x$ para valores negativos de x . En particular, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ estará entre las gráficas de f y g de la figura 40.

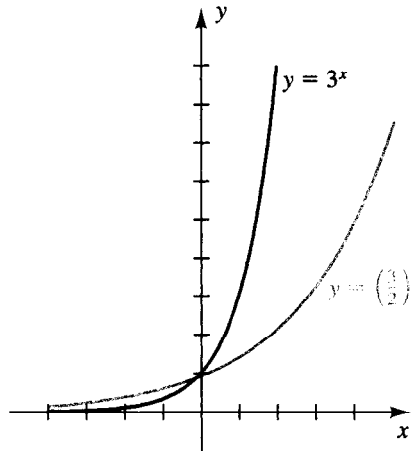


FIGURA 40

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de una función exponencial

Traza la gráfica de la ecuación $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución: Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, la gráfica *cae* a medida que x crece. Las coordenadas de algunos puntos de la gráfica se detallan en esta tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica está trazada en la figura 41. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, la gráfica es la misma que la de la ecuación $y = 2^{-x}$.

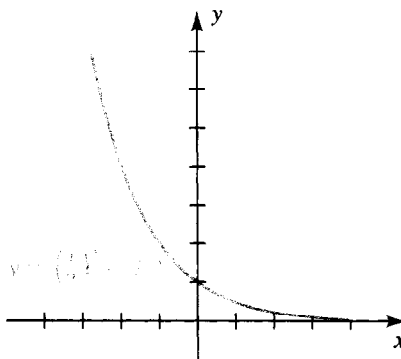


FIGURA 41

En investigaciones relacionadas con fenómenos físicos como el crecimiento de un cultivo de bacterias o la desintegración de sustancias radiactivas, aparece cierto número irracional denotado

por e como base de una función exponencial. Mediante cálculo se puede obtener la siguiente aproximación a cinco lugares decimales.

Aproximación a e

$$e \approx 2.71828$$

Dado que e figura en el estudio de una gran variedad de situaciones en la naturaleza, la función exponencial con base e se llama *función exponencial natural*, como en la próxima definición.

Definición de la función exponencial natural

La función exponencial natural f se denota por

$$f(x) = e^x$$

para todo número real x .

Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ estará entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, según se muestra en la figura 42. Las calculadoras científicas tienen una tecla de $[e^x]$ para calcular valores de la función exponencial natural, y las calculadoras graficadoras son útiles en el trazo su gráfica.

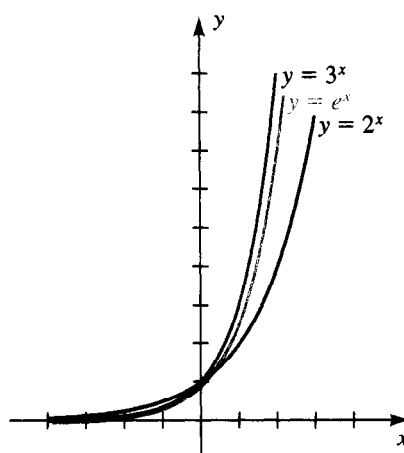


FIGURA 42

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de una función exponencial

Traza la gráfica de f si $f(x) = e^{-x}$.

Solución Escribamos

$$f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$$

y observemos que como $2 < e < 3$, tendremos $\frac{1}{3} < 1/e < \frac{1}{2}$; por lo tanto, la gráfica de f es decreciente en \mathbb{R} y estará entre las gráficas de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. En forma más precisa, en la figura 43 se puede ver que la gráfica de f es la reflexión de la gráfica de $y = e^x$ por el eje de las y , porque si (k, e^k) es un punto de la gráfica de $y = e^x$, entonces $(-k, e^k)$ es un punto de la gráfica de f .

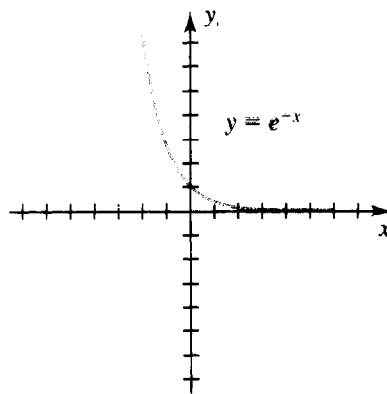


FIGURA 43

Las *funciones logarítmicas* se pueden usar para calcular la magnitud de un temblor, hallar la vida media de una sustancia radiactiva o investigar una amplia variedad de otros fenómenos físicos. Estas funciones se definen en términos de funciones exponenciales, como en la definición de abajo.

Definición de \log_a

Sea a un número real positivo diferente de 1. El **logaritmo de x con base a** está definido por

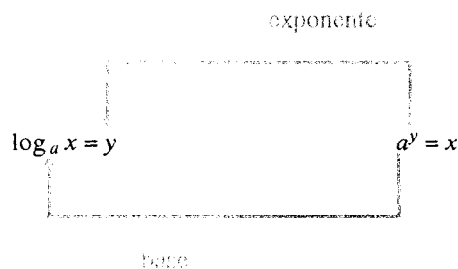
$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y .

Podrás notar que las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. Llamamos **forma logarítmica** a la primera ecuación, y **forma exponencial** a la segunda. El siguiente diagrama puede ayudarte a recordar cómo convertir una forma en otra.

Forma logarítmica

Forma exponencial



Observarás que cuando las formas se cambian, *las bases de las formas logarítmica y exponencial son las mismas*. El número y (es decir, $\log_a x$) corresponde al exponente en la forma exponencial; en otras palabras, $\log_a x$ es el exponente al que la base debe elevarse para obtener x .

La siguiente ilustración contiene ejemplos de formas equivalentes.

ILUSTRACIÓN

Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
■ $\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
■ $\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
■ $r = \log_p q$	$p^r = q$
■ $w = \log_4 (2t + 3)$	$4^w = 2t + 3$

El próximo ejemplo presenta una aplicación en que interviene el cambio de una forma exponencial en logarítmica.

EJEMPLO 4 Cambiar forma exponencial en logarítmica

El número N de bacterias en cierto cultivo después de t horas está dado por $N = (1000)2^t$. Expresa t como función logarítmica de N con base 2.

Solución Si $N = (1000)2^t$, entonces

$$2^t = \frac{N}{1000}.$$

Al cambiar a forma logarítmica se obtiene

$$t = \log_2 \frac{N}{1000}.$$

Las siguientes propiedades generales se deducen de la interpretación de $\log_a x$ como exponente.

Propiedad de $\log_a x$	Razón	Demostración
(1) $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_{10} 10 = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
(4) $a^{\log_a x} = x$	Ve abajo	$5^{\log_5 7} = 7$

La razón para la propiedad (4) se infiere directamente de la definición de \log_a , porque

$$\text{si } y = \log_a x, \text{ entonces } x = a^y \text{ o } x = a^{\log_a x}$$

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de una función logarítmica

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 x$.

Ejemplo 1 Si se escribe $y = \log_3 x$ y se cambia a forma exponencial, se obtiene

$$x = 3^y$$

Al sustituir varios valores con y y hallar los valores correspondientes de x , resultará esta tabla.

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x = 3^y$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Estos valores llevan al dibujo de la figura 44.

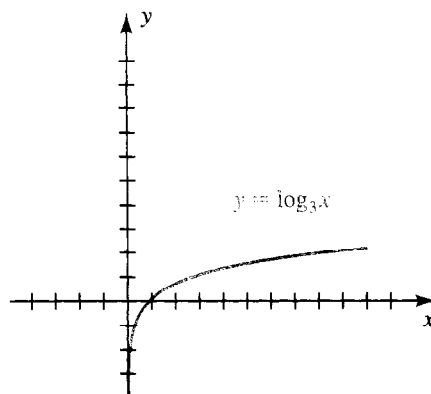


FIGURA 44

Si $a > 1$, la gráfica de $y = \log_a x$ tiene el aspecto general de la gráfica de la figura 44; sin embargo, si a crece, la gráfica se acerca más al eje x para $x > 1$. Si a es cercana a 1 (y $a > 1$), la gráfica sube más rápidamente para $x > 1$.

La base $0 < a < 1$ se usa raras veces y, por lo tanto, no estudiaremos aquí gráficas para este caso.

Antes de que se inventaran las calculadoras electrónicas, se usaban los logaritmos de base 10 en cálculos numéricos complicados con productos, cocientes y potencias de números reales. La base 10 se utilizaba porque está bien adaptada a los números reales que se expresan en forma decimal. Los logaritmos de base 10 se llaman **logaritmos comunes**. El símbolo $\log x$ se usa como abreviatura de $\log_{10} x$.

Definición de logaritmo común

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{para toda } x > 0$$

Como ahora se dispone de calculadoras de bajo costo, no hay necesidad de logaritmos comunes como herramientas para trabajos de cálculos. Sin embargo, la base 10 posee aplicaciones y muchas calculadoras cuentan con una tecla **LOG**, misma que se puede usar para calcular logaritmos comunes. La gráfica de $y = \log x$ de la figura 45 se puede obtener como en el ejemplo 5 al trazar $x = 10^y$.

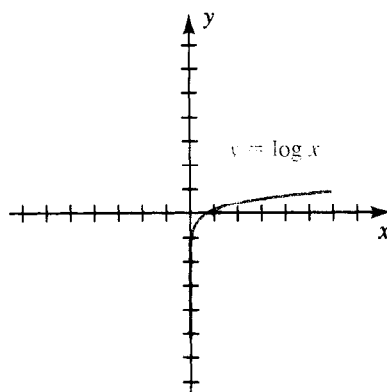


FIGURA 45

La función exponencial natural está dada por $f(x) = e^x$. La función logarítmica con base e se llama **función logarítmica natural**. El símbolo $\ln x$ es una abreviatura de $\log_e x$, y se conoce como **logaritmo natural de x** .

Definición de logaritmo natural

$$\ln x = \log_e x \quad \text{para toda } x > 0$$

Muchas calculadoras tienen una tecla marcada $\boxed{\text{LN}}$, que se puede usar para calcular logaritmos naturales. Como $e \approx 2.7 \approx 3$, la gráfica de $y = \ln x$ es semejante a la de $y = \log_3 x$ de la figura 44.

Las siguientes leyes son fundamentales para todo trabajo con logaritmos. En el capítulo 5 se pueden encontrar pruebas basadas en las leyes de los exponentes.

Leyes de logaritmos

Si u y w denotan números reales positivos, entonces

- (1) $\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$
- (2) $\log_a \frac{u}{w} = \log_a u - \log_a w$
- (3) $\log_a (u^c) = c \log_a u$ para todo número real c .

El ejemplo inmediato ilustra un uso de estas leyes.

EJEMPLO 6 Uso de las leyes de logaritmos

Expresa $\log_a \frac{x^2 \sqrt[3]{y}}{z^4}$ en términos de logaritmos de x , y y z .

Solución Se escribe $\sqrt[3]{y}$ como $y^{1/3}$ y se usan las leyes de los logaritmos:

$$\log_a \frac{x^2 \sqrt[3]{y}}{z^4} = \log_a (x^2 y^{1/3}) - \log_a z^4 \quad \text{ley (2)}$$

$$= \log_a x^2 + \log_a y^{1/3} - \log_a z^4 \quad \text{ley (1)}$$

$$= 2 \log_a x + \frac{1}{3} \log_a y - 4 \log_a z \quad \text{ley (3)}$$

1.5 EJERCICIOS

1. Traza la gráfica de f si $a = 2$.

a) $f(x) = a^x$ b) $f(x) = -a^x$ c) $f(x) = 3a^x$

d) $f(x) = a^{x+3}$ e) $f(x) = a^x + 3$ f) $f(x) = a^{x-3}$

g) $f(x) = a^x - 3$ h) $f(x) = a^{-x}$ i) $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

j) $f(x) = a^{3-x}$

2. Trabaja el ejercicio 1 si $a = \frac{1}{2}$.

Ejercicios 3 al 6: traza la gráfica de f .

3. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$ 4. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

5. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ 6. $f(x) = 3^x + 9$

Ejercicios 7 y 8: usa la gráfica de $y = e^x$ para ayudar a trazar la gráfica de f .

7. a) $f(x) = e^x + 4$ b) $f(x) = e^x + 4$

8. a) $f(x) = e^{-2x}$ b) $f(x) = -2e^x$

Ejercicios 9 y 10: pasa a forma logarítmica.

9. a) $4^3 = 64$ b) $4^{-3} = \frac{1}{64}$ c) $t^r = s$

10. a) $3^5 = 243$ b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ c) $c^p = d$

Ejercicios 11 y 12: cambia a forma exponencial.

11. a) $\log_2 32 = 5$ b) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$ c) $\log_t r = p$

12. a) $\log_3 81 = 4$ b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$ c) $\log_v w = q$

Ejercicios 13 y 14: pasa a forma logarítmica.

13. a) $10^5 = 100,000$ b) $10^{-3} = 0.001$ c) $10^x = y + 1$

14. a) $10^4 = 10,000$ b) $10^{-2} = 0.01$ c) $10^x = 38z$

Ejercicios 15 y 16: cambia a forma exponencial.

15. a) $\log x = 50$ b) $\log x = 20t$ c) $\ln x = 0.1$

16. a) $\log x = -8$ b) $\log x = y - 2$ c) $\ln x = \frac{1}{2}$

Ejercicios 17 y 18: halla el número, si posible.

17. a) $\log_5 1$ b) $\log_3 3$ c) $\log_4 (-2)$

d) $\log_7 7^2$

e) $3^{\log_3 8}$

f) $\log_5 125$

g) $\log_4 \frac{1}{16}$

18. a) $\log_8 1$

b) $\log_9 9$

c) $\log_5 0$

d) $\log_6 6^7$

e) $5^{\log_5 4}$

f) $\log_3 243$

g) $\log_2 128$

Ejercicios 19 y 20: encuentra el número.

19. a) $10^{\log 3}$

b) $\log 10^5$

c) $\log 100$

d) $\log 0.0001$

e) $e^{\ln 2}$

f) $\ln e^{-3}$

g) $e^{2 + \ln 3}$

20. a) $10^{\log 7}$

b) $\log 10^{-6}$

c) $\log 100,000$

d) $\log 0.001$

e) $e^{\ln 8}$

f) $\ln e^{2/3}$

g) $e^{1 + \ln 5}$

21. Traza la gráfica de f si $a = 4$:

a) $f(x) = \log_a x$

b) $f(x) = -\log_a x$

c) $f(x) = 2 \log_a x$

d) $f(x) = \log_a (x + 2)$

e) $f(x) = (\log_a x) + 2$

f) $f(x) = \log_a (x - 2)$

g) $f(x) = (\log_a x) - 2$

h) $f(x) = \log_a |x|$

i) $f(x) = \log_a (-x)$

j) $f(x) = \log_a (3 - x)$

k) $f(x) = |\log_a x|$

22. Trabaja el ejercicio 21 si $a = 5$.

Ejercicios 23 al 26: traza la gráfica de f .

23. $f(x) = \log x - 1$

24. $f(x) = \log (-x)$

25. $f(x) = 2 - \ln x$

26. $f(x) = \ln (x - 1)$

Ejercicios 27 al 30: expresa en términos de logaritmos de x , y , z o w .

27. a) $\log_4 (xz)$

b) $\log_4 (y/x)$

c) $\log_4 \sqrt[3]{z}$

28. a) $\log_3 (xyz)$

b) $\log_3 (xz/y)$

c) $\log_3 \sqrt[5]{y}$

29. $\log_a \frac{x^3 w}{y^2 z^4}$

30. $\log_a \frac{y^5 w^2}{x^4 z^3}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Sustituye el símbolo \square con $<$, $>$ o $=$ para que el enunciado resultante sea verdadero.

a) $-0.1 \square -0.001$ b) $\sqrt{9} \square -3$ c) $\frac{1}{6} \square 0.166$

2. Expresa como desigualdad:

a) x es negativa.

b) a está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

c) El valor absoluto de x no es mayor que 4.

3. Reescribe sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica:

a) $|-7|$ b) $\frac{|-5|}{-5}$ c) $|3^{-1} - 2^{-1}|$

4. Si los puntos A , B y C en una línea coordenada tienen coordenadas -8 , 4 y -3 , respectivamente, halla la distancia:

a) $d(A, C)$ b) $d(C, A)$ c) $d(B, C)$

Ejercicios 5 al 8: resuelve la ecuación.

5. $3x + 5 = -4(x - 2)$ 6. $-2(4x - 7) = 5(8 - x)$

7. $2x^2 + 5x - 12 = 0$ 8. $(x - 2)(x + 1) = 3$

9. Expresa la desigualdad como intervalo y traza su gráfica:

a) $x < 3$ b) $-3 \leq x \leq 3$ c) $0 < x < \frac{\pi}{2}$

10. Expresa el intervalo como desigualdad en la variable x :

a) $[-5, \infty)$ b) $(-2, 2]$ c) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

11. Describe el conjunto de todos los puntos (x, y) en un plano coordenado tal que $y/x < 0$.

12. Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, encuentra

a) La distancia $d(P, Q)$

b) El punto medio del segmento PQ

Ejercicios 13 al 22: traza la gráfica de la ecuación y nombra (o etiqueta) las intersecciones x y y .

13. $x + 5 = 0$

14. $2y - 7 = 0$

15. $2y + 5x - 8 = 0$

16. $x = 3y + 4$

17. $9y + 2x^2 = 0$

18. $3x - 7y^2 = 0$

19. $y = \sqrt{1-x}$

20. $y = (x - 1)^3$

21. $y^2 = 16 - x^2$

22. $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$

23. Halla una ecuación del círculo que tenga centro $C(7, -4)$ y pase por $P(-3, 3)$.

24. Encuentra una ecuación del círculo que tenga puntos extremos de un diámetro $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

Ejercicios 25 y 26: halla el centro y radio del círculo con la ecuación dada.

25. $x^2 + y^2 - 12y + 31 = 0$

26. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 16y + 39 = 0$

27. Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$, hallar

a) $f(1)$ b) $f(-1)$ c) $f(0)$ d) $f(-x)$
e) $-f(x)$ f) $f(x^2)$ g) $[f(x)]^2$

28. Determina el dominio e intervalo de f si

a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ b) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

29. Halla $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ si $f(x) = -x^2 + x + 5$ y $h \neq 0$.

30. Determina si la función f si biunívoca.

a) $f(x) = 2x^3 - 5$ b) $f(x) = 3x^2 + 1$

Ejercicios 31 al 34: a) traza la gráfica de f ; b) halla el dominio D e intervalo R de f ; c) define los intervalos en que f sea creciente, decreciente o constante.

31. $f(x) = \frac{1-3x}{2}$

32. $f(x) = 1000$

33. $f(x) = |x + 3|$

34. $f(x) = 9 - x^2$

35. Determina si f es par, non o ninguna de estas dos.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 5}$

36. Trazas las gráficas de las siguientes ecuaciones, usando desplazamiento, alargamiento o reflexión.

a) $y = \sqrt{y}$

b) $y = \sqrt{x+4}$

c) $y = \sqrt{x} + 4$

d) $y = 4\sqrt{y}$

e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$

f) $y = -\sqrt{x}$

37. En la figura (pág. 57) se ilustra la gráfica de la función f con dominio $[-3, 3]$; traza la gráfica de la ecuación dada.

a) $y = f(x - 2)$

b) $y = f(x) - 2$

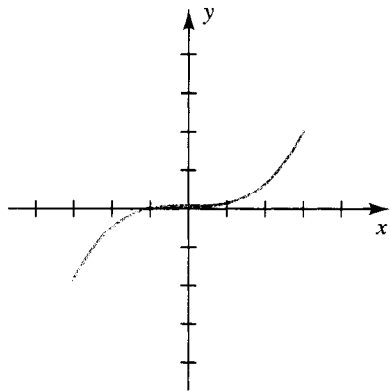
c) $y = f(-x)$

d) $y = f(2x)$

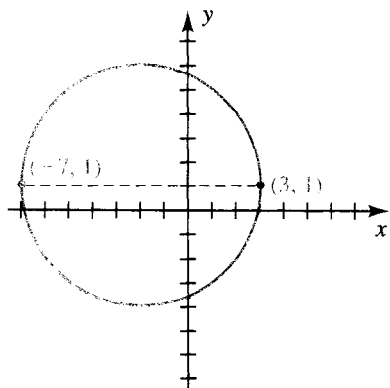
e) $y = f(\frac{1}{2}x)$

38. Halla una ecuación para la gráfica de la figura (pág. 57).

39. Expresa el área A de un triángulo equilátero como función de la longitud s de un lado.



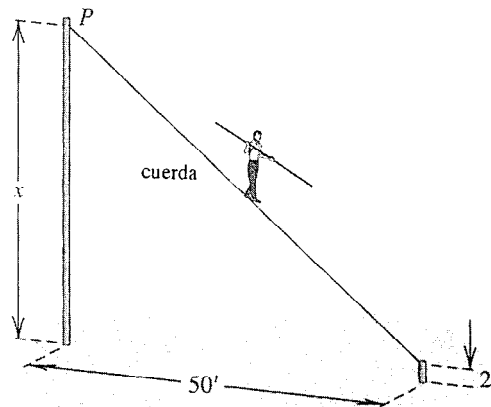
EJERCICIO 37



EJERCICIO 38

40. Longitud de una cuerda floja La figura ilustra el aparato para un equilibrista. Dos postes se ponen a 50 pies uno de otro, pero el punto P de sujeción de la cuerda está por determinarse.

- Expresa la longitud L de la cuerda como función de la distancia x de P al suelo.
- Si la caminata total es de 75 pies, determina la distancia de P al suelo.



EJERCICIO 40

Ejercicios 41 al 45: traza la gráfica de f .

41. $f(x) = 3^{x+2}$
42. $f(x) = 3^{-2x}$
43. $f(x) = 1 - 3^{-x}$
44. $f(x) = e^{x/2}$
45. $f(x) = \log_2(x+4)$

Ejercicios 46 y 47: evalúa sin usar calculadora o tabla.

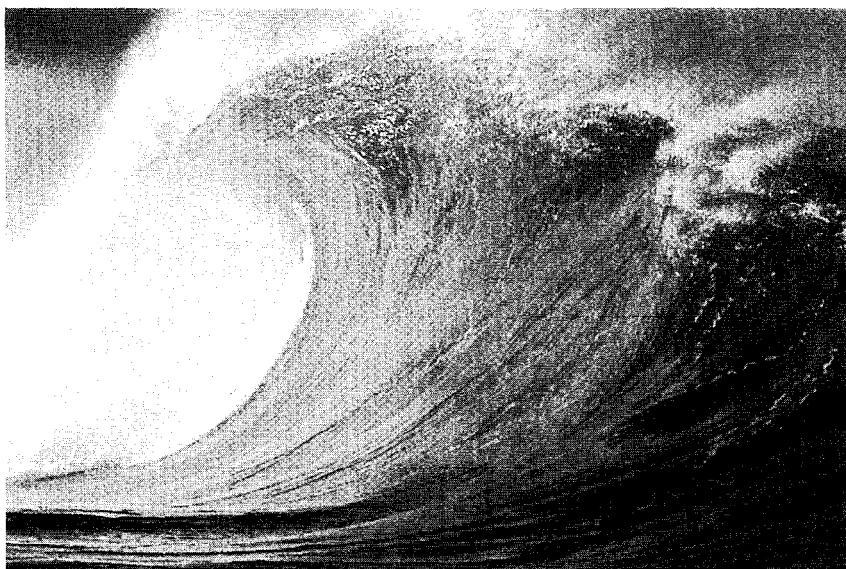
46. a) $\log_2 \frac{1}{16}$ b) $\log_\pi 1$ c) $\ln e$
- d) $6^{\log_6 4}$ e) $\log 1\,000\,000$ f) $10^{3\log 2}$
- g) $\log_4 2$
47. a) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ b) $\log_5 1$ c) $\log 10$
- d) $e^{\ln 5}$ e) $\log \log 10^{10}$ f) $e^{2\ln 5}$
- g) $\log_{27} 3$
48. Expresar $x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$ en función de logaritmos x , y y z .



Funciones trigonométricas

2

- 2.1 Ángulos
- 2.2 Funciones trigonométricas
- 2.3 Gráficas de las funciones trigonométricas
- 2.4 Funciones trigonométricas de ángulos
- 2.5 Valores de las funciones trigonométricas
- 2.6 Gráficas trigonométricas
- 2.7 Otras gráficas trigonométricas
- 2.8 Aplicaciones con triángulos rectángulos
- 2.9 Movimiento armónico



*El movimiento de las olas del mar
es una ilustración de una función periódica.*

El movimiento armónico simple

■ La trigonometría fue inventada hace más de 2000 años por los griegos, quienes necesitaban métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. De hecho, la palabra trigonometría se derivó de las palabras griegas *trigonon* (triángulo) y *metria* (medición). Este capítulo comienza con un análisis de los ángulos y cómo se miden; en seguida presentamos las funciones trigonométricas mediante el uso de un círculo unitario y luego analizamos sus gráficas. Este moderno método para estudiar trigonometría es seguido por métodos clásicos que utilizan razones de lados de triángulos rectángulos. Luego consideramos técnicas de graficación que aplican amplitudes, periodos y desfases. El capítulo concluye con una breve descripción del movimiento armónico. ■

2.1 Ángulos

En geometría, un **ángulo** se define como el conjunto de puntos determinado por dos rayos, o semirrectas, l_1 y l_2 , que tienen el mismo punto extremo O . Si A y B son puntos en l_1 y l_2 , (Fig. 1), nos referimos al **ángulo** AOB , o sea $\angle AOB$. Un ángulo también se puede considerar como dos segmentos de recta finitos con un punto extremo común.



FIGURA 1

En trigonometría, con frecuencia se interpretan los ángulos como rotaciones de líneas. Comencemos con un rayo fijo l_1 cuyo punto extremo es O , y se hace girar alrededor de O en un plano hasta una posición especificada por la línea l_2 . A l_1 se le llama **lado inicial**, l_2 es el **lado terminal** y O es el **vértice** de $\angle AOB$. La cantidad o dirección de rotación no está restringida en modo alguno. Es posible que l_1 haga varias revoluciones en cualquier dirección alrededor de O antes de llegar a la posición de l_2 , conforme ilustran las flechas curvas de la figura 2; por lo tanto, muchos ángulos diferentes tienen los mismos lados iniciales y terminales. Dos ángulos cualesquiera de este tipo se llaman **ángulos coterminales**.

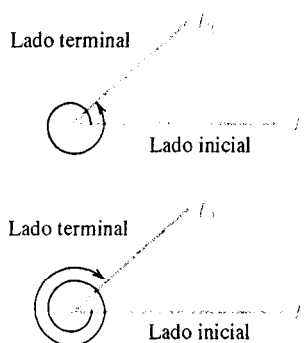


FIGURA 2 Ángulos coterminales

Si introducimos un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la **posición estándar** de un ángulo se obtiene al colocar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial l_1 coincida con el eje x positivo. Si l_1 se hace girar en dirección *contraria al giro de las manecillas de un reloj* hasta la posición terminal l_2 , el ángulo se considera **positivo**. Si l_1 gira en dirección *de las manecillas*, el ángulo es **negativo**. Los ángulos se denotan muchas veces con letras griegas minúsculas como α (alfa), β (beta), γ (gamma), θ (theta), ϕ (fi) y así sucesivamente. La figura 3 contiene trazos de dos ángulos positivos, α y β , y un ángulo negativo, γ . Si el lado terminal de un ángulo en posición

estándar está en cierto cuadrante, se dice que el *ángulo* se halla en ese cuadrante. En la figura 3, α está en el tercer cuadrante, β en el primero y γ en el segundo. Un ángulo se llama **ángulo cuadrantal** si su lado terminal está en un eje coordenado.

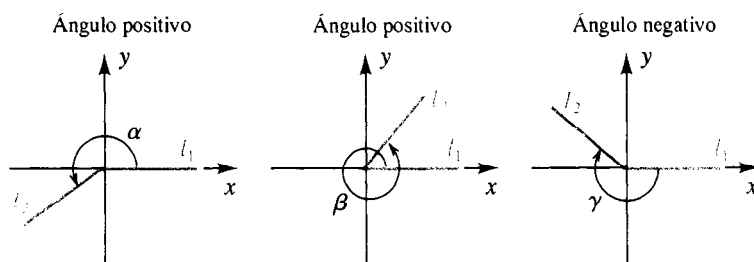


FIGURA 3 Posición estándar de un ángulo.

Una unidad de medida para los ángulos es el **grado**. El ángulo en posición estándar obtenido por una revolución completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj mide 360 grados, que se escribe 360° ; por lo tanto, un ángulo de un grado (1°) se obtiene por $\frac{1}{360}$ de toda una revolución en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En la figura 4 se muestran varios ángulos medidos en grados en posición estándar en sistemas de coordenadas rectangulares. Podrás notar que los primeros tres son ángulos de cuadrante.

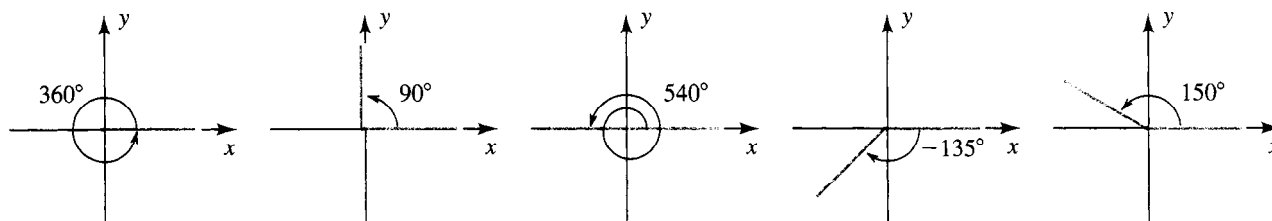


FIGURA 4

En nuestro trabajo, una notación como $\theta = 60^\circ$ especifica un ángulo θ cuya medida es 60° . También nos referimos a *un ángulo de 60°* , en lugar de usar la frase más precisa (pero más engorrosa) de *un ángulo que mide 60°* .

EJEMPLO 1 Hallar ángulos coterminales

Si $\theta = 60^\circ$ está en posición estándar, halla dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con θ .

Solución El ángulo θ se ilustra en posición estándar en el primer esquema de la figura 5. Para hallar ángulos coterminales positivos se pueden sumar 360° o 720° (o cualquier múltiplo positivo de 360°) a θ , con lo que se tiene

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ \quad \text{y} \quad 60^\circ + 720^\circ = 780^\circ.$$

Estos ángulos coterminales también se muestran en la figura 5.

Para hallar ángulos coterminales negativos, se puede sumar -360° o -720° (o cualquier otro múltiplo negativo de 360°), con lo cual resulta

$$60^\circ + (-360^\circ) = -300^\circ \quad \text{y} \quad 60^\circ + (-720^\circ) = -660^\circ,$$

según se muestra en la figura 5.

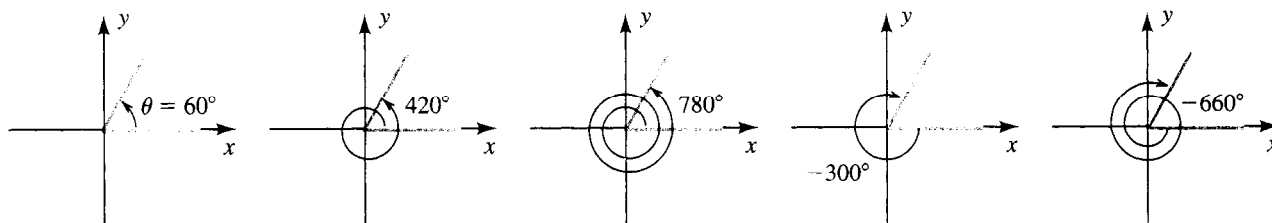


FIGURA 5

Un ángulo θ es un **ángulo recto** si $\theta = 90^\circ$. La siguiente tabla contiene definiciones de otros tipos especiales de ángulos.

Terminología	Definición	Demostración
Ángulo agudo θ	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	12° ; 37°
Ángulo obtuso θ	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	95° ; 157°
Ángulos complementarios α, β	$\alpha + \beta = 90^\circ$	$20^\circ, 70^\circ$; $7^\circ, 83^\circ$
Ángulos suplementarios α, β	$\alpha + \beta = 180^\circ$	$115^\circ, 65^\circ$; $18^\circ, 162^\circ$

Si se requieren medidas menores de un grado se pueden usar décimas, centésimas o milésimas de grado. En forma opcional, podemos dividir el grado en 60 partes iguales o **minutos** (denotadas por $'$) y cada minuto en 60 tantos iguales llamados **segundos** (representados por $''$); en consecuencia, $1^\circ = 60'$, y $1' = 60''$. La notación $\theta = 73^\circ 56' 18''$ se refiere a un ángulo θ que mide 73 grados, 56 minutos y 18 segundos.

EJEMPLO 2 Halla ángulos complementarios

Halla el ángulo que sea complementario a θ :

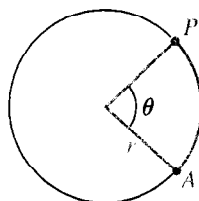
a) $\theta = 25^\circ 43' 37''$ **b)** $\theta = 73.26^\circ$

Solución Se desea encontrar $90^\circ - \theta$. Hagamos nuestro trabajo como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \text{a)} \quad 90^\circ & = & 89^\circ 59' 60'' \\ \quad \theta & = & 25^\circ 43' 37'' \\ \hline 90^\circ - \theta & = & 64^\circ 16' 23'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{b)} \quad 90^\circ & = & 90.00^\circ \\ \quad \theta & = & 73.26^\circ \\ \hline 90^\circ - \theta & = & 16.74^\circ \end{array}$$

La medida en grados para los ángulos se usa en actividades aplicadas, como agrimensura, navegación y diseño de equipo mecánico. En aplicaciones científicas que requieren cálculo se acostumbra utilizar *radianes*. Para definir el ángulo con medida de un radián, consideremos un círculo de cualquier radio r . El **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si θ es el ángulo central que se muestra en la figura 6, se dice que el arco AP (denotado por AP) del círculo **subtiende a θ** o que **θ es subtendido por AP** . Si la longitud de AP es igual al radio r del círculo, entonces θ mide un radián, conforme la siguiente definición.

FIGURA 6 Ángulo central θ

Definición de un radián

Un radián es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

Si consideramos un círculo de radio r , entonces un ángulo α cuya medida es de un radián subtiende un arco AP de longitud r , como se ilustra en la figura 7a). El ángulo β de la figura 7b) tiene una medida de 2 radianes puesto que está subtendido por un arco de longitud $2r$. Análogamente, γ en 7c) tiene una medida de 3 radianes porque está subtendido por un arco de longitud $3r$.

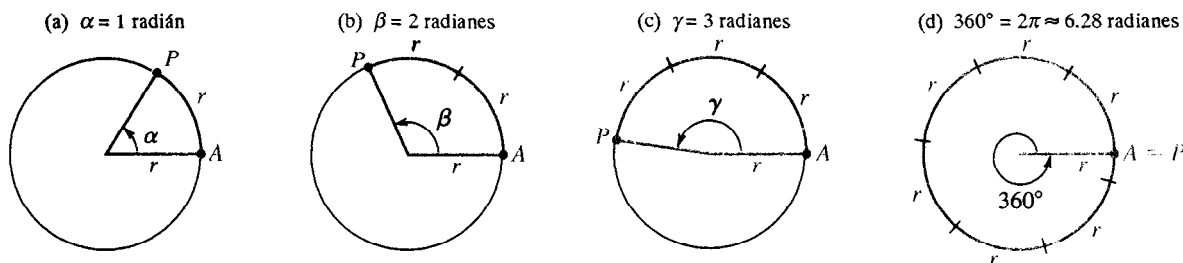


FIGURA 7

Para hallar la medida en radianes correspondiente a 360° , se debe encontrar el número de veces que se puede trazar un arco circular de longitud r a lo largo de la circunferencia [Fig. 7d)]. Este número no es un entero y ni siquiera un número racional. Como la circunferencia del círculo es $2\pi r$, el número de veces que r unidades se pueden trazar es 2π ; por lo tanto, un ángulo de 2π radianes corresponde a 360° y se escribe $360^\circ = 2\pi$ radianes. Este resultado da las siguientes relaciones.

Relaciones entre grados y radianes

(1) $180^\circ = \pi \text{ radianes}$

(2) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \approx 0.0175 \text{ radián}$

(3) $1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.2958^\circ$

Cuando se usa la medida de ángulos en radianes, no deben indicarse unidades; en consecuencia, si un ángulo mide 5 radianes, se escribe $\theta = 5$ en lugar de $\theta = 5 \text{ radianes}$. No debe haber confusión en cuanto a que se usen radianes o grados, puesto que si θ mide 5° se escribe $\theta = 5^\circ$ y no $\theta = 5$.

La tabla adjunta ilustra la forma de pasar de una medida angular a otra.

Cambio de medidas angulares

Para cambiar	Multiplicar por	Demostración
Grados a radianes	$\frac{\pi}{180}$	$150^\circ = 150 \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{6}$ $225^\circ = 225 \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{4}$
Radianes a grados	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{7\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 315^\circ$ $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 60^\circ$

Se puede usar esta técnica a fin de obtener la siguiente tabla, que presenta las medidas correspondientes a radianes y grados de ángulos especiales.

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

En la figura 8 se muestran en posición estándar varios de estos ángulos especiales, en radianes.

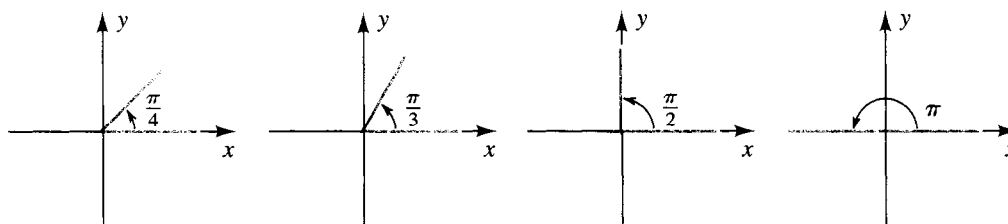


FIGURA 8

EJEMPLO 3 Cambiar radianes en grados, minutos y segundos

Si $\theta = 3$, calcula θ en grados, minutos y segundos.

$$\begin{aligned}
 \text{Solución } 3 \text{ radianes} &= 3 \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ && \text{multiplicar por } \frac{180}{\pi} \\
 &\approx 171.8873^\circ && \text{aproximando} \\
 &= 171^\circ + (0.8873)(60') && 1^\circ = 60' \\
 &= 171^\circ + 53.238' && \text{multiplicando} \\
 &= 171^\circ + 53' + (0.238)(60'') && 1' = 60'' \\
 &= 171^\circ 53' + 14.28'' && \text{multiplicando} \\
 &\approx 171^\circ 53' 14'' && \text{aproximando}
 \end{aligned}$$

Algunas calculadoras cuentan con una tecla a fin de transformar radianes en grados y viceversa; pueden tener una tecla $\boxed{\text{DMS}}$ para convertir grados decimales en grados, minutos y segundos y viceversa. Puesto que las entradas se hacen en decimales, los ángulos que se expresen en grados, minutos y segundos deben pasarse a la forma decimal. Si no se dispone de la tecla $\boxed{\text{DMS}}$, se sigue el procedimiento del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Expresar minutos y segundos como grados decimales

Expresa $19^\circ 47' 23''$ como decimal hasta el diezmilésimo de grado más cercano.

$$\begin{aligned}
 \text{Solución } \text{Como } 1' &= \left(\frac{1}{60} \right)^\circ \text{ y } 1'' = \left(\frac{1}{60} \right)' = \left(\frac{1}{3600} \right)^\circ, \\
 19^\circ 47' 23'' &= 19^\circ + \left(\frac{47}{60} \right)^\circ + \left(\frac{23}{3600} \right)^\circ \\
 &\approx 19^\circ + 0.7833^\circ + 0.0064^\circ \\
 &= 19.7897^\circ.
 \end{aligned}$$

El próximo resultado especifica la relación entre la longitud de un arco de círculo (o circular) y el ángulo central que subtiende.

Fórmula para la longitud de un arco de círculo

Si un arco de longitud s de un círculo de radio r subtiende un ángulo central de θ radianes, entonces

$$s = r\theta.$$

PRUEBA En la figura 9a) se muestra un arco común de longitud s y el ángulo central θ correspondiente. La figura 9b) presenta un arco de longitud s_1 y un ángulo central θ_1 . Si se usan radianes, entonces, por geometría plana, la razón de las longitudes de los arcos es la misma que la razón de las medidas angulares; esto es,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\theta}{\theta_1}.$$

Si consideramos el caso especial en que θ_1 mide 1 radián, entonces, de la definición de radián, $s_1 = r$ y

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1}, \quad \text{o} \quad s = r \theta. \quad \blacksquare$$

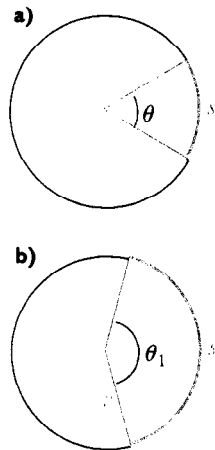


FIGURA 9

Esta fórmula se demuestra de manera similar:

Fórmula para el área de un sector circular

Si θ es la medida en radianes de un ángulo central de un círculo de radio r , y si A es el área de un sector circular determinado por θ , entonces

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta.$$

PRUEBA Si A y A_1 son las áreas de los sectores de las figuras 9a) y 9b), respectivamente, entonces, por geometría plana,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \quad \text{o} \quad A = \frac{A_1}{\theta_1} \theta.$$

Si se considera el caso especial $\theta_1 = 2\pi$, entonces $A_1 = \pi r^2$ y

$$A = \frac{\pi r^2}{2\pi} \theta = \frac{1}{2} r^2 \theta. \quad \blacksquare$$



Cuando se usen las fórmulas precedentes, es importante recordar emplear los radianes de θ en lugar de los grados, según se expone en este ejemplo:

EJEMPLO 5 Usar las fórmulas de arco circular y sector circular

Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 10 cm de largo en un círculo de 4 cm de radio.

- a) Calcula la medida de θ en grados.
b) Halla el área del sector circular determinado por θ .

Solución Proseguimos como sigue:

a) $s = r\theta$ fórmula para longitud de un arco circular

$\theta = \frac{s}{r}$ despejando para θ

$= \frac{10}{4} = 2.5$ sea $s = 10$, $r = 4$

Ésta es la medida de θ en radianes. Al cambiar a grados se tiene

$$\theta = 2.5 \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{450}{\pi} \right)^\circ \approx 143.24^\circ$$

b) $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ fórmula del área de un sector circular

$= \frac{1}{2} (4)^2 (2.5)$ sea $s = 10$, $r = 4$, $\theta = 2.5$

$= 20 \text{ cm}^2$ multiplicando

La **velocidad angular** de una rueda que gira a velocidad constante es el ángulo generado, en una unidad de tiempo, por un segmento del centro de la rueda a un punto P de la circunferencia (Fig. 10). La **velocidad lineal** de un punto P de la circunferencia es la distancia que P recorre por unidad de tiempo.

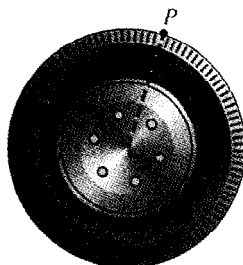


FIGURA 10

EJEMPLO 6 Hallar velocidades angulares y lineales

Supón que una máquina contiene una rueda de 3 pies (ft) de diámetro, que gira a una velocidad de 1600 revoluciones por minuto (rpm).

- a) Determina la velocidad angular de la rueda.
 b) Halla la velocidad lineal de un punto P de la circunferencia de la rueda.

Solución

a) Denota con O el centro de la rueda y sea P un punto en la circunferencia. Dado que el número de revoluciones por minuto es 1600 y cada revolución genera un ángulo de 2π radianes, el ángulo generador por el segmento de línea OP en un minuto medirá $(1600)(2\pi)$ radianes; es decir,

$$\text{Velocidad angular} = (1600)(2\pi) = 3200\pi \text{ radianes por minuto.}$$

Notarás que el diámetro de la rueda no tiene importancia para hallar la velocidad angular.

b) La velocidad lineal de P es la distancia que recorre por minuto. Se puede encontrar esta distancia con la fórmula $s = r\theta$, con $r = \frac{3}{2}$ pies (ft) y $\theta = 3200\pi$; por lo tanto,

$$s = \frac{3}{2}(3200\pi) = 4800\pi \text{ pies,}$$

y, en consecuencia, la velocidad lineal de P es 4800π pies/minuto (ft/min). Al entero más cercano, esto es aproximadamente 15 080 pies/minuto, o sea 171.36 millas por hora. A diferencia de la velocidad angular, la velocidad lineal sí depende del diámetro de la rueda.

2.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: si el ángulo dado está en posición estándar, encuentra dos ángulos coterminales positivos y dos ángulos coterminales negativos.

- | | | |
|-------------------|---------------------|---------------------|
| 1. a) 120° | b) 135° | c) -30° |
| 2. a) 240° | b) 315° | c) -150° |
| 3. a) 620° | b) $\frac{5\pi}{6}$ | c) $-\frac{\pi}{4}$ |
| 4. a) 570° | b) $\frac{2\pi}{3}$ | c) $\frac{5\pi}{4}$ |

Ejercicios 5 y 6: determina el ángulo complementario de θ .

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------|
| 5. a) $\theta = 5^\circ 17' 34''$ | b) $\theta = 32.5^\circ$ |
| 6. a) $\theta = 63^\circ 4' 15''$ | b) $\theta = 82.73^\circ$ |

Ejercicios 7 y 8: halla el ángulo suplementario de θ .

- | | |
|------------------------------------|----------------------------|
| 7. a) $\theta = 48^\circ 51' 37''$ | b) $\theta = 136.42^\circ$ |
| 8. a) $\theta = 152^\circ 12' 4''$ | b) $\theta = 15.9^\circ$ |

Ejercicios 9 al 12: da la medida exacta del ángulo en radianes.

- | | | |
|--------------------|-----------------|----------------|
| 9. a) 150° | b) -60° | c) 225° |
| 10. a) 120° | b) -135° | c) 210° |
| 11. a) 450° | b) 72° | c) 100° |
| 12. a) 630° | b) 54° | c) 95° |

Ejercicios 13 al 16: halla la medida exacta del ángulo en grados.

- | | | |
|--------------------------|----------------------|----------------------|
| 13. a) $\frac{2\pi}{3}$ | b) $\frac{11\pi}{6}$ | c) $\frac{3\pi}{4}$ |
| 14. a) $\frac{5\pi}{6}$ | b) $\frac{4\pi}{3}$ | c) $\frac{11\pi}{4}$ |
| 15. a) $-\frac{7\pi}{2}$ | b) 7π | c) $\frac{\pi}{9}$ |
| 16. a) $-\frac{5\pi}{2}$ | b) 9π | c) $\frac{\pi}{16}$ |

Ejercicios 17 al 20: expresa θ en grados, minutos y segundos, hasta el segundo más cercano.

- | | |
|------------------|--------------------|
| 17. $\theta = 2$ | 18. $\theta = 1.5$ |
| 19. $\theta = 5$ | 20. $\theta = 4$ |

Ejercicios 21 al 24: encuentra el ángulo como decimal al diezmilésimo de grado más cercano.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 21. $37^\circ 41'$ | 22. $83^\circ 17'$ |
| 23. $115^\circ 26' 27''$ | 24. $258^\circ 39' 52''$ |

Ejercicios 25 al 28: expresa el ángulo en grados, minutos y segundos al segundo más cercano.

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 25. 63.169° | 26. 12.864° |
| 27. 310.6215° | 28. 81.7238° |

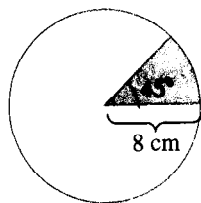
Ejercicios 29 y 30: si un arco circular de longitud s subtiene el ángulo central θ en un círculo, halla el radio del círculo.

29. $s = 10$ cm, $\theta = 4$

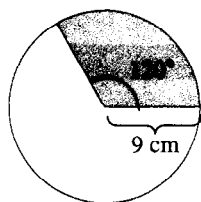
30. $s = 3$ km, $\theta = 20^\circ$

Ejercicios 31 y 32: a) encuentra la longitud del arco del sector en color de la figura y b) halla el área del sector.

31.



32.



Ejercicios 33 y 34: a) indica los radianes y grados del ángulo central θ subtendido por el arco dado de longitud s en un círculo de radio r y b) halla el área del sector determinada por θ .

33. $s = 7$ cm, $r = 4$ cm

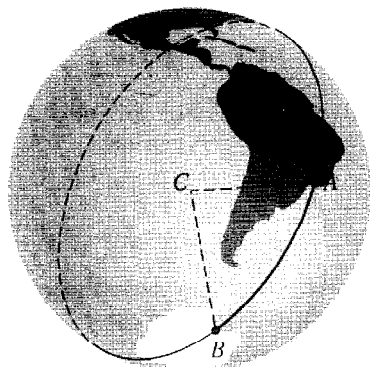
34. $s = 3$ pies, $r = 20$ pulgadas

Ejercicios 35 y 36: a) determina la longitud del arco que subtiene el ángulo θ central dado en un círculo de diámetro d y b) halla el área del sector determinado por θ .

35. $\theta = 50^\circ$, $d = 16$ m

36. $\theta = 2.2$, $d = 120$ cm

37. Medir distancias en la Tierra La distancia entre dos puntos A y B en la Tierra se mide a lo largo de un círculo



EJERCICIO 37

cuyo centro es C , situado en el centro del globo, y radio igual a la distancia de C a la superficie (consulta la figura). Ve el diámetro del planeta es aproximadamente 8000 millas, calcula la distancia entre A y B si el ángulo ACB tiene la medida indicada:

- a) 60° b) 45° c) 30° d) 10° e) 1°

38. Millas náuticas Consulta el ejercicio 37. Si el ángulo ACB mide $1'$, entonces la distancia entre A y B es una milla náutica. Calcula el número de millas terrestres en una milla náutica.

39. Medición de ángulos usando distancia Consulta el ejercicio 37. Si dos puntos A y B están a 500 millas uno de otro, expresa el ángulo ACB en radianes y en grados.

40. Núcleo de un tornado Un modelo sencillo del núcleo (u ojo) de un tornado es un cilindro circular recto que gira alrededor de su eje. Si un tornado tiene un núcleo de 200 pies de diámetro y la velocidad máxima del viento es 180 millas por hora (mph), o sea 264 pies por segundo (ft/s) en el perímetro del núcleo, calcula el número de revoluciones por minuto del núcleo.

41. Rotación de la Tierra Nuestro planeta gira alrededor de su eje una vez cada 23 horas, 56 minutos y 4 segundos. Calcula el número de radianes que la Tierra gira en un segundo.

42. Rotación de la Tierra Consulta el ejercicio 41. El radio ecuatorial es de alrededor de 3963.3 millas. Halla la velocidad lineal de un punto sobre el ecuador como resultado de la rotación.

Ejercicios 43 y 44: una rueda de radio dado gira a la velocidad indicada.

- a) Halla la velocidad angular (en radianes por minuto).
b) Indica la velocidad lineal de un punto sobre la circunferencia (en ft/min).

43. radio 5 pulgadas (in), 40 rpm

44. radio 9 pulgadas, 2400 rpm

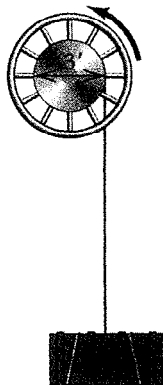
45. Rotación de discos fonográficos Los dos tipos comunes de discos fonográficos, el de larga duración (o LP) y el sencillo, tenían diámetros de 12 pulgadas y 7 pulgadas, respectivamente. El LP giraba a razón de $33\frac{1}{3}$ rpm y el sencillo a 45 rpm.

- a) Halla la velocidad angular (en radianes por minuto) del LP y del sencillo.
b) Indica la velocidad lineal (en ft/min) de un punto sobre la circunferencia del LP y del sencillo.

46. Revoluciones de llantas Una llanta común de un auto compacto mide 22 pulgadas de diámetro. Si el carro viaja a 60 millas por hora, halla el número de revoluciones que efectúa el neumático en un minuto.

47. Malacate de carga Se utiliza un gran malacate de 3 pies de diámetro para levantar cargas (ve la figura).

- a) Halla la distancia que la carga es levantada, si el malacate gira un ángulo de $7\pi/4$ radianes.
b) Halla el ángulo (en radianes) que el malacate debe girar para levantar la carga d pies.

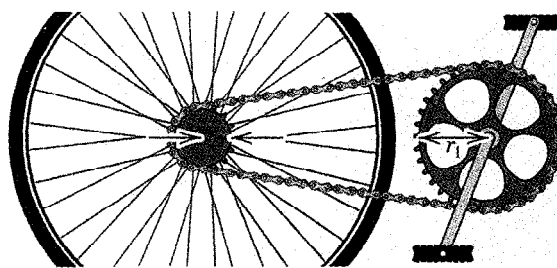


EJERCICIO 47

48. Movimiento del péndulo El péndulo del reloj mide 4 pies de largo y se mueve en ambos sentidos a lo largo de un arco de 6 pies. Calcula el ángulo (en grados) por los que pasa el péndulo durante un movimiento.

49. Precios de pizzas Un vendedor vende dos tamaños de pizza por rebanada; la *chica* mide $1/6$ de una pizza circular de 18 pulgadas de diámetro y se vende en 2 dólares. La *grande*, que mide $1/8$ de una pizza circular de 26 pulgadas de diámetro, se vende en 3 dólares. ¿Cuál rebanada tiene más pizza por dólar?

50. Mecánica de bicicletas En la figura se muestra el conjunto de estrellas de una bicicleta. Si la estrella de radio r_1 gira en un ángulo de θ_1 radianes, halla el ángulo de rotación correspondiente para la estrella de radio r_2 .



EJERCICIO 50

51. Mecánica de bicicletas Un ciclista experto puede alcanzar una velocidad de 40 millas por hora. Si en el ejercicio 50 el conjunto de estrellas mide $r_1 = 5$ pulgadas, $r_2 = 2$ pulgadas y la rueda tiene un diámetro de 28 pulgadas, ¿aproximadamente cuántas revoluciones por minuto de la estrella delantera darán una velocidad de 40 millas por hora? (*Sugerencia:* convierte primero las 40 mph en in/s.)

52. Desplazamiento del polo magnético El polo norte geográfico y el polo magnético tienen ubicaciones diferentes. En la actualidad, el polo norte magnético se desplaza hacia el oeste alrededor de 0.0017 radianes por año, en donde el ángulo de desplazamiento tiene su vértice en el centro de la Tierra. Si este movimiento continúa, ¿cuántos años tardará el polo norte magnético en desplazarse un total de 5 grados?

2.2 Funciones trigonométricas

La trigonometría se puede estudiar en dos formas distintas; mediante un desarrollo moderno en donde interviene un círculo unitario, o a partir de los métodos clásicos de triángulos rectángulos que utilizaron los griegos en la antigüedad. En esta sección analizamos el método del círculo unitario; la trigonometría de triángulos rectángulos se considerará en la sección 2.4.

Sea U un círculo unitario; es decir, un círculo de radio 1 con centro en el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares; por lo tanto, U es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Sea t un número real tal que $0 < t < 2\pi$, y denotemos con θ el ángulo (en posición estándar) de t radianes. Una posibilidad se ilustra en la figura 11, en donde $P(x, y)$ es el punto de intersección del lado terminal de θ y el círculo unitario U , en donde s es la longitud del arco circular de $A(1, 0)$ a $P(x, y)$. Dada la fórmula $s = r\theta$ para la longitud de un arco circular (Sec. 2.1), con $\theta = t$ y $r = 1$, vemos que

$$s = 1(t) = t.$$

Por lo tanto, t se puede tomar como la medida en radianes del ángulo θ o la longitud del arco circular AP en U .

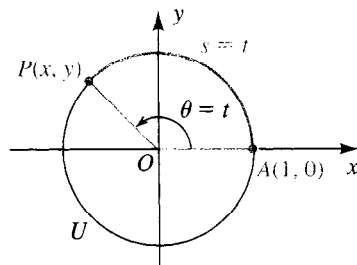


FIGURA 11

En seguida tomemos *cualquier* número real t que no sea negativo. Si consideramos el ángulo θ de t radianes como producido al girar el segmento OA alrededor de O en sentido contrario al de las manecillas del reloj, t es la distancia a lo largo de U que A recorre antes de llegar a su posición final $P(x, y)$. En la figura 12 hemos ilustrado un caso para $t < 2\pi$; sin embargo, si $t > 2\pi$, entonces A puede viajar alrededor de U varias veces en sentido contrario al de las manecillas del reloj antes de llegar a $P(x, y)$.

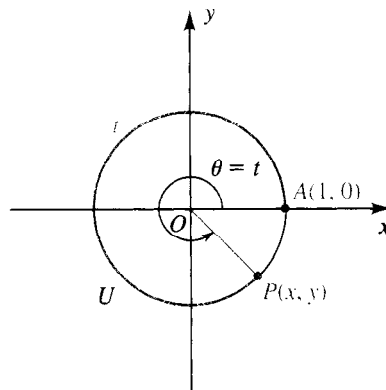


FIGURA 12

Si $t < 0$, entonces OA gira en sentido de las manecillas del reloj y la distancia que A recorre antes de llegar a $P(x, y)$ es $|t|$, como se ilustra en la figura 13.

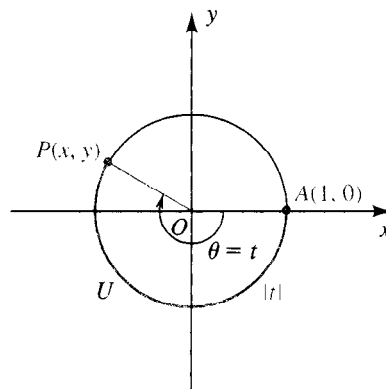


FIGURA 13

El análisis precedente indica la forma en que *se puede asociar un punto único* $P(x, y)$ en U con cada número real t . Llamaremos $P(x, y)$ al **punto del círculo unitario U que corresponda a t** . Se pueden usar las coordenadas (x, y) de P para definir las seis **funciones trigonométricas**. Estas funciones se llaman **funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante** y se denotan por los símbolos **sen, cos, tan, cot, sec y csc**, respectivamente. Si t es un número real, el número real que la función seno asocia con t se designa ya sea por $\text{sen}(t)$ o $\text{sen } t$. Se usa una notación semejante para las otras cinco funciones.

Definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario

Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto del círculo unitario U que corresponde a t , entonces

$$\begin{array}{lll} \text{sen } t = y & \cos t = x & \tan t = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \\ \csc t = \frac{1}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) & \sec t = \frac{1}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) & \cot t = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \end{array}$$

Las fórmulas de esta definición expresan valores de función en términos de coordenadas de un punto P en un círculo unitario. Por esta razón, las funciones trigonométricas se llaman a veces **funciones circulares**.

EJEMPLO 1

Halla valores de las funciones trigonométricas

En la figura 14 se presenta un punto $P(x, y)$ en el círculo unitario U correspondiente a un número real t , para $\pi < t < 3\pi/2$. Halla los valores de las funciones trigonométricas en t .

Sol.: Con referencia a la figura 14, las coordenadas de $P(x, y)$ son

$$x = -\frac{3}{5}, \quad y = -\frac{4}{5}.$$

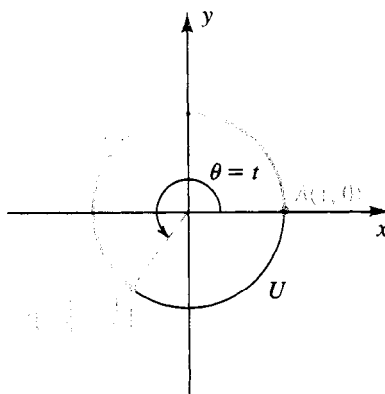


FIGURA 14

Con la definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario obtendremos

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$$

$$\cos t = -\frac{3}{5}$$

$$\tan t = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{-4/5} = -\frac{5}{4}$$

$$\sec t = \frac{1}{-3/5} = -\frac{5}{3}$$

$$\cot t = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

EJEMPLO 2 Hallar un punto en U relativo a un punto dado

Denotemos por $P(t)$ el punto en el círculo unitario U que corresponda a t para $0 \leq t < 2\pi$. Si $P(t) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, define

- a)** $P(t + \pi)$ **b)** $P(t - \pi)$ **c)** $P(-t)$

Solución **a)** El punto $P(t)$ en U está trazado en la figura 15a), en donde también hemos indicado el arco AP de longitud t . Para hallar $P(t + \pi)$ se recorre una distancia π en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* a lo largo de U desde $P(t)$, según indica el arco azul de la figura. Como π mide la mitad de la circunferencia de U , esto dará el punto $P(t + \pi) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ diametralmente opuesto a $P(t)$.

b) Para hallar $P(t - \pi)$ recorremos una distancia π en *sentido de las manecillas del reloj* a lo largo de U a partir de $P(t)$, como se ve en la figura 15b). Esto conduce a $P(t - \pi) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Observa que $P(t + \pi) = P(t - \pi)$.

c) Para encontrar $P(-t)$, recorremos una distancia $| -t |$ a lo largo de U en *sentido de las manecillas del reloj* desde $A(1, 0)$, conforme se ve en la figura 15c). Esto equivale a reflejar $P(t)$ por el eje x ; por lo tanto, sólo se cambia el signo de la coordenada y de $P(t)$ para obtener $P(-t) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

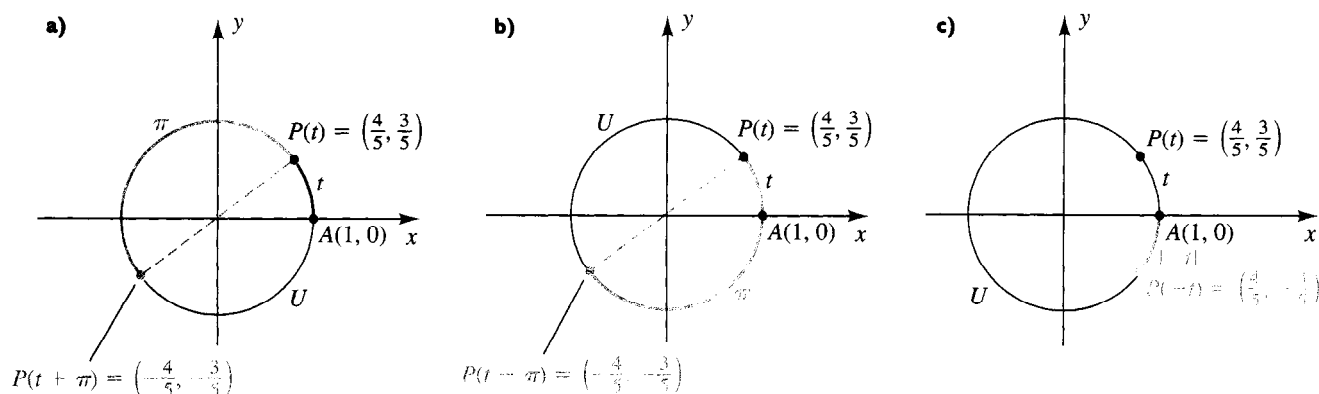


FIGURA 15

Dado que $\operatorname{sen} t = y$ y $\csc t = 1/y$, vemos que $\operatorname{sen} t$ y $\csc t$ son recíprocas una de otra. Esto da las dos identidades de la columna izquierda del siguiente rectángulo. Del mismo modo, $\cos t$ y $\sec t$ son recíprocas una de otra, como también lo son $\tan t$ y $\cot t$.

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen} t = \frac{1}{\csc t}$$

$$\cos t = \frac{1}{\sec t}$$

$$\tan t = \frac{1}{\cot t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Más adelante en esta sección se estudiarán otras identidades importantes en que intervienen funciones trigonométricas.

El dominio tanto de la función seno como de la coseno es de \mathbb{R} , puesto que $\operatorname{sen} t = y$ y $\cos t = x$ existen para todo número real t .

Para $\tan t = y/x$ y $\sec t = 1/x$, el número x es un denominador y, por lo tanto, debemos excluir valores de t para los que x es 0; es decir, valores de t que den los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ en el eje de las y . Así pues, el dominio de las funciones de tangente y secante está formado por todos los números reales, *excepto* $\pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$ y, en general, $(\pi/2) + \pi n$ para cualquier entero n .

Para $\cot t = x/y$ y $\csc t = 1/y$, el número y es un denominador y, por lo tanto, debemos excluir valores de t que nos den los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ en el eje de las x . Así, el dominio de las funciones de cotangente y cosecante está formado por todos los números reales, *excepto* $\pm 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ y en general, πn para cualquier entero n .

La tabla resume este análisis.

Función	Dominio
sen, cos	todos los números reales.
tan, sec	todos los números reales <i>excepto</i> $(\pi/2) + \pi n$ para cualquier entero n .
cot, csc	todos los números reales <i>excepto</i> πn para cualquier entero n .

Observa que $P(x, y)$ es un punto en el círculo unitario U y, por lo tanto, $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$. Esto implica que

$$|\operatorname{sen} t| \leq 1, \quad |\cos t| \leq 1, \quad |\csc t| \geq 1, \quad \text{y} \quad |\sec t| \geq 1$$

para toda t de los dominios de estas funciones.

En los siguientes dos ejemplos encontramos algunos valores especiales de las funciones trigonométricas.



Halla los valores de las funciones trigonométricas en t :

a) $t = 0$ **b)** $t = \frac{\pi}{4}$ **c)** $t = \frac{\pi}{2}$



a) El punto P en el círculo unitario U que corresponde a $t = 0$ tiene coordenadas $(1, 0)$, según se muestra en la figura 16a). En consecuencia, sean $x = 1$ y $y = 0$ en la definición de las funciones trigonométricas y se obtiene

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \tan 0 = \frac{0}{1} = 0, \quad \sec 0 = \frac{1}{1} = 1.$$

Notarás que $\csc 0$ y $\cot 0$ no están definidas, puesto que $y = 0$ es un denominador.

b) Si $t = \pi/4$, entonces el ángulo de $\pi/4$ radianes de la figura 16b) bisecta el primer cuadrante y el punto $P(x, y)$ se encuentra en la línea $y = x$. Como $P(x, y)$ está en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ y como $y = x$, obtenemos

$$x^2 + x^2 = 1, \quad \text{o} \quad 2x^2 = 1.$$

Al despejar la x y observar que $x > 0$ resulta

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Así pues, P es el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Al hacer $x = \sqrt{2}/2$ y $y = \sqrt{2}/2$ en la definición de las funciones trigonométricas, tendremos

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\csc \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \sec \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \cot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1.$$

c) El punto P en U que corresponde a $t = \pi/2$ tiene coordenadas $(0, 1)$, como se ve en la figura 16c); por lo tanto, hacemos $x = 0$ y $y = 1$ en la definición de las funciones trigonométricas y resulta:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \csc \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1, \quad \cot \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Las funciones tangente y secante no están definidas puesto que $x = 0$ es un denominador en cada caso.

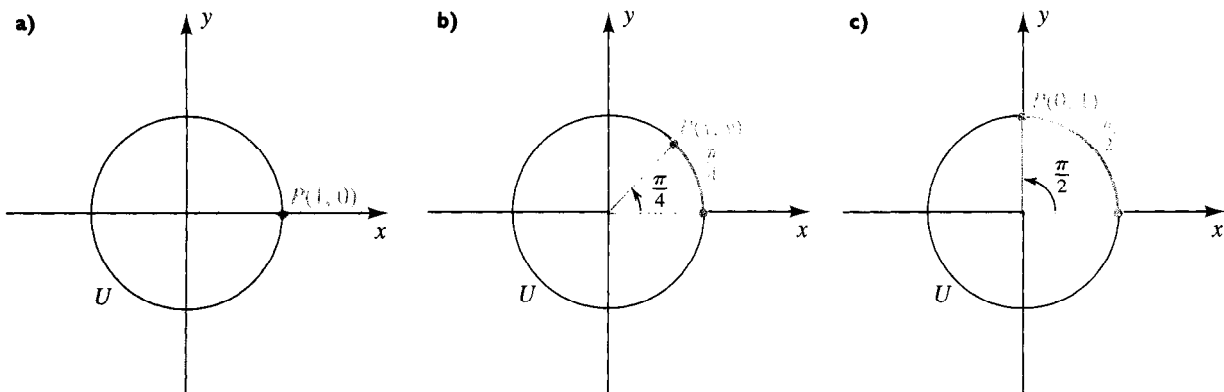


FIGURA 16

EJEMPLO 4**Hallar valores especiales de las funciones trigonométricas**

Determina los valores de las funciones trigonométricas en t :

a) $t = \frac{3\pi}{4}$ **b)** $t = \pi$ **c)** $t = -\frac{\pi}{4}$

a) Se pueden encontrar coordenadas del punto P en U que correspondan a $t = 3\pi/4$ por simetría desde el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, que obtuvimos para $t = \pi/4$ en el ejemplo 3. Esto dará $P(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, como se muestra en la figura 17a).

Si se hace $x = -\sqrt{2}/2$ y $y = \sqrt{2}/2$ en la definición de las funciones trigonométricas, esto nos llevará a los valores del primer renglón de la siguiente tabla.

t	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$	$\text{tan } t$	$\text{cot } t$	$\text{sec } t$	$\text{csc } t$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
π	0	-1	0	no definida	-1	no definida
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$

b) Si $t = \pi$, se obtiene el punto $P(-1, 0)$ en U , mostrado en la figura 17b). Al hacer $x = -1$ y $y = 0$ en la definición de las funciones trigonométricas tendremos el segundo renglón de la tabla de la parte a).

c) Se pueden encontrar las coordenadas del punto P en U que corresponden a $t = -\pi/4$, al reflejar el punto $P(x, y)$ de la figura 16b) en el eje de las x . Si se usan los resultados del ejemplo 3b) se obtiene $P(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, como se muestra en la figura 17c). Al hacer $x = \sqrt{2}/2$ y $y = -\sqrt{2}/2$ en la definición de las funciones trigonométricas llegaremos al tercer renglón de la tabla de la parte a).

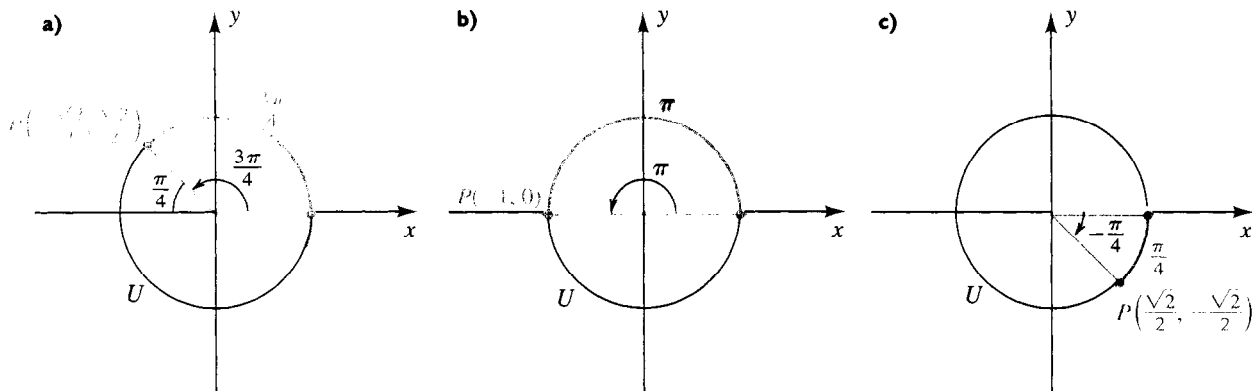


FIGURA 17

En los ejemplos 3 y 4 se consideraron sólo múltiplos de $t = \pi/4$ para obtener las coordenadas exactas del punto P en U . En la sección 2.4 se estudiarán otros casos especiales en que intervienen



múltiplos de $t = \pi/6$. Para valores arbitrarios de valores de t se pueden encontrar sólo valores *aproximados* de las funciones trigonométricas. Esto se verá en secciones posteriores.

Determinemos los signos asociados con los valores de las funciones trigonométricas para varios valores de t . Supón que t define un punto $P(x, y)$ en U que se encuentra en el segundo cuadrante. En este caso, x es negativa y y es positiva; por lo tanto, $\sin t = y$ y $\csc t = 1/y$ son positivas. Las otras cuatro funciones trigonométricas son negativas. Si se comprueban los cuadrantes restantes de modo semejante, se obtiene la tabla de abajo.

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante que contiene $P(x, y)$	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

EJEMPLO 5 Determinar el cuadrante que contiene un punto en U

Sea $P(x, y)$ el punto en U correspondiente a t . Halla el cuadrante que contenga P si $\sin t < 0$ y $\cos t > 0$.

Solución Si consultas la tabla de los signos, verás que $\cos t > 0$ si P está en los cuadrantes primero y cuarto, y $\sin t < 0$ si P está en el tercero o cuarto cuadrante; por lo tanto, para que ambas condiciones queden satisfechas P debe hallarse en el cuarto cuadrante.

Las fórmulas que se anotan en el recuadro de la página que sigue son, sin duda, las identidades más importantes en trigonometría porque se puedan usar a fin de simplificar y unificar muchos aspectos diferentes sobre el tema. Dado que son ciertas para todo valor permisible de t y forman parte de los fundamentos para trabajar en trigonometría, reciben el nombre de *identidades fundamentales*.

En tres de las identidades fundamentales intervienen cuadrados, como es el caso de $(\sin t)^2$ y $(\cos t)^2$. En general, si n es un entero diferente de -1 , entonces una potencia como $(\cos t)^n$ se escribe $\cos^n t$. Los símbolos $\sin^{-1} t$ y $\cos^{-1} t$ se reservan para las funciones trigonométricas inversas, que se estudiarán en el siguiente capítulo. Con este convenio en las notaciones, tendremos, por ejemplo,

$$\cos^2 t = (\cos t)^2 = (\cos t)(\cos t)$$

$$\tan^3 t = (\tan t)^3 = (\tan t)(\tan t)(\tan t)$$

$$\sec^4 t = (\sec t)^4 = (\sec t)(\sec t)(\sec t)(\sec t).$$

Identidades fundamentales:**(1) Identidades recíprocas:**

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

(2) Identidades tangente y cotangente:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

(3) Identidades de Pitágoras:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

(1) Las identidades recíprocas ya se demostraron antes.

(2) Para probar las identidades tangente y cotangente se aplica la definición de las funciones trigonométricas:

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{\cos t}{\sin t}$$

(3) Si $P(x, y)$ es un punto en el círculo unitario, se tiene:

$$y^2 + x^2 = 1$$

$$(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Esto demuestra la primera identidad de Pitágoras.

Si $\cos t \neq 0$, entonces se procede como sigue:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

La identidad final, $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$, se puede demostrar de modo semejante al dividir la primera identidad de Pitágoras entre $\sin^2 t$ (siempre que $\sin t \neq 0$).

Las identidades de Pitágoras se llaman así porque si $0 < t < \pi/2$ y $P(x, y)$ es el punto en U correspondiente a t , luego, como se muestra en la figura 18, OQP es el triángulo rectángulo con hipotenusa 1 y lados de longitudes x y y ; por lo tanto, por el teorema de Pitágoras,

$$y^2 + x^2 = 1, \quad \text{o} \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

En la prueba precedente se obtuvo este resultado mediante una ecuación para U .

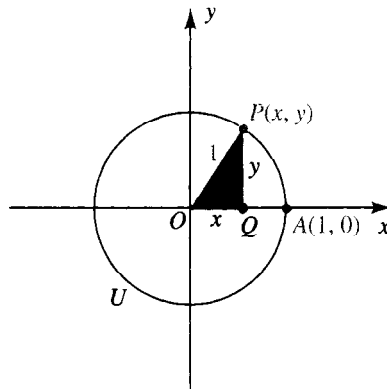


FIGURA 18

Se pueden usar las identidades fundamentales a fin de expresar cada función trigonométrica en términos de cualquier otra función trigonométrica. En el siguiente ejemplo se dan dos demostraciones.

EJEMPLO 6 *Uso de identidades fundamentales*

Sea t un número real tal que $0 < t < \pi/2$.

a) Expresa $\sin t$ en términos de $\cos t$.

b) Expresa $\tan t$ en términos de $\sin t$.

Solución **a)** Se puede proseguir de esta manera:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \text{identidad de Pitágoras}$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t \quad \text{restar } \cos^2 t$$

$$\sin t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \text{tomar raíz cuadrada}$$

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \sin t > 0 \text{ si } 0 < t < \pi/2$$

b) Si comenzamos con la identidad fundamental

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

lo que falta es expresar $\cos t$ en términos de $\sin t$. Esto se efectúa despejando t de la ecuación $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ y se tiene

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} \quad \text{para } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \quad \text{para } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 7 Hallar valores de funciones trigonométricas de condiciones prescritas

Si $\sin t = \frac{3}{5}$ y $\tan t < 0$, usa identidades fundamentales a fin de hallar los valores de las otras cinco funciones trigonométricas.

Solución. En vista de que $\sin t = \frac{3}{5} > 0$ y $\tan t < 0$, el punto P en U que corresponde a t está en el segundo cuadrante. Dado que $\cos t$ es negativo en el segundo cuadrante,

$$\cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

A continuación se usa la identidad tangente para obtener

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

Finalmente, con las identidades recíprocas se obtiene

$$\begin{aligned}\csc t &= \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \\ \sec t &= \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4} \\ \cot t &= \frac{1}{\tan t} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Las identidades fundamentales suelen utilizarse en la simplificación de expresiones con funciones trigonométricas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Verificar que una ecuación es una identidad

Demuestra que la siguiente ecuación es una identidad, transformando el lado izquierdo (LI): en el lado derecho (LD):

$$(\sec t + \tan t)(1 - \sin t) = \cos t$$

Solución. Se comienza con el lado izquierdo y se procede como sigue:

$$\begin{aligned}(\sec t + \tan t)(1 - \sin t) &= \left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\sin t}{\cos t}\right)(1 - \sin t) && \text{identidades recíprocas y tangente} \\ &= \left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)(1 - \sin t) && \text{suma fracciones} \\ &= \frac{1 - \sin^2 t}{\cos t} && \text{multiplicación} \\ &= \frac{\cos^2 t}{\cos t} && \text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \\ &= \cos t && \text{cancelar } \cos t\end{aligned}$$

Hay otras formas de simplificar la expresión del lado izquierdo en el ejemplo 8. Pudimos multiplicar primero los dos factores y luego simplificar y combinar términos. En muchas ocasiones es útil el método usado —esto es, cambiar todas las expresiones a otras en donde haya sólo senos y cosenos—; sin embargo, esa técnica no siempre lleva a la simplificación más corta posible.

De aquí en adelante usaremos la frase *verificar una identidad* en lugar de *mostrar una ecuación como identidad*. Al verificar una identidad, solemos emplear identidades fundamentales y manipulaciones algebraicas con objeto de simplificar expresiones, como en el ejemplo precedente.

Precaución



Si una identidad (asumida) contiene fracciones, no multipliques ambos lados por el mínimo común denominador.

Una razón para esta advertencia es que el descuido sobre restricciones de ángulos puede llevar a conclusiones erróneas. Para ilustrarlo, consideremos la ecuación

$$\frac{1 - \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} = \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t}.$$

Si se multiplican ambos lados por el mínimo común denominador $(1 - \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen} t)$ y se simplifica, se obtiene

$$\begin{aligned}(1 - \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen} t) &= (1 + \operatorname{sen} t)(1 - \operatorname{sen} t) \\ 1 - \operatorname{sen}^2 t &= 1 - \operatorname{sen}^2 t\end{aligned}$$

Las última ecuación es cierta para toda t , pero no es el caso con la ecuación *dada* porque si $\operatorname{sen} t = 1$, la sustitución dará:

$$\text{LI: } \frac{0}{0} \text{ (no definida); } \quad \text{LD: } \frac{2}{2} = 1$$

Igualmente, la ecuación *dada* es falsa para toda t tal que $\operatorname{sen} t = -1$. Si se hubiera sumado la restricción $\operatorname{sen} t \neq \pm 1$, la ecuación *dada* sería una identidad, puesto que se reduce a $1 = 1$ para cualquier otro valor de t . Nuestra advertencia precautoria nos permite no enunciar dichas restricciones cada que encontremos una identidad (asumida).

EJEMPLO 9

Verificar una identidad

Comprueba la siguiente identidad transformando el lado izquierdo en el derecho:

$$\frac{\tan t + \cos t}{\operatorname{sen} t} = \sec t + \cot t$$

Solución Por la nota precautoria anterior, sabemos que no se permite *la multiplicación de ambos lados por* $\operatorname{sen} t$. Se puede transformar el lado izquierdo en el derecho como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan t + \cos t}{\sec t} &= \frac{\tan t}{\sec t} + \frac{\cos t}{\sec t} \\
 &= \frac{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)}{\frac{1}{\cos t}} + \cot t \\
 &= \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos t}} + \cot t \\
 &= \frac{1}{\cos t} + \cot t \\
 &= \sec t + \cot t
 \end{aligned}$$

El denominador, $\sec t$, se simplifica.

El denominador, $\frac{1}{\cos t}$, se simplifica.

El denominador, $\frac{1}{\cos t}$, se simplifica.

El denominador, $\frac{1}{\cos t}$, se simplifica.

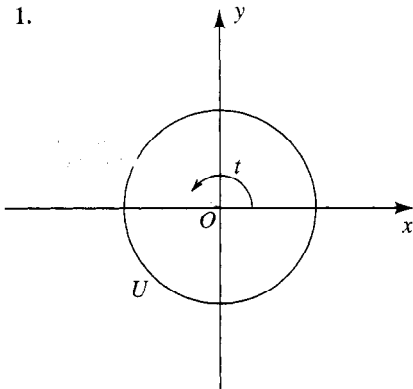
El denominador, $\frac{1}{\cos t}$, se simplifica.

En la sección 3.1 comprobaremos muchas otras identidades usando métodos semejantes a los usados en los últimos dos ejemplos.

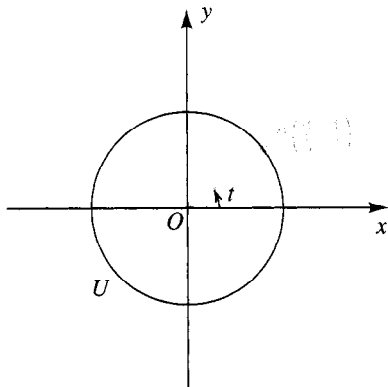
2.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: se muestra un punto $P(x, y)$ en el círculo unitario U correspondiente a un número real t . Halla los valores de las funciones trigonométricas en t .

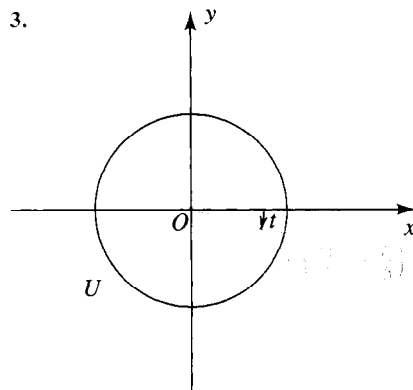
1.



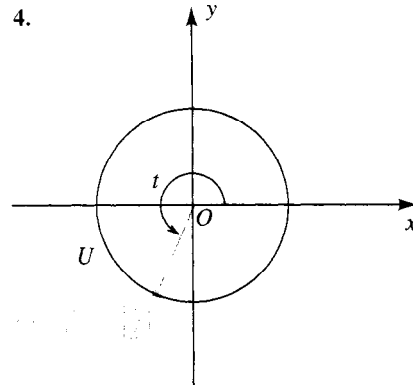
2.



3.



4.



Ejercicios 5 al 8: sea $P(t)$ el punto en el círculo unitario U que corresponde a t . Si $P(t)$ tiene las coordenadas rectangulares dadas, encuentra

a) $P(t + \pi)$ b) $P(t - \pi)$ c) $P(-t)$ d) $P(-t - \pi)$

5. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

6. $\left(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

7. $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

8. $\left(\frac{7}{25}, -\frac{24}{25}\right)$

Ejercicios 9 al 16: sea P el punto en el círculo unitario U que corresponde a t . Halla las coordenadas de P y los valores exactos de las funciones trigonométricas en t , donde sea posible.

9. a) 2π

b) -3π

10. a) $-\pi$

b) 6π

11. a) $3\pi/2$

b) $-7\pi/2$

12. a) $5\pi/2$

b) $-\pi/2$

13. a) $9\pi/4$

b) $-5\pi/4$

14. a) $3\pi/4$

b) $-7\pi/4$

15. a) $5\pi/4$

b) $-\pi/4$

16. a) $7\pi/4$

b) $-3\pi/4$

Ejercicios 17 y 18: determina el cuadrante que contenga el punto P en el círculo unitario U para las condiciones dadas.

17. a) $\cos t > 0$ y $\sin t < 0$

b) $\sin t < 0$ y $\cot t > 0$

c) $\csc t > 0$ y $\sec t < 0$

d) $\sec t < 0$ y $\tan t > 0$

18. a) $\tan t < 0$ y $\cos t > 0$

b) $\sec t > 0$ y $\tan t < 0$

c) $\csc t > 0$ y $\cot t < 0$

d) $\cos t < 0$ y $\csc t < 0$

Ejercicios 19 al 24: usa identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, si $0 < t < \pi/2$.

19. $\cot t$, $\sin t$

20. $\tan t$, $\cos t$

21. $\sec t$, $\sin t$

22. $\csc t$, $\cos t$

23. $\sin t$, $\sec t$

24. $\cos t$, $\cot t$

Ejercicios 25 al 32: emplea identidades fundamentales a fin de hallar los valores de las funciones trigonométricas para las condiciones dadas.

25. $\tan t = -\frac{3}{4}$ y $\sin t > 0$

26. $\cot t = \frac{3}{4}$ y $\cos t < 0$

27. $\sin t = -\frac{5}{13}$ y $\sec t > 0$

28. $\cos t = \frac{1}{2}$ y $\sin t < 0$

29. $\cos t = -\frac{1}{3}$ y $\sin t < 0$

30. $\csc t = 5$ y $\cot t < 0$

31. $\sec t = -4$ y $\csc t > 0$

32. $\sin t = \frac{2}{5}$ y $\cos t < 0$

Ejercicios 33 al 54: comprueba la identidad transformando el lado izquierdo en el derecho.

33. $\cos t \sec t = 1$

34. $\tan t \cot t = 1$

35. $\sin t \sec t = \tan t$

36. $\sin t \cot t = \cos t$

37. $\frac{\csc t}{\sec t} = \cot t$

38. $\cot t \sec t = \csc t$

39. $(1 + \cos t)(1 - \cos t) = \sin^2 t$

40. $\cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$

41. $\cos^2 t (\sec^2 t - 1) = \sin^2 t$

42. $(\tan t + \cot t) \tan t = \sec^2 t$

43. $\frac{\sin t}{\csc t} + \frac{\cos t}{\sec t} = 1$

44. $1 - 2 \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$

45. $(1 + \sin t)(1 - \sin t) = \frac{1}{\sec^2 t}$

46. $(1 - \sin^2 t)(1 + \tan^2 t) = 1$

47. $\sec t - \cos t = \tan t \sin t$

48. $\frac{\sin t + \cos t}{\cos t} = 1 + \tan t$

49. $(\cot t + \csc t)(\tan t - \sin t) = \sec t - \cos t$

50. $\cot t + \tan t = \csc t \sec t$

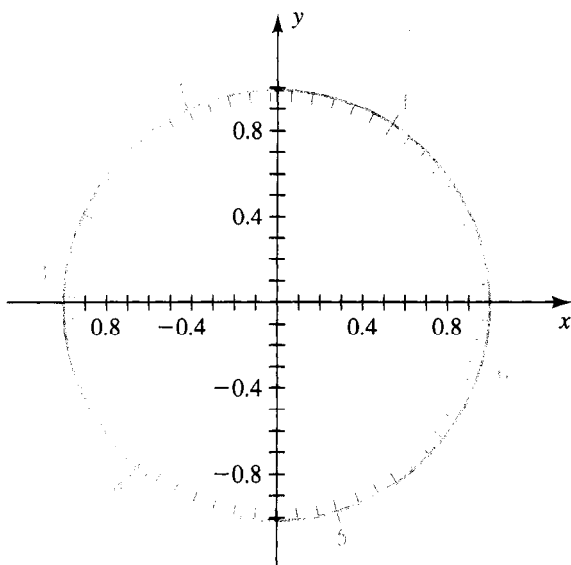
51. $\sec^2 t \csc^2 t = \sec^2 t + \csc^2 t$

52. $\frac{1 + \cos^2 t}{\sin^2 t} = 2 \csc^2 t - 1$

53. $\log \csc t = -\log \sin t$

54. $\log \tan t = \log \sin t - \log \cos t$

Ejercicios 55 al 58: usa la figura para calcular lo que se te pide hasta un lugar decimal.



55. a) $\sin 4$ b) $\sin(-1.2)$
 c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\sin t = 0.5$.
56. a) $\sin 2$ b) $\sin(-2.3)$
 c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\sin t = -0.2$.
57. a) $\cos 4$ b) $\cos(-1.2)$
 c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\cos t = -0.6$.
58. a) $\cos 2$ b) $\cos(-2.3)$
 c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\cos t = -0.2$.

2.3 Gráficas de las funciones trigonométricas

Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en el círculo unitario U que corresponde a t , entonces por las definiciones de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario,

$$x = \cos t \quad y = \sin t.$$

Por lo tanto, como se aprecia en la figura 19, se puede denotar $P(x, y)$ por

$$P(\cos t, \sin t).$$

Si $t > 0$, el número real t puede interpretarse como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco AP .

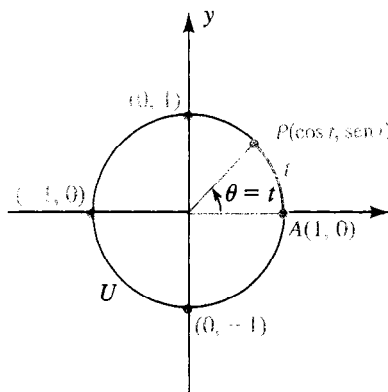


FIGURA 19

Si hacemos que t aumente de 0 a 2π radianes, el punto $P(\cos t, \sin t)$ viaja alrededor del círculo unitario U una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Al observar la variación de las

coordenadas x y y del punto P , se obtiene la siguiente tabla. La notación $0 \rightarrow \pi/2$ del primer renglón significa que t crece de 0 a $\pi/2$, y la notación $(1, 0) \rightarrow (0, 1)$ denota la variación correspondiente de $P(\cos t, \sin t)$, a medida que viaja a lo largo de U de $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Si t crece de 0 a $\pi/2$, entonces $\sin t$ pasa de 0 a 1, lo que denotamos por $0 \rightarrow 1$. Además, $\sin t$ toma todo valor entre 0 y 1. Si t crece de $\pi/2$ a π , entonces $\sin t$ decrece de 1 a 0, lo que se denota con $1 \rightarrow 0$. Otros renglones de la tabla se pueden interpretar de modo semejante.

t	$P(\cos t, \sin t)$	$\cos t$	$\sin t$
$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$(1, 0) \rightarrow (0, 1)$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$(0, 1) \rightarrow (-1, 0)$	$0 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 0$
$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$(-1, 0) \rightarrow (0, -1)$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$
$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$	$(0, -1) \rightarrow (1, 0)$	$0 \rightarrow 1$	$-1 \rightarrow 0$

Si t crece de 2π a 4π , el punto $P(\cos t, \sin t)$ de la figura 19 recorre otra vez el círculo unitario U y se repiten las figuras idénticas para $\sin t$ y $\cos t$; esto es,

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t \quad \text{y} \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

para toda t del intervalo $[0, 2\pi]$. Lo mismo es cierto si t crece de 4π a 6π , de 6π a 8π , y así sucesivamente. En general, tenemos el siguiente teorema.

Teorema sobre valores repetidos de funciones para \sin y \cos

Si n es cualquier entero, entonces

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t \quad \text{y} \quad \cos(t + 2\pi n) = \cos t.$$

La variación repetitiva de las funciones seno y coseno es *periódica* en el sentido de la definición de abajo.

Definición de función periódica

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo k tal que

$$f(t + k) = f(t)$$

para toda t del dominio de f . El menor número real positivo k si existe, es el **periodo** de f .

El periodo de las funciones seno y coseno es 2π .

Tracemos la gráfica de $y = \sin t$ en un sistema coordenado ty , en donde t es un número real o la medida en radianes de un ángulo. La tabla que sigue enumera coordenadas de varios puntos de la gráfica para $0 \leq t \leq 2\pi$. Algunos de estos valores se encuentran en los ejemplos 3 y 4

de la sección anterior. En la siguiente sección obtendremos varios otros valores exactos, como $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$.

t	$y = \sin t$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
2π	0

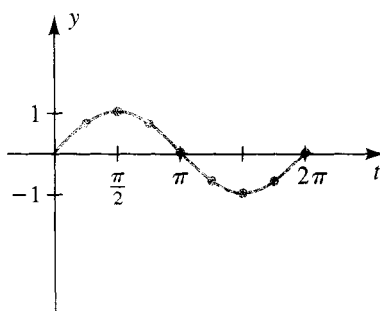


FIGURA 20 $y = \sin t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

Para trazar la gráfica para $0 \leq t \leq 2\pi$, tracemos los puntos dados por la tabla y recordemos que $\sin t$ crece en $[0, \pi/2]$, decrece en $[\pi/2, \pi]$, $[\pi, 3\pi/2]$ y crece en $[3\pi/2, 2\pi]$. Esto da el trazo de la figura 20. Como la función seno es periódica, el trazo de la figura 20 se repite a la derecha y a la izquierda, en intervalos de longitud 2π . Esto proporciona el trazo de la figura 21.

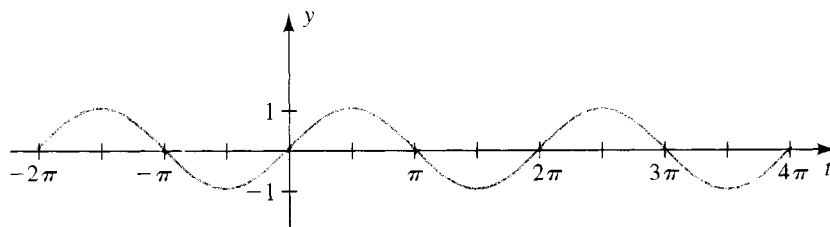
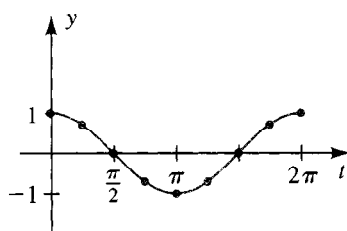


FIGURA 21 $y = \sin t$

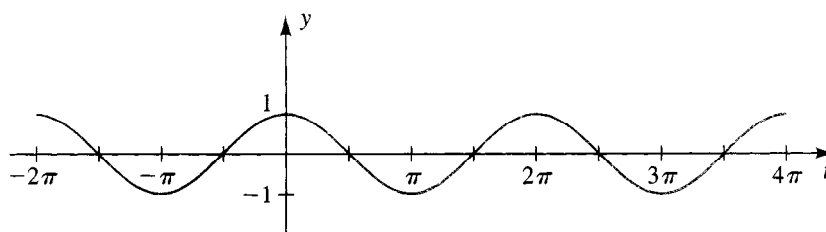
Se puede usar el mismo procedimiento para trazar la gráfica de $y = \cos t$. La próxima tabla enumera varios puntos de la gráfica para $0 \leq t \leq 2\pi$. Trazar estos puntos nos llevará a la parte de la gráfica de la figura 22.



t	$y = \cos t$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
π	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
2π	1

FIGURA 22 $y = \cos t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

Si se repiten estos trazos a derecha e izquierda, en intervalos de longitud 2π , se obtiene el trazo de la figura 23.

FIGURA 23 $y = \cos t$

La parte de la gráfica de la función seno o coseno correspondiente a $0 \leq t \leq 2\pi$ es un **ciclo**. A veces nos referimos a un ciclo como una **onda senoidal** o a una **onda cosenoidal**.

El rango de las funciones seno y coseno está formado por todos los números reales del intervalo cerrado $[-1, 1]$. Como $\csc t = 1/\sin t$ y $\sec t = 1/\cos t$, se deduce que el rango de las funciones cosecante y secante estará constituido por todos los números reales con valor absoluto mayor que o igual a 1.

Según veremos, el rango de las funciones tangente y cotangente está formado por todos los números reales.

Antes de analizar gráficas de las otras funciones trigonométricas, establezcamos fórmulas con funciones de $-t$ para cualquier t . Como interviene un signo menos, estas fórmulas se llaman *fórmulas para negativos*.

Fórmulas para negativos

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t$$

$$\sec(-t) = \sec t$$

$$\cot(-t) = -\cot t$$

PRUEBA Considera el círculo unitario U de la figura 24. A medida que t crece desde 0 hasta 2π , el punto $P(x, y)$ recorre el círculo unitario una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el punto $Q(x, -y)$, correspondiente a $-t$, recorre U una vez en sentido de las manecillas. Al aplicar la definición de funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario, tendremos

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t.$$

Las pruebas de las restantes tres fórmulas son semejantes. ■

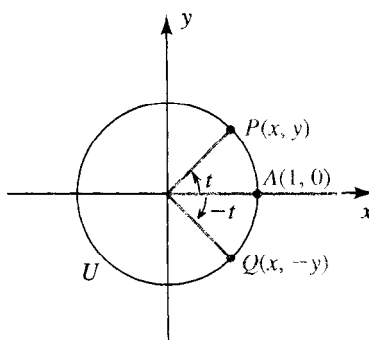


FIGURA 24

En el ejemplo inmediato se usan fórmulas para negativos a fin de hallar el valor exacto de cada función trigonométrica.

EJEMPLO 1 Usar fórmulas para negativos

Utiliza fórmulas para negativos con objeto de hallar valores exactos de

a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Solución Si se usan las fórmulas para negativos y el ejemplo 3 de la sección 2.2, se obtiene:

$$\text{a) } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = -1$$

EJEMPLO 2 Emplear fórmulas para negativos a fin de verificar una identidad

Comprueba esta identidad transformando el lado izquierdo en el derecho:

$$\sin(-t) \tan(-t) + \cos(-t) = \sec t$$

Solución Se puede proceder como sigue:

$$\begin{aligned} & \sin(-t) \tan(-t) + \cos(-t) \\ &= (-\sin t)(-\tan t) + \cos t && \text{fórmulas para negativos} \\ &= \sin t \frac{\sin t}{\cos t} + \cos t && \text{identidad tangente} \\ &= \frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t && \text{multiplicar} \\ &= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos t} && \text{sumar términos} \\ &= \frac{1}{\cos t} && \text{identidad de Pitágoras} \\ &= \sec t && \text{identidad recíproca} \end{aligned}$$

Con las fórmulas para negativos cabe demostrar el siguiente teorema.

Teorema de funciones trigonométricas pares y nones

- (1) Las funciones coseno y secante son pares.
- (2) Las funciones seno, tangente, cotangente y cosecante son nones.

PRUEBA Demostraremos el teorema para las funciones coseno y seno.


Si $f(t) = \cos t$, entonces

$$f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t),$$

lo que significa que la función coseno es par.

Si $f(t) = \text{sen } t$, entonces

$$f(-t) = \text{sen } (-t) = -\text{sen } t = -f(t).$$

Por lo tanto, la función seno es non. 

t	$y = \tan t$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \approx -1.7$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.6$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1.7$

Puesto que la función seno es non, su gráfica es simétrica con respecto al origen (Fig. 21). Dado que la función coseno es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y (Fig. 23).

Es posible calcular, para cualquier grado de precisión, los valores de las funciones trigonométricas de todo número real. La tabla 4 del apéndice II indica aproximaciones a cuatro lugares decimales de muchos valores correspondientes a t para $0 < t < 1.57$ (notarás que $1.57 \approx \pi/2$). El uso de la tabla 4 se explica en el apéndice I. La tabla 5 del apéndice II ayuda a encontrar valores de funciones trigonométricas para aproximaciones de dos lugares decimales de t , si $0 < t < 1.57$.

Algunas calculadoras científicas tienen teclas de $\boxed{\text{SIN}}$, $\boxed{\text{COS}}$ y $\boxed{\text{TAN}}$ con las que se pueden calcular valores de estas funciones. Así pues, los valores de csc , sec y cot se pueden definir por medio de la tecla recíproca. *Antes de usar una calculadora para hallar valores de funciones que correspondan a un número real t , cerciórate de que esté en el modo de radianes.* (Notarás que, en la Fig. 19, el número real t determina un ángulo central de U de medida t en radianes). En la sección 2.5 estudiaremos valores de funciones de ángulos que se miden en radianes o en grados.

Para ilustrar esto, a fin de hallar $\text{sen } (\pi/2)$ en una calculadora típica, se ajusta en modo de radianes y se usa la tecla $\boxed{\text{SIN}}$ a fin de obtener $\text{sen } (\pi/2) = 1$, que es el valor exacto. Si se utiliza el mismo procedimiento para $\pi/4$, se obtiene una aproximación decimal a $\sqrt{2}/2$, tal que

$$\text{sen } (\pi/4) \approx 0.7071.$$

La mayor parte de las calculadoras da de 8 a 10 lugares decimales de precisión para dichos valores de función; no obstante, en todo este texto encontraremos por lo general un redondeo de valores a cuatro lugares decimales.

Con objeto de hallar el valor de $\cos 1.3$, por ejemplo, se pone la calculadora en modo de radianes, se usa la tecla $\boxed{\cos}$ y se obtiene

$$\cos 1.3 \approx 0.2675.$$

Para $\sec 1.3$ podríamos encontrar $\cos 1.3$ y luego usar la tecla de recíprocas que, por lo general, es $\boxed{1/x}$ o $\boxed{x^{-1}}$, con lo que llegamos a

$$\sec 1.3 = \frac{1}{\cos 1.3} \approx 3.7383.$$

En la sección 2.2 se calcularon varios valores de $\tan t$; es viable calcular otros con una calculadora o tabla. Al calcular valores de $\tan t$ para $0 < t < \pi/2$, los valores cercanos a $t = \pi/2$ requieren atención especial. Si consideramos $\tan t = \sin t / \cos t$, entonces, a medida que t crece hacia $\pi/2$, el numerador $\sin t$ se aproxima a 1 y el denominador $\cos t$ se acerca a 0; como consecuencia, $\tan t$ toma grandes valores positivos. A continuación están algunas aproximaciones de $\tan t$ para t cercana a $\pi/2 \approx 1.5708$:

$$\tan 1.5700 \approx 1\,255.8$$

$$\tan 1.5703 \approx 2\,014.8$$

$$\tan 1.5706 \approx 5\,093.5$$

$$\tan 1.5707 \approx 10\,381.3$$

$$\tan 1.5709 \approx 158\,057.9$$

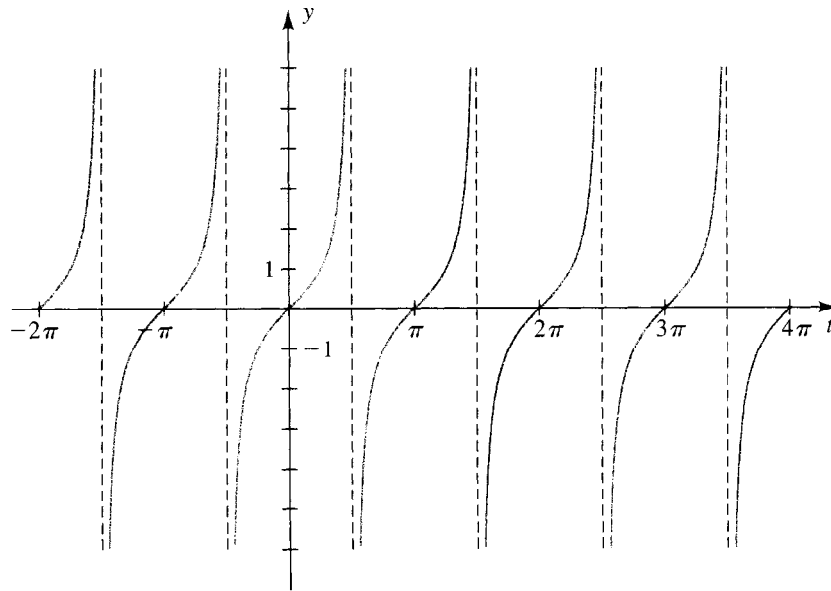
Advertirás lo rápido que $\tan t$ aumenta a medida que t se aproxima a $\pi/2$. Se dice que $\tan t$ *crece sin límite a medida que t se acerca a $\pi/2$ a través de valores menores de $\pi/2$* . Del mismo modo, si t se aproxima a $-\pi/2$ por valores mayores que $-\pi/2$, entonces $\tan t$ *decrece sin límite*. Se puede denotar esta variación con la notación introducida en la página 35:

$$\text{a medida que } t \rightarrow (\pi/2)^-, \tan t \rightarrow \infty$$

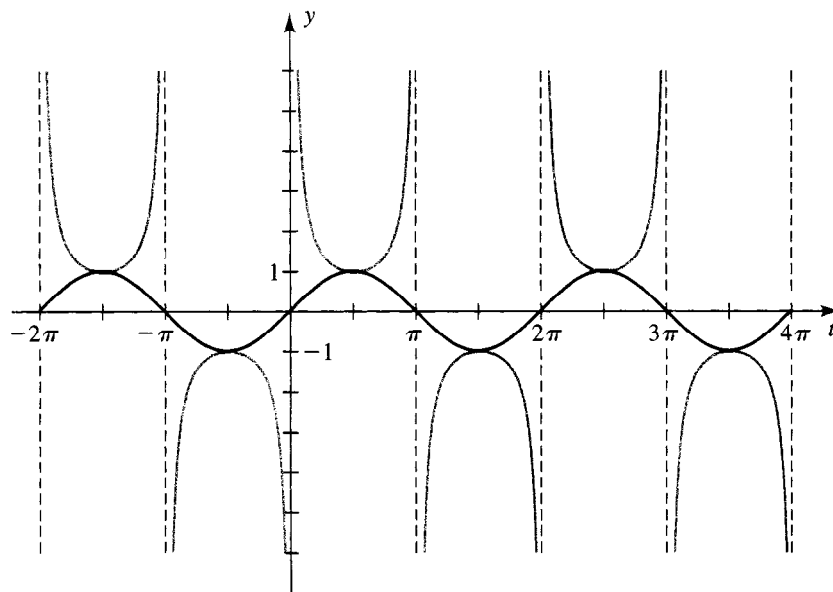
$$\text{a medida que } t \rightarrow (-\pi/2)^+, \tan t \rightarrow -\infty$$

Esta variación de $\tan t$ del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ se ilustra en la figura 25. Las líneas $t = \pi/2$ y $t = -\pi/2$ son asíntotas verticales para la gráfica. La misma figura se repite en los intervalos abiertos $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ y $(3\pi/2, 5\pi/2)$ y en intervalos semejantes de longitud π , como se ilustra en la figura. Por lo tanto, *la función tangente es periódica con periodo π* .

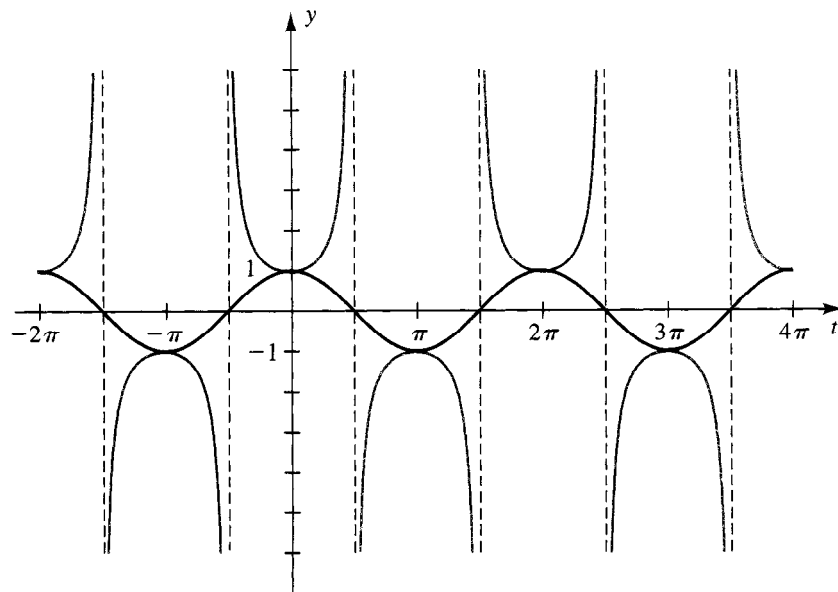
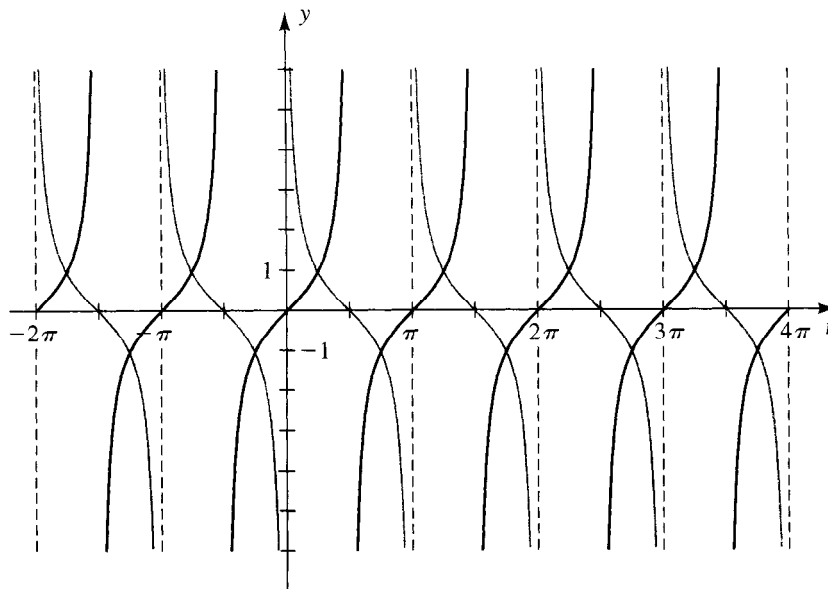
Las gráficas de \sin , \cos y \tan sirven para trazar las gráficas de las restantes tres funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\csc t = 1/\sin t$, se puede hallar la coordenada y de un punto de la gráfica de la función cosecante si se toma el recíproco de la coordenada y correspondiente de la misma gráfica del seno para todo valor de t , excepto $t = \pi n$, para cualquier entero n . (Si $t = \pi n$, $\sin t = 0$, y por lo tanto, $1/\sin t$ no está definido.) Como ayuda para trazar la gráfica de la función cosecante, conviene trazar la gráfica de la función seno (que se muestra en gris en la Fig. 26) y luego tomar recíprocos a fin de obtener puntos en la gráfica cosecante.

FIGURA 25 $y = \tan t$

Podrás notar el modo en que la función cosecante crece o decrece sin límite a medida que t se aproxima a πn para cualquier entero n . La gráfica tiene asíntotas verticales $t = \pi n$, según se indica en la figura 26.

FIGURA 26 $y = \csc t$

Dado que $\sec t = 1/\cos t$ y $\cot t = 1/\tan t$, se pueden obtener las gráficas de las funciones secante y cosecante si se toman recíprocos de coordenadas y de puntos de las gráficas de las funciones coseno y tangente (Figs. 27 y 28).

FIGURA 27 $y = \sec t$ FIGURA 28 $y = \cot t$

Hemos considerado muchas propiedades de las seis funciones trigonométricas de t , en donde t es un número real o la medida en radianes de un ángulo. La siguiente tabla contiene un resumen de características importantes de estas funciones. Como de costumbre, x y y son coordenadas de un punto P en el círculo unitario U correspondiente a un número real t .

Resumen de características de las funciones trigonométricas y sus gráficas

Característica	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
Definición	y/r	x/r	y/x	x/y	r/x	r/y
Dominio	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t \neq \pi n$	$t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t \neq \pi n$
Asíntotas verticales	ninguna	ninguna	$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t = \pi n$	$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t = \pi n$
Rango	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Intersecciones t	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	ninguna	ninguna
Intersección y	0	1	0	ninguna	1	ninguna
Periodo	2π	2π	π	π	2π	2π
Par o non	non	par	non	non	par	non
Simetría	origen	eje de las y	origen	origen	eje de las y	origen

EJEMPLO 3 Investigar la variación de $\csc t$

Investiga la variación de $\csc t$ a medida que

$$t \rightarrow \pi^-, t \rightarrow \pi^+, t \rightarrow \frac{\pi^-}{2}, \text{ y } t \rightarrow \frac{\pi^+}{4}.$$

Solución Con referencia a la gráfica de $y = \csc t$ de la figura 26 y usando nuestro conocimiento de los valores especiales de la función cosecante, obtenemos:

a medida que $t \rightarrow \pi^-$, $\csc t \rightarrow \infty$

a medida que $t \rightarrow \pi^+$, $\csc t \rightarrow -\infty$

a medida que $t \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$, $\csc t \rightarrow 1$

a medida que $t \rightarrow \frac{\pi^+}{4}$, $\csc t \rightarrow \sqrt{2}$

EJEMPLO 4 Solución de ecuación y desigualdades con una función trigonométrica

Halla todos los valores de t en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ tales que

a) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución Encontraremos las soluciones si consultamos las gráficas de $y = \cos t$ y $y = \sqrt{2}/2$, que se trazan en el mismo plano ty de la figura 29 para $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

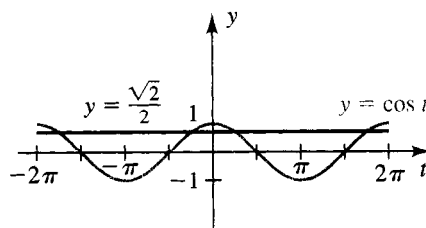


FIGURA 29

a) Los valores de t tales que $\cos t = \sqrt{2}/2$ son las coordenadas t de los puntos en que las gráficas se cortan. Vemos que los valores positivos son

$$t = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{y} \quad t = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Por simetría, los valores negativos son

$$t = -\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad t = -\frac{7\pi}{4}.$$

b) Los valores de t tales que $\cos t > \sqrt{2}/2$ se pueden establecer si se determina en qué lugar la gráfica de $y = \cos t$ de la figura 29 se encuentra *arriba* de la línea $y = \sqrt{2}/2$. Esto da los intervalos t .

$$\left[-2\pi, -\frac{7\pi}{4}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right].$$

c) Para resolver $\cos t < \sqrt{2}/2$, otra vez consultamos la figura 29 y observamos dónde la gráfica de $y = \cos t$ se encuentra *abajo* de la línea $y = \sqrt{2}/2$. Esto proporciona los intervalos t .

$$\left(-\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

Otro método de resolver $\cos t < \sqrt{2}/2$ es observar que las soluciones son los subintervalos abiertos de $[-2\pi, 2\pi]$ que *no estén* incluidos en los intervalos obtenidos en la parte b).

El resultado estudiado en el siguiente ejemplo desempeña un importante papel en matemáticas avanzadas.

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de $f(t) = (\sin t)/t$



Si $f(t) = (\sin t)/t$, traza la gráfica de f en $[-\pi, \pi]$ e investiga el comportamiento de $f(t)$ a medida que $t \rightarrow 0^-$ y conforme $t \rightarrow 0^+$.

Solución Verás que f no está definida en $t = 0$ porque la sustitución dará la expresión $0/0$, que no tiene sentido.

Se asigna $(\sin x)/x$ a Y_1 . Como $\pi \approx 3.1416$, se usa el rectángulo de observación $[-3.15, 3.15]$ por $[-2.1, 2.1]$ y se obtiene un trazo similar a la figura 30. Si se usan características de *trace* y *zoom*, es claro que

$$\text{a medida que } t \rightarrow 0^-, f(t) \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \text{a medida que } t \rightarrow 0^+, f(t) \rightarrow 1$$

Hay un hueco en la gráfica en el punto $(0, 1)$, pero la mayor parte de los equipos de graficación no puede mostrar este hecho.

Nuestra técnica de graficación no *demuestra* que $f(t) \rightarrow 1$ a medida que $t \rightarrow 0$, pero la hace parecer altamente probable. En textos de cálculo es probable encontrar una prueba rigurosa basada en la definición de $\sin t$ y consideraciones geométricas.

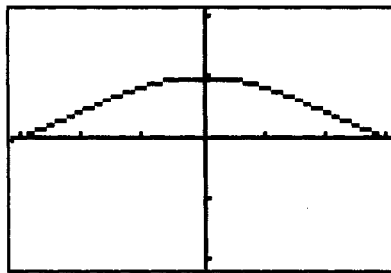


FIGURA 30

Un resultado interesante que se obtuvo del ejemplo 4 es que si t está en radianes y

$$\text{si } t \approx 0, \text{ entonces } \frac{\sin t}{t} \approx 1, \text{ o } \sin t \approx t.$$

El último enunciado da una *fórmula de aproximación* para $\sin t$ si t es cercana a 0. A fin de ilustrar esto, con una calculadora se encuentra que

$$\sin(0.06) \approx 0.0599640$$

$$\sin(0.05) \approx 0.0499792$$

$$\sin(0.04) \approx 0.0399893$$

$$\sin(0.03) \approx 0.0299955$$

$$\sin(0.02) \approx 0.0199987$$

$$\sin(0.01) \approx 0.0099998$$

2.3 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: usa una fórmula para negativos y halla el valor exacto.

1. a) $\sin(-90^\circ)$ b) $\cos(-3\pi/4)$ c) $\tan(-45^\circ)$

2. a) $\sin(-3\pi/2)$ b) $\cos(-225^\circ)$

3. a) $\cot(-3\pi/4)$ b) $\sec(-180^\circ)$

4. a) $\cot(-225^\circ)$ b) $\sec(-\pi/4)$

c) $\tan(-\pi)$

c) $\csc(-3\pi/2)$

c) $\csc(-45^\circ)$



Ejercicios 5 al 10: verifica la identidad al transformar el lado izquierdo en el derecho.

5. $\sin(-t) \sec(-t) = -\tan t$ 6. $\csc(-t) \cos(-t) = -\cot t$

7. $\frac{\cot(-t)}{\csc(-t)} = \cos t$ 8. $\frac{\sec(-t)}{\tan(-t)} = -\csc t$

9. $\frac{1}{\cos(-t)} - \tan(-t) \sin(-t) = \cos t$

10. $\cot(-t) \cos(-t) + \sin(-t) = -\csc t$

Ejercicios 11 al 22: completa el enunciado con referencia a la gráfica de una función trigonométrica.

11. a) a medida que $t \rightarrow 0^+$, $\sin t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (-\pi/2)^-$, $\sin t \rightarrow$ ____

12. a) a medida que $t \rightarrow \pi^+$, $\sin t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (\pi/4)^-$, $\sin t \rightarrow$ ____

13. a) a medida que $t \rightarrow (\pi/4)^+$, $\cos t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow \pi^-$, $\cos t \rightarrow$ ____

14. a) a medida que $t \rightarrow 0^+$, $\cos t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (-3\pi/4)^-$, $\cos t \rightarrow$ ____

15. a) a medida que $t \rightarrow (\pi/4)^+$, $\tan t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (\pi/2)^+$, $\tan t \rightarrow$ ____

16. a) a medida que $t \rightarrow 0^+$, $\tan t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (-\pi/2)^-$, $\tan t \rightarrow$ ____

17. a) a medida que $t \rightarrow (-\pi/4)^-$, $\cot t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow 0^+$, $\cot t \rightarrow$ ____

18. a) a medida que $t \rightarrow (\pi/2)^+$, $\cot t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow \pi^-$, $\cot t \rightarrow$ ____

19. a) a medida que $t \rightarrow (\pi/2)^-$, $\sec t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (\pi/4)^+$, $\sec t \rightarrow$ ____

20. a) a medida que $t \rightarrow (\pi/2)^+$, $\sec t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow 0^+$, $\sec t \rightarrow$ ____

21. a) a medida que $t \rightarrow 0^+$, $\csc t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (\pi/2)^+$, $\csc t \rightarrow$ ____

22. a) a medida que $t \rightarrow \pi^+$, $\csc t \rightarrow$ ____

b) a medida que $t \rightarrow (\pi/4)^-$, $\csc t \rightarrow$ ____

Ejercicios 23 al 30: consulta la gráfica de $y = \sin t$ o $y = \cos t$ para hallar los valores exactos de t en el intervalo $[0, 4\pi]$ que satisfaga la ecuación.

23. $\sin t = -1$

24. $\sin t = 1$

25. $\sin t = \sqrt{2}/2$

26. $\sin t = -\sqrt{2}/2$

27. $\cos t = 1$

28. $\cos t = -1$

29. $\cos t = -\sqrt{2}/2$

30. $\cos t = 0$

Ejercicios 31 y 32: consulta la gráfica de $y = \tan t$ para establecer los valores exactos de t en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ que satisfaga la ecuación.

31. $\tan t = 1$

32. $\tan t = -1$

Ejercicios 33 al 36: consulta la gráfica de la ecuación en el intervalo especificado. Halla todos los valores de t tales que para el número real a ,

a) $y = a$

b) $y > a$

c) $y < a$

33. $y = \sin t$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = \sqrt{2}/2$

34. $y = \cos t$; $[0, 4\pi]$; $a = \sqrt{2}/2$

35. $y = \cos t$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = -\sqrt{2}/2$

36. $y = \sin t$; $[0, 4\pi]$; $a = -\sqrt{2}/2$

Ejercicios 37 al 44: usa la gráfica de una función trigonométrica para trazar la gráfica de la ecuación sin trazar puntos.

37. $y = 2 + \sin t$

38. $y = 3 + \cos t$

39. $y = \cos t - 2$

40. $y = \sin t - 1$

41. $y = 1 + \tan t$

42. $y = \cot t - 1$

43. $y = \sec t - 2$

44. $y = 1 + \csc t$

Ejercicios 45 al 48: halla los intervalos entre -2π y 2π en los que $f(t)$ a) crezca o b) decrezca.

45. $f(t) = \sec t$

46. $f(t) = \csc t$

47. $f(t) = \tan t$

48. $f(t) = \cot t$

49. Practica el trazado de gráficas de la función seno, tomando unidades diferentes de longitud de los ejes vertical y horizontal; del mismo modo, practica el trazado de gráficas de las funciones coseno y tangente. Continúa la práctica hasta que alcances una etapa en que, si te despiertan en la noche y te piden trazar una de estas gráficas, puedas hacerlo en menos de 30 segundos.

50. Trabaja el ejercicio 49 para las funciones de cosecante, secante y cotangente.

C Ejercicios 51 y 52: grafica la ecuación y calcula los valores de t dentro del intervalo especificado, que corresponda al valor dado de y .

51. $y = \sin(t^2)$, $[-\pi, \pi]$; $y = 0.5$

52. $y = \tan(\sqrt{t})$, $[0, 25]$; $y = 5$

C Ejercicios 53 y 54: grafica f en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ y calcula las coordenadas de los puntos alto y bajo.

53. $f(t) = t \sin t$ 54. $f(t) = \sin^2 t \cos t$



Ejercicios 55 al 60: a medida que $t \rightarrow 0^+$, $f(t) \rightarrow L$ para algún número real L . Usa una gráfica para predecir L .

$$55. f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$$

$$56. f(t) = \frac{6t - 6 \sin t}{t^3}$$

$$59. f(t) = \frac{\tan t}{t}$$

$$58. f(t) = \frac{t + \tan t}{\sin t}$$

$$60. f(t) = \frac{\cos(t + \frac{1}{2}\pi)}{t}$$

2.4 Funciones trigonométricas de ángulos

Para ciertos problemas aplicados, es conveniente cambiar los dominios de las funciones trigonométricas de conjuntos de números reales a conjuntos de ángulos. Si θ es un ángulo, una forma natural de asignar los valores $\sin \theta$, $\cos \theta$, ..., es usar la medida en radianes de θ como en la siguiente definición.

Definición de funciones trigonométricas de ángulos

Si θ es un ángulo con medida t en radianes, entonces el valor de cada función trigonométrica en θ es su valor en el número real t .

Por la definición precedente, si t es la medida en radianes de un ángulo θ , entonces

$$\sin \theta = \sin t, \quad \cos \theta = \cos t, \quad \tan \theta = \tan t,$$

y así sucesivamente. Se usa el término de *funciones trigonométricas* si los dominios están formados por ángulos o números. Se utiliza notación como $\sin 65^\circ$ o $\tan 150^\circ$ siempre que el ángulo se mida en grados. Los números sin símbolo, como $\cos 3$ y $\csc(\pi/4)$, indican que se está empleando medida en radianes. Esto no choca con nuestro trabajo anterior en donde, por ejemplo, $\cos 3$ quería decir el valor de la función coseno en el número real 3, ya que por definición el coseno de un ángulo de 3 radianes es lo mismo que el coseno del número real 3. Notarás, sin embargo, que

$$\sin 3^\circ \neq \sin 3,$$

ya que $3^\circ \neq 3$ radianes.

EJEMPLO 1

Hallar los valores de la función trigonométrica de los ángulos especiales

Halla $\sin 90^\circ$, $\cos 45^\circ$ y $\tan 720^\circ$.

Solución Los ángulos se muestran en posición estándar en la figura 31.

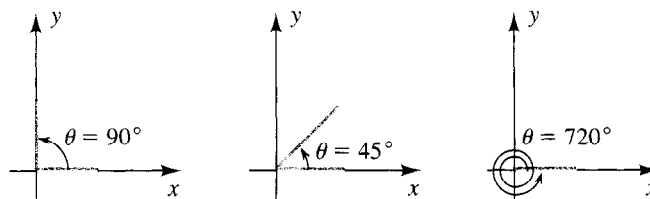


FIGURA 31

Primero se convierte la medida en grados en medida en radianes:

$$90^\circ = 90 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad 45^\circ = 45 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{\pi}{4}, \quad 720^\circ = 720 \left(\frac{\pi}{180} \right) = 4\pi$$

Si se usa la definición de funciones trigonométricas de ángulos y el ejemplo 3 de la sección 2.2, se obtienen los valores de función:

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 720^\circ = \tan 4\pi = \tan 0 = 0$$

En la siguiente sección se introducen técnicas para calcular valores de funciones trigonométricas correspondientes a *cualquier* ángulo θ .

Los valores de las funciones trigonométricas a un ángulo θ se pueden determinar por medio de un punto en el lado terminal de θ , de esta forma: sea θ un ángulo en posición estándar, y sea $Q(x, y)$ cualquier punto del lado terminal de θ distinto del origen O (Fig. 32). La distancia entre O y Q se denota con r ; es decir, $r = d(O, Q)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

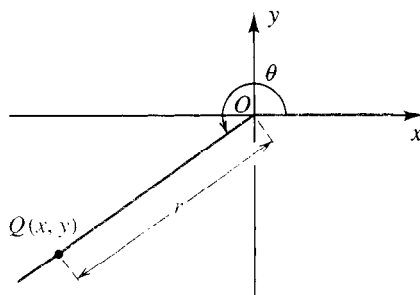


FIGURA 32

El punto $Q(x, y)$ no es necesariamente un punto en el círculo unitario U , ya que r puede ser diferente de 1. Si hacemos que $P(x_1, y_1)$ sea el punto en el lado terminal de θ tal que $d(O, P) = 1$, entonces $P(x_1, y_1)$ está en el círculo unitario U . Si t es la medida en radianes de θ , entonces, por definición,

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} t = y_1 \quad \text{y} \quad \cos \theta = \cos t = x_1.$$

Según se aprecia en la figura 33, las líneas verticales que pasan por Q y P cortan al eje de las x en $Q'(x, 0)$ y $P'(x_1, 0)$, respectivamente. Dado que los triángulos OQQ' y OPP' son semejantes, las razones de los lados correspondientes son iguales. En particular,

$$\frac{d(P', P)}{d(O, P)} = \frac{d(Q', Q)}{d(O, Q)}, \quad \text{o} \quad \frac{|y_1|}{1} = \frac{|y|}{r}.$$

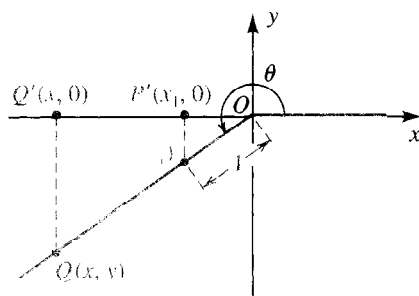


FIGURA 33

Como y y y_1 tienen el mismo signo, esto nos da

$$y_1 = \frac{y}{r} \quad \text{y por lo tanto } \sin \theta = y_1 = \frac{y}{r}.$$

De modo similar se obtiene

$$\cos \theta = \frac{x}{r}.$$

Si se usa la identidad tangente, se tiene

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{y}{x}.$$

Los restantes tres valores de función se pueden obtener si se toman recíprocos, lo que lleva al siguiente teorema.

Teorema sobre funciones trigonométricas como razones

Sea θ un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, y sea $Q(x, y)$ cualquier punto fuera del origen O en el lado terminal de θ . Si $d(O, Q) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (\text{si } y \neq 0)$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0).$$

Debemos reiterar que, en este teorema, x y y no son necesariamente las coordenadas de un punto en el círculo unitario U ; sin embargo, si $r = 1$, entonces las fórmulas se reducen a la definición de círculo unitario de las funciones trigonométricas dadas en la sección 2.2. El teorema anterior tiene muchas aplicaciones. En la sección 2.8 se resolverán problemas aplicados con triángulos rectángulos. También es útil para hallar valores de funciones trigonométricas, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2 Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo en posición estándar

Si θ es un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, y si $P(-15, 8)$ está en el lado terminal de θ , halla los valores de las seis funciones trigonométricas de θ .

Solución El punto $P(-15, 8)$ se presenta en la figura 34. Si se aplica el teorema sobre funciones trigonométricas como razones con

$$x = -15, y = 8, \quad y \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17,$$

se obtiene lo siguiente:

$$\sin \theta = \frac{8}{17} \quad \cos \theta = -\frac{15}{17} \quad \tan \theta = -\frac{8}{15}$$

$$\csc \theta = \frac{17}{8} \quad \sec \theta = -\frac{17}{15} \quad \cot \theta = -\frac{15}{8}$$

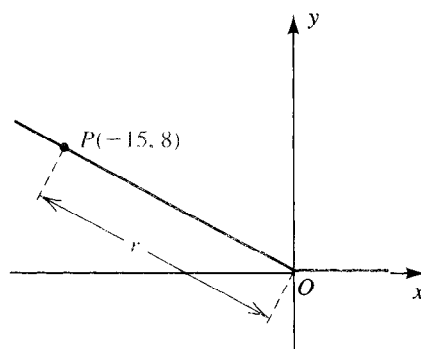


FIGURA 34

EJEMPLO 3 Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo en posición estándar.

Un ángulo θ está en posición estándar y su lado terminal se encuentra en el tercer cuadrante sobre la línea $y = 3x$. Halla los valores de las funciones trigonométricas de θ .

Solución La gráfica de $y = 3x$ se ilustra en la figura 35, con los lados inicial y terminal de θ . Dado que el lado terminal de θ está en el tercer cuadrante, se comienza por escoger un valor negativo conveniente para x , por ejemplo $x = -1$. Se sustituye este valor de x en $y = 3x$ y se tiene $y = 3(-1) = -3$; por lo tanto, $P(-1, -3)$ está en el lado terminal. Al aplicar el teorema de funciones trigonométricas como razones con

$$x = -1, y = -3, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

se obtiene

$$\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \tan \theta = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\csc \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3} \quad \sec \theta = -\frac{\sqrt{10}}{1} \quad \cot \theta = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

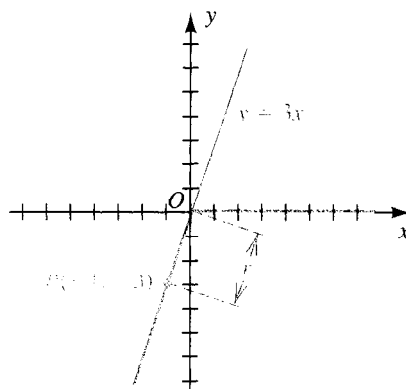


FIGURA 35

El teorema de funciones trigonométricas como razones se puede aplicar si θ es un ángulo cuadrantal. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo cuadrantal

Si $\theta = 3\pi/2$, encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ .

Notación Notarás que $\theta = 3\pi/2 = 270^\circ$. Al colocar a θ en posición estándar, el lado terminal de θ coincide con el eje negativo de las y (Fig. 36). Para usar el teorema de funciones trigonométricas como razones, se puede escoger *cualquier* punto P del lado terminal de θ . Para mayor sencillez, se usa $P(0, -1)$. En este caso, $x = 0$, $y = -1$, $r = 1$; por lo tanto

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \cot \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Las funciones tangente y secante no están definidas, puesto que las expresiones que no tienen sentido $\tan \theta = (-1)/0$ y $\sec \theta = 1/0$ ocurren cuando se sustituyen en las fórmulas apropiadas.

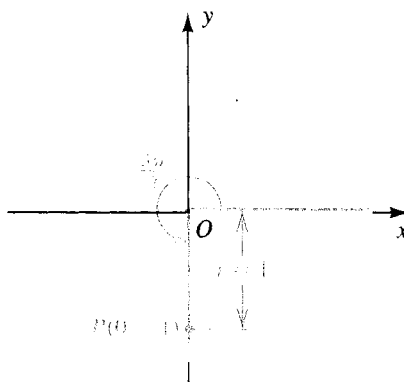


FIGURA 36

Concluimos esta sección demostrando que, para ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas se pueden interpretar como razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Un triángulo es **rectángulo** si uno de sus ángulos es un ángulo recto. A veces se usa el símbolo de ángulo recto \square para especificar el ángulo que mide 90° (Fig. 37). Si θ es un ángulo agudo, se puede considerar como un ángulo de un triángulo rectángulo y podemos referirnos a las longitudes de la **hipotenusa**, el **lado opuesto** y el **lado adyacente**. Se usará **hip**, **op** y **ady**, respectivamente, para denotar estas longitudes. Al introducir un sistema de coordenadas rectangulares como en la figura 37, las longitudes del lado adyacente y del lado opuesto para θ son la coordenada de x y la coordenada de y , respectivamente, de un punto Q del lado terminal de θ . Si se usa el teorema de funciones trigonométricas como razones obtendremos:

Funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} \\ \csc \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}}\end{aligned}$$

Estas fórmulas serán útiles en futuras aplicaciones.

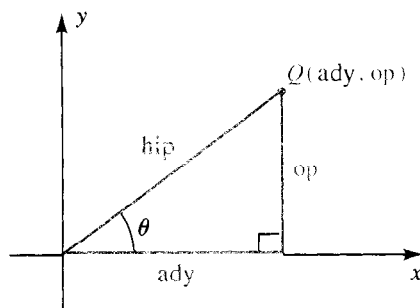


FIGURA 37

EJEMPLO 5 Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Si θ es un ángulo agudo y $\cos \theta = \frac{3}{4}$, halla los valores de las funciones trigonométricas de θ .

Solución Comenzamos por trazar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ con $\text{ady} = 3$ e $\text{hip} = 4$ (Fig. 38) y procedemos como sigue:

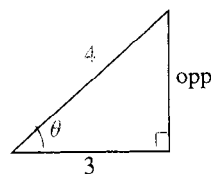


FIGURA 38

$$3^2 + (\text{op})^2 = 4^2$$

teorema de Pitágoras

$$(\text{op})^2 = 16 - 9 = 7$$

restar 9

$$\text{op} = \sqrt{7}$$

tomar raíz cuadrada

Al aplicar la definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se obtiene:

$$\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \csc \theta = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\sec \theta = \frac{4}{3} \quad \cot \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

En el ejemplo 5 se podrían racionalizar los denominadores para $\csc \theta$ y $\cot \theta$ (quitarles radicales) y escribir

$$\csc \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7} \quad \text{y} \quad \cot \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Sin embargo, en la mayor parte de los ejemplos y ejercicios se dejarán las expresiones sin racionalizar. Una excepción serán los valores de funciones trigonométricas especiales correspondientes a 60° , 30° y 45° , que se obtienen en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 6

Hallar los valores de las funciones trigonométricas de 60° , 30° y 45°

Determina los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a θ .

- a)** $\theta = 60^\circ$ **b)** $\theta = 30^\circ$ **c)** $\theta = 45^\circ$

Solución Considera un triángulo equilátero con los lados de longitud 2. La mediana de un vértice al lado opuesto bisecta el ángulo en ese vértice (Fig. 39, líneas punteadas). Por el teorema de Pitágoras, el lado opuesto al ángulo de 60° del triángulo rectángulo sombreado tiene una longitud de $\sqrt{3}$. Si se usan las fórmulas para las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se obtienen los valores correspondientes a 60° y a 30° como sigue:

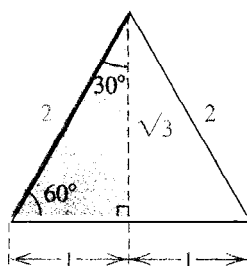


FIGURA 39

$$\text{a) } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2 \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2 \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

c) A fin de hallar los valores para $\theta = 45^\circ$ se puede considerar un triángulo rectángulo isósceles, cuyos dos lados iguales tienen longitud 1 (Fig. 40). Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$. En consecuencia, los valores correspondientes a 45° son:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45^\circ \quad \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

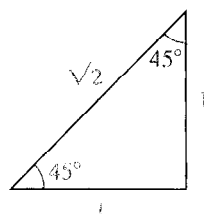


FIGURA 40

Para referencia, en la siguiente tabla se detallan los valores encontrados en el ejemplo 6, y las medidas en radianes de los ángulos. Dos razones para acentuar la importancia de estos valores son su exactitud y que ocurren con frecuencia en trabajos de trigonometría. Debido a su interés, es una buena idea memorizar la tabla o aprender a hallar los valores con rapidez utilizando triángulos, como en el ejemplo 6.

Valores especiales de las funciones trigonométricas

θ (radianes)	θ (grados)	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

El siguiente ejemplo ilustra un uso práctico de las funciones trigonométricas de ángulos agudos. En la sección 2.8 se considerarán otras aplicaciones con triángulos rectángulos.

EJEMPLO 7 Hallar la altura de un asta bandera

Un agrimensor observa que en un punto A ubicado al nivel del suelo a una distancia de 25 ft de la base B de un asta bandera, el ángulo entre el suelo y la parte superior del asta es de 30° . Calcula la altura del asta al décimo de pie más cercano.

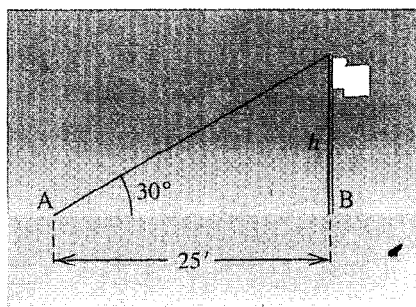


FIGURA 41

Solución. Si la altura del asta es h , entonces, por la figura 41, vemos que

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{25}, \quad \text{o} \quad h = 25 \tan 30^\circ.$$

Se usa el valor de $\tan 30^\circ$ del ejemplo 6 y hallamos h :

$$h = 25 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 14.4 \text{ ft}$$

Hemos estudiado dos métodos de análisis de las funciones trigonométricas. La definición en términos de un círculo unitario, introducido en la sección 2.2, resalta el hecho de que estas funciones tienen dominios formados por números reales. Dichas funciones son las bases para el cálculo. Además, el método del círculo unitario es útil para el estudio de gráficas y derivar identidades trigonométricas. El desarrollo en términos de ángulos y razones, considerado en esta sección, tiene muchas aplicaciones en las ciencias e ingeniería. Conviene que practiques hasta adquirir destreza en el uso de ambos métodos de las funciones trigonométricas, ya que cada uno reforzará al otro. Esto te facilitará el dominio de aspectos más avanzados de la trigonometría.

2.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: halla los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ , si θ está en posición estándar y P se encuentra en el lado terminal.

1. $P(4, -3)$
2. $P(-8, -15)$
3. $P(-2, -5)$
4. $P(-1, 2)$

Ejercicios 5 al 10: determina los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ , si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ se encuentra en el cuadrante especificado y satisface la condición dada.

5. II; en la línea $y = -4x$



6. IV; en la línea $3y + 5x = 0$
 7. I; en la línea $y = \frac{4}{3}x$
 8. III; bisecta el cuadrante
 9. III; en la línea $2y = 7x$
 10. II; en la línea $y = -3x$

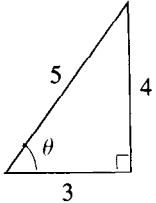
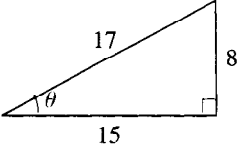
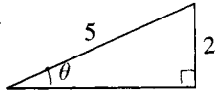
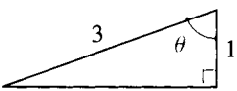
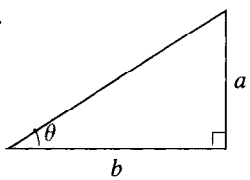
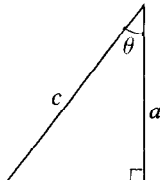
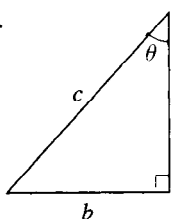
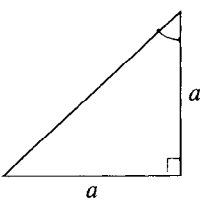
Ejercicios 11 y 12: halla los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo, si es posible.

11. a) 90° b) 0° c) $7\pi/2$ d) 3π
 12. a) 180° b) -90° c) 2π d) $5\pi/2$

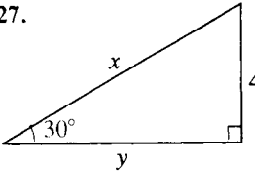
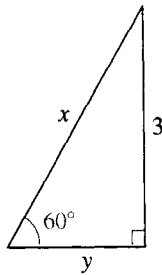
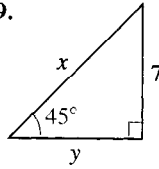
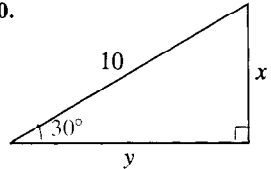
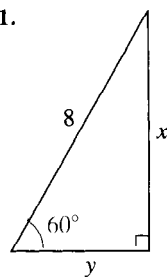
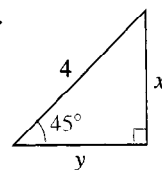
Ejercicios 13 al 18: encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas si θ es un ángulo agudo.

13. $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 14. $\cos \theta = \frac{8}{17}$
 15. $\tan \theta = \frac{5}{12}$ 16. $\cot \theta = \frac{7}{24}$
 17. $\sec \theta = \frac{6}{5}$ 18. $\csc \theta = 4$

Ejercicios 19 al 26: indica los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ .

19.  20. 
 21.  22. 
 23.  24. 
 25.  26. 

Ejercicios 27 al 32: encuentra los valores exactos de x y y .

27.  28. 
 29.  30. 
 31.  32. 

33. Altura de un árbol Un leñador ubicado a 200 pies de la base de una secoya, observa que el ángulo entre el suelo y la parte superior del árbol es de 60° . Calcula la altura del árbol.

34. Distancia al Monte Fuji El Monte Fuji, en Japón, mide aproximadamente 12 400 pies de altura. Un estudiante de trigonometría, que está a varias millas de distancia de esa montaña, observa que el ángulo entre el nivel del suelo y la cima es de 30° . Calcula la distancia a la base de la montaña.

2.5 Valores de las funciones trigonométricas

En secciones previas calculamos valores especiales de las funciones trigonométricas, tanto por la definición del círculo unitario como por el teorema de funciones trigonométricas como razones. En la práctica suele usarse una calculadora o tabla para calcular estos valores.

A continuación demostraremos cómo se pueden encontrar los valores de cualquier función trigonométrica a un número real t o a un ángulo de θ grados a partir de sus valores en el intervalo $t(0, \pi/2)$ o el intervalo $\theta(0^\circ, 90^\circ)$, respectivamente. Esta técnica se necesita a veces cuando se usa calculadora o tablas para hallar todos los ángulos o números reales que correspondan a un valor de función dado.

Apliquemos el siguiente concepto.

Definición de ángulo de referencia

Sea θ un ángulo acuatrantal (o sea, no cuadrantal) en posición estándar. El **ángulo de referencia** para θ es el ángulo agudo θ_R que el lado terminal de θ forma con el eje x .

La figura 42 ilustra el ángulo de referencia θ_R para un ángulo θ acuatrantal, con $0^\circ < \theta < 360^\circ$ o $0 < \theta < 2\pi$, en cada uno de los cuatro cuadrantes.

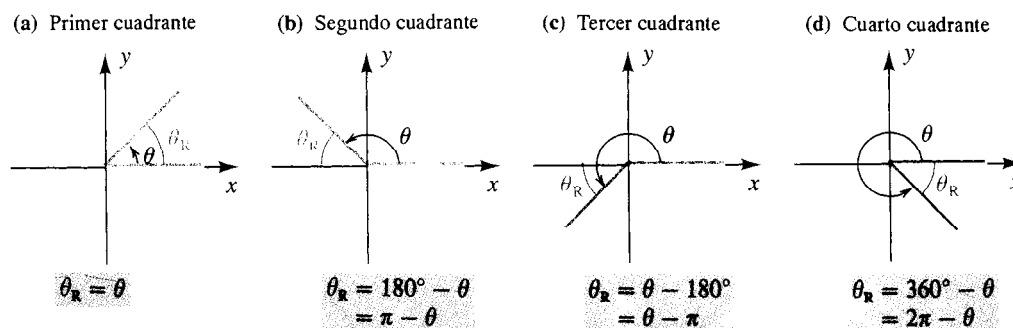


FIGURA 42 Ángulos de referencia

Las fórmulas que aparecen bajo los ejes en la figura 42 son útiles para hallar la medida de θ_R en grados o radianes cuando θ sea en grados o radianes, respectivamente. *Para un ángulo acuatrantal, mayor de 360° o menor de 0° , primero se define el ángulo coterminal θ con $0^\circ < \theta < 360^\circ$ o $0 < \theta < 2\pi$, y luego se usan las fórmulas de la figura 42.*

EJEMPLO 1 Hallar los ángulos de referencia

Halla el ángulo de referencia θ_R para θ , y traza θ y θ_R en posición estándar en el mismo plano coordenado.

- a) $\theta = 315^\circ$ b) $\theta = -240^\circ$ c) $\theta = \frac{5\pi}{6}$ d) $\theta = 4$

Solución a) El ángulo $\theta = 315^\circ$ está en el cuarto cuadrante y, por lo tanto, como en la figura 42d),

$$\theta_R = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ.$$

Los ángulos θ y θ_R se trazan en la figura 43a).

b) El ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con $\theta = -240^\circ$ es

$$-240^\circ + 360^\circ = 120^\circ,$$

que se halla en el segundo cuadrante. Con la fórmula de la figura 42b) se obtiene

$$\theta_R = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Los ángulos θ y θ_R están trazados en la figura 43b).

c) Como el ángulo $\theta = 5\pi/6$ ocupa en el segundo cuadrante, tenemos

$$\theta_R = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

según se muestra en la figura 43c).

d) Dado que $\pi < 4 < 3\pi/2$, el ángulo $\theta = 4$ está en el tercer cuadrante. Con la fórmula de la figura 42c) tenemos

$$\theta_R = 4 - \pi.$$

Los ángulos están en la figura 43d).

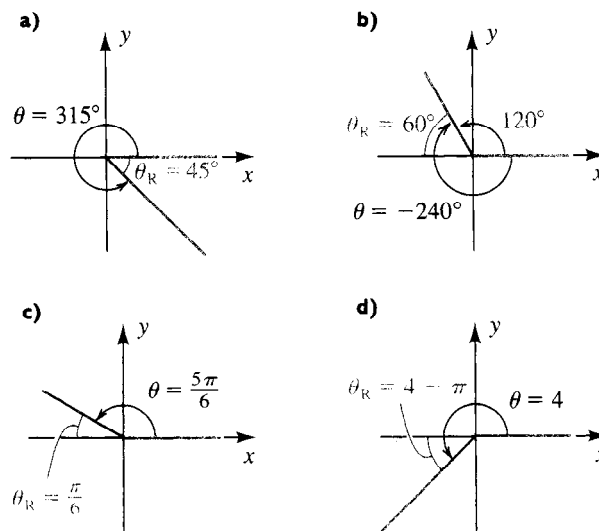


FIGURA 43

A continuación mostraremos la forma en que los ángulos de referencia se usan para hallar los valores de las funciones trigonométricas.

Si θ no es un ángulo cuadrantal, con ángulo de referencia θ_R , entonces $0^\circ < \theta_R < 90^\circ$ o $0 < \theta_R < \pi/2$. Sea $P(x, y)$ un punto del lado terminal de θ y toma el punto $Q(x, 0)$ en el eje de las x . La figura 44 ilustra una situación habitual para θ en cada cuadrante.

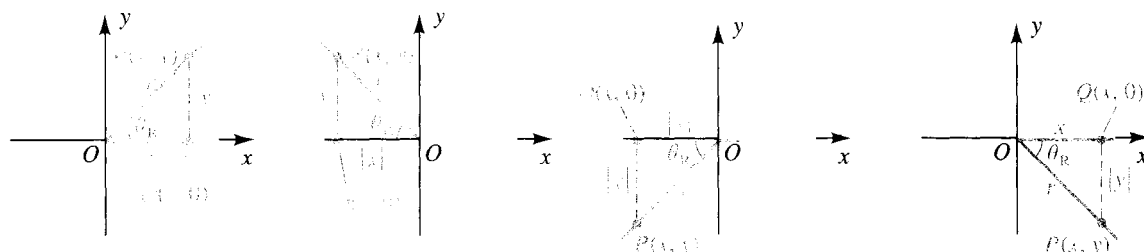


FIGURA 44

En cada caso, las longitudes de los lados del triángulo OPQ son

$$d(O, Q) = |x|, \quad d(Q, P) = |y|, \quad \text{y} \quad d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Se pueden aplicar las definiciones de funciones trigonométricas de cualquier ángulo y también usar el triángulo OPQ para obtener las siguientes fórmulas:

$$|\sin \theta| = \left| \frac{y}{r} \right| = \frac{|y|}{|r|} = \frac{|y|}{r} = \sin \theta_R$$

$$|\cos \theta| = \left| \frac{x}{r} \right| = \frac{|x|}{|r|} = \frac{|x|}{r} = \cos \theta_R$$

$$|\tan \theta| = \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{|y|}{|x|} = \tan \theta_R$$

Estas fórmulas llevan al teorema adjunto. Si θ es un ángulo cuadrantal, la definición de funciones trigonométricas debe usarse para hallar valores.

Teorema sobre ángulos de referencia

Si θ es un ángulo acuatrantal en posición estándar, entonces, para hallar el valor de una función trigonométrica en θ , se determina su valor para el ángulo de referencia θ_R y se antepone el signo apropiado.

El “signo apropiado” a que se refiere el teorema se puede tomar de la tabla de los signos de funciones trigonométricas dada en la sección 2.2.

EJEMPLO 2

Usar ángulos de referencia

Usa los ángulos de referencia para hallar los valores exactos de $\sin \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta$ si

a) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

b) $\theta = 315^\circ$

Notación

a) El ángulo $\theta = 5\pi/6$ y su ángulo de referencia $\theta_R = \pi/6$ están trazados en la figura 43c). Como θ se halla en el segundo cuadrante, $\sin \theta$ es positivo y tanto $\cos \theta$ como $\tan \theta$ son negativos. En consecuencia, por el teorema sobre ángulos de referencia y resultados conocidos sobre ángulos especiales (pág. 100), se obtienen los siguientes valores:

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) El ángulo $\theta = 315^\circ$ y su ángulo de referencia $\theta_R = 45^\circ$ aparecen en la figura 43a). Dado que θ está en el cuarto cuadrante, $\operatorname{sen} \theta < 0$, $\cos \theta > 0$ y $\tan \theta < 0$.

Así pues, por el teorema sobre ángulos de referencia se tiene

$$\operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1.$$

Si se usa una calculadora a fin de calcular los valores de las funciones, los ángulos de referencia no son necesarios. Como demostración, para hallar $\operatorname{sen} 210^\circ$, se pone la calculadora en modo de grados y se obtiene $210^\circ = -0.5$, que es el valor exacto. Al usar el mismo procedimiento para 240° , se obtiene una representación decimal:

$$\operatorname{sen} 240^\circ \approx -0.8660$$

No debe utilizarse una calculadora para hallar el valor *exacto* de $\operatorname{sen} 240^\circ$. En este caso, encontramos el ángulo de referencia 60° de 240° , aplicamos el teorema sobre ángulos de referencia, y los resultados conocidos sobre ángulos especiales para obtener

$$\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Consideremos a continuación la solución de una ecuación del siguiente tipo:

Problema: si θ es un ángulo agudo y $\operatorname{sen} \theta = 0.6635$, calcula θ .

Un método de calcular θ es con una tabla. Algunas calculadoras tienen una tecla marcada como $\boxed{\operatorname{SIN}^{-1}}$ que ayuda a resolver la ecuación; con otras, puede requerirse otra tecla o una secuencia de tecleo como $\boxed{\operatorname{INV}}\boxed{\operatorname{SIN}}$ (consulta el manual del usuario). Aquí usaremos la siguiente notación para hallar θ , cuando $-1 \leq k \leq 1$:

$$\text{si } \operatorname{sen} \theta = k, \quad \text{entonces} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1} k$$

Para el problema dado, $\operatorname{sen} \theta = 0.6635$, f es la función seno, $x = \theta$, y $y = 0.6635$. La notación sen^{-1} se basa en las *funciones trigonométricas inversas* estudiadas en la sección 3.6. En esta etapa, *consideraremos sen^{-1} simplemente como una entrada en calculadora mediante la tecla $\boxed{\operatorname{SIN}^{-1}}$* ; por lo tanto, para el problema enunciado, se obtiene

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.6635) \approx 41.57^\circ \approx 0.7255$$

Según se indica, cuando se trata de hallar un ángulo por lo general redondeamos medidas en grados al más próximo 0.01° , y la medida en radianes a 4 lugares decimales.

Análogamente, dado $\cos \theta = k$ o $\tan \theta = k$, se escribe

$$\theta = \cos^{-1} k \quad \text{o} \quad \theta = \tan^{-1} k$$

para indicar el uso de una tecla $\boxed{\cos^{-1}}$ o $\boxed{\tan^{-1}}$ de una calculadora.

Dado $\csc \theta$, $\sec \theta$ o $\cot \theta$, se usa una relación recíproca para hallar θ , como se indica en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN

Utiliza una calculadora para hallar soluciones de ecuaciones que tengan ángulos agudos

Ecuación	Solución con calculadora (grados y radianes)
■ $\sin \theta = 0.5$	$\theta = \sin^{-1}(0.5) = 30^\circ \approx 0.5236$
■ $\cos \theta = 0.5$	$\theta = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ \approx 1.0472$
■ $\tan \theta = 0.5$	$\theta = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.57^\circ \approx 0.4636$
■ $\csc \theta = 2$	$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ \approx 0.5236$
■ $\sec \theta = 2$	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ \approx 1.0472$
■ $\cot \theta = 2$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.57^\circ \approx 0.4636$

Cabe seguir la misma técnica si θ es cualquier ángulo o número real; por lo tanto, si se usa la tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ se obtiene, en modo de grados o radianes,

$$\theta = \sin^{-1}(0.6635) \approx 41.57^\circ \approx 0.7255,$$

que es el ángulo de referencia para θ . Si $\sin \theta$ es negativo, entonces una calculadora da el negativo del ángulo de referencia; por ejemplo,

$$\sin^{-1}(-0.6635) \approx -41.57^\circ \approx -0.7255.$$

De manera análoga, dado el $\cos \theta$ o $\tan \theta$, se encuentra θ con una calculadora si se usa $\boxed{\cos^{-1}}$ o $\boxed{\tan^{-1}}$, respectivamente. El intervalo que contenga θ se detalla en la tabla que sigue. Es importante observar que si $\cos \theta$ es negativo, entonces θ no es el negativo del ángulo de referencia, pero en cambio sí está en el intervalo $\pi/2 < \theta \leq \pi$ o $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$. Las razones para utilizar estos intervalos se explican en la sección 3.6. Se pueden usar relaciones recíprocas para resolver ecuaciones semejantes en donde haya $\csc \theta$, $\sec \theta$ y $\cot \theta$.

Ecuación	Valores de k	Solución de calculadora	Intervalo con θ si se usa calculadora
$\sin \theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \sin^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ o $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
$\cos \theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \cos^{-1} k$	$0 \leq \theta \leq \pi$ o $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
$\tan \theta = k$	cualquier k	$\theta = \tan^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ o $-90^\circ < \theta < 90^\circ$

La siguiente ilustración contiene algunos ejemplos específicos tanto para el modo de grados como el de radianes.

ILUSTRACIÓN

Hallar ángulos con calculadora

Ecuación	Solución con calculadora (grados y radianes)
■ $\sin \theta = -0.5$	$\theta = \sin^{-1}(-0.5) = -30^\circ \approx -0.5236$
■ $\cos \theta = -0.5$	$\theta = \cos^{-1}(-0.5) = 120^\circ \approx 2.0944$
■ $\tan \theta = -0.5$	$\theta = \tan^{-1}(-0.5) \approx -26.57^\circ \approx -0.4636$

Cuando uses una calculadora para hallar θ recuerda las restricciones que hay sobre θ . Si buscas otros valores, puedes utilizar ángulos de referencia u otros métodos matemáticos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Calcular un ángulo con calculadora

Si $\tan \theta = -0.4623$ y $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, halla θ hasta el 0.1° más cercano.

Solución Como se señala en el análisis precedente, si se usa una calculadora (en modo de grados) para hallar θ cuando $\tan \theta$ es negativa, entonces la medida en grados está en el intervalo $(-90^\circ, 0^\circ)$. En particular, se obtiene lo siguiente:

$$\theta = \tan^{-1}(-0.4623) \approx -24.8^\circ$$

Como se desea encontrar valores de θ entre 0° y 360° , se usa el ángulo de referencia (aproximado) $\theta_R \approx 24.8^\circ$. Hay dos valores posibles de θ tales que $\tan \theta$ es negativa: uno en el segundo cuadrante y el otro en el cuarto. Si θ está en el segundo cuadrante y $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, resulta la situación que se muestra en la figura 45 y

$$\theta = 180^\circ - \theta_R \approx 180^\circ - 24.8^\circ = 155.2^\circ.$$

Si θ está en el cuarto cuadrante y $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, entonces, como en la figura 46,

$$\theta = 360^\circ - \theta_R \approx 360^\circ - 24.8^\circ = 335.2^\circ.$$

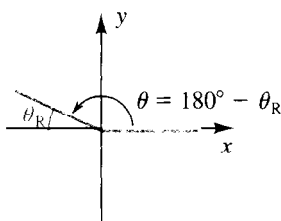


FIGURA 45

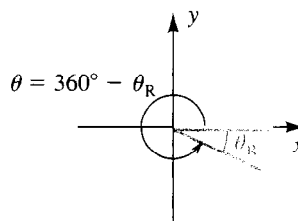


FIGURA 46

2.5 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 6: halla el ángulo de referencia θ_R si θ tiene la medida dada.

- | | | | |
|-------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 1. a) 240° | b) 340° | c) -202° | d) -660° |
| 2. a) 165° | b) 275° | c) -110° | d) 400° |
| 3. a) $3\pi/4$ | b) $4\pi/3$ | c) $-\pi/6$ | d) $9\pi/4$ |
| 4. a) $7\pi/4$ | b) $2\pi/3$ | c) $-3\pi/4$ | d) $-23\pi/6$ |
| 5. a) 3 | b) -2 | c) 5.5 | d) 100 |
| 6. a) 6 | b) -4 | c) 4.5 | d) 80 |

Ejercicios 7 al 18: halla el valor exacto.

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 7. a) $\sin 2\pi/3$ | b) $\sin (-5\pi/4)$ |
| 8. a) $\sin 210^\circ$ | b) $\sin (-315^\circ)$ |
| 9. a) $\cos 150^\circ$ | b) $\cos (-60^\circ)$ |
| 10. a) $\cos 5\pi/4$ | b) $\cos (-11\pi/6)$ |
| 11. a) $\tan 5\pi/6$ | b) $\tan (-\pi/3)$ |
| 12. a) $\tan 330^\circ$ | b) $\tan (-225^\circ)$ |
| 13. a) $\cot 120^\circ$ | b) $\cot (-150^\circ)$ |
| 14. a) $\cot 3\pi/4$ | b) $\cot (-2\pi/3)$ |
| 15. a) $\sec 2\pi/3$ | b) $\sec (-\pi/6)$ |
| 16. a) $\sec 135^\circ$ | b) $\sec (-210^\circ)$ |
| 17. a) $\csc 240^\circ$ | b) $\csc (-330^\circ)$ |
| 18. a) $\csc 3\pi/4$ | b) $\csc (-2\pi/3)$ |

Ejercicios 19 al 24: calcula a tres lugares decimales.

- | | |
|----------------------------|----------------|
| 19. a) $\sin 73^\circ 20'$ | b) $\cos 0.68$ |
| 20. a) $\cos 38^\circ 30'$ | b) $\sin 1.48$ |
| 21. a) $\tan 21^\circ 10'$ | b) $\cot 1.13$ |
| 22. a) $\cot 9^\circ 10'$ | b) $\tan 0.75$ |
| 23. a) $\sec 67^\circ 50'$ | b) $\csc 0.32$ |
| 24. a) $\csc 43^\circ 40'$ | b) $\sec 0.26$ |

Ejercicios 25 al 32: calcula el ángulo agudo θ al más cercano

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $(0.01)^\circ$ | b) $1'$ |
| 25. $\cos \theta = 0.8620$ | 26. $\sin \theta = 0.6612$ |
| 27. $\tan \theta = 3.7$ | 28. $\cos \theta = 0.8$ |
| 29. $\sin \theta = 0.4217$ | 30. $\tan \theta = 4.91$ |
| 31. $\sec \theta = 4.246$ | 32. $\csc \theta = 11$ |

Ejercicios 33 y 34: calcula a cuatro lugares decimales.

- | | | |
|----------------------------|------------------------|----------------|
| 33. a) $\sin 98^\circ 10'$ | b) $\cos 623.7^\circ$ | c) $\tan 3$ |
| d) $\cot 231^\circ 40'$ | e) $\sec 1175.1^\circ$ | f) $\csc 0.82$ |

- | | | |
|---------------------------|----------------|-------------------------|
| 34. a) $\sin 496.4^\circ$ | b) $\cos 0.65$ | c) $\tan 105^\circ 40'$ |
| d) $\cot 1030.2^\circ$ | e) $\sec 1.46$ | f) $\csc 320^\circ 50'$ |

Ejercicios 35 y 36: calcula todos los ángulos θ del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ que satisfagan la ecuación al 0.1° más cercano.

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| 35. a) $\sin \theta = -0.5640$ | b) $\cos \theta = 0.7490$ |
| c) $\tan \theta = 2.798$ | d) $\cot \theta = -0.9601$ |
| e) $\sec \theta = -1.116$ | f) $\csc \theta = 1.485$ |
| 36. a) $\sin \theta = 0.8225$ | b) $\cos \theta = -0.6604$ |
| c) $\tan \theta = -1.5214$ | d) $\cot \theta = 1.3752$ |
| e) $\sec \theta = 1.4291$ | f) $\csc \theta = -2.3179$ |

Ejercicios 37 y 38: calcula todos los ángulos θ del intervalo $(0, 2\pi)$ que satisfagan la ecuación al 0.01 de radián más cercano

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| 37. a) $\sin \theta = 0.4195$ | b) $\cos \theta = -0.1207$ |
| c) $\tan \theta = -3.2504$ | d) $\cot \theta = 2.6815$ |
| e) $\sec \theta = 1.7452$ | f) $\csc \theta = -4.8521$ |
| 38. a) $\sin \theta = -0.0135$ | b) $\cos \theta = 0.9235$ |
| c) $\tan \theta = 0.42$ | d) $\cot \theta = -2.731$ |
| e) $\sec \theta = -3.51$ | f) $\csc \theta = 1.258$ |

39. Espesor de la capa de ozono El espesor de la capa de ozono se puede calcular con la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = k x \sec \theta,$$

en donde I_0 es la intensidad de una particular longitud de onda de la luz solar antes de que llegue a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar por una capa de ozono de x centímetros de grueso, k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda y θ es el ángulo agudo que la luz solar hace con la vertical. Supón que para una longitud de onda de 3055×10^{-8} centímetros, con $k \approx 1.88$, I_0/I se mide como 1.72 y $\theta = 12^\circ$. Calcula el espesor de la capa de ozono al 0.01 de centímetro más cercano.

40. Cálculos de ozono Consulta el ejercicio 39. Si la capa de ozono mide 0.31 centímetros de espesor, y para una longitud de onda de 3055×10^{-8} centímetros I_0/I se mide como 2.05, calcula el ángulo del Sol con la vertical en el momento de la medición.

41. Radiación solar La cantidad de luz solar que ilumina una pared de un edificio puede afectar en forma considerable la eficiencia de energía del edificio. La radiación solar que incide sobre una pared vertical que mira hacia el este está dada por $R = R_0 \cos \theta \sin \phi$, en donde R_0 es

la máxima radiación solar posible, θ es el ángulo que hace el Sol con la horizontal y ϕ es la dirección del Sol en el cielo, con $\phi = 90^\circ$ cuando está en el este y $\phi = 0^\circ$ cuando está en el sur.

- a) ¿Cuándo es máxima la radiación solar R_0 que incide sobre la pared?
- b) ¿Qué porcentaje de R_0 incide sobre la pared cuando $\theta = 60^\circ$ y el Sol está en el sudeste?

- 42. Cálculos meteorológicos** En las latitudes medias, a veces es posible calcular la distancia entre regiones consecutivas de baja presión. Si ϕ es la latitud (en grados), R es el radio de la Tierra (en km) y v es la velocidad horizontal del viento (en km/h), entonces la distancia d (en km) de un lugar de baja presión al siguiente se puede calcular mediante

$$d = 2\pi \left(\frac{vR}{0.52 \cos \phi} \right)^{1/3}$$

- a) A una latitud de 48° , el radio de la Tierra es aproximadamente 6369 kilómetros. Calcula d si la velocidad del viento es 45 km/h.
- b) Si v y R son constantes, ¿cómo varía d a medida que aumenta la latitud?

- 43. Brazo de un robot** Los puntos en lados terminales de los ángulos desempeñan una parte importante en el diseño de brazos de robots. Supón que una máquina tiene un brazo recto de 18 pulgadas de largo, que puede girar alrededor del origen en un plano coordenado. Si la mano del robot se sitúa en $(18, 0)$ y luego gira en un ángulo de 60° , ¿cuál es la nueva posición de la mano?

- 44. Brazo de un robot** Supón que el brazo del ejercicio 43 puede cambiar de longitud, además de girar alrededor del origen. Si la mano está al principio en $(12, 12)$, ¿cuántos grados debe girar la y cuánto debe cambiar de longitud para moverla a $(-16, 10)$?

2.6 Gráficas trigonométricas

En la sección 2.2 utilizamos el $\sin t$ para denotar el valor de la función seno en el número real t , y trazamos la gráfica de $y = \sin t$ en un sistema coordenado ty . Puesto que ahora deseamos trazar gráficas en un sistema coordenado xy , consideraremos ecuaciones como $y = \sin x$ en lugar de $y = \sin t$. Las variables x y y que así se usan no deben confundirse con las de la sección 2.4 para un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de un ángulo. Tomaremos a x como la medida en radianes de un ángulo o como un número real. Éstos son puntos de vista equivalentes, ya que el seno de un ángulo de x radianes es el mismo que el seno del número real x . El número y es el valor de función que corresponde a x .

En esta sección consideramos gráficas de las ecuaciones

$$y = a \sin (bx + c) \quad \text{y} \quad y = a \cos (bx + c)$$

para números reales a , b y c . Nuestra meta es trazarlas sin localizar muchos puntos. Para esto, usaremos los datos acerca de las gráficas de las funciones seno y coseno analizadas en la sección 2.3.

Comencemos con el caso especial $c = 0$ y $b = 1$; es decir,

$$y = a \sin x \quad \text{y} \quad y = a \cos x$$

Se pueden encontrar las coordenadas y de puntos de las gráficas al multiplicar por a las coordenadas y de puntos de las gráficas de $y = \sin x$ y $y = \cos x$. Para ilustrar esto, si $y = 2 \sin x$, multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = \sin x$. Esto da la figura 47, en donde por comparación hemos mostrado la gráfica de $y = \sin x$. El procedimiento es el mismo que para alargar la gráfica de una función y que se vio en la sección 1.4.

Como otra demostración, si $y = \frac{1}{2} \sin x$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \sin x$. Esto comprime la gráfica de $y = \sin x$ en un factor de 2 (Fig. 48).

El siguiente ejemplo ilustra una gráfica de $y = a \sin x$ con a negativa.

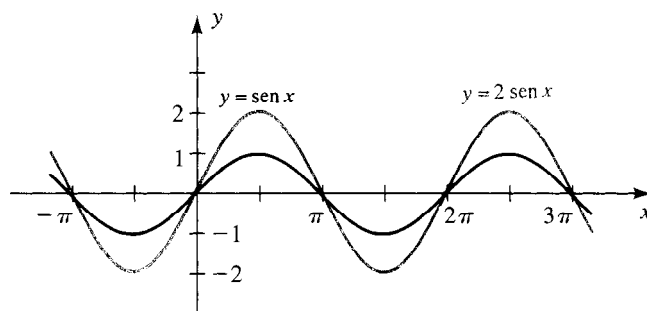


FIGURA 47

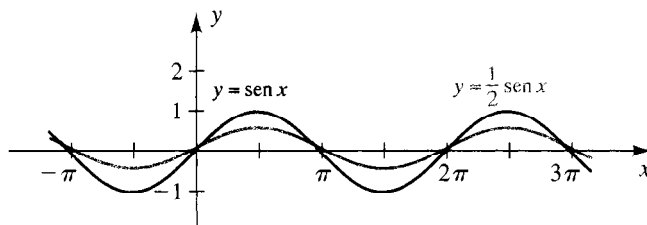


FIGURA 48

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de una ecuación con $\text{sen } x$

Traza la gráfica de la ecuación $y = -2 \text{ sen } x$.

Solución La gráfica de $y = -2 \text{ sen } x$ de la figura 49 se puede obtener si se traza primero la gráfica de $y = \text{sen } x$ (que se ve en la figura) y luego se multiplican por -2 las coordenadas y . Un método alternativo es reflejar la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ (Fig. 47) por el eje de las x .

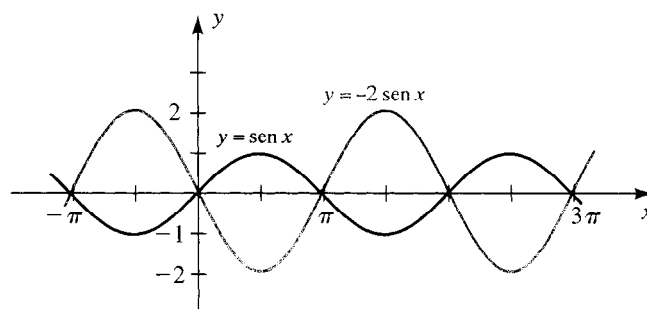


FIGURA 49

Para cualquier $a \neq 0$, la gráfica de $y = a \text{ sen } x$ tiene el aspecto general de una de las gráficas ilustradas en las figuras 47-49. El valor absoluto y el signo de a determinan la cantidad de alargamiento de la gráfica de $y = \text{sen } x$ y si la gráfica se refleja. La coordenada $|a|$ más grande de y es la **amplitud de la gráfica**, o bien, lo que es igual, la **amplitud de la función f** dada por $f(x) = a \text{ sen } x$. En las figuras 47 y 49, la amplitud es 2; en la 48 es $\frac{1}{2}$. Se aplican observaciones y técnicas semejantes si $y = a \cos x$.



EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de una ecuación con $\cos x$

Halla la amplitud y traza la gráfica de $y = 3 \cos x$.

Solución Por el análisis precedente, la amplitud es 3. Como se indica en la figura 50, primero trazamos la gráfica de $y = \cos x$ y luego multiplicamos por 3 las coordenadas de y .

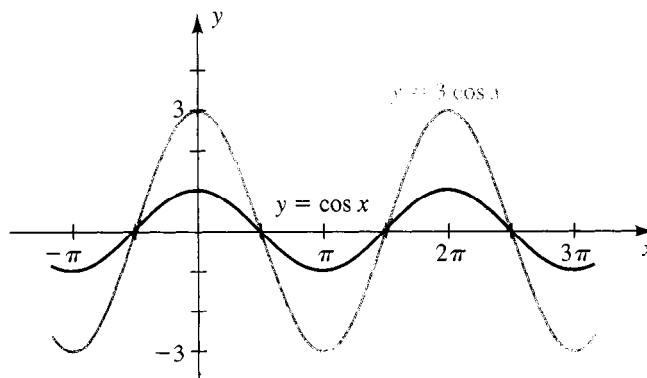


FIGURA 50

A continuación consideremos $y = a \sin bx$ y $y = a \cos bx$ para números reales a y b diferentes de cero. Como antes, la amplitud es $|a|$. Si $b > 0$, ocurre un ciclo a medida que bx crece de 0 a 2π , o bien, lo que es equivalente, conforme x aumenta de 0 a $2\pi/b$. Si $b < 0$, entonces $-b > 0$ y se presenta un ciclo si x pasa de 0 a $2\pi/(-b)$. En consecuencia, el periodo de la función f dado por $f(x) = a \sin bx$ o $f(x) = a \cos bx$ es $2\pi/|b|$. Por conveniencia, también nos referimos a $2\pi/|b|$ como el periodo de la gráfica de f . El siguiente teorema resume el análisis.

Teorema sobre amplitudes y periodos

Si $y = a \sin bx$ o $y = a \cos bx$ para números reales a y b diferentes de cero, la gráfica tiene am-

plitud $|a|$ y periodo $\frac{2\pi}{|b|}$.

EJEMPLO 3 Hallar una amplitud y un periodo

Determina la amplitud y el periodo y traza la gráfica de $y = 3 \sin 2x$.

Solución Con el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 3$ y $b = 2$, se obtiene:

$$\text{amplitud: } |a| = |3| = 3$$

$$\text{periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Por lo tanto, hay exactamente una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo $[0, \pi]$. Trazar esta onda y luego extender la gráfica a derecha e izquierda nos da la figura 51.

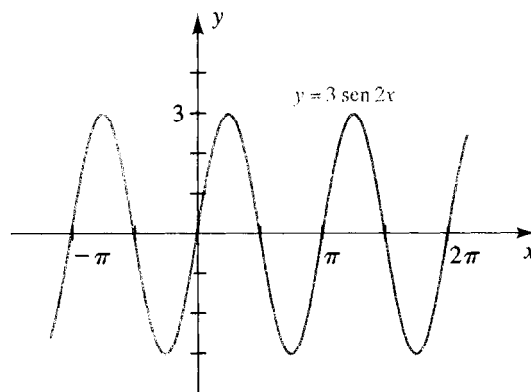


FIGURA 51

EJEMPLO 4 Hallar una amplitud y un periodo

Halla la amplitud y el periodo y traza la gráfica de $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$.

Solución Con el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 2$ y $b = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$\text{amplitud: } |a| = |2| = 2$$

$$\text{periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Por lo tanto, hay una onda senoidal de amplitud 2 en el intervalo $[0, 4\pi]$. Trazar esta onda y extenderla a izquierda y derecha da la gráfica de la figura 52.

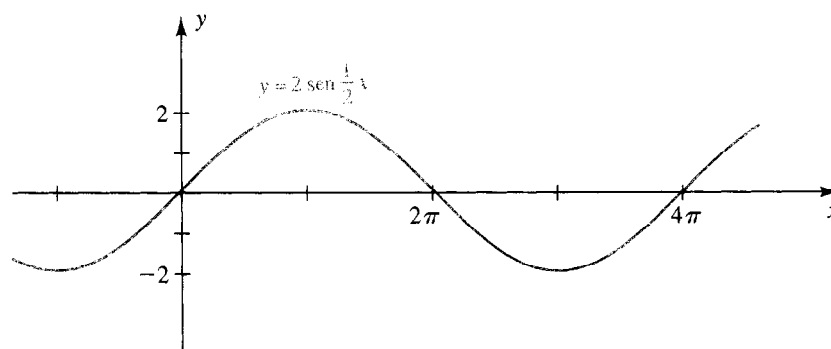


FIGURA 52

Si $y = a \sin bx$ y si b es un número positivo grande, entonces el periodo $2\pi/b$ es pequeño y las ondas senoidales están próximas, con b ondas senoidales en el intervalo $[0, 2\pi]$; por ejemplo, en la figura 51, $b = 2$ y tenemos dos ondas senoidales en $[0, 2\pi]$. Si b es un número positivo pequeño, el periodo $2\pi/b$ es grande y las ondas estarán muy separadas. Para ilustrar esto, si $y = \sin \frac{1}{10}x$, entonces habrá un décimo de onda senoidal en $[0, 2\pi]$ y se requiere un intervalo de

20π unidades de largo para un ciclo completo. (Consulta también la Fig. 52; para $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$ habrá media onda senoidal en $[0, 2\pi]$.)

Si $b < 0$, se puede usar que $\sin(-x) = -\sin x$ para obtener la gráfica de $y = a \sin bx$. A fin de ilustrar lo anterior, la gráfica de $y = \sin(-2x)$ es la misma que la gráfica de $y = -\sin 2x$.

EJEMPLO 5 Hallar una amplitud y un periodo

Halla la amplitud y periodo y traza la gráfica de $y = 2 \sin(-3x)$.

Solución Como $\sin(-3x) = -\sin 3x$, se puede escribir $y = -2 \sin 3x$. La amplitud es $|-2| = 2$, y el periodo es $2\pi/3$. En consecuencia, hay un ciclo y un intervalo de longitud $2\pi/3$. El signo negativo indica una reflexión por el eje de las x . Si consideramos el intervalo $[0, 2\pi/3]$ y trazamos una onda senoidal de amplitud 2 (reflejada por el eje de las x), la forma de la gráfica es evidente. La parte de la gráfica del intervalo $[0, 2\pi/3]$ se repite periódicamente (Fig. 53).

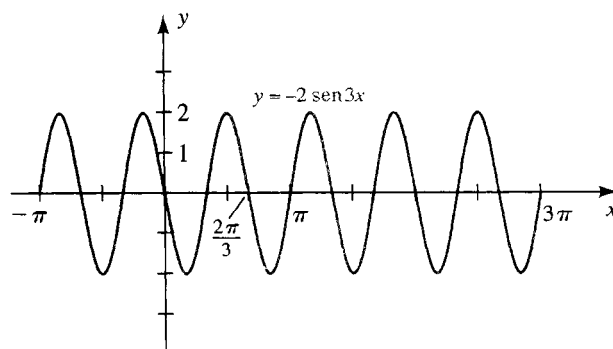


FIGURA 53

EJEMPLO 6 Hallar una amplitud y un periodo

Halla la amplitud y el periodo y traza la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$.

Solución La amplitud es $|4| = 4$, y el periodo es $2\pi/\pi = 2$; por lo tanto, hay exactamente una onda cosenoidal de amplitud 4 en el intervalo $[0, 2]$. Trazar esta onda y extenderla a izquierda y derecha lleva a la gráfica de la figura 54.

Al igual que en la sección 1.4, si f es una función y c es un número real positivo, se puede obtener la gráfica de $y = f(x) + c$ subiendo la gráfica de $y = f(x)$ una distancia c . Para la gráfica de $y = f(x) - c$, bajamos la gráfica de $y = f(x)$ una distancia c . En el siguiente ejemplo usamos esta técnica para una gráfica trigonométrica.

EJEMPLO 7 Desplazar verticalmente una gráfica trigonométrica

Traza la gráfica de $y = 2 \sin x + 3$.

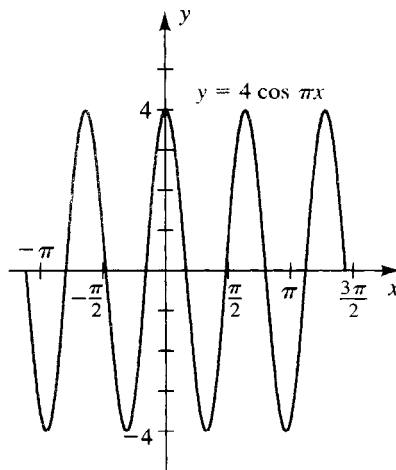


FIGURA 54

Solución Es importante observar que $y \neq 2 \operatorname{sen}(x+3)$. La gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ aparece en la figura 55. Si la subimos a una distancia 3, se obtiene la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x + 3$.

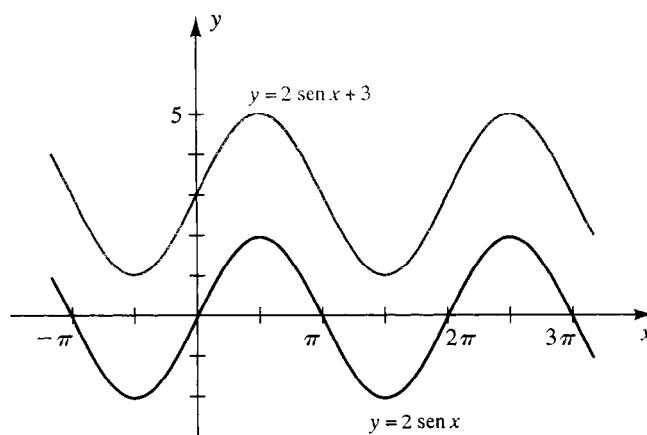


FIGURA 55

En seguida consideremos la gráfica de

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c).$$

Como antes, la amplitud es $|a|$, y el periodo es $2\pi/|b|$. Habrá un ciclo si $bx + c$ crece de 0 a 2π ; por lo tanto, se puede encontrar un intervalo que contenga exactamente una onda senoidal resolviendo las ecuaciones

$$bx + c = 0 \quad \text{y} \quad bx + c = 2\pi.$$

Las soluciones son

$$x = -\frac{c}{b} \quad \text{y} \quad x = -\frac{c}{b} + \frac{2\pi}{b}.$$

El número $-c/b$ es el **desplazamiento de fase** relacionado con la gráfica. La gráfica de $y = a \sin (bx + c)$ se obtiene corriendo la gráfica de $y = a \sin bx$ a la izquierda si el desplazamiento de fase es negativo, o a la derecha si es positivo.

Los resultados análogos son ciertos para $y = a \cos (bx + c)$. El próximo teorema resume este análisis.

Teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase

Si $y = a \sin (bx + c)$ o $y = a \cos (bx + c)$ para números reales a y b diferentes de cero, entonces

(1) la amplitud es $|a|$ y el periodo es $\frac{2\pi}{|b|}$,

(2) se puede encontrar el desplazamiento de fase y un intervalo que contenga exactamente un ciclo resolviendo las dos ecuaciones siguientes

$$bx + c = 0 \quad \text{y} \quad bx + c = 2\pi.$$

EJEMPLO 8 Hallar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase

Determina la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y traza la gráfica de

$$y = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Solución La ecuación es de la forma $y = a \sin (bx + c)$ con $a = 3$, $b = 2$, y $c = \pi/2$; por lo tanto, la amplitud es $|a| = 3$, y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$.

Por la parte (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, se puede encontrar el desplazamiento de fase y un intervalo que contenga una onda senoidal al resolver las dos ecuaciones

$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Esto da

$$x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{4}.$$

En consecuencia, el desplazamiento de fase es $-\pi/4$ y hay una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo $[-4/\pi, 3\pi/4]$. Trazar esa onda y luego repetirla a derecha e izquierda lleva a la gráfica de la figura 56.

EJEMPLO 9 Hallar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase

Traza la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase, así como la gráfica de $y = 2 \cos (3x - \pi)$.

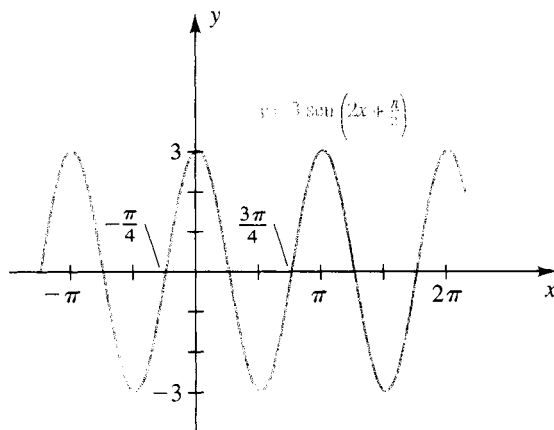


FIGURA 56

Notación: La ecuación tiene la forma $y = a \cos(bx + c)$ con $a = 2$, $b = 3$ y $c = -\pi$. Así pues, la amplitud es $|a| = 2$ y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/3$.

Por la parte (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, se halla el desplazamiento de fase y un intervalo que contiene un ciclo resolviendo las dos ecuaciones

$$3x - \pi = 0 \quad \text{y} \quad 3x - \pi = 2\pi.$$

Esto da

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{3} = \pi.$$

Por lo tanto, el desplazamiento de fase es $\pi/3$ y hay un ciclo de tipo cosenoidal de amplitud 2 en el intervalo $[\pi/3, \pi]$. Trazar la parte de la gráfica y luego repetirla a derecha e izquierda nos da el trazo de la figura 57.

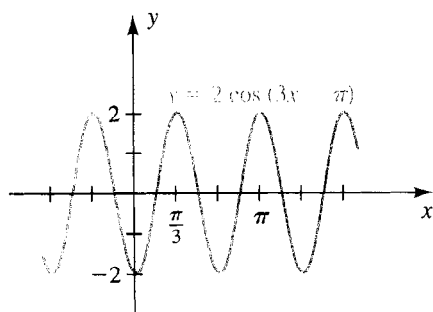


FIGURA 57

EJEMPLO 10 Hallar una ecuación para una onda senoidal

Expresa la ecuación para la onda senoidal de la figura 58 en la forma

$$y = a \sin(bx + c)$$

para $a > 0$, $b > 0$, y el mínimo número real positivo c .

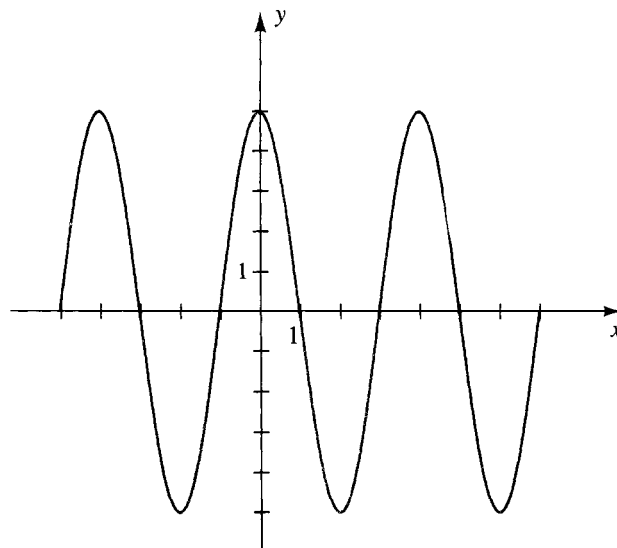


FIGURA 58

Solución Las coordenadas y máxima y mínima de puntos sobre la gráfica son 5 y -5 , respectivamente; por lo tanto, la amplitud es $a = 5$.

En vista de que hay una onda en el intervalo $[-1, 3]$, el periodo es $3 - (-1) = 4$; como consecuencia, por el teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase (con $b > 0$),

$$\frac{2\pi}{b} = 4, \quad \text{o} \quad b = \frac{\pi}{2}.$$

El desplazamiento de fase es $-c/b = -c/(\pi/2)$. Dado que c ha de ser positiva, el desplazamiento de fase será *negativo*; esto es, la gráfica de la figura 58 debe obtenerse corriendo la gráfica de $y = 5 \sin[(\pi/2)x]$ a la *izquierda*. Como se pretende que c sea tan pequeña como sea posible, se escoge el desplazamiento de fase -1 ; por lo tanto,

$$-\frac{c}{\pi/2} = -1, \quad \text{o} \quad c = \frac{\pi}{2}.$$

En consecuencia, la ecuación deseada es

$$y = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hay muchas otras ecuaciones para la gráfica; por ejemplo, se podrían usar los desplazamientos de fase $-5, -9, -13$, etc., pero éstos no darían el *mínimo* valor positivo para c . Otras dos ecuaciones para la gráfica son

$$y = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad y = -5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Sin embargo, ninguna de éstas satisface los criterios dados para a , b y c , puesto que en la primera, $c < 0$, y en la segunda, $a < 0$ y c no tiene su *mínimo* valor positivo.

Muchos fenómenos que se presentan en la naturaleza varían de manera cíclica o rítmica. A veces es posible representar dicho comportamiento por medio de funciones trigonométricas, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 11 Analizar el proceso de respiración

El proceso rítmico de respiración consiste en intervalos alternos de inhalación y exhalación. Por lo general, un ciclo completo tiene lugar cada 5 segundos. Si $F(t)$ denota el volumen de circulación de aire en el instante t (en litros por segundo), y si el volumen máximo es 0.6 litros por segundo, encuentra la fórmula de la forma $F(t) = a \sin bt$ que se adapte a esta información.

Solución Si $F(t) = a \sin bt$ para alguna $b > 0$, entonces el periodo de F es $2\pi/b$. En esta aplicación el periodo es de 5 segundos y, por lo tanto,

$$\frac{2\pi}{b} = 5, \quad \text{o} \quad b = \frac{2\pi}{5}.$$

Puesto que el volumen máximo corresponde a la amplitud a de F , hacemos $a = 0.6$. Esto nos dará la fórmula

$$F(t) = 0.6 \sin \left(\frac{2\pi}{5} t \right)$$

EJEMPLO 12 Calcular el número de horas de luz solar en un día

El número de horas de luz solar $D(t)$ en una época particular del año se puede estimar por

$$D(t) = \frac{K}{2} \sin \frac{2\pi}{365} (t - 79) + 12$$

para t en días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. La constante K determina la variación total en duración del día y depende de la latitud del lugar.

- a)** Para Boston, $K \approx 6$. Traza la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$.
b) ¿Cuál es el día más largo y cuál es el más corto?

Solución a) Si $K = 6$, entonces $K/2 = 3$, y se puede escribir $D(t)$ en la forma

$$D(t) = f(t) + 12$$

en donde

$$f(t) = 3 \sin \frac{2\pi}{365} (t - 79).$$

Trazaremos la gráfica de f y luego aplicaremos un desplazamiento vertical por una distancia de 12. Reescribamos $f(t)$ como

$$f(t) = 3 \sin \left(\frac{2\pi}{365} t - \frac{158\pi}{365} \right),$$

que tiene la forma $f(t) = a \sin(bt + c)$ con $a = 3$, $b = 2\pi/365$, y $c = -158\pi/365$; por lo tanto, la amplitud es 3 y el periodo de f es

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2\pi/365} = 365 \text{ días.}$$

Como en la parte (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, se puede obtener un intervalo t que contenga exactamente un ciclo al resolver las dos ecuaciones

$$\frac{2\pi}{365}(t - 79) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = 2\pi.$$

Las soluciones son $t = 79$ y $t = 444$. Así pues, hay una onda senoidal en el intervalo $[79, 444]$. Este intervalo se divide en cuatro partes iguales y se obtiene la siguiente tabla de valores, que indica la conocida onda senoidal de amplitud 3.

t	79	170.25	261.5	352.75	444
$f(t)$	0	3	0	-3	0

Si $t = 0$,

$$f(0) = 3 \sin \frac{2\pi}{365}(-79) \approx 3 \sin(-1.36) \approx -2.9.$$

Dado que el periodo de f es 365, esto implica que $f(365) \approx -2.9$.

En la figura 59 aparece la gráfica de f para el intervalo $[0, 444]$, con escalas diferentes en los ejes y t redondeada al día más cercano.

La aplicación de un desplazamiento vertical de 12 unidades da la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$ que se ilustra en la figura 59.

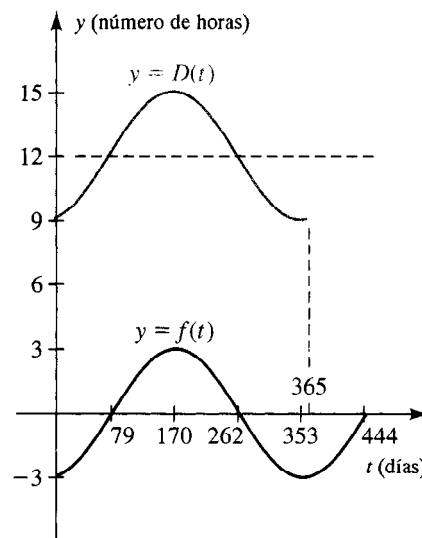


FIGURA 59

b) El día más largo; esto es, el valor máximo de $D(t)$, ocurre 170 días después del 1º de enero; exceptuando un año bisiesto, esto corresponde al 20 de junio. El día más corto ocurre 353 días después del 1º de enero, o sea, el 20 de diciembre.

En el ejemplo que sigue usamos un equipo graficador para calcular la solución de una desigualdad con expresiones trigonométricas.

EJEMPLO 13 Calcular soluciones de una desigualdad trigonométrica



Calcula la solución de la desigualdad

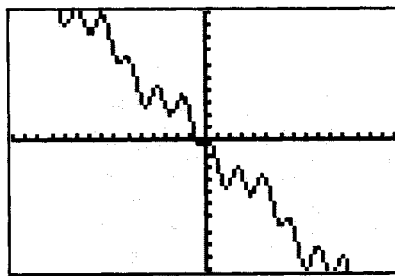
$$\sin 3x < x + \sin x.$$

Solución: La desigualdad dada equivale a

$$\sin 3x - x - \sin x < 0.$$

Si se asigna $\sin 3x - x - \sin x$ a Y_1 , el problema dado equivale a hallar dónde la gráfica de Y_1 está abajo del eje x . En la pantalla del dispositivo podremos ver un trazo semejante al de la figura 60a), donde la gráfica de Y_1 tiene una intersección c en x entre -1 y 0 . Es obvio que la gráfica se halla abajo del eje de las x en el intervalo $[c, \infty)$; sin embargo, esto no queda perfectamente claro por la pequeña escala de los ejes.

(a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



(b) $[-1.5, 1.5]$ por $[-1, 1]$

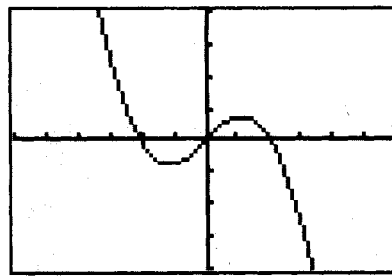


FIGURA 60

Si se usa la pantalla $[-1.5, 1.5]$ por $[-1, 1]$ con las escalas en X y en Y iguales a 0.25 , se obtiene la figura 60b), en donde vemos que las intersecciones x son aproximadamente -0.5 , 0 y 0.5 . Al usar las funciones de *trace* y *zoom* se obtiene el valor positivo de 0.51 más preciso. Dado que la función de que se trata es non, el valor negativo es poco más o menos -0.51 , de manera que las soluciones de la desigualdad están en los intervalos (aproximados) de

$$(-0.51, 0) \cup (0.51, \infty).$$

EJEMPLO 14 Investigar la corriente alterna en un circuito eléctrico

La corriente I (en amperes) en un circuito de corriente alterna en el instante t (en segundos) está dada por



$$I = 30 \operatorname{sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right)$$

Calcula el mínimo valor de t para el cual $I = 15$.

Solución Al hacer $I = 15$ en la fórmula dada, se obtiene

$$15 = 30 \operatorname{sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right)$$

o, lo que es igual,

$$\operatorname{sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} = 0.$$

Si se asigna $(50\pi x - 7\pi/3) - \frac{1}{2}$ a Y_1 , el problema equivale a calcular la mínima intersección x de la gráfica.

Como el periodo de Y_1 es

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} = 0.04$$

y como $-\frac{3}{2} \leq Y_1 \leq \frac{1}{2}$, se selecciona la pantalla $[0, 0.04]$ por $[-1.5, 0.5]$, con la escala X igual a 0.01 y la escala Y = 0.25, con lo que se obtiene un trazo semejante al de la figura 61. Con las funciones de **trace** (rastreo) y **zoom** (acercamiento-alejamiento) se obtiene $t \approx 0.01$ segundos.

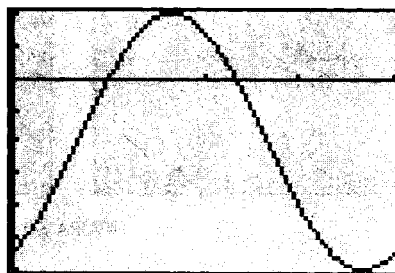


FIGURA 61

En la sección 3.2 volveremos a trabajar este ejemplo y demostraremos cómo hallar el valor exacto de t sin un equipo graficador.

2.6 EJERCICIOS

1. Halla la amplitud y el periodo y traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = 4 \operatorname{sen} x$

b) $y = \operatorname{sen} 4x$

c) $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} x$

d) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$

e) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$

f) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x$

g) $y = -4 \operatorname{sen} x$

h) $y = \operatorname{sen}(-4x)$

2. Trazas las gráficas de las ecuaciones con coseno y que son análogas a las de los incisos a) a h) del ejercicio 1.

3. Halla la amplitud y el periodo y traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = 3 \cos x$

b) $y = \cos 3x$

c) $y = \frac{1}{3} \cos x$

d) $y = \cos \frac{1}{3}x$

e) $y = 2 \cos \frac{1}{3}x$

f) $y = \frac{1}{2} \cos 3x$

g) $y = -3 \cos x$

h) $y = \cos(-3x)$

4. Traza las gráficas de las ecuaciones con seno análogas a las de los incisos a) a h) del ejercicio 3.

Ejercicios 5 al 40: halla la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y traza la gráfica de la ecuación.

5. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

6. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

7. $y = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

8. $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

9. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

10. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

11. $y = 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

12. $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

13. $y = \sin(2x - \pi) + 1$

14. $y = -\sin(3x + \pi) - 1$

15. $y = -\cos(3x + \pi) - 2$

16. $y = \cos(2x - \pi) + 2$

17. $y = -2 \sin(3x - \pi)$

18. $y = 3 \cos(3x - \pi)$

19. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

20. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

21. $y = 6 \sin \pi x$

22. $y = 3 \cos \frac{\pi}{2}x$

23. $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$

24. $y = 4 \sin 3\pi x$

25. $y = \frac{1}{2} \sin 2\pi x$

26. $y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}x$

27. $y = 5 \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

28. $y = -4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

29. $y = 3 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

30. $y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

31. $y = -5 \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$

32. $y = 4 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

33. $y = 3 \cos(\pi x + 4\pi)$

34. $y = -2 \sin(2\pi x + \pi)$

35. $y = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

36. $y = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$

37. $y = -2 \sin(2x - \pi) + 3$

38. $y = 3 \cos(x + 3\pi) - 2$

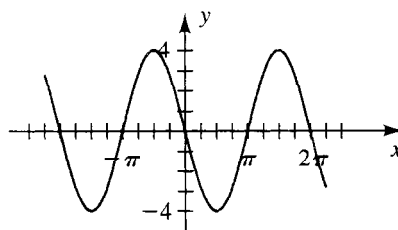
39. $y = 5 \cos(2x + 2\pi) + 2$

40. $y = -4 \sin(3x - \pi) - 3$

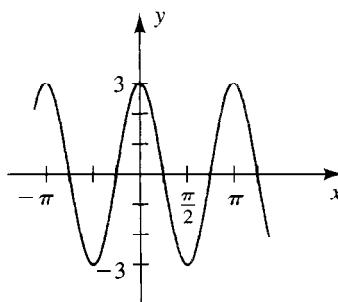
a) Halla la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

b) Escribe la ecuación en la forma $y = a \sin(bx + c)$ para $a > 0$, $b > 0$, y el mínimo número real positivo c .

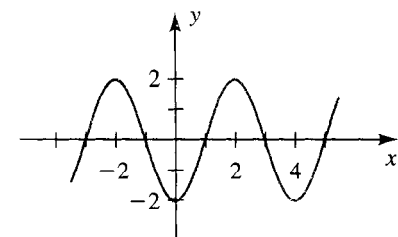
41.



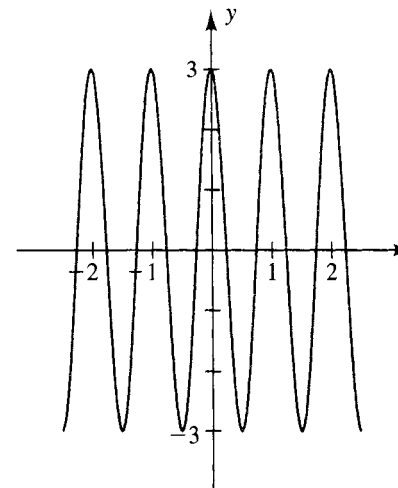
42.



43.

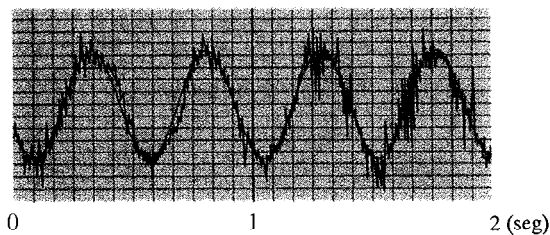


44.



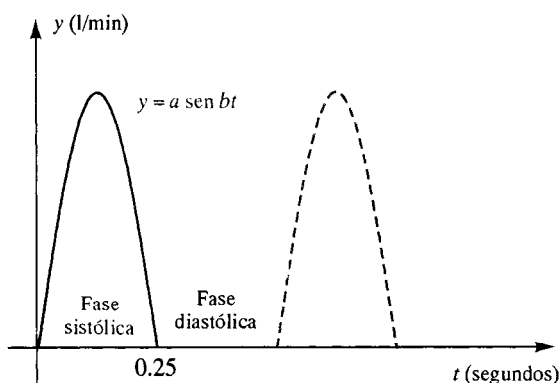
Ejercicios 41 al 44: en la figura se muestra la gráfica de una ecuación.

- 45. Electroencefalografía** En la figura se ilustra un electroencefalograma de un cerebro humano durante un sueño profundo. Si se usa la expresión $W = a \sin(bt + c)$ para representar estas ondas, ¿cuál es el valor de b ?



- 46. Intensidad de la luz diurna** En cierto día de primavera con 12 horas de luz diurna, la intensidad luminosa I toma su máximo valor de 510 calorías/cm² al mediodía. Si $t = 0$ corresponde a la salida del Sol, halla una fórmula $I = a \sin bt$ que se ajuste a esta información.

- 47. Funcionamiento del corazón** El bombeo cardíaco consta de una fase sistólica, en la cual la sangre sale del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y de una fase diastólica, durante la que el corazón se relaja. En ocasiones, la función cuya gráfica se muestra a continuación sirve para hacer un modelo de un ciclo completo de este proceso. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un volumen máximo de 8 litros por minuto (l/min). Halla a y b .



- 48. Biorritmo** La conocida teoría del biorritmo utiliza las gráficas de tres funciones senoideas simples para hacer predicciones sobre el potencial físico, emocional e intelectual para un día. Las gráficas se dan para $y = a \sin bt$ para t en días, con $t = 0$ correspondiente al nacimiento y $a = 1$ denota 100% del potencial.

- a) Halla el valor de b para el ciclo físico, que tiene un periodo de 23 días; para el ciclo emocional (28 días), y para el ciclo intelectual (33 días).
b) Evalúa los ciclos del biorritmo de una persona que acaba de cumplir 21 años y tiene 7670 días de nacido.

- 49. Componentes de las mareas** La altura de la marea, en un lugar en particular de una playa, se puede predecir si se usan siete funciones trigonométricas (llamadas componentes de mareas) de la forma $f(t) = a \cos(bt + c)$. El principal componente lunar se calcula mediante la ecuación

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{11\pi}{12}\right),$$

en donde t es en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Trazar la gráfica de f si $a = 0.5$ m.

- 50. Componentes de las mareas** Consulta el ejercicio 49. El principal componente diurno solar se puede calcular mediante la ecuación

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{7\pi}{12}\right)$$

Traza la gráfica de f si $a = 0.2$ m.

- 51. Horas de luz diurna en Fairbanks** Si la fórmula para $D(t)$ del ejemplo 12 se usa para Fairbanks, Alaska, entonces $K \approx 12$. Trazar la gráfica de D en este caso para $0 \leq t \leq 365$.

- 52. Temperatura mínima en Fairbanks** Con base en años de datos de condiciones atmosféricas, la mínima temperatura T (en °F) esperada en Fairbanks, Alaska, se puede calcular con

$$T = 36 \sin \frac{2\pi}{365}(t - 101) + 14,$$

en donde t está en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

- a) Trazar la gráfica de T para $0 \leq t \leq 365$.
b) Predice cuándo será el día más frío del año.

Ejercicios 53 al 56: a veces los científicos usan la fórmula

$$f(t) = a \sin(bt + c) + d$$

para simular variaciones de temperatura durante el día, con el tiempo t en horas, la temperatura $f(t)$ en °C y $t = 0$ correspondiente a la medianoche. Supón que $f(t)$ decrece a la medianoche.

- a) Determina los valores de a , b , c y d que se ajusten a la información.
b) Trazar la gráfica de f para $0 \leq t \leq 24$.
53. La temperatura máxima es 10°C y la mínima de -10° ocurre a las 4 a.m.

54. La temperatura a medianoche es 15°C y las temperaturas máxima y mínima son 20°C y 10°C .
55. La temperatura varía entre 10°C y 30°C , y la temperatura promedio de 20°C ocurre primero a las 9 a.m.
56. La temperatura máxima de 28°C ocurre a las 2 p.m., y la temperatura promedio de 20°C , 6 horas más tarde.

C Ejercicios 57 al 60: grafica la ecuación en el intervalo $[-2, 2]$ y describe el comportamiento de y a medida que $x \rightarrow 0^-$ y $x \rightarrow 0^+$

$$57. y = \sin \frac{1}{x}$$

$$58. y = |x| \sin \frac{1}{x}$$

$$59. y = \frac{\sin 2x}{x}$$

$$60. y = \frac{1 - \cos 3x}{x}$$

C Ejercicios 61 y 62: grafica la ecuación en el intervalo $[-20, 20]$ y calcula la asíntota horizontal.

$$61. y = x^2 \sin^2 \left(\frac{2}{x} \right)$$

$$62. y = \frac{1 - \cos^2(2/x)}{\sin(1/x)}$$

C Ejercicios 63 y 64: usa una gráfica para resolver la desigualdad del intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$63. \cos 3x \geq \frac{1}{2}x - \sin x$$

$$64. \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{3}x^2 \right) < \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{5}x^2$$

2.7 Otras gráficas trigonométricas

Los métodos que desarrollamos en la sección 2.6 para el seno y el coseno se pueden aplicar a las otras cuatro funciones trigonométricas, aun cuando hay varias diferencias. Como las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante no tienen valores máximos, la noción de amplitud carece de significado; además, no nos referimos a ciclos. Para algunas gráficas de tangente y cotangente, comenzamos por trazar la porción entre sucesivas asíntotas verticales y luego repetimos la figura a derecha e izquierda.

La gráfica de $y = a \tan x$ para $a > 0$ se puede obtener por alargamiento o compresión de la gráfica de $y = \tan x$. Si $a < 0$, entonces también se usa una reflexión alrededor del eje x . Puesto que la función tangente tiene periodo π , basta alargar la gráfica entre las dos asíntotas verticales sucesivas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. Se presenta la misma figura a derecha e izquierda, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Traza la gráfica de una ecuación con $\tan x$

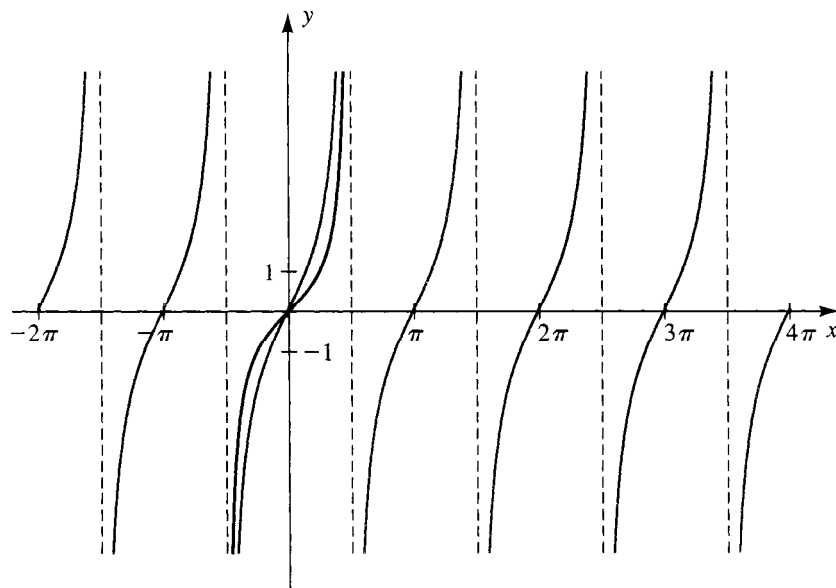
Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = 2 \tan x$

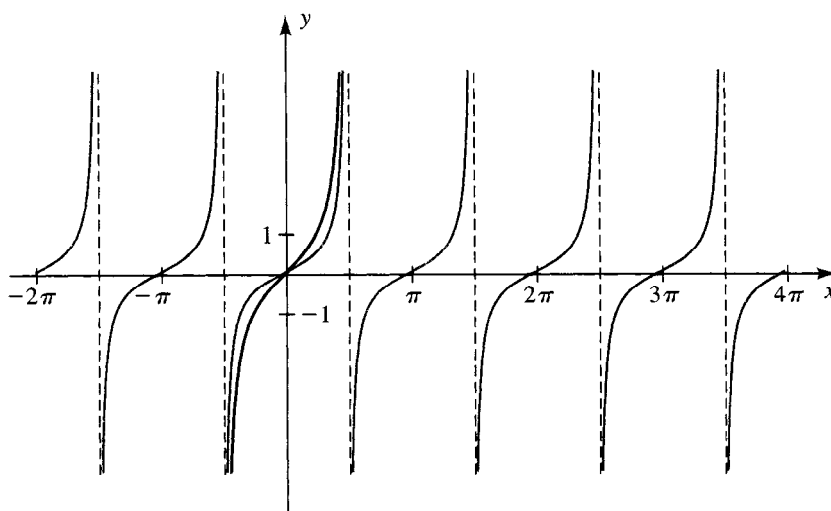
b) $y = \frac{1}{2} \tan x$

Solución Comencemos por trazar la gráfica de $y = \tan x$, como se muestra en gris en la figura 62, entre las asíntotas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.

a) Para $y = 2 \tan x$, se multiplica por 2 la coordenada y de cada punto y luego se prolonga la gráfica resultante a derecha e izquierda (Fig. 62).

FIGURA 62 $y = 2 \tan x$

b) Para $y = \frac{1}{2} \tan x$, se multiplican por $\frac{1}{2}$ las coordenadas y para obtener el trazo de la figura 63.

FIGURA 63 $y = \frac{1}{2} \tan x$

El método usado en el ejemplo 1 se puede aplicar a otras funciones. Así, para trazar la gráfica de $y = 3 \sec x$, podríamos trazar primero la gráfica de $y = \sec x$ y luego multiplicar por 3 la coordenada y de cada punto.

El siguiente teorema es análogo al indicado en la sección 2.6 para las funciones seno y coseno.

Teorema sobre la gráfica de $y = a \tan (bx + c)$

Si $y = a \tan (bx + c)$ para números reales a y b diferentes de cero, entonces:

(1) El periodo es $\frac{\pi}{|b|}$

(2) Se pueden encontrar asíntotas verticales sucesivas al resolver las ecuaciones

$$bx + c = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad bx + c = \frac{\pi}{2}$$

(3) El desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$.

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \tan (bx + c)$

Halla el periodo y traza la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

Solución La ecuación tiene la forma dada en el teorema precedente con $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, y $c = \pi/4$; por lo tanto, por la parte (1), el periodo es $\pi/|b| = \pi/1 = \pi$.

Al igual que en la parte (2), para hallar asíntotas verticales sucesivas se resuelven las dos ecuaciones

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

y se obtiene

$$x = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Como $a = \frac{1}{2}$, la gráfica de la ecuación del intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$ tiene la forma de la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan x$ (Fig. 63). Trazar esa parte de la gráfica y prolongarla a derecha e izquierda da la figura 64.

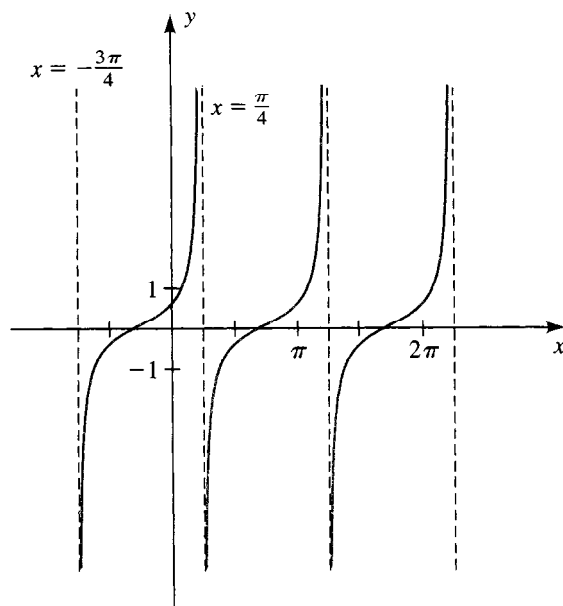
Notarás que como $c = \pi/4$, y $b = 1$, el desplazamiento de fase es $-c/b = -\pi/4$; por lo tanto, la gráfica se puede obtener corriendo a la izquierda la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan x$ de la figura 63, una distancia $\pi/4$.

Si $y = a \cot (bx + c)$, se tiene una situación semejante a la indicada en el teorema previo; la única diferencia es la parte (2). Como las sucesivas asíntotas verticales para la gráfica de $y = \cot x$ son $x = 0$ y $x = \pi$ (Fig. 28), se obtienen asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de $y = a \cot (bx + c)$ resolviendo las ecuaciones

$$bx + c = 0 \quad \text{y} \quad bx + c = \pi.$$

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \cot (bx + c)$

Halla el periodo y traza la gráfica de $y = \cot \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$

FIGURA 64 $y = \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

Solución Con la notación acostumbrada, vemos que $a = 1$, $b = 2$ y $c = -\pi/2$. El periodo es $\pi/|b| = \pi/2$; por lo tanto, la gráfica se repite en intervalos de longitud $\pi/2$.

Como en el análisis que precede a este ejemplo, a fin de hallar dos sucesivas asíntotas verticales para la gráfica se resuelven las ecuaciones

$$2x - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{y} \quad 2x - \frac{\pi}{2} = \pi,$$

y se obtiene

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{4}.$$

Puesto que a es positiva, se traza una gráfica en forma cotangente en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ y luego se repite a derecha e izquierda en intervalos de longitud $\pi/2$ (Fig. 65).

Se pueden obtener gráficas con funciones secante y cosecante al seguir métodos semejantes a los de tangente y cotangente, o al tomar recíprocos de gráficas correspondientes a las funciones coseno y seno.

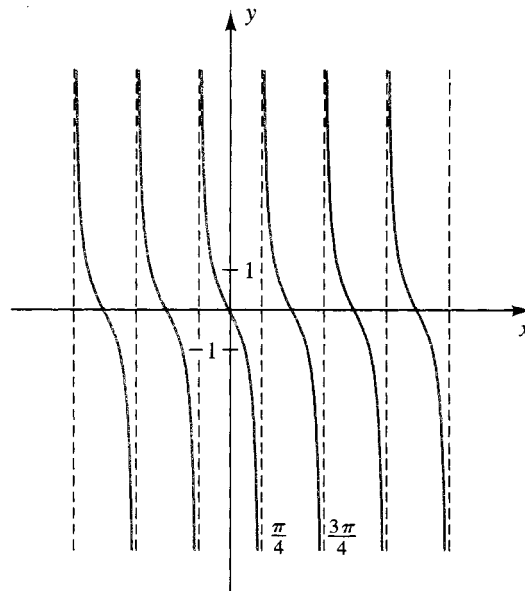
EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \sec(bx + c)$

Traza la gráfica de la ecuación:

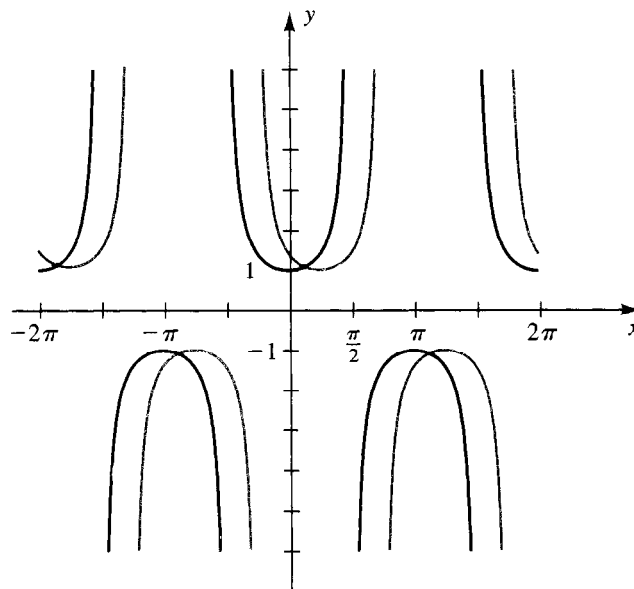
$$\mathbf{a)} \quad y = \sec \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \qquad \mathbf{b)} \quad y = 2 \sec \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Solución **a)** La gráfica de $y = \sec x$ aparece en la figura 66. Se puede obtener la gráfica de

$$y = \sec \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

FIGURA 65 $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

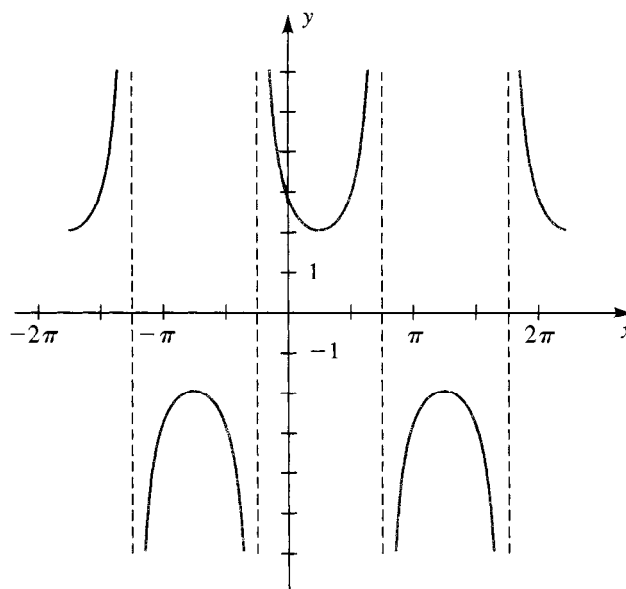
al desplazarla a la derecha una distancia $\pi/4$, según se muestra en la figura 66.

FIGURA 66 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) Se puede trazar la gráfica al multiplicar por 2 las coordenadas y de la gráfica en la parte a). Esto da la figura 67.

EJEMPLO 5 *Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \csc(bx + c)$*

Traza la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$.

FIGURA 67 $y = 2 \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Solución Como $\csc \theta = 1/\sin \theta$,

$$y = \frac{1}{\sin(2x + \pi)}.$$

Por lo tanto, se puede obtener la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$ al hallar la gráfica de $y = \sin(2x + \pi)$ y luego tomar el recíproco de la coordenada y de cada punto. Con $a = 1$, $b = 2$ y $c = \pi$ se ve que la amplitud de $y = \sin(2x + \pi)$ es 1 y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$. Para hallar un intervalo que contenga un ciclo se resuelven las ecuaciones

$$2x + \pi = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \pi = 2\pi,$$

y se obtiene
$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Esto lleva a la gráfica de la figura 68. Tomar los recíprocos da como resultado la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$ de la figura.

En el siguiente ejemplo interviene el valor absoluto de una función trigonométrica.

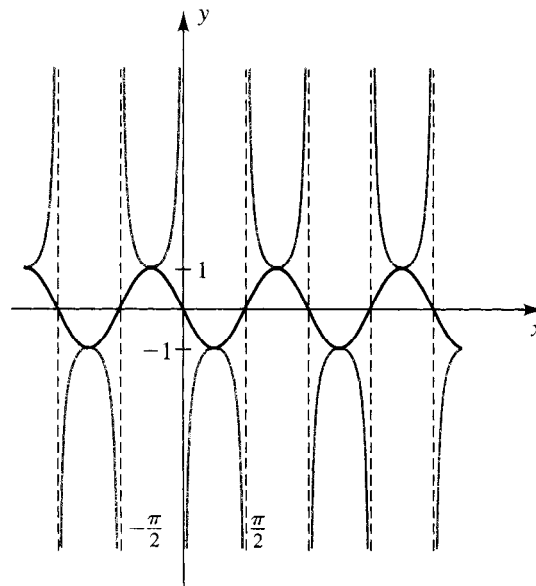
EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de una ecuación con un valor absoluto

Traza la gráfica de $y = |\cos x| + 1$.

Solución Trazaremos la gráfica en tres etapas. Primero, la gráfica de $y = \cos x$ como en la figura 69a).

A continuación, se obtiene la gráfica de $y = |\cos x|$ al reflejar las coordenadas y negativas de la figura 69a) por el eje y , con lo cual se llega a la figura 69 b).

Por último, la gráfica de b) se sube una unidad y se obtiene la figura 69c).

FIGURA 68 $y = \csc(2x + \pi)$

Para mayor claridad se han usado tres gráficas. En la práctica, se pueden trazar las gráficas sucesivamente en un plano coordenado.

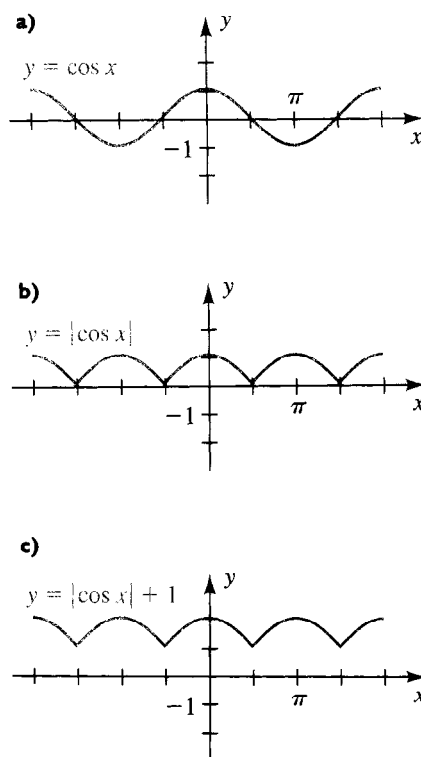


FIGURA 69



A menudo, las aplicaciones matemáticas comprenden una función f , que es la suma de otras dos o más funciones. Para ilustrarlo, supón

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

en donde f , g y h tienen el mismo dominio D . Antes de que se inventaran los equipos graficadores electrónicos, a veces se usaba una técnica conocida como **suma de coordenadas** y para trazar la gráfica de f . El método se ilustra en la figura 70, en donde, para cada x_1 , la coordenada y $f(x_1)$ de un punto de la gráfica de f es la suma $g(x_1) + h(x_1)$ de coordenadas y de puntos de las gráficas de g y h . La gráfica de f se obtiene al **sumar gráficamente** un número suficiente de coordenadas y usando regla y compás.

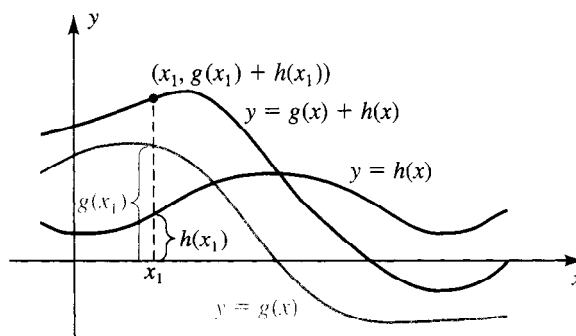


FIGURA 70

Este engorroso método ya no es necesario porque las gráficas se trazan fácilmente con un equipo graficador. Sin embargo, a veces es útil comparar la gráfica de una suma de funciones con las funciones individuales, según se plantea en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de una suma de dos funciones trigonométricas



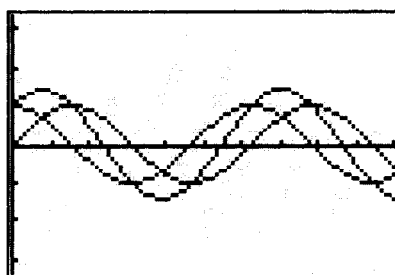
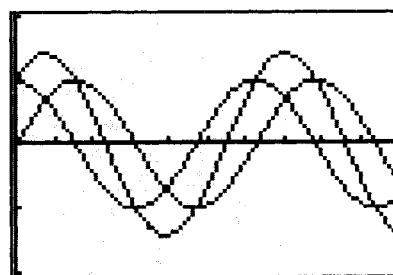
Traza la gráfica de $y = \cos x$, $y = \sin x$, y $y = \cos x + \sin x$ en el mismo plano coordenado para $0 \leq x \leq 3\pi$.

Solución Se establecen las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \cos x, \quad Y_2 = \sin x, \quad y \quad Y_3 = Y_1 + Y_2$$

Como $3\pi \approx 9.4$ y se desea una proporción 1:1, se escoge la pantalla $[0, 10]$ por $[-3.33, 3.33]$ y se obtiene un trazo semejante al de la figura 71a). La claridad de la gráfica se mejora cambiando la pantalla de $[0, 10]$ por $[-2, 2]$ [Fig. 71b)].

FIGURA 71

(a) $[0, 10]$ y $[-3.33, 3.33]$ (b) $[0, 10]$ y $[-2, 2]$

Observarás que la gráfica de Y_3 corta la gráfica de Y_1 cuando $Y_2 = 0$, y la gráfica de Y_2 cuando $Y_1 = 0$. Las intersecciones x para Y_3 corresponden a las soluciones de $Y_2 = -Y_1$. Por último, podrás ver que los valores máximo y mínimo de Y_3 ocurren cuando $Y_1 = Y_2$ (esto es, cuando $x = \pi/4$, $5\pi/4$ y $9\pi/4$). Estos valores son $\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}/2 + (-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$.

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = f(x) \sin(ax + b) \quad \text{o} \quad y = f(x) \cos(ax + b),$$

cuando f es una función y a y b son números reales, se llama **onda senoidal amortiguada** u **onda cosenoidal amortiguada**, respectivamente, y $f(x)$ se determina **factor de amortiguamiento**. El siguiente ejemplo presenta un método para graficar dichas ecuaciones.

EJEMPLO 8 Trazar la gráfica de una onda senoidal amortiguada

Traza la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x} \sin x$.

Mediante la aplicación las propiedades de valores absolutos, se ve que

$$|f(x)| = |2^{-x}| |\sin x|.$$

Como $|\sin x| \leq 1$ y $2^{-x} > 0$, se deduce que $|f(x)| \leq 2^{-x}$, y por lo tanto

$$-2^{-x} \leq f(x) \leq 2^{-x}.$$

La última desigualdad implica que la gráfica de f se encuentra entre las gráficas de las ecuaciones $y = -2^{-x}$ y $y = 2^{-x}$. La gráfica de f coincidirá con una de éstas si $|\sin x| = 1$; esto es, si $x = (\pi/2) + \pi n$ para algún entero n . Como $2^{-x} > 0$, las intersecciones x de la gráfica de f ocurren en $\sin x = 0$; es decir, en $x = \pi n$. Con esta información se obtiene el trazo de la figura 72.

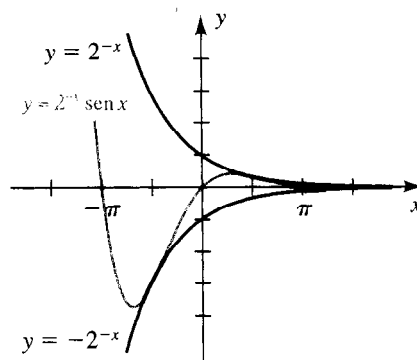


FIGURA 72

El factor de amortiguamiento del ejemplo 8 es 2^{-x} . Con el uso de diferentes factores de amortiguamiento se pueden obtener otras variaciones comprimidas o expandidas de ondas senoidales. El análisis de dichas gráficas es importante en física e ingeniería.

2.7 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 52: halla el periodo y traza la gráfica de la ecuación. Muestra las asíntotas.

1. $y = 4 \tan x$
 2. $y = \frac{1}{4} \tan x$
 3. $y = 3 \cot x$
 4. $y = \frac{1}{3} \cot x$
 5. $y = 2 \csc x$
 6. $y = \frac{1}{2} \csc x$
 7. $y = 3 \sec x$
 8. $y = \frac{1}{4} \sec x$
 9. $y = \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$
 10. $y = \tan \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$
 11. $y = \tan 2x$
 12. $y = \tan \frac{1}{2}x$
 13. $y = \tan \frac{1}{4}x$
 14. $y = \tan 4x$
 15. $y = 2 \tan \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$
 16. $y = \frac{1}{3} \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$
 17. $y = -\frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right)$
 18. $y = -3 \tan \left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3} \right)$
 19. $y = \cot \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$
 20. $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$
 21. $y = \cot 2x$
 22. $y = \cot \frac{1}{2}x$
 23. $y = \cot \frac{1}{3}x$
 24. $y = \cot 3x$
 25. $y = 2 \cot \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$
 26. $y = -\frac{1}{3} \cot (3x - \pi)$
 27. $y = -\frac{1}{2} \cot \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right)$
 28. $y = 4 \cot \left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6} \right)$
 29. $y = \sec \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$
 30. $y = \sec \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$
 31. $y = \sec 2x$
 32. $y = \sec \frac{1}{2}x$
 33. $y = \sec \frac{1}{3}x$
 34. $y = \sec 3x$
 35. $y = 2 \sec \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$
 36. $y = \frac{1}{2} \sec \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$
 37. $y = -\frac{1}{3} \sec \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right)$
 38. $y = -3 \sec \left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} \right)$
 39. $y = \csc \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$
 40. $y = \csc \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$
 41. $y = \csc 2x$
 42. $y = \csc \frac{1}{2}x$
 43. $y = \csc \frac{1}{3}x$
 44. $y = \csc 3x$
 45. $y = 2 \csc \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$
 46. $y = -\frac{1}{2} \csc (2x - \pi)$
 47. $y = -\frac{1}{4} \csc \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right)$
 48. $y = 4 \csc \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \right)$
 49. $y = \tan \frac{\pi}{2}x$
 50. $y = \cot \pi x$
 51. $y = \csc 2\pi x$
 52. $y = \sec \frac{\pi}{8}x$
53. Encuentra una ecuación usando la función cotangente que tenga la misma gráfica que $y = \tan x$.

54. Halla una ecuación empleando la función cosecante que tenga la misma gráfica que $y = \sec x$.

Ejercicios 55 al 60: usa la gráfica de una función trigonométrica para ayudar en el trazo de la gráfica de la ecuación sin trazar puntos.

55. $y = |\sin x|$
56. $y = |\cos x|$
57. $y = |\sin x| + 2$
58. $y = |\cos x| - 3$
59. $y = -|\cos x| + 1$
60. $y = -|\sin x| - 2$

Ejercicios 61 al 66: traza la gráfica de la ecuación.

61. $y = x + \cos x$
62. $y = x - \sin x$
63. $y = 2^{-x} \cos x$
64. $y = e^x \sin x$
65. $y = |x| \sin x$
66. $y = |x| \cos x$



Ejercicios 67 y 68: identifica el factor de amortiguamiento $f(t)$ para la onda amortiguada. Trazas gráficas de la ecuación $y = \pm f(t)$ en el mismo plano coordenado para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

67. $y = e^{-x/4} \sin 4x$
68. $y = 3^{-x/5} \cos 2x$



Ejercicios 69 y 70: grafica la función f en $[-\pi, \pi]$ y calcula los puntos alto y bajo.

69. $f(x) = \cos 2x + 2 \sin 4x - \sin x$
70. $f(x) = \tan \frac{1}{4}x - 2 \sin 2x$



Ejercicios 71 y 72: usa una gráfica para calcular el máximo intervalo $[a, b]$ con $a < 0$ y $b > 0$, en que f es biunívoca.

71. $f(x) = \sin (2x + 2) \cos (1.5x - 1)$
72. $f(x) = 1.5 \cos \left(\frac{1}{2}x - 0.3 \right) + \sin (1.5x + 0.5)$



Ejercicios 73 y 74: resuelve la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con una gráfica.

73. $\cos (2x - 1) + \sin 3x \geq \sin \frac{1}{3}x + \cos x$
74. $\frac{1}{2} \cos 2x + 2 \cos (x - 2) < 2 \cos (1.5x + 1) + \sin (x - 1)$
75. **Campo magnético de la Tierra** La intensidad del campo magnético terrestre varía con la profundidad bajo la superficie. A la profundidad z y en el tiempo t , la intensidad se puede calcular a veces con la onda senoidal amortiguada $S = A_0 e^{-\alpha z} \sin (kt - \alpha z)$, donde A_0 , α , y k son constantes.

- a) ¿Cuál es el factor de amortiguamiento?
- b) Halla el desplazamiento de fase a la profundidad z_0 .
- c) ¿A qué profundidad la amplitud de la onda es la mitad de la amplitud de la intensidad en la superficie?

2.8 Aplicaciones con triángulos rectángulos

La trigonometría se desarrolló para ayudar a resolver problemas de ángulos y longitudes de lados de triángulos; aun cuando las situaciones de este tipo ya no son las aplicaciones más importantes, todavía aparecen problemas con triángulos en situaciones físicas. Restringiremos el análisis de esta sección a triángulos rectángulos; los triángulos de otros tipos se estudiarán en el capítulo 4.

Con frecuencia usaremos la notación que sigue: los vértices de un triángulo se denotarán por A , B y C ; los ángulos en A , B y C , por α , β y γ , respectivamente, y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos, por a , b y c , respectivamente. El triángulo en sí recibirá el nombre de *triángulo ABC*. Si un triángulo es rectángulo y se conoce uno de sus ángulos agudos y un lado o dos de sus lados, se pueden encontrar las partes restantes aplicando las fórmulas de la sección 2.4, que expresan las funciones trigonométricas como razones de los lados de un triángulo.

En todos los ejemplos *asumimos que sabes hallar los valores de las funciones trigonométricas y ángulos usando calculadora, tablas o los resultados de ángulos especiales.*

EJEMPLO 1 Calcular las partes de un triángulo rectángulo

En el triángulo ABC , $\gamma = 90^\circ$, $\alpha = 34^\circ$ y $b = 10.5$. Calcula las partes restantes.

Solución Como la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180° y $\alpha + \gamma = 90^\circ + 34^\circ = 124^\circ$,

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ.$$

Con referencia a la figura 73, se obtiene

$$\tan 34^\circ = \frac{a}{10.5} \qquad \tan \alpha = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$a = (10.5) \tan 34^\circ \qquad \text{despejando } a$$

$$\approx (10.5)(0.6745) \approx 7.1 \qquad \text{resultado}$$

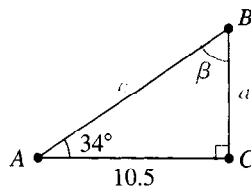


FIGURA 73

Para hallar el lado c se puede usar la función coseno o la secante, como en (1) o (2), respectivamente:

$$(1) \quad \cos 34^\circ = \frac{10.5}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$c = \frac{10.5}{\cos 34^\circ} \qquad \text{despejando } c$$

$$\approx \frac{10.5}{0.8290} \approx 12.7 \qquad \text{resultado} \qquad (continúa)$$

$$(2) \quad \sec 34^\circ = \frac{c}{10.5}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$c = (10.5) \sec 34^\circ$$

despejando c

$$\approx (10.5)(1.2062) \approx 12.7$$

resultado

Según se expone en el ejemplo 1, las respuestas suelen redondearse cuando se trabaja con triángulos. Una razón es que, en la mayor parte de los casos, las longitudes de los triángulos y las medidas de los ángulos se encuentran con aparatos mecánicos y, por lo tanto, sólo son aproximaciones a los valores exactos; así pues, un número como el 10.5 del ejemplo 1 se supone redondeado al décimo más cercano. No se puede esperar más precisión en los valores calculados para los lados restantes y, por lo tanto, también hay que redondearlos al décimo más cercano.

En algunos problemas, un número con muchos dígitos como el 36.4635 puede darse como lado de un triángulo. Si se usa calculadora, el número puede teclearse como de costumbre; pero, si se usa la tabla 4 de los apéndices, habrá que redondear una cifra de este tipo antes de comenzar cualquier cálculo. Si un número a se escribe en notación científica como $a = c \times 10^k$ con $1 \leq c < 10$, entonces c debe redondearse a tres lugares decimales antes de utilizar la tabla 4. Otra forma de expresar esto es que hay que redondear c a cuatro *cifras significativas*. Algunos ejemplos ayudarán a aclarar el procedimiento. Si $c = 36.4635$, se redondea a 36.46. El número 684 279 se redondea a 684 300. Para un decimal como 0.096202, usamos 0.09620. La razón para el redondeo es que los valores de las funciones trigonométricas de la tabla 4 se han redondeado a cuatro cifras significativas y, en consecuencia, no es posible esperar una precisión de más de cuatro cifras en nuestros cálculos.

Para hallar ángulos, las respuestas deben redondearse como se indica en la siguiente tabla.

Número de cifras significativas para lados	Redondear grados de ángulos al más cercano
2	1°
3	10' o 0.1°
4	1' o 0.01°

La justificación de esta tabla requiere un cuidadoso análisis de problemas donde intervienen datos aproximados.

EJEMPLO 2 Calcular partes de un triángulo rectángulo

En el triángulo ABC , $\gamma = 90^\circ$, $a = 12.3$ y $b = 31.6$. Calcula las partes restantes.

Solución Con referencia al triángulo de la figura 74, se obtiene

$$\tan \alpha = \frac{12.3}{31.6}$$

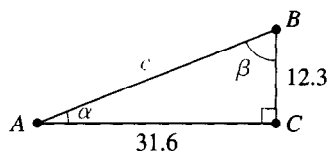


FIGURA 74

En vista de que los lados están dados con tres cifras significativas, la regla indicada en la tabla anterior dice que α debe redondearse al 0.1° más cercano, o al múltiplo de $10'$ más próximo. Con el modo de grados de una calculadora, tenemos

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{12.3}{31.6} \approx 21.3^\circ \quad \text{o su equivalente,} \quad \alpha \approx 21^\circ 20'.$$

Como α y β son ángulos complementarios,

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 21.3^\circ = 68.7^\circ.$$

La única parte restante por hallar es c . Se pueden usar varias relaciones donde está c para determinar su valor, como

$$\sec \alpha = \frac{c}{31.6}, \quad \sec \beta = \frac{c}{12.3}, \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Siempre que sea posible, es mejor utilizar una relación donde haya sólo información dada, ya que ésta no depende de cualquier valor calculado antes; por lo tanto, con $a = 12.3$ y $b = 31.6$, tenemos

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(12.3)^2 + (31.6)^2} = \sqrt{1149.85} \approx 33.9.$$

Según se ilustra en la figura 75, si un observador en el punto X avista un objeto, el ángulo que forma la línea visual con la horizontal l es el **ángulo de elevación** del objeto (si éste se halla arriba de la horizontal), o **ángulo de depresión** del objeto (si está abajo de la horizontal). Se usará esta terminología en los siguientes dos ejemplos.

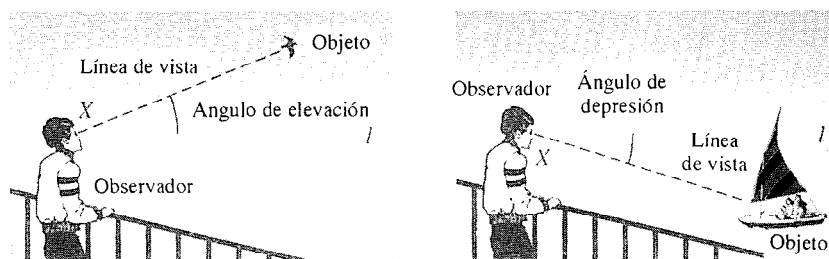


FIGURA 75

EJEMPLO 3 Usar un ángulo de elevación

Desde un punto al nivel del suelo y a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es $57^\circ 20'$. Calcula la altura de la torre.

Solución Si se denota por d la altura de la torre, el triángulo de la figura 76 representa las cantidades dadas. Con referencia a la figura, se tiene

$$\tan 57^\circ 20' = \frac{d}{135}$$

$$\tan 57^\circ 20' = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$d = 135 \tan 57^\circ 20'$$

despejando d

$$\approx 135(1.560) \approx 211$$

resultado

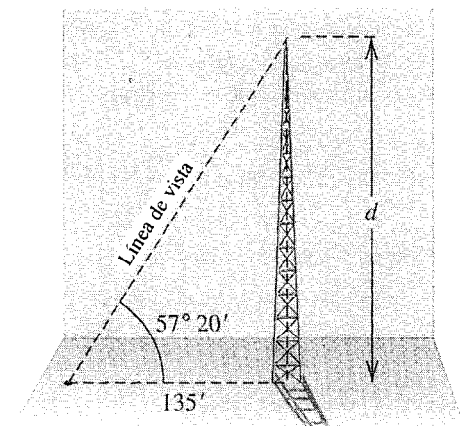


FIGURA 76

La torre mide alrededor de 211 pies de altura.

EJEMPLO 4 Usar ángulos de depresión

Desde lo alto de un edificio que mira al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 pies snm (sobre el nivel del mar) y el ángulo de depresión de la lancha cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, calcula la distancia que recorre la lancha.

Solución Conforme la figura 77, sean A y B las posiciones de la lancha que corresponden a los ángulos de 25° y 40° , en forma respectiva. Supón que el observador está en el punto D y que C es el punto 100 directamente abajo. Denota con d la distancia que recorre la lancha, y con k la distancia de B a C . Si α y β representan los ángulos DAC y DBC , respectivamente, por geometría se deduce que $\alpha = 25^\circ$ y $\beta = 40^\circ$.

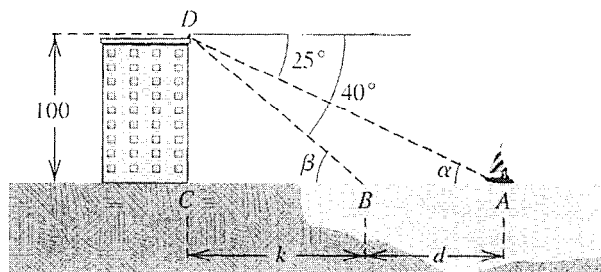


FIGURA 77

Del triángulo BCD :

$$\cot \beta = \cot 40^\circ = \frac{k}{100}$$

$$\cot \beta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$k = 100 \cot 40^\circ$$

despejando k

Del triángulo DAC :

$$\begin{aligned} \cot \alpha &= \cot 25^\circ = \frac{d+k}{100} & \cot \alpha &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\ d+k &= 100 \cot 25^\circ & & \text{multiplicar por } 100 \\ d &= 100 \cot 25^\circ - k & & \text{restar } k \\ &= 100 \cot 25^\circ - 100 \cot 40^\circ & & k = 100 \cot 40^\circ \\ &= 100(\cot 25^\circ - \cot 40^\circ) & & \text{factorizar } 100 \\ &\approx 100(2.145 - 1.192) \approx 95 & & \text{resultado} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la lancha recorre unos 95 pies.

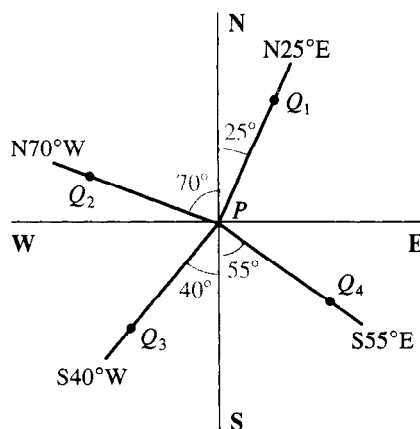


FIGURA 78

En ciertos problemas de navegación y agrimensura, la **dirección** o **rumbo** (u orientación) de un punto P a uno Q se especifica indicando el ángulo agudo que el segmento PQ hace con la línea norte-sur que pasa por P . También se establece si Q se localiza al norte, sur, este u oeste de P . La figura 78 ilustra cuatro posibilidades. El rumbo de P a Q_1 es 25° al este del norte y se denota por $N25^\circ E$. También nos referimos a la **dirección** $N25^\circ E$, que es la dirección de P a Q_1 . Los rumbos de P a Q_2 , a Q_3 y a Q_4 están representados de manera semejante en la figura. Notarás que cuando se usa esta notación para rumbos o direcciones, N o S aparecen siempre a la *izquierda* del ángulo y O o E a la *derecha*.

En la navegación aérea, direcciones y rumbos especifican al medir desde el norte en *sentido de las manecillas* del reloj. En este caso se asigna una medida positiva al ángulo, en lugar de la medida negativa que suele darse a este giro. Con referencia a la figura 79, la dirección de PQ es 40° y la dirección de PR es 300° .

EJEMPLO 5 Usar rumbos

Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo, uno de ellos en dirección $N23^\circ E$ a una velocidad de 11 millas por hora y el segundo en dirección $S67^\circ E$ a 15 millas por hora. Calcula el rumbo del segundo barco con respecto al primero, una hora después.

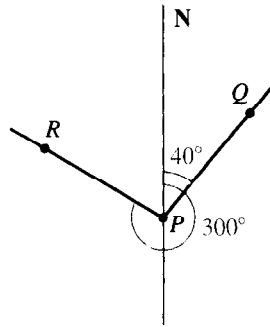


FIGURA 79

Solución El trazo de la figura 80 indica las posiciones de las dos naves en los puntos A y B , respectivamente, después de una hora; el punto C representa el puerto. Halla el rumbo de B a A . Notarás que

$$\angle ACB = 180^\circ - (23^\circ + 67^\circ) = 90^\circ,$$

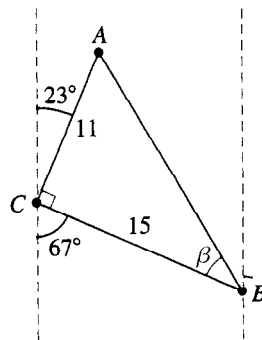


FIGURA 80

y, por lo tanto, el triángulo ACB es rectángulo. Debido a esto,

$$\tan \beta = \frac{11}{15}$$

$$\beta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{11}{15} \approx 36^\circ$$

resultado

Hemos redondeado β al grado más cercano, ya que los lados de los triángulos están dados con dos cifras significativas.

Con referencia a la figura 81, se obtiene:

$$\angle CBD = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$$

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD \approx 36^\circ + 23^\circ = 59^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - \angle ABD \approx 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$$

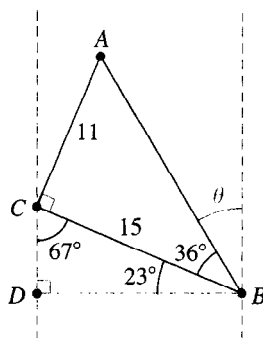


FIGURA 81

Por lo tanto, el rumbo de B a A es aproximadamente $N31^\circ O$.

2.8 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, encuentra los valores exactos de las partes restantes.

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\alpha = 30^\circ$, $b = 20$ | 2. $\beta = 45^\circ$, $b = 35$ |
| 3. $\beta = 45^\circ$, $c = 30$ | 4. $\alpha = 60^\circ$, $c = 6$ |
| 5. $a = 5$, $b = 5$ | 6. $a = 4\sqrt{3}$, $c = 8$ |
| 7. $b = 5\sqrt{3}$, $c = 10\sqrt{3}$ | 8. $b = 7\sqrt{2}$, $c = 14$ |

Ejercicios 9 al 16: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, calcula las partes restantes.

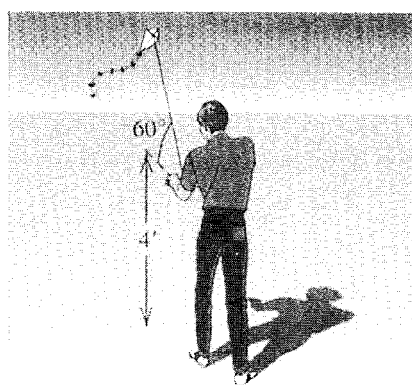
- | | |
|--|---|
| 9. $\alpha = 37^\circ$, $b = 24$ | 10. $\beta = 64^\circ 20'$, $a = 20.1$ |
| 11. $\beta = 71^\circ 51'$, $b = 240.0$ | 12. $\alpha = 31^\circ 10'$, $a = 510$ |
| 13. $a = 25$, $b = 45$ | 14. $a = 31$, $b = 9.0$ |
| 15. $c = 5.8$, $b = 2.1$ | 16. $a = 0.42$, $c = 0.68$ |

Ejercicios 17 al 24: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, expresa la tercera parte en términos de las primeras dos.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 17. α, c ; b | 18. β, c ; b |
| 19. β, b ; a | 20. α, b ; a |
| 21. α, a ; c | 22. β, a ; c |
| 23. a, c ; b | 24. a, b ; c |

25. Altura de una cometa Una persona que hace volar una cometa sostiene la cuerda a 4 pies sobre el nivel del suelo. La cuerda de la cometa está tensa y hace un ángulo de 60° con la horizontal (consulta la figura). Calcula la altura de la cometa sobre el nivel del suelo, si se sueltan 500 pies de cuerda.

26. Agrimensura Desde un punto a 15 metros sobre el nivel del suelo, un agrimensor obtiene una medición de

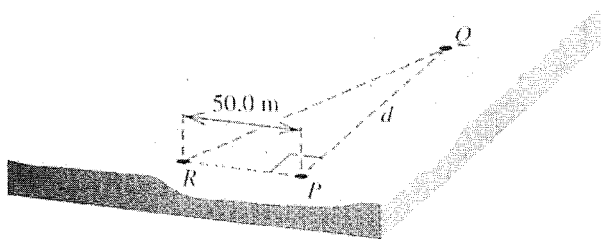


EJERCICIO 25

68° para el ángulo de depresión de un objeto sobre el suelo. Calcula la distancia del objeto al punto sobre el suelo que está directamente abajo del agrimensor.

- 27. Aterrizaje de aviones** Un piloto que vuela a una altitud de 5000 pies, desea aproximarse a los números de una pista a un ángulo de 10° . Calcula, a los 100 pies más cercanos, la distancia del avión a los números al principio del descenso.
- 28. Antena de radio** Un cable está sujeto a lo alto de una antena de radio y a un punto en el suelo horizontal que está a 40.0 metros de la base de la antena. Si el alambre hace un ángulo de $58^\circ 20'$ con el suelo, calcula la longitud del alambre.
- 29. Agrimensura** Para hallar la distancia d entre dos puntos P y Q en las orillas opuestas de un lago, un agrimensor localiza un punto R que está a 50.0 metros de P tal que RP es perpendicular a PQ , como se muestra en la figura.



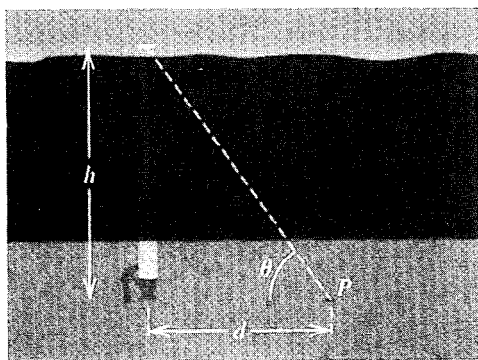


EJERCICIO 29

A continuación, usando un teodolito, mide el ángulo PRQ como $72^\circ 40'$. Halla d .

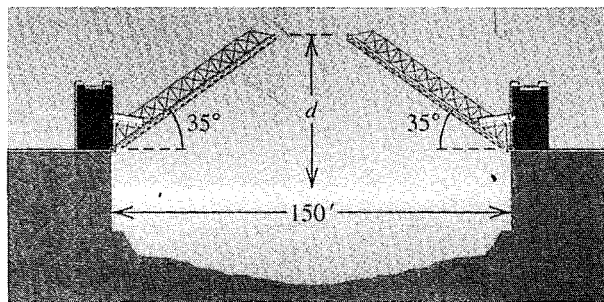
30. **Cálculos meteorológicos** Para medir la altura h de una capa de nubes, un estudiante de meteorología dirige la luz de un faro verticalmente hacia arriba desde el suelo. Desde un punto P a nivel del suelo que está a d metros del faro, se mide entonces el ángulo de elevación θ de la imagen de luz en las nubes (consulta la figura)

- a) Expresa h en términos de d y θ .
b) Calcula h si $d = 1000$ m y $\theta = 59^\circ$.



EJERCICIO 30

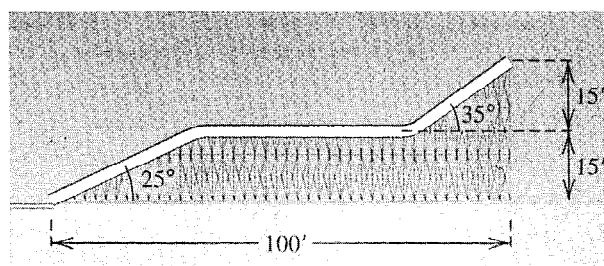
31. **Altitud de un cohete** Un cohete es disparado al nivel del mar y sube a un ángulo constante de 75° hasta una distancia de 10 000 pies. Calcula su altitud al pie más cercano.
32. **Despegue de aviones** Un avión despegue a un ángulo de 10° y vuela a razón de 250 pies/segundo. ¿Aproximadamente cuánto tarda en llegar a una altitud de 15 000 pies?
33. **Diseño de un puente levadizo** Un puente levadizo mide 150 pies de largo cuando se tiende sobre un río. Como se muestra en la figura, las dos secciones del puente pueden girar hacia arriba hasta un ángulo de 35° .
- a) Si el nivel del agua está 15 pies abajo del puente cerrado, halla la distancia d entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente esté abierto por completo.



EJERCICIO 33

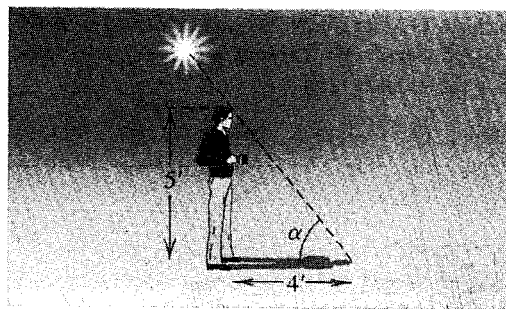
- b) ¿Aproximadamente cuán separados están los extremos de las dos secciones cuando el puente está abierto por completo, como se muestra en la figura?

34. **Diseño de un tobogán acuático** En la figura se aprecia parte de un tobogán acuático. Halla la longitud total del tobogán al pie más cercano.



EJERCICIO 34

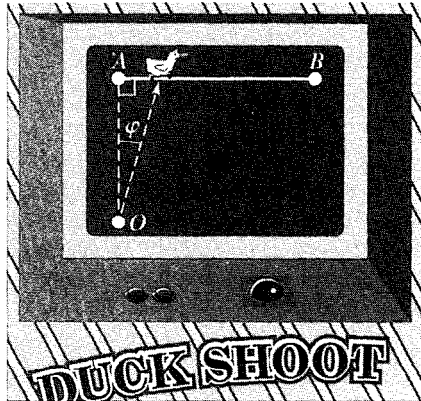
35. **Elevación del Sol** Calcula el ángulo de elevación a del Sol si una persona que mide 5 pies de estatura proyecta una sombra de 4 pies de largo al nivel del suelo (consulta la figura).



EJERCICIO 35

36. **Construcción de una rampa** Un constructor desea construir una rampa de 24 pies de largo que se levanta a una altura de 5 pies sobre el nivel del suelo. Calcula el ángulo de la rampa con la horizontal.

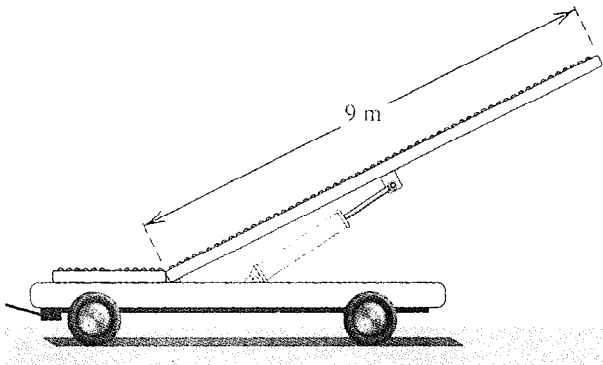
- 37. Juegos de video** En la figura se ve la pantalla de una máquina de juego de video en que los patos se mueven de A a B a razón de 7 cm/s . Las balas disparadas desde el punto O recorren 25 cm/s . Si un jugador dispara tan pronto como ve un pato en A , ¿a qué ángulo ϕ debe apuntar para hacer blanco?



EJERCICIO 37

- 38. Banda transportadora** Una banda transportadora de 9 metros de largo puede girar hidráulicamente hasta un ángulo de 40° para descargar aeronaves (consulta la figura).

- Encuentra, al grado más cercano, el ángulo hasta el cual hay que girar la banda para llegar a una puerta que está 4 metros arriba de la plataforma que la sostiene.
- Calcula la altura máxima sobre la plataforma a que la banda pueda llegar.

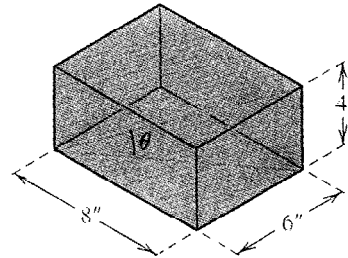


EJERCICIO 38

- 39. Terreno del Pentágono** El Pentágono es el edificio de oficinas más grande del mundo, en términos de terreno. Su perímetro tiene la forma de un pentágono regular y cada uno de los lados mide 921 pies. Halla el área encerrada por el perímetro.

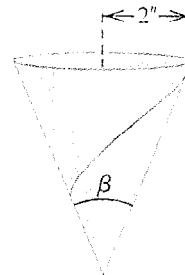
- 40. Perímetro de un octágono** Un octágono regular está inscrito en un círculo de 12.0 cm de radio. Calcula el perímetro del octágono.

- 41. Diagonales de una caja** Una caja rectangular tiene dimensiones de $8 \times 6 \times 4$ pulgadas. Calcula al décimo de grado más cercano, el ángulo θ formado por una diagonal



EJERCICIO 41

- 42. Volumen de una taza cónica** Una taza cónica de papel tiene un radio de 2 pulgadas. Calcula, al grado más cercano, el ángulo β (consulta la figura) de modo que el cono tenga un volumen de 20 pulgadas cúbicas.



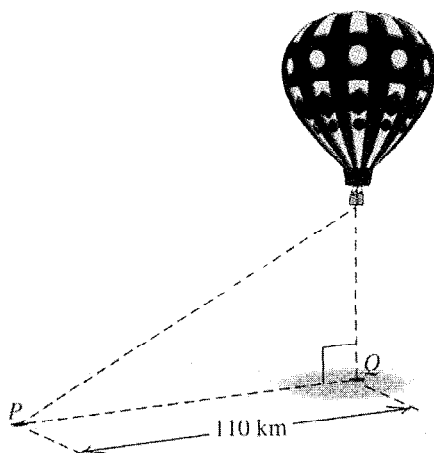
EJERCICIO 42

- 43. Altura de una torre** Desde un punto P situado a nivel del suelo, el ángulo de elevación de la parte alta de una torre es $26^\circ 50'$. De un punto que está 25.0 metros más cercano a la torre y en la misma línea con P y la base de la torre, el ángulo de elevación de la parte alta es $53^\circ 30'$. Calcula la altura de la torre.

- 44. Cálculo de escaleras** Una escalera que mide 20 pies se apoya en un edificio y el ángulo entre ambos es de 22° .

- Calcula la distancia del fondo de la escalera al edificio.
 - Si la distancia del fondo de la escalera al edificio aumenta 3.0 pies, ¿aproximadamente cuánto bajará del edificio la parte alta de la escalera?
- 45. Ascenso de un globo de aire caliente** A medida que un globo de aire caliente sube, su ángulo de elevación desde un punto P al nivel del suelo y a 110 kilómetros del punto

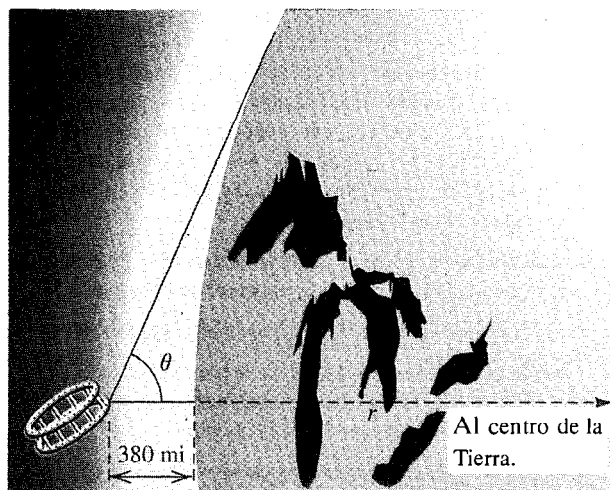
Q , que está directamente bajo el globo, cambia de $19^\circ 20'$ a $31^\circ 50'$ (consulta la figura). ¿Aproximadamente cuánto sube el globo durante este periodo?



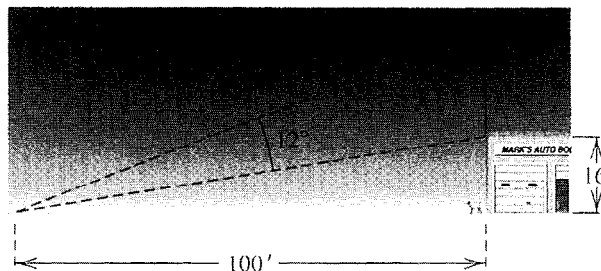
EJERCICIO 45

46. Altura de un edificio Desde un punto A que está 8.20 metros sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación de la parte alta de un inmueble es $31^\circ 20'$ y el ángulo de depresión de la base del mismo es $12^\circ 50'$. Calcula la altura del edificio.

47. Radio de la Tierra Un laboratorio espacial gira alrededor de la Tierra a una altitud de 380 millas. Cuando un astronauta observa el horizonte terrestre, el ángulo θ mostrado en la figura es de 65.8° . Usa esta información para calcular el radio de la Tierra.



EJERCICIO 47



EJERCICIO 48

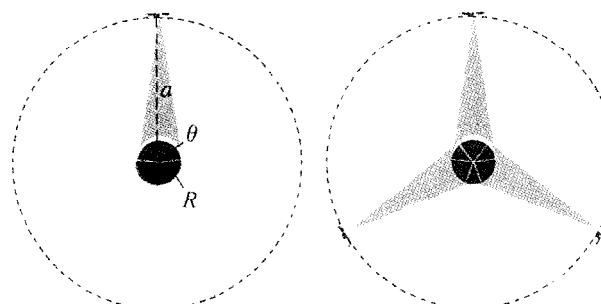
48. Longitud de una antena Una antena de CB (banda civil) está instalada en el techo de una cochera de 16 pies de alto. Desde un punto a nivel del suelo y que está a 100 pies directamente bajo la antena, ésta subtende un ángulo de 12° como se muestra en la figura. Calcula la longitud de la antena.

49. Velocidad de un aeroplano Un avión que vuela a una altitud de 10 000 pies pasa directamente sobre un objeto fijo en el suelo. Un minuto después, el ángulo de depresión del objeto es de 42° . Calcula la velocidad del avión a la milla por hora más cercana.

50. Altura de una montaña Un automovilista, que circula por una carretera a una velocidad de 60 km/h directamente hacia una montaña, observa que entre la 1 p.m. y la 1:10 p.m. el ángulo de elevación de la montaña cambia de 10° a 70° . Calcula la altura de la montaña.

51. Satélite de comunicaciones En la primera figura se muestra un satélite de comunicaciones con órbita ecuatorial; es decir, una órbita casi circular en el plano determinado por el ecuador de la Tierra. Si el satélite circula alrededor del globo a una altitud de $a = 22\,300$ millas, su velocidad es la misma que la de rotación del planeta; para un observador situado en el ecuador el satélite parece estar estacionario, lo cual significa que su órbita es sincrónica.

a) Con $R = 4000$ millas como radio de la Tierra, determina el porcentaje del ecuador que se encuentre dentro del alcance de la señal del satélite.

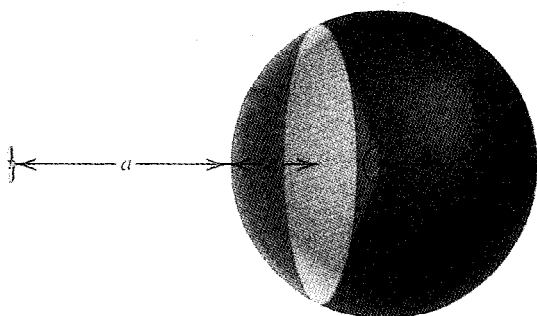


EJERCICIO 51

- b) Como se muestra en la siguiente figura, tres satélites están igualmente separados en órbitas ecuatoriales sincrónicas. Usar el valor de θ , obtenido en la parte a), para explicar por qué todos los puntos sobre el ecuador están dentro del alcance de señal de por lo menos uno de los tres satélites.

52. Satélite de comunicaciones Consulta el ejercicio 51. En la figura se aprecia la región cubierta por la señal de un satélite de comunicaciones que orbita un planeta de radio R a una altitud a . La parte de la región del planeta que abarca la señal del satélite es un casquete o sector esférico de profundidad d y área $A = 2\pi R d$.

- a) Expresa d en términos de R y θ .
b) Calcula el porcentaje de la superficie del planeta que se encuentre dentro del alcance de la señal de un satélite en órbita sincrónica ecuatorial.

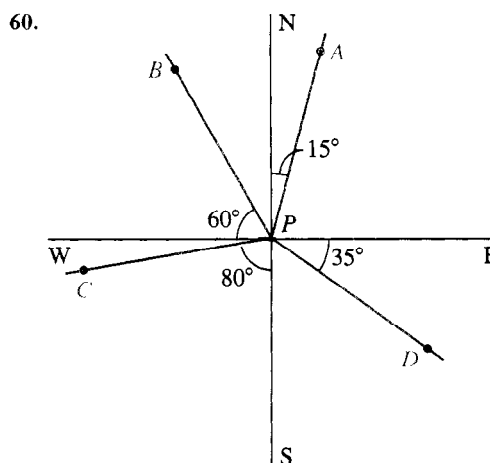
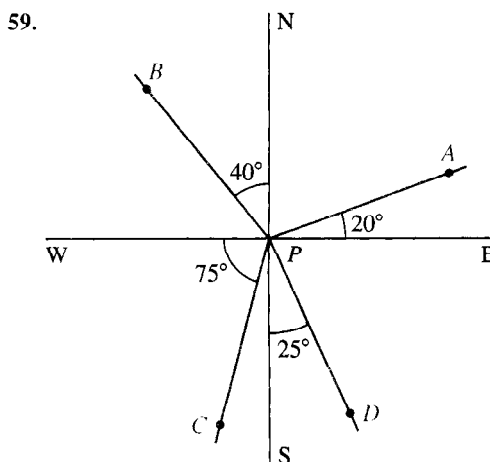


EJERCICIO 52

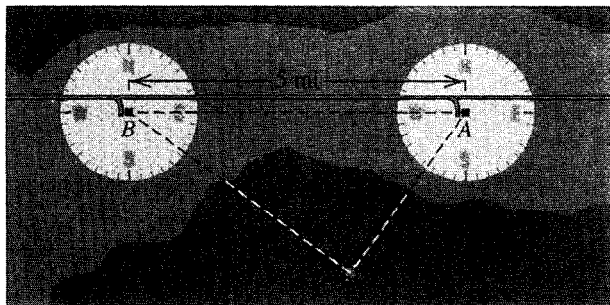
- 53. Altura de una cometa** Generaliza el ejercicio 25 al caso en que el ángulo es α , el número de pies de cuerda es d y el extremo de la cuerda se mantiene c pies arriba del suelo. Expresa la altura h de la cometa en términos de a , d y c .
- 54. Agrimensura** Lleva el ejercicio 26 al caso en que el punto está d metros sobre el nivel del suelo y el ángulo de depresión es α . Expresa la distancia x en términos de d y α .
- 55. Altura de una torre** Amplía el ejercicio 43 al caso en que el primer ángulo es α , el segundo ángulo es β y la distancia entre los dos puntos es d . Expresar la altura h de la torre en términos de d , α y β .
- 56. Perímetro de un octágono** Traspola el ejercicio 40 al caso de un polígono de n lados, inscrito en un círculo de radio r . Expresa el perímetro P en términos de n y r .
- 57. Ascenso de un globo de aire caliente** Extiende el ejercicio 45 al caso en que la distancia de P a Q es d kilómetros y el ángulo de elevación cambia de α a β .

- 58. Altura de un edificio** Generaliza el ejercicio 46 al caso en que el punto A está d metros sobre el suelo y los ángulos de elevación y depresión son α y β , respectivamente. Expresa la altura h del edificio en términos de d , α y β .

Ejercicios 59 y 60: halla el rumbo de P a cada uno de los puntos A , B , C y D .



- 61. Rumbos de naves** Un barco sale de puerto a la 1:00 p.m. y navega en dirección $N34^\circ O$ a razón de 24 millas por hora. Otra nave sale de puerto a la 1:30 p.m. y navega en dirección $N56^\circ E$ a 18 millas por hora.
- a) ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentran los barcos a las 3:00 p.m.?
- b) ¿Cuál es el rumbo, al grado más cercano, del primer barco al segundo?
- 62. Determinación del sitio de un incendio forestal** Desde un punto de observación A , un guardabosques avista



EJERCICIO 62

un incendio en la dirección $S35^{\circ}50'O$ (consulta la figura). Desde un punto B , 5 millas al oeste de A , otro guardabosques advierte el mismo incendio en dirección

$S54^{\circ}10'E$. Calcula, al décimo de milla más cercano, la distancia del incendio desde A .

63. Vuelo de aviones Un aeroplano, que viaja a 360 millas por hora, vuela desde un punto A en dirección 137° durante 30 minutos y luego en dirección 227° durante 45 minutos. Calcula a la milla más cercana, la distancia del avión a A .

64. Plan de vuelo de aviones Una nave, que viaja a una velocidad de 400 millas por hora, vuela desde un punto A en dirección 153° durante una hora y luego en dirección 63° durante una hora.

a) ¿Qué dirección necesita tomar para poder volver al punto A ?

b) ¿Cuánto tardará en regresar al punto A ?

2.9 Movimiento armónico

Las funciones trigonométricas son útiles en la investigación del movimiento vibratorio u oscilatorio, como es el caso del movimiento de una partícula en una cuerda de guitarra o en un resorte que se comprime o alarga y luego se suelta y oscila en una y otra dirección. El tipo fundamental de desplazamiento de partículas en estas ilustraciones es el *movimiento armónico*.

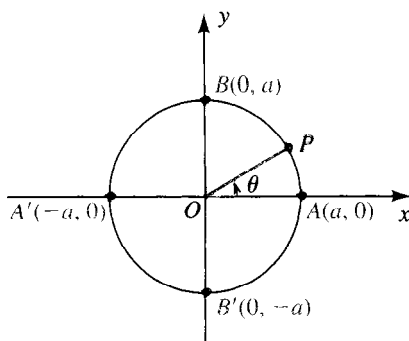


FIGURA 82

Para ayudar a introducir el movimiento armónico, consideremos un punto P que se mueve a una razón constante alrededor del círculo de radio a que se muestra en la figura 82. Supón que la posición inicial de P es $A(a, 0)$ y θ es el ángulo generado por el rayo OP después de t unidades de tiempo. La *velocidad angular* ω de OP es la razón con que cambia θ por unidad de tiempo (revisa el ejemplo 6, Sec. 2.1). Señalar que P se mueve a una razón constante alrededor del círculo equivale a decir que la velocidad angular ω es constante. Si ω es constante, entonces $\theta = \omega t$. Para ilustrar lo anterior, si $\omega = \pi/6$ radianes por segundo, entonces $\theta = (\pi/6)t$. En este caso, a $t = 1$ s, $\theta = (\pi/6)/1 = \pi/6$, y P está a un tercio del recorrido de $A(a, 0)$ a $B(0, a)$. A $t = 2$ s, $\theta = (\pi/6)(2) = \pi/3$, y P estará a dos tercios del recorrido de A a B . A $t = 6$ s, $\theta = (\pi/6)(6) = \pi$, y P está en $A'(-a, 0)$, y así sucesivamente.

Si las coordenadas de P son (x, y) , como se muestra en la figura 83, entonces $\cos \theta = x/a$ y $\sin \theta = y/a$ y, por lo tanto,

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

El uso de $\pi = \omega t$ nos da

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

Las últimas dos ecuaciones especifican la posición (x, y) de P en cualquier instante t .

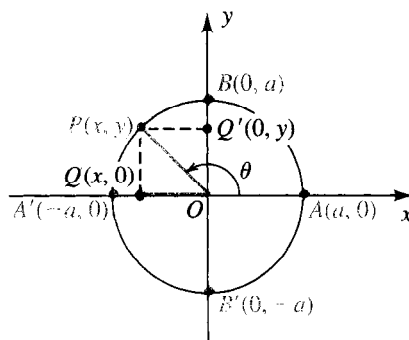


FIGURA 83

En seguida consideraremos el punto $Q(x, 0)$; es decir, la **proyección de P sobre el eje de las x** (Fig. 83). La posición de Q está dada por $x = a \cos \omega t$. Conforme P se mueve alrededor del círculo varias veces, el punto Q oscila hacia adelante y atrás entre $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$. Análogamente, el punto $Q'(0, y)$ es la **proyección de P sobre el eje de las y** , y su posición está dada por $y = a \sin \omega t$. A medida que P se mueve alrededor del círculo, Q' oscila entre $B'(0, -a)$ y $B(0, a)$. Los movimientos de Q y Q' son del tipo descrito en la definición siguiente.

Definición de movimiento armónico simple

Un punto que se mueve en una línea coordenada está en **movimiento armónico simple** si su distancia d desde el origen, en el instante t , está dada ya sea por

$$d = a \cos \omega t \quad \text{o} \quad d = a \sin \omega t$$

para algunos números reales a y ω diferentes de cero.

En esta definición, la **amplitud** del movimiento es el máximo desplazamiento $|a|$ del punto desde el origen. El **periodo** es el tiempo $2\pi/|\omega|$ requerido para una oscilación completa. La **frecuencia** $|\omega|/(2\pi)$ es la cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo.

Se puede obtener una interpretación física del movimiento armónico simple si se considera un resorte, con un peso sujeto en un extremo, que oscila verticalmente en relación con una línea coordenada (Fig. 84). El número d representa la coordenada de un punto fijo Q en el peso y se supone que la amplitud a del movimiento es constante. En este caso no existe fuerza de fricción que retarde el movimiento. Si hay fricción, entonces la amplitud decrece con el tiempo y se dice que el movimiento es *amortiguado*.

EJEMPLO 1 Describir el movimiento armónico

Supón que la oscilación del peso de la figura 84 está dada por

$$d = 10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

con t medida en segundos y d en centímetros. Discute el movimiento del peso.

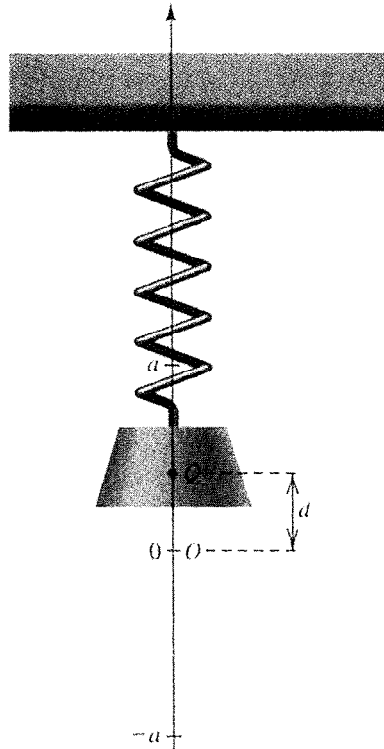


FIGURA 84

Solución Por definición, el movimiento es armónico simple con amplitud $a = 10$ cm. Como $\omega = \pi/6$, se obtiene:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$$

Por lo tanto, el peso hará una oscilación completa en 12 segundos. También se ve que

$$\text{frecuencia} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{1}{12},$$

lo cual significa que cada segundo ocurre un doceavo de oscilación. La tabla siguiente indica la posición de Q en varios instantes.

t	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{6}t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
d	10	$5\sqrt{3} \approx 8.7$	5	0	-5	$-5\sqrt{3} \approx -8.7$	-10

La posición inicial de Q es 10 centímetros arriba del origen O ; se mueve hacia abajo y gana velocidad hasta que llega a O . Notarás que Q viaja aproximadamente $10 - 8.7 = 1.3$ cm durante el primer segundo, $8.7 - 5 = 3.7$ cm el siguiente y $5 - 0 = 5$ cm el tercer segundo. Entonces, reduce su velocidad hasta que llega a un punto situado a 10 centímetros abajo de O al término de 6 segundos. La dirección del movimiento se invierte y el peso se mueve hacia arriba y gana velocidad hasta que llega a O . Una vez en este último punto, reduce su velocidad hasta que regresa a su posición original al término de 12 segundos. La dirección del movimiento se invierte de nuevo y se repite indefinidamente.

Este ejemplo es característico del movimiento armónico simple. Si el ángulo inicial AOP de la figura 83 es ϕ en $t = 0$, la posición (x, y) de P sobre el círculo está dada por

$$x = a \cos(\omega t + \phi), \quad y = a \sin(\omega t + \phi)$$

Se dice que los puntos que oscilan en una línea coordenada siguiendo cualquiera de estas fórmulas están en movimiento armónico simple.

• El movimiento armónico simple tiene lugar en muchos tipos de movimiento de ondas, como las olas del agua, ondas sonoras, ondas de radio, ondas de luz y ondas distorsionales que están presentes en cuerpos en vibración. Como ejemplo específico, considera las ondas que se hacen cuando se sostiene el extremo de una cuerda larga (Fig. 85) y se hace vibrar al subir y bajar la mano en movimiento armónico simple. Parece que las ondas se mueven a lo largo de la cuerda y se alejan de la mano. Se puede usar una regla, puesta verticalmente a una distancia fija c del extremo como se ilustra en la figura, para estudiar el movimiento hacia arriba y abajo de una partícula específica P en la cuerda. Si se escoge un eje horizontal apropiado, es viable demostrar que P está en movimiento armónico simple como si estuviera fija a un resorte. Ocurre un movimiento semejante en las pequeñas olas que se forman en una charca.

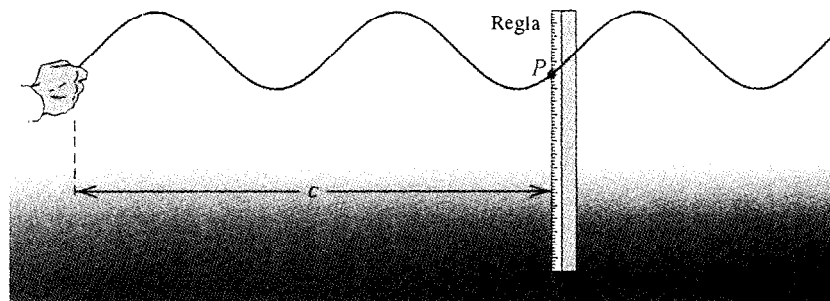


FIGURA 85

La definición de movimiento armónico simple se amplía por lo general para abarcar situaciones en donde d es *cualquier* cantidad matemática o física (no necesariamente una distancia). En la siguiente ilustración, d es un ángulo.

A nivel histórico, el primer tipo de movimiento armónico investigado por la ciencia fue el péndulo. En la figura 86 se ilustra un *péndulo simple* formado por un cuerpo de masa m sujeto al extremo de una cuerda, con el otro extremo de la cuerda fijo en un punto P . En el caso ideal se supone que la cuerda no tiene peso, que no hay resistencia del aire y que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la gravedad. Si el cuerpo se desplaza en sentido lateral y se suelta, el péndulo oscila en un sentido y otro en un plano vertical. Denótese por α el *desplazamiento angular* en el tiempo t (Fig. 86). Si el cuerpo se mueve en un pequeño arco (por ejemplo $|\alpha| < 5^\circ$), se puede demostrar mediante leyes físicas que

$$\alpha = \beta \cos (\omega t + \alpha_0),$$

donde α_0 es el desplazamiento inicial, ω la frecuencia de oscilación del ángulo α y β la amplitud (angular) de oscilación. Esto significa que el *ángulo* α está en movimiento armónico simple y, por lo tanto, se denomina movimiento armónico simple *angular*.

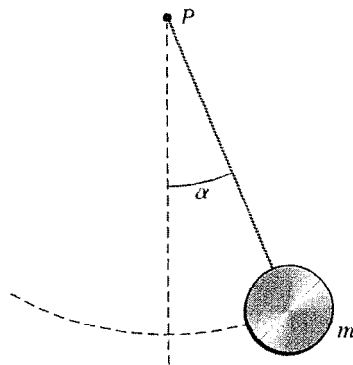


FIGURA 86

Como demostración final, una fuerza electromotriz (fem) y la corriente pueden variar armónicamente en circuitos eléctricos; por ejemplo, la fem V (medida en volts) en el instante t puede estar dada por

$$V = V_M \sin \omega t,$$

en donde V_M es el voltaje máximo. Si se aplica una fem de este tipo en un circuito que contenga sólo una resistencia de R ohms, por la ley de Ohm, la corriente I en el instante t es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_M \sin \omega t}{R} = I_M \sin \omega t,$$

en donde $I_M = V_M/R$ es la corriente máxima. En la figura 87 se ilustra un diagrama de un circuito eléctrico de este tipo.

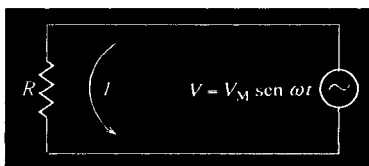


FIGURA 87

La corriente máxima I_M ocurre al mismo tiempo que el voltaje máximo V_M . En otras situaciones, estos valores máximos pueden presentarse en instantes diferentes, en cuyo caso se dice que hay una **diferencia de fase** entre V e I ; por ejemplo, si $V = V_M \sin \omega t$, se puede tener ya sea

$$\text{a) } I = I_M \sin(\omega t - \phi) \quad \text{o} \quad \text{b) } I = I_M \sin(\omega t + \phi)$$

para alguna $\phi > 0$. En el caso a), se dice que la corriente está **atrasada** con respecto a la fem en una cantidad ϕ/ω , y la gráfica de I se puede obtener si se desplaza la gráfica de $I = I_M \sin \omega t$ una cantidad ϕ/ω a la *derecha*. En el caso b), la gráfica se corre a la *izquierda*, y se dice que la corriente se **adelanta** a la fem una cantidad ϕ/ω . La situación es análoga a la descrita en el estudio de desplazamientos de fase de la sección 2.6.

En libros de física e ingeniería se pueden encontrar otras ilustraciones físicas donde hay movimiento armónico simple.

2.9 EJERCICIOS

- Una rueda de 40 centímetros de radio gira alrededor de un eje a razón de 100 rpm. Si se introduce un sistema coordenado como en la figura 83, tal que P sea un punto del borde de la rueda, halla
 - La velocidad angular de OP
 - La posición (x, y) de P después de t minutos.
- Una rueda de 2 pies de radio gira alrededor de un eje y la velocidad angular de un rayo desde el centro de la rueda al punto P en el borde es de $5\pi/6$ radianes por segundo.
 - ¿Cuántas revoluciones da la rueda en 10 minutos?
 - Si se introduce un sistema coordenado como en la figura 83, halla la posición (x, y) de P después de t segundos.

Ejercicios 3 al 6: la fórmula especifica la posición de un punto P que se mueve armónicamente en un eje vertical, donde t está en segundos y d en centímetros. Determina la amplitud, periodo y frecuencia y describe el movimiento del punto durante una oscilación completa (comenzando en $t = 0$).

$$3. d = 10 \sin 6\pi t$$

$$4. d = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} t$$

$$5. d = 4 \cos \frac{3\pi}{2} t$$

$$6. d = 6 \sin \frac{2\pi}{3} t$$

- Un punto P en movimiento armónico simple tiene un periodo de 3 segundos y una amplitud de 5 centímetros. Expresa el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \cos \omega t$.
- Un punto P en movimiento armónico simple tiene una frecuencia de $\frac{1}{2}$ oscilación por minuto y una amplitud de

4 pies. Expresa el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \sin \omega t$.

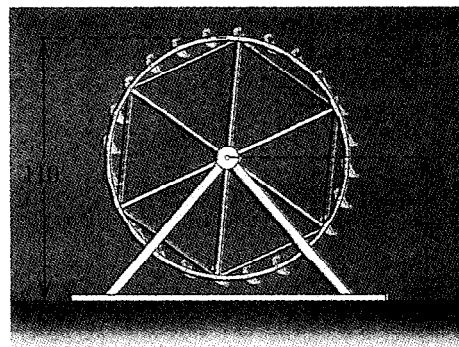
Ejercicios 9 y 10: las ecuaciones expresan la fuerza electromotriz V y la corriente alterna I de un circuito eléctrico en el instante t . Traza las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo plano coordenado y determina el atraso o adelanto.

$$9. V = 220 \sin 360\pi t; I = 20 \sin (360\pi t - \frac{1}{4}\pi)$$

$$10. V = 110 \sin 120\pi t; I = 15 \sin (120\pi t + \frac{1}{3}\pi)$$

- Revolución de una rueda de la fortuna** Una gran rueda de la fortuna mide 100 pies de diámetro y se eleva a 110 pies sobre el suelo, como se ilustra en la figura. Cada revolución toma 30 segundos.

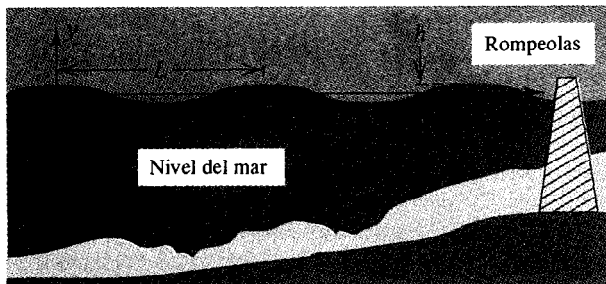
- Halla la velocidad angular de la rueda.
- Expresa la altura h de un pasajero sobre el suelo, como función de t (en segundos), si $t = 0$ corresponde al momento en que el pasajero está en la parte inferior.



EJERCICIO 11

12. Tsunamis Un tsunami es una gran ola que se levanta en el mar por efecto de un maremoto, o temblor bajo el mar. Estas olas pueden tener una altura de más de 100 pies y moverse a grandes velocidades. En ocasiones, los ingenieros las representan mediante expresiones trigonométricas de la forma $y = a \cos bt$ y usan estos modelos matemáticos para calcular la efectividad de los rompeolas. Supón que una ola tiene una altura $h = 50$ pies, un periodo de 30 minutos y se mueve a razón de 180 pies por segundo.

- a) Sea (x, y) un punto en la ola representada en la figura. Expresa y como función de t si $y = 25$ pies cuando $t = 0$.
- b) La longitud de onda L es la distancia entre dos crestas sucesivas de la ola. Calcula L en pies.



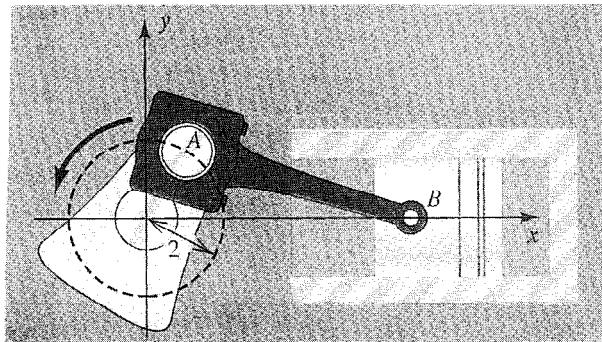
EJERCICIO 12

13. Algunos tsunamis en Hawai Para un intervalo de 45 minutos, los tsunamis que hubo cerca de Hawai debidos al temblor ocurrido en Chile en 1960 fueron modelados por la ecuación

$$y = 8 \sin \frac{\pi}{6} t, \text{ donde } y \text{ está en pies y } t \text{ en minutos.}$$

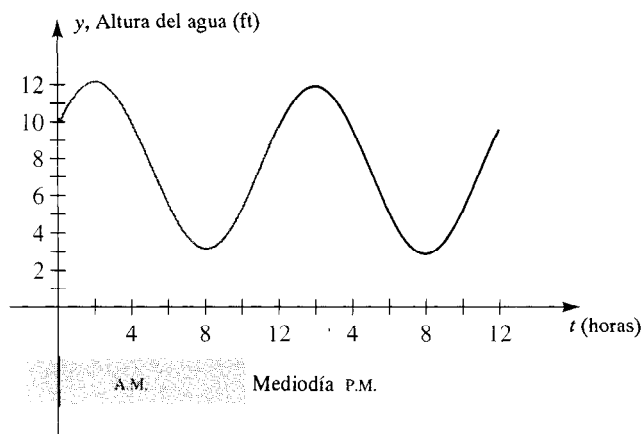
- a) Halla la amplitud y periodo de las olas.
- b) Si la distancia de una cresta de la ola a la siguiente fue de 21 kilómetros, ¿cuál era la velocidad de la ola? (Las olas de los maremotos pueden alcanzar velocidades de más de 700 km/h en aguas profundas).
- 14. Cálculo de un cigüeñal** Un émbolo está conectado a un cigüeñal en la forma que se ilustra en la figura. La biela AB mide 6 pulgadas de largo y el radio del cigüeñal es de 2 pulgadas.

- a) Si el cigüeñal gira dos veces por segundo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, halla las coordenadas del punto A en un tiempo de t segundos después que A tenga coordenadas $(2, 0)$.
- b) Halla las coordenadas del punto B en el tiempo t .



EJERCICIO 14

15. Puerto de Boston La gráfica de la figura muestra cómo sube y baja el nivel del agua en el puerto de Boston durante un periodo de 24 horas. Calcula el nivel del agua y por medio de una ecuación de la forma $y = a \sin(bt + c) + d$, con $t = 0$ correspondiente a la medianoche.



EJERCICIO 15

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

- Halla la medida en radianes que corresponda a cada medida en grados: 330° , 405° , -150° , 240° , 36° .
- Determina la medida en grados que corresponda a cada medida en radianes:

$$\frac{9\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, 5\pi, \frac{\pi}{5}.$$

- Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 20 centímetros de largo en un círculo de 2 metros de radio.

- a) Encuentra la medida en radianes de θ .
 b) Establece el área del sector determinado por θ .
 4. a) Halla la longitud de arco que subtiende un ángulo de 70° en un círculo de 15 cm de diámetro.
 b) Determina el área del sector de la parte a).

Ejercicios 5 y 6: $P(t)$ denota el punto en el círculo unitario U que corresponde al número real t .

5. Halla las coordenadas rectangulares de $P(7\pi)$, $P(-5\pi/2)$, $P(9\pi/2)$, $P(-3\pi/4)$, $P(18\pi)$, y $P(\pi/6)$.
 6. Si $P(t)$ tiene coordenadas $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, establece las coordenadas de $P(t+3\pi)$, $P(t-\pi)$, $P(-t)$, y $P(2\pi-t)$.
 7. Encuentra los valores exactos de las restantes funciones trigonométricas si
 a) $\sin t = -\frac{4}{5}$ y $\cos t = \frac{3}{5}$
 b) $\csc t = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $\cot t = -\frac{3}{2}$
 8. Halla el cuadrante que contenga el punto P en el círculo unitario U para las condiciones dadas
 a) $\sec t < 0$ y $\sin t > 0$
 b) $\cot t > 0$ y $\csc t < 0$
 c) $\cos t > 0$ y $\tan t < 0$

Ejercicios 9 y 10: usa identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, si $0 < t < \pi/2$.

9. $\tan t$, $\sec t$ 10. $\cot t$, $\csc t$

Ejercicios 11 al 20: comprueba la identidad transformando el lado izquierdo en el derecho.

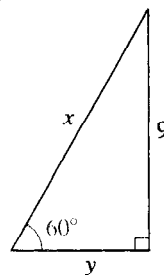
11. $\sin t (\csc t - \sin t) = \cos^2 t$
 12. $\cos t (\tan t + \cot t) = \csc t$
 13. $(\cos^2 t - 1)(\tan^2 t + 1) = 1 - \sec^2 t$
 14. $\frac{\sec t - \cos t}{\tan t} = \frac{\tan t}{\sec t}$
 15. $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} = \csc^2 t$
 16. $\frac{\sec t + \csc t}{\sec t - \csc t} = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$
 17. $\frac{\cot t - 1}{1 - \tan t} = \cot t$
 18. $\frac{1 + \sec t}{\tan t + \sin t} = \csc t$
 19. $\frac{\tan(-t) + \cot(-t)}{\tan t} = -\csc^2 t$

$$20. -\frac{1}{\csc(-t)} - \frac{\cot(-t)}{\sec(-t)} = \csc t$$

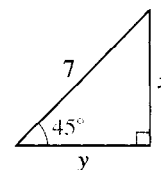
21. Halla, siempre que sea posible, los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y satisface la condición indicada.
 a) El punto $(30, -40)$ está en el lado terminal de θ .
 b) El lado terminal de θ está en el segundo cuadrante y sobre la línea $2x + 3y = 0$.
 c) El lado terminal de θ se halla sobre la parte negativa del eje y .
 22. Si θ es el ángulo agudo de un triángulo rectángulo y si el lado adyacente y la hipotenusa tienen longitudes de 4 y 7, respectivamente, halla los valores de las funciones trigonométricas de θ .

Ejercicios 23 y 24: encuentra los valores exactos de x y y .

23.



24.



25. a) Define el ángulo de referencia para cada medida en radianes:
 $5\pi/4$, $-5\pi/6$, $-9\pi/8$
 b) Determina el ángulo de referencia para cada medida en grados:
 245° , 137° , 892° .
 26. Sin usar tablas o calculadora, halla, siempre que sea posible, los valores exactos de las funciones trigonométricas correspondientes a cada número real:
 a) $\frac{9\pi}{2}$ b) $-\frac{5\pi}{4}$ c) 0 d) $\frac{11\pi}{6}$
 27. Halla el valor exacto:
 a) $\cos 225^\circ$ b) $\tan 150^\circ$ c) $\sin(-\pi/6)$
 d) $\sec 4\pi/3$ e) $\cot 7\pi/4$ f) $\csc 300^\circ$
 28. Si $\sin \theta = -0.7604$ y $\sec \theta$ es positiva, calcula θ al $(0.1)^\circ$ más cercano para $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

Ejercicios 29 al 36: encuentra la amplitud y periodo y traza la gráfica de la ecuación.

29. $y = 5 \cos x$ 30. $y = \frac{2}{3} \sin x$
 31. $y = \frac{1}{3} \sin 3x$ 32. $y = -\frac{1}{2} \cos \frac{1}{3}x$

33. $y = -3 \cos \frac{1}{2}x$

34. $y = 4 \sin 2x$

35. $y = 2 \sin \pi x$

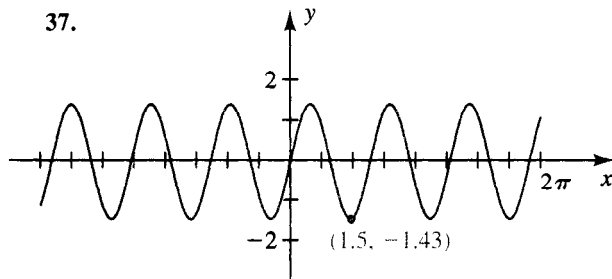
36. $y = 4 \cos \frac{\pi}{2}x - 2$

Ejercicios 37 al 40: en la figura se muestra la gráfica de una ecuación.

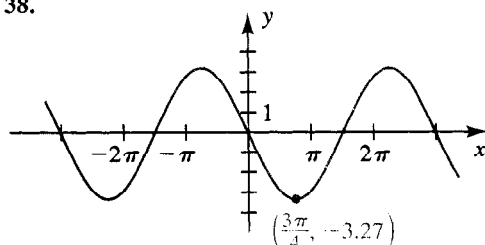
a) Halla la amplitud y el periodo

b) Expresa la ecuación en la forma $y = a \sin bx$ o $y = a \cos bx$.

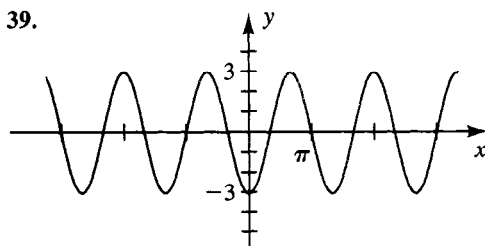
37.



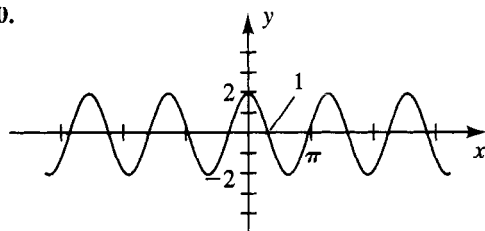
38.



39.



40.



Ejercicios 41 al 52: traza la gráfica de la ecuación.

41. $y = 2 \sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right)$

42. $y = -3 \sin \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \right)$

43. $y = -4 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

44. $y = 5 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

45. $y = 2 \tan \left(\frac{1}{2}x - \pi \right)$

46. $y = -3 \tan \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$

47. $y = -4 \cot \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$

48. $y = 2 \cot \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right)$

49. $y = \sec \left(\frac{1}{2}x + \pi \right)$

50. $y = \sec \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$

51. $y = \csc \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$

52. $y = \csc \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right)$

Ejercicios 53 al 56: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, calcula las partes restantes.

53. $\beta = 60^\circ$, $b = 40$

54. $a = 54^\circ 40'$, $b = 220$

55. $a = 62$, $b = 25$

56. $a = 9$, 0 , $c = 41$

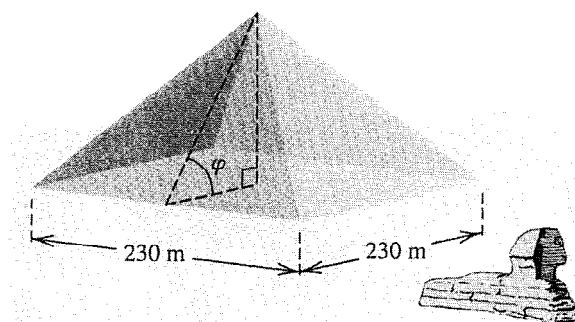
57. **Hélice de un avión** La longitud de la hélice más grande que se haya usado en aviones fue de 22 pies 7.5 pulgadas. El avión estaba impulsado por cuatro motores que la movían a 545 revoluciones por minuto.

a) ¿Cuál era la velocidad angular de la hélice en radianes por segundo?

b) ¿Aproximadamente a qué velocidad (en millas por hora) se movía la hélice a lo largo del círculo que generaba?

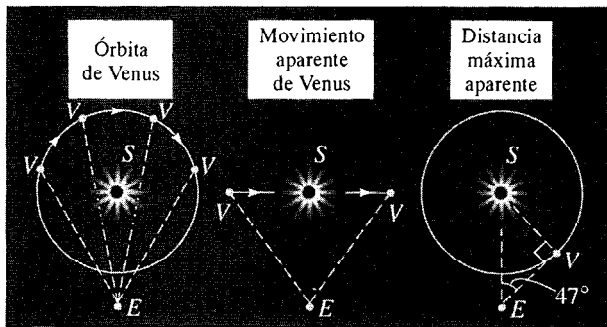
58. **La Torre Eiffel** Cuando se observa la parte más alta de la torre Eiffel desde una distancia de 200 pies de su base, el ángulo de elevación es 79.2° . Calcula la altura de la torre.

59. **La Gran Pirámide** La Gran Pirámide de Egipto mide 147 metros de altura, con una base cuadrada de 230 metros por lado (ve la figura). Calcula, al grado más cercano, el ángulo ϕ que se forma cuando un observador se sitúa en el punto medio de uno de los lados y observa la cúspide de la pirámide.



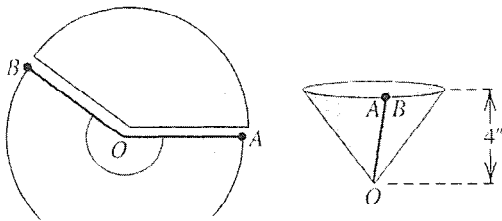
EJERCICIO 59

- 60. Venus** Cuando se observa desde la Tierra durante cierto periodo, el planeta Venus parece moverse hacia adelante y hacia atrás a lo largo de un segmento, con el Sol en su punto medio (ve la figura). A la máxima distancia aparente del Sol, el ángulo SEV es de unos 47° . Utiliza el valor $ES = 92\,900\,000$ millas para calcular la distancia de Venus al Sol.



EJERCICIO 60

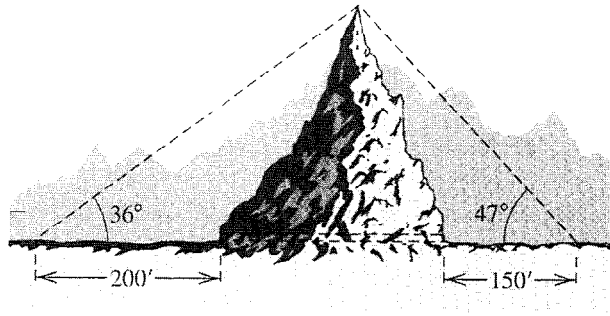
- 61. Construcción de una taza cónica** Se elabora una taza cónica de papel cortando un sector de un círculo de 5 pulgadas de radio y uniendo el borde OA al OB (ve la figura). Halla el ángulo AOB de modo que la taza tenga una profundidad de 4 pulgadas.



EJERCICIO 61

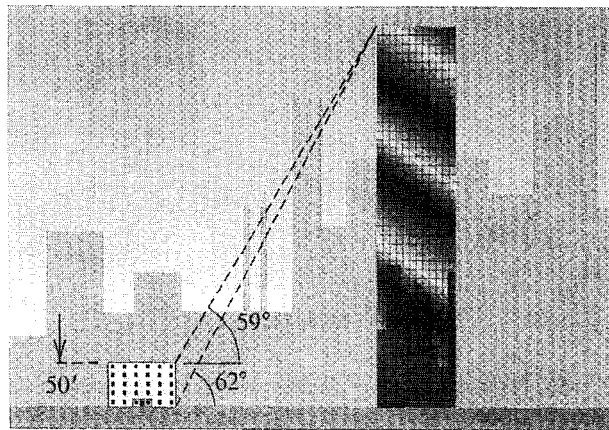
- 62. Longitud de un túnel** Para una nueva carretera debe excavarse un túnel bajo una montaña que mide 260 pies de altura. A una distancia de 200 pies de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 36° (ve la figura). De una distancia de 150 pies en el otro lado, el ángulo de elevación es de 47° . Calcula la longitud del túnel al pie más próximo.
- 63. Altura de un rascacielos** Cuando se observa un rascacielos desde lo alto de un edificio de 50 pies de altura, el ángulo de elevación es de 59° (consulta la figura); cuando se observa desde la calle junto al edificio más bajo, el ángulo de observación es de 62° .

- a) ¿Aproximadamente a qué distancia están las dos estructuras?



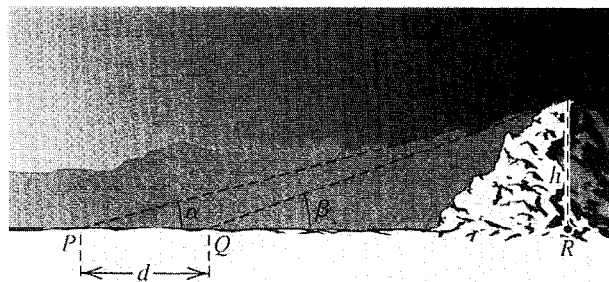
EJERCICIO 62

- b) Calcula la altura del rascacielos, al décimo de pie más cercano.



EJERCICIO 63

- 64. Altura de una montaña** Cuando se observa la cima de la montaña desde el punto P de la figura, el ángulo de elevación es α . Desde un punto Q que está d millas más cerca de la montaña, el ángulo de elevación aumenta a β .



EJERCICIO 64

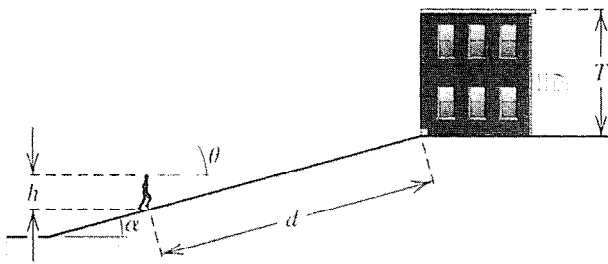
- a) Demuestra que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

- b) Calcula la altura de la montaña si $d = 2$ millas, $\alpha = 15^\circ$ y $\beta = 20^\circ$.

65. Altura de un edificio Un observador de estatura h está de pie en un terreno inclinado y a una distancia d de la base de una construcción de altura T , como se muestra en la figura. El ángulo de elevación del observador a la parte más alta del edificio es θ , y el terreno inclinado hace un ángulo de α con la horizontal.

- a) Expresa T en términos de h , d , α y θ .
b) Calcula la altura del edificio si $h = 6$ pies, $d = 50$ pies, $\alpha = 15^\circ$ y $\theta = 31.4^\circ$.



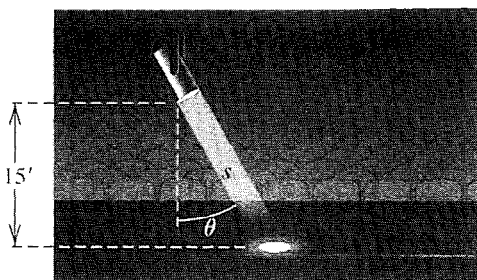
EJERCICIO 65

66. Iluminancia Un proyector de luz cuya intensidad es de 5 000 candelas está a 15 pies sobre un escenario. Si se hace girar hasta un ángulo θ como se muestra en la figura, la iluminancia E (en pies-candelas) de la parte iluminada del escenario está dada por

$$E = \frac{5000 \cos \theta}{s^2},$$

donde s es la distancia (en pies) que la luz debe recorrer.

- a) Halla la iluminancia si se hace girar el proyector hasta un ángulo de 30° .



EJERCICIO 66

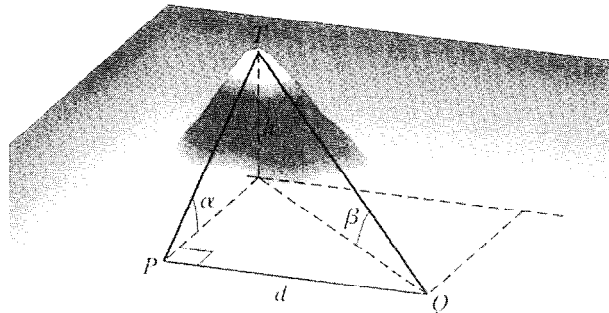
- b) La iluminancia máxima ocurre cuando $\theta = 0^\circ$. ¿Para qué valor de θ tendrá la iluminancia la mitad del valor máximo?

67. Altura de una montaña Si se observa la cima de una elevación desde un punto P situado directamente al sur de la misma, el ángulo de elevación es α (ve la figura); si es vista desde un punto Q que está a d millas al este de P , el ángulo de elevación es β .

- a) Demuestra que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}}$$

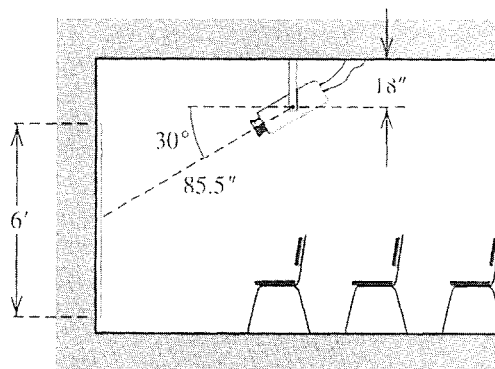
- b) Si $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$ y $d = 10$ millas, calcula h al centésimo de milla más cercano.



EJERCICIO 67

68. Montaje de un sistema de proyección El fabricante de un sistema computarizado de proyección recomienda instalar un proyector en un techo, como se muestra en la figura. La distancia del extremo del soporte de montaje al centro de la pantalla es 85.5 pulgadas, y el ángulo de depresión es 30 grados.

- a) Si se desprecia el grosor de la pantalla, ¿a qué distancia de la pared debe montarse el soporte?

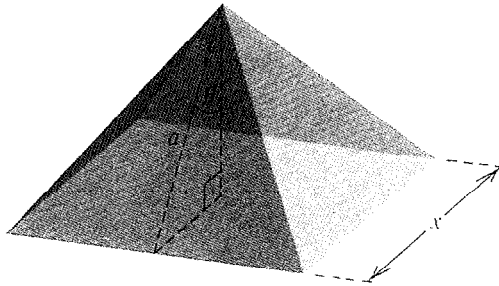


EJERCICIO 68

- b) Si el soporte mide 18 pulgadas de largo y la pantalla está a 6 pies de altura, determina la distancia del techo al borde superior de la pantalla.

69. Relaciones en pirámides Una pirámide tiene una base cuadrada y caras triangulares congruentes. Sea θ el ángulo que la altura a de una cara triangular hace con la altura y de la pirámide, y sea x la longitud de un lado (ve la figura).

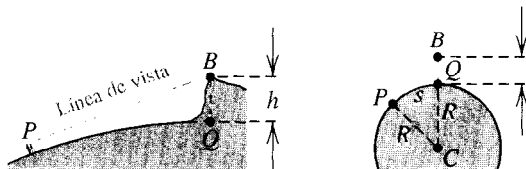
- a) Expresa la superficie total S de las cuatro caras en términos de a y de θ .
b) El volumen V de la pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura. Expresa V en términos de a y θ .



EJERCICIO 69

70. Levantamiento del plano de una barranca Por medio de un teodolito, un agrimensor avista el borde B de una barranca que se ilustra en la primera figura (no se dibuja a escala). Debido a la curvatura de la Tierra, la verdadera elevación h de la barranca es mayor que la medida por el agrimensor. En la segunda figura se muestra un corte transversal de la Tierra.

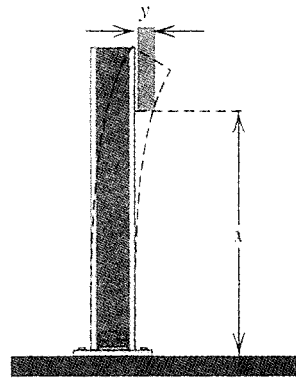
- a) Si s es la longitud del arco PQ y R es la distancia de P al centro C de la Tierra, expresa h en términos de R y de s .
b) Si $R = 4000$ millas y $s = 50$ millas, calcula la elevación de la barranca en pies.



EJERCICIO 70

71. Respuesta a sismos Para simular la respuesta de una estructura a un temblor, un ingeniero debe seleccionar una forma para el desplazamiento inicial de las viguetas del edificio. Cuando la vigueta tiene una longitud de L

pies y el desplazamiento máximo es a pies, los ingenieros han usado la ecuación $y = a - a \cos(\frac{1}{2}\pi x/L)$ para calcular el desplazamiento y (ve la figura). Si $a = 1$ y $L = 10$, traza la gráfica de la ecuación para $0 \leq x \leq 10$.



EJERCICIO 71

72. Ritmos de periodicidad diaria La variación de la temperatura del cuerpo es un ejemplo de ritmo periódico, proceso biológico que se repite aproximadamente cada 24 horas. La temperatura del cuerpo es máxima alrededor de las 5 p.m. y mínima a las 5 a.m. Representa con y la temperatura corporal (en $^{\circ}\text{F}$) y haz que $t = 0$ corresponda a la medianoche. Si las temperaturas corporales mínima y máxima son 98.3° y 98.9° , respectivamente, halla una ecuación de la forma $y = 98.6 + a \sin(bt + c)$ que se ajuste a esta información.

73. Variación de temperatura en Ottawa La variación anual de la temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) en Ottawa, Canadá, se puede calcular mediante

$$T(t) = 15.8 \sin\left[\frac{\pi}{6}(t - 3)\right] + 5,$$

en donde t es el tiempo en meses y $t = 0$ corresponde al 1 $^{\circ}$ de enero.

- a) Traza la gráfica de T para $0 \leq t \leq 12$.
b) Halla la temperatura máxima del año y la fecha en que ocurre.

74. Demanda de agua Un depósito abastece de agua a una comunidad. Durante los meses de verano, la demanda $D(t)$ de agua (en ft^3 por día) está dada por

$$D(t) = 2000 \sin\frac{\pi}{90}t + 4000,$$

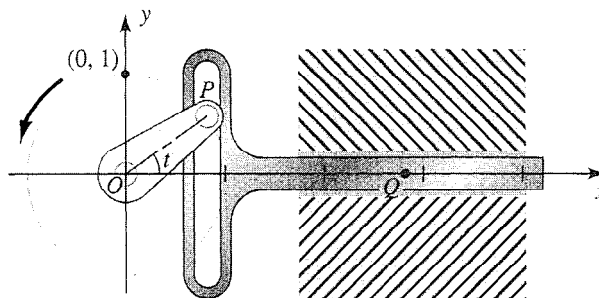
en donde t es el tiempo en días y $t = 0$ corresponde al comienzo del verano.

- a) Traza la gráfica de D para $0 \leq t \leq 90$.
 b) ¿Cuándo es máxima la demanda de agua?

75. Corcho flotante Un trozo de corcho flota en un lago. La distancia del fondo del lago al centro del corcho en el tiempo $t \geq 0$ está dada por $s(t) = 12 + \cos \pi t$, en donde $s(t)$ está en pies y t en segundos.

- a) Describe el movimiento del corcho para $0 \leq t \leq 2$.
 b) ¿Durante qué intervalos se eleva el corcho?

76. Yugo escocés En la figura se ve el diagrama de un yugo escocés, (un aparato que convierte el movimiento circular en lineal). El punto P gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de un círculo de radio 1, y hacia arriba y abajo en la corredera, haciendo que el punto Q se mueva hacia adelante y atrás a lo largo del eje x . Supón que OP tiene una velocidad angular constante ω y que $d(O, Q) = 3$ cuando $t = 0$.



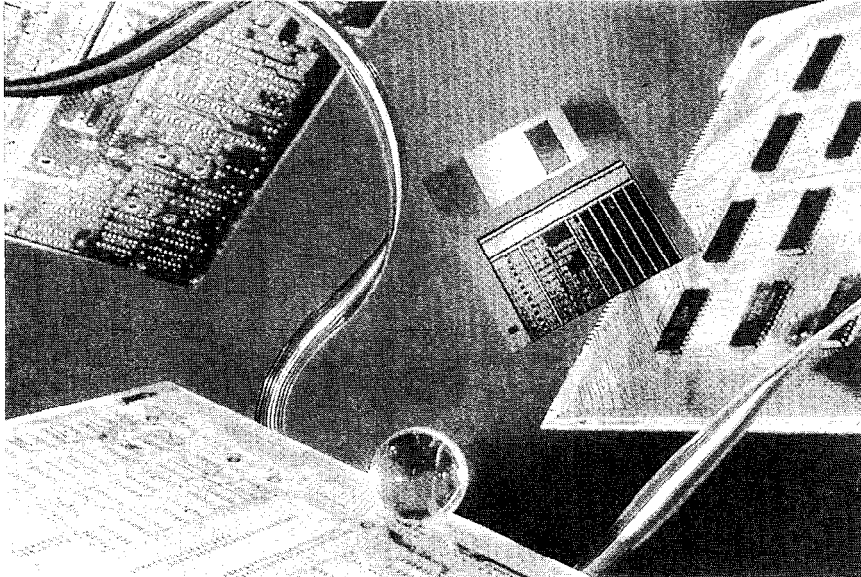
EJERCICIO 76

- a) Expresa las coordenadas de P en términos de ω y t .
 b) Expresa la coordenada de Q en términos de ω y t .
 c) Describe el movimiento de Q .

Trigonometría analítica

3

- 3.1 Verificación de identidades trigonométricas
- 3.2 Ecuaciones trigonométricas
- 3.3 Fórmulas de suma y resta
- 3.4 Fórmulas de ángulos múltiples
- 3.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto
- 3.6 Funciones trigonométricas inversas



*Las ecuaciones trigonométricas son indispensables
en el análisis de circuitos eléctricos.*

■ En matemáticas avanzadas, ciencias naturales e ingeniería, a veces es necesario simplificar complicadas expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones en donde aparecen funciones trigonométricas. En las primeras dos secciones del capítulo se estudian estos temas y luego se derivan muchas fórmulas útiles con respecto a sumas, diferencias y múltiplos (mismas que se encuentran en la sección de apéndices). Además del manejo formal, consideramos numerosas aplicaciones de estas fórmulas. La última sección contiene las definiciones y propiedades de las funciones trigonométricas inversas. ■

3.1 Verificación de identidades trigonométricas

Una **expresión trigonométrica** contiene símbolos con funciones trigonométricas.

ILUSTRACIÓN

Expresiones trigonométricas

$$\blacksquare x + \sin x \quad \blacksquare \frac{\sqrt{\theta} + 2^{\sin \theta}}{\cot \theta} \quad \blacksquare \frac{\cos(3t + 1)}{t^2 + \tan^2(2 - t^2)}$$

Suponemos que el dominio de cada variable de una expresión trigonométrica es el conjunto de números reales o ángulos para los que la expresión tiene sentido. A fin de que te ejercites en la simplificación de expresiones trigonométricas complicadas, usaremos las identidades fundamentales (pág. 75) y procedimientos algebraicos como en los ejemplos 8 y 9 de la sección 2.2. En los primeros tres, nuestro método consiste en transformar el lado izquierdo de una identidad dada en el derecho o viceversa. Repitamos un aviso precautorio que dimos en la sección 2.2

Precaución



Si una identidad (supuesta) contiene fracciones, no multipliques ambos lados de la misma por el mínimo común denominador.

EJEMPLO 1 Verificar una identidad

Verifica la identidad $\sec \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha \tan \alpha$.

Solución El lado izquierdo se transforma en el derecho:

$$\begin{aligned} \sec \alpha - \cos \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha && \text{identidad recíproca} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} && \text{sumar expresiones} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} && \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ &= \sin \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) && \text{expresión equivalente} \\ &= \sin \alpha \tan \alpha && \text{identidad tangente} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Verificar una identidad

Comprueba la identidad $\sec \theta = \sin \theta (\tan \theta + \cot \theta)$.

Solución Como la expresión del lado derecho es más complicada que la del izquierdo, el extremo derecho se transforma en el izquierdo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \theta (\tan \theta + \cot \theta) &= \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) && \text{identidades tangente y cotangente} \\
 &= \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \right) && \text{sumar fracciones} \\
 &= \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \right) && \text{identidad de Pitágoras} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} && \text{cancelar } \operatorname{sen} \theta \\
 &= \sec \theta && \text{identidad recíproca}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Verificar una identidad

Comprueba la identidad $\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Solución Por el aviso precautorio señalado, sabemos que no se permite la multiplicación de ambos lados por el mínimo común denominador $(1 - \operatorname{sen} x) \cos x$. En lugar de ello, se cambia la forma de la fracción del lado izquierdo multiplicando el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} &= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} && \text{multiplicar numerador y denominador por } 1 + \operatorname{sen} x \\
 &= \frac{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{propiedad de cocientes} \\
 &= \frac{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} && \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\
 &= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} && \text{cancelar } \cos x
 \end{aligned}$$

Otra técnica para demostrar que una ecuación $p = q$ es una identidad, es comenzar por transformar el lado izquierdo p en otra expresión s , asegurándose de que cada paso es *reversible*; es decir, que sea posible transformar s en p al invertir el procedimiento usado en cada paso. En este caso, la ecuación $p = s$ es una identidad. A continuación, como ejercicio *separado*, demostraremos que el lado derecho q también se puede transformar en una expresión s por medio de pasos reversibles y, por lo tanto, que $q = s$ es una identidad. Se deduce entonces que $p = q$ es una identidad. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Verificar una identidad

Comprueba la identidad $(\tan \theta - \sec \theta)^2 = \frac{1 - \sen \theta}{1 + \sen \theta}$.

Solución Verificaremos la identidad demostrando que cada lado de la ecuación se puede transformar en la misma expresión. Primero se trabaja sólo con el lado izquierdo:

$$(\tan \theta - \sec \theta)^2 = \tan^2 \theta - 2 \tan \theta \sec \theta + \sec^2 \theta \quad \text{expresión cuadrada}$$

$$= \left(\frac{\sen \theta}{\cos \theta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sen \theta}{\cos \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) + \left(\frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \quad \text{identidades tangente y recíproca}$$

$$= \frac{\sen^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \sen \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{expresión equivalente}$$

$$= \frac{\sen^2 \theta - 2 \sen \theta + 1}{\cos^2 \theta} \quad \text{sumar fracciones}$$

En este punto puede que no sea obvia la forma de obtener el lado derecho de la ecuación dada a partir de la última expresión; por lo tanto, a continuación se trabaja sólo con el lado derecho a fin de obtener la última expresión. Multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador da

$$\frac{1 - \sen \theta}{1 + \sen \theta} = \frac{1 - \sen \theta}{1 + \sen \theta} \cdot \frac{1 - \sen \theta}{1 - \sen \theta} \quad \text{multiplicar numerador y denominador por } 1 - \sen \theta$$

$$= \frac{1 - 2 \sen \theta + \sen^2 \theta}{1 - \sen^2 \theta} \quad \text{propiedad de cocientes}$$

$$= \frac{1 - 2 \sen \theta + \sen^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

La última expresión es la misma que la obtenida de $(\tan \theta - \sec \theta)^2$. Como todos los pasos son reversibles, la ecuación dada es una identidad.

En cálculo es conveniente a veces cambiar las formas de ciertas expresiones algebraicas mediante una **sustitución trigonométrica**, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Efectuar una sustitución trigonométrica

Expresa $\sqrt{a^2 - x^2}$ en términos de una función trigonométrica de θ sin radicales, sustituyendo $x = a \sen \theta$ con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ y $a > 0$.

Solución Se procede de esta forma:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} && \text{sea } x = a \operatorname{sen} \theta \\
 &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} && \text{ley de exponentes} \\
 &= \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} && \text{factor común } a^2 \\
 &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} && \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\
 &= a \cos \theta && \text{ver abajo}
 \end{aligned}$$

La última igualdad es cierta porque (1) si $a > 0$, entonces $\sqrt{a^2} = a$ y (2) si $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, entonces $\cos \theta \geq 0$ por lo tanto $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$.

3.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 50: verifica la identidad.

1. $\csc \theta - \operatorname{sen} \theta = \cot \theta \cos \theta$
2. $\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \csc x$
3. $\frac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = \operatorname{sen}^2 u$
4. $\tan t + 2 \cos t \csc t = \sec t \csc t + \cot t$
5. $\frac{\csc^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cot^2 \theta$
6. $(\tan u + \cot u)(\cos u + \operatorname{sen} u) = \csc u + \sec u$
7. $\frac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t} + \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} = 2 \csc t$
8. $\tan^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \tan^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$
9. $\frac{1}{1 - \cos \gamma} + \frac{1}{1 + \cos \gamma} = 2 \csc^2 \gamma$
10. $\frac{1 + \csc \beta}{\sec \beta} - \cot \beta = \cos \beta$
11. $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$
12. $\frac{\cot \theta - \tan \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = \csc \theta - \sec \theta$
13. $\csc^4 t - \cot^4 t = \csc^2 t + \cot^2 t$
14. $\cos^4 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^4 \theta$
15. $\frac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta} = \sec \beta + \tan \beta$
16. $\frac{1}{\csc y - \cot y} = \csc y + \cot y$
17. $\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$
18. $\frac{\cot x}{\csc x + 1} = \frac{\csc x - 1}{\cot x}$
19. $\frac{\cot u - 1}{\cot u + 1} = \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}$
20. $\frac{1 + \sec x}{\operatorname{sen} x + \tan x} = \csc x$
21. $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$
22. $\operatorname{sen}^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$
23. $\tan^4 k - \sec^4 k = 1 - 2 \sec^2 k$
24. $\sec^4 u - \sec^2 u = \tan^2 u + \tan^4 u$
25. $(\sec t + \tan t)^2 = \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}$
26. $\sec^2 \gamma + \tan^2 \gamma = (1 - \operatorname{sen}^4 \gamma) \sec^4 \gamma$
27. $(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)^3 = 1$
28. $\frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t} = \csc t + \cot t$
29. $\frac{1 + \csc \beta}{\cot \beta + \cos \beta} = \sec \beta$
30. $\frac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$
31. $(\csc t - \cot t)^4 (\csc t + \cot t)^4 = 1$
32. $(a \cos t - b \operatorname{sen} t)^2 + (a \operatorname{sen} t + b \cos t)^2 = a^2 + b^2$
33. $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
34. $\frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \frac{\cot v - \cot u}{\cot u \cot v + 1}$
35. $\frac{\tan \alpha}{1 + \sec \alpha} + \frac{1 + \sec \alpha}{\tan \alpha} = 2 \csc \alpha$

$$36. \frac{\csc x}{1 + \csc x} - \frac{\csc x}{1 - \csc x} = 2 \sec^2 x$$

$$37. \frac{1}{\tan \beta + \cot \beta} = \sin \beta \cos \beta$$

$$38. \frac{\cot y - \tan y}{\sin y \cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$$

$$39. \sec \theta + \csc \theta - \cos \theta - \sin \theta = \sin \theta \tan \theta + \cos \theta \cot \theta$$

$$40. \sin^3 + \cos^3 t = (1 - \sin t \cos t)(\sin t + \cos t)$$

$$41. (1 - \tan^2 \phi)^2 = \sec^4 \phi - 4 \tan^2 \phi$$

$$42. \cos^4 w + 1 - \sin^4 w = 2 \cos^2 w$$

$$43. \frac{\cot(-t) + \tan(-t)}{\cot t} = -\sec^2 t$$

$$44. \frac{\csc(-t) - \sec(-t)}{\sin(-t)} = \cot^2 t$$

$$45. \log 10^{\tan t} = \tan t \quad 46. 10^{\log |\sin t|} = |\sin t|$$

$$47. \ln \cot x = -\ln \tan x \quad 48. \ln \sec \theta = -\ln \cos \theta$$

$$49. \ln |\sec \theta + \tan \theta| = -\ln |\sec \theta - \tan \theta|$$

$$50. \ln |\csc x - \cot x| = -\ln |\csc x + \cot x|$$

Ejercicios 51 al 62: demuestra que la ecuación *no* es una identidad. (Sugerencia: halla un número del dominio de t o θ para el que la ecuación sea falsa.)

$$51. \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

$$52. \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sin t + \cos t$$

$$53. \sqrt{\sin^2 t} = \sin t \quad 54. \sec t = \sqrt{\tan^2 t + 1}$$

$$55. (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$56. \log \left(\frac{1}{\sin t} \right) = \frac{1}{\log \sin t} \quad 57. \cos(-t) = -\cos t$$

$$58. \sin(t + \pi) = \sin t \quad 59. \cos(\sec t) = 1$$

$$60. \cot(\tan \theta) = 1 \quad 61. \sin^2 t - 4 \sin t - 5 = 0$$

$$62. 3 \cos^2 \theta + \cos \theta - 2 = 0$$

Ejercicios 63 al 66: consulta el ejemplo 5. Haz la sustitución trigonométrica $x = a \sin \theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Usa identidades fundamentales a fin de simplificar la expresión resultante.

$$63. (a^2 - x^2)^{3/2} \quad 64. \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$65. \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad 66. \frac{1}{x \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ejercicios 67 al 70: efectúa la sustitución trigonométrica $x = a \tan \theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Simplifica la expresión resultante.

$$67. \sqrt{a^2 + x^2} \quad 68. \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$69. \frac{1}{x^2 + a^2} \quad 70. \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x}$$

Ejercicios 71 al 74: lleva a cabo la sustitución trigonométrica $x = a \sec \theta$ para $0 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Simplifica la expresión resultante.

$$71. \sqrt{x^2 - a^2} \quad 72. \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$73. x^3 \sqrt{x^2 - a^2} \quad 74. \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$$



Ejercicios 75 al 78: usa la gráfica de f para hallar la expresión más simple $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifica esta identidad.

$$75. f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{(1 - \sec^2 x) \cos^4 x}$$

$$76. f(x) = \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x}$$

$$77. f(x) = \sec x (\sin x \cos x + \cos^2 x) - \sin x$$

$$78. f(x) = \frac{\sin^3 x + \sin x \cos^2 x}{\csc x} + \frac{\cos^3 x + \cos x + \cos x \sin^2 x}{\sec x}$$

3.2 Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es la que contiene expresiones trigonométricas. Cada identidad considerada en la sección precedente es un ejemplo de ecuación trigonométrica con todos los números (o ángulos) del dominio de la variable como solución de la ecuación. Si una ecuación trigonométrica no es identidad, a menudo se hallan soluciones aplicando técnicas semejantes a las usadas para ecuaciones algebraicas. La diferencia principal es que primero se resuelve la ecuación trigonométrica para $\sin x$, $\cos \theta$ y así sucesivamente, y luego se hallan valores de x o θ que la satisfagan. Las soluciones se pueden expresar como números reales o ángulos. En todo este libro usaremos la regla siguiente: *si no se especifica una medida en grados, las soluciones de una*

ecuación trigonométrica deben expresarse en radianes (o como números reales). Si se desea que las soluciones tengan medidas en grados, se incluirá un enunciado propio en el ejemplo o ejercicio.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación trigonométrica con la función seno

Halla las soluciones de la ecuación $\sin \theta = \frac{1}{2}$ si

a) θ está en el intervalo $[0, 2\pi)$

b) θ es cualquier número real

Solución a) Si $\sin \theta = \frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia para θ es $\theta_R = \pi/6$. Si θ se considera como ángulo en posición estándar, entonces, como $\sin \theta > 0$, el lado terminal está en el primero o en el segundo cuadrante, según se ilustra en la figura 1; por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \theta < 2\pi$:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

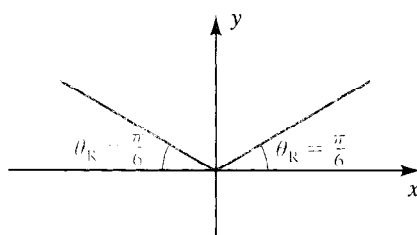


FIGURA 1

b) Dado que la función seno tiene periodo 2π , todas las soluciones se pueden obtener sumando múltiplos de 2π a $\pi/6$ y $5\pi/6$. Esto dará

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Una solución alternativa (gráfica) comprende la determinación de dónde la gráfica de $y = \sin \theta$ corta la línea horizontal $y = \frac{1}{2}$, como se ilustra en la figura 2.

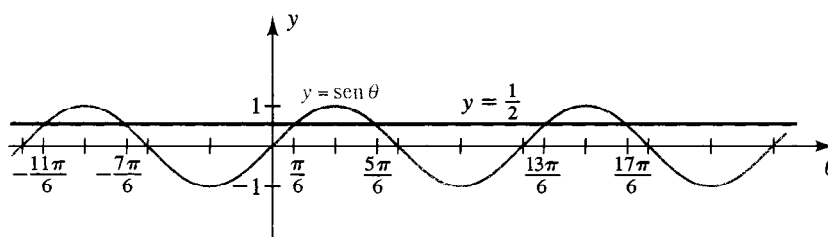


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación trigonométrica con función tangente

Encuentra las soluciones de la ecuación $\tan u = -1$.

Solución Puesto que la función tangente tiene periodo π , basta hallar un número real u tal que $\tan u = -1$ y luego sumar los múltiplos de π .

En la figura 3 se dibuja una porción de la gráfica de $y = \tan u$. Dado que $\tan(3\pi/4) = -1$, una solución es $3\pi/4$; de aquí que

$$\text{si } \tan u = -1, \quad \text{entonces } u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

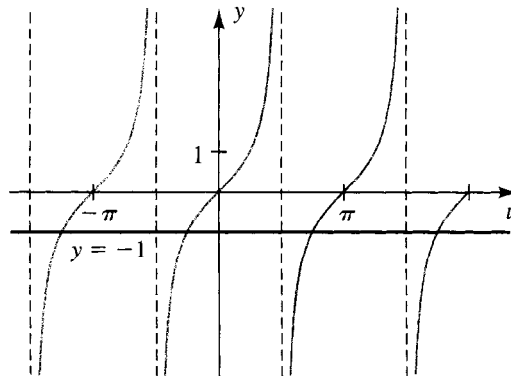


FIGURA 3 $y = \tan u$

También podríamos haber escogido $-\pi/4$ (o algún otro número u tal que $\tan u = -1$, para la solución inicial y haber escrito

$$u = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación trigonométrica con ángulos múltiples

- a)** Resuelve la ecuación $\cos 2x = 0$, y expresa las soluciones en radianes y grados.
b) Halla las soluciones que están en los intervalos $[0, 2\pi)$ y $[0^\circ, 360^\circ)$.

Solución **a)** Se procede como sigue, en donde n denota cualquier entero:

$$\cos 2x = 0$$

datos

$$\cos \theta = 0$$

sea $\theta = 2x$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

consulta la tabla de $y = \cos t$ (pág. 88)

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$\theta = 2x$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$$

dividir entre 2

En grados, tenemos $x = 45^\circ + 90^\circ n$.

b) Podemos encontrar soluciones particulares de la ecuación sustituyendo n con enteros en cualquiera de las fórmulas para x obtenidas en la parte a). En la tabla de abajo se enumeran varias soluciones.

n	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$	$45^\circ + 90^\circ n$
-1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-1) = -\frac{\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(-1) = -45^\circ$
0	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(0) = \frac{\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(0) = 45^\circ$
1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(1) = \frac{3\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(1) = 135^\circ$
2	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2) = \frac{5\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(2) = 225^\circ$
3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(3) = \frac{7\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(3) = 315^\circ$
4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4) = \frac{9\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(4) = 405^\circ$

Podrás notar que las soluciones en los intervalos $[0, 2\pi)$ y $[0^\circ, 360^\circ)$ están dadas para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Estas soluciones son

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \quad \text{o} \quad 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ.$$

EJEMPLO 4

Resolver una ecuación trigonométrica por factorización.

Resuelve la ecuación $\theta \tan \theta = \sin \theta$.

Solución

$$\sin \theta \tan \theta = \sin \theta$$

datos

$$\sin \theta \tan \theta - \sin \theta = 0$$

restar $\sin \theta$

$$\sin \theta (\tan \theta - 1) = 0$$

factorizar

$$\sin \theta = 0, \tan \theta = 1$$

igualar cada factor a 0

Las soluciones de la ecuación $\sin \theta = 0$, son $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$; por lo tanto,

$$\text{si } \sin \theta = 0, \text{ entonces } \theta = \pi n \text{ para todo entero } n.$$

La función tangente tiene un periodo de π y, como consecuencia, encontramos las soluciones de la ecuación $\tan \theta = 1$ que están en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y luego sumamos múltiplos de π . Como la única solución de $\tan \theta = 1$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ es $\pi/4$, vemos que



si $\tan \theta = 0$, entonces $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi n$ para todo entero n

Por lo tanto, las soluciones de $\sin \theta \tan \theta = \sin \theta$ son

$$\pi n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Algunas soluciones *particulares*, obtenidas al hacer $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, y $n = -1$, son

$$0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi, \frac{9\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}.$$

Otros valores de n dan otras soluciones.

En el ejemplo 4 hubiera sido incorrecto comenzar por dividir ambos lados entre $\sin \theta$, ya que habríamos perdido las soluciones de $\sin \theta = 0$.

EJEMPLO 5 Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Resuelve la ecuación $2 \sin^2 t - \cos t - 1 = 0$ y expresa las soluciones en radianes y en grados.

Solución Expresaremos primero la ecuación sólo en términos de $\cos t$ y luego resolveremos por factorización.

$2 \sin^2 t - \cos t - 1 = 0$	dado
$2(1 - \cos^2 t) - \cos t - 1 = 0$	$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
$-2 \cos^2 t - \cos t + 1 = 0$	simplificar
$2 \cos^2 t + \cos t - 1 = 0$	multiplicar por -1
$(2 \cos t - 1)(\cos t + 1) = 0$	factorizar
$2 \cos t - 1 = 0, \cos t + 1 = 0$	igualar cada factor a 0
$\cos t = \frac{1}{2}, \cos t = -1$	despejar $\cos t$

En virtud de que la función coseno tiene un periodo de 2π , se pueden encontrar todas las soluciones de estas ecuaciones sumando múltiplos de 2π a las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si $\cos t = \frac{1}{2}$, el ángulo de referencia es $\pi/3$ (o 60°). Dado que $\cos t$ es positivo, el ángulo t de medida en radianes está en el primero o en el cuarto cuadrante. En consecuencia, en el intervalo $[0, 2\pi)$, advertimos que

$$\text{si } \cos t = \frac{1}{2}, \text{ entonces } t = \frac{\pi}{3} \text{ o } t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Con referencia a la gráfica de la función coseno, vemos que

$$\text{si } \cos t = -1, \text{ entonces } t = \pi.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son las siguientes, en donde n es cualquier entero:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n$$

Con medidas en grados, se tiene

$$60^\circ + 360^\circ n, 300^\circ + 360^\circ n, 180^\circ + 360^\circ n.$$

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Halla las soluciones de $4 \sin^2 x \tan x - \tan x = 0$ que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

$$4 \sin^2 x \tan x - \tan x = 0$$

dado

$$\tan x (4 \sin^2 x - 1) = 0$$

factorizar

$$\tan x = 0, \quad 4 \sin^2 x - 1 = 0$$

igualar cada factor a 0

$$\tan x = 0, \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

despejar $\tan x$, $\sin^2 x$

$$\tan x = 0, \quad \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

despejar $\sin x$

En la figura 4 se muestra el ángulo de referencia $\pi/6$ para los cuadrantes tercero y cuarto. Estos ángulos, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, son las soluciones de la ecuación $\sin x = -\frac{1}{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$. Las soluciones de las tres ecuaciones se enumeran en la próxima tabla.

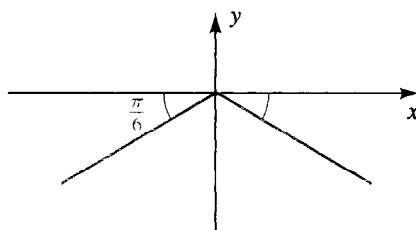


FIGURA 4

Ecuación	Soluciones en $[0, 2\pi)$	Consulta
$\tan x = 0$	$0, \pi$	Figura 3
$\sin x = \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	Ejemplo 1
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$	Figura 4 (usa ángulo de referencia)

Por lo tanto, la ecuación dada tiene seis soluciones detalladas en la segunda columna de la tabla.

EJEMPLO 7 Resolver una ecuación trigonométrica con ángulos múltiples

Halla las soluciones de $\csc^4 2u - 4 = 0$.

Solución

$$\csc^4 2u - 4 = 0 \quad \text{dado}$$

$$(\csc^2 2u - 2)(\csc^2 2u + 2) = 0 \quad \text{factorizar}$$

$$\csc^2 2u - 2 = 0, \quad \csc^2 2u + 2 = 0 \quad \text{igualar cada factor a 0}$$

$$\csc^2 2u = 2, \quad \csc^2 2u = -2 \quad \text{despejar } \csc^2 2u$$

$$\csc 2u = \pm \sqrt{2}, \quad \csc 2u = \pm \sqrt{-2} \quad \text{tomar raíces cuadradas}$$

La segunda ecuación no tiene solución porque $\sqrt{-2}$ no es número real. La primera ecuación equivale a

$$\sin 2u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como el ángulo de referencia para $2u$ es $\pi/4$ se obtiene la siguiente tabla, en la que n denota cualquier entero.

Ecuación	Solución para $2u$	Solución para u
$\sin 2u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{3\pi}{8} + \pi n$
$\sin 2u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{5\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{7\pi}{8} + \pi n$

Las soluciones de la ecuación dada se detallan en la última columna. Notarás que *todas* estas soluciones se pueden escribir en la forma

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n.$$

El próximo ejemplo expone el uso de una calculadora en la solución de una ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 8 Calcular soluciones de una ecuación trigonométrica

Calcula, al grado más cercano, las soluciones de esta ecuación del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$:

$$5 \sin \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \sin \theta - 6 = 0$$

Solución

$$\begin{array}{ll}
5 \operatorname{sen} \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 6 = 0 & \text{dado} \\
(5 \operatorname{sen} \theta \tan \theta - 10 \tan \theta) + (3 \operatorname{sen} \theta - 6) = 0 & \text{agrupar términos} \\
5 \tan \theta (\operatorname{sen} \theta - 2) + 3(\operatorname{sen} \theta - 2) = 0 & \text{factorizar cada grupo} \\
(5 \tan \theta + 3)(\operatorname{sen} \theta - 2) = 0 & \text{factorizar } \operatorname{sen} \theta - 2 \\
5 \tan \theta + 3 = 0, & \operatorname{sen} \theta - 2 = 0 & \text{igualar cada término a 0} \\
\tan \theta = -\frac{3}{5}, & \operatorname{sen} \theta = 2 & \text{despejar } \tan \theta \text{ y } \operatorname{sen} \theta
\end{array}$$

La ecuación $\operatorname{sen} \theta = 2$ no tiene solución, porque $\operatorname{sen} \theta \leq 1$ para toda θ . Para $\tan \theta = -3/5$, se usa una calculadora en modo de grados y se obtiene

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -31^\circ$$

Por lo tanto, el ángulo de referencia es $\theta_R \approx 31^\circ$. Dado que θ está en el segundo o cuarto cuadrante, se obtienen estas soluciones:

$$\theta = 180^\circ - \theta_R \approx 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$$

$$\theta = 360^\circ - \theta_R \approx 360^\circ - 31^\circ = 329^\circ$$

EJEMPLO 9 Investigar el número de horas de luz diurna

En Boston, el número de horas de luz diurna $D(t)$ en un tiempo particular del año se puede calcular mediante

$$D(t) = 3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12,$$

con t en días y $t = 0$ correspondiente al 1º de enero. ¿Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de luz diurna?

Solución La gráfica de D se estudió en el ejemplo 12 de la sección 2.6 y se vuelve a dibujar en la figura 5. Como se ilustra en ésta, si se pueden encontrar dos números a y b con $D(a) = 10.5$, $D(b) = 10.5$ y $0 < a < b < 365$, entonces habrá más de 10.5 horas de luz diurna en el t -ésimo día del año si $a < t < b$.

Resolvamos la ecuación $D(t) = 10.5$:

$$3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12 = 10.5 \quad \text{hacer } D(t) = 10.5$$

$$3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) = -1.5 \quad \text{restar 12}$$

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) = -0.5 = -\frac{1}{2} \quad \text{dividir entre 3}$$

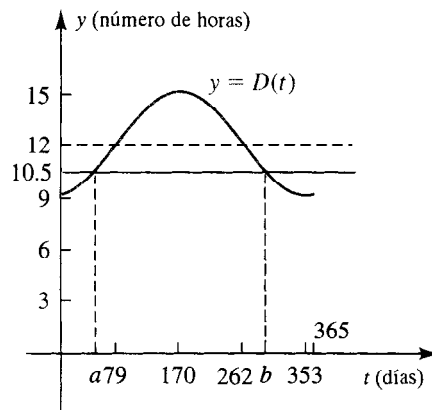


FIGURA 5

Si $\sin \theta = -\frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia es $\pi/6$ y el ángulo θ estará ya sea en el tercero o cuarto cuadrante; por lo tanto, se pueden encontrar los números a y b resolviendo las ecuaciones

$$\frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{11\pi}{6}.$$

De la primera se obtiene

$$t - 79 = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{365}{2\pi} = \frac{2555}{12} \approx 213,$$

y por lo tanto

$$t \approx 213 + 79, \quad \text{o} \quad t \approx 292.$$

En forma análoga, la segunda ecuación dará $t \approx 414$. Dado que el periodo de la función D es 365 días (Fig. 5), se obtiene

$$t \approx 414 - 365, \quad \text{o} \quad t \approx 49.$$

En consecuencia, habrá por lo menos 10.5 horas de luz diurna de $t = 49$ a $t = 292$; es decir, durante 243 días del año.

En el ejemplo 14 de la sección 2.6 dimos una solución gráfica al siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 Hallar la corriente mínima en un circuito eléctrico

La corriente I (en amperes) de un circuito de corriente alterna en un tiempo t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \sin \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right).$$

Halla el valor mínimo exacto de t para el que $I = 15$.

Solución Con $I = 15$ en la fórmula dada, obtenemos

$$15 = 30 \operatorname{sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right),$$

o

$$\operatorname{sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el ángulo de referencia es $\pi/6$ y, en consecuencia,

$$50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{o} \quad 50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

en donde n es cualquier entero. Al despejar t se obtiene

$$t = \frac{(15/6) + 2n}{50} \quad \text{o} \quad t = \frac{(19/6) + 2n}{50}.$$

El valor positivo mínimo de t ocurrirá cuando uno de los numeradores de estas dos fracciones tenga su mínimo valor positivo. Como $\frac{15}{6} = 2.5$, $\frac{19}{6} \approx 3.17$, y $2(-1) = -2$, vemos que el mínimo valor positivo de t ocurre cuando $n = -1$ en la primera fracción; es decir, cuando

$$t = \frac{(15/6) + 2(-1)}{50} = \frac{1}{100}.$$

El próximo ejemplo ilustra cómo un equipo graficador puede ayudar en la solución de una complicada ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 11 Usar una gráfica para determinar soluciones de una ecuación trigonométrica



Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación, que están en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$$

Solución Asignamos $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$ a Y_1 . Dado que $2\pi \approx 6.3$ y $|\operatorname{sen} \theta| \leq 1$ para $\theta = x, 2x$ y $3x$, se escoge la pantalla $[0, 6.3]$ por $[-3, 3]$ y se obtiene un trazo similar al de la figura 6. Con las funciones **zoom** y **trace**, se llega a las siguientes aproximaciones para las intersecciones x ; esto es, las soluciones aproximadas de la ecuación dada en $[0, 2\pi)$:

$$0, 1.57, 2.09, 3.14, 4.19, 4.71$$

Se cambia a medida en grados, se redondea al más cercano y se obtiene

$$0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ$$

La conversión de esta medida en grados en radianes dará

$$0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}.$$

Al comprobar estos valores en la ecuación dada, vemos que los seis son soluciones. La figura 6 sugiere que la gráfica tiene un periodo de 2π . Después de estudiar la sección 3.4, podrás cambiar la forma de Y_1 y *demonstrar* que el periodo es 2π y, por lo tanto, que *todas* las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener al sumar múltiplos enteros de 2π .

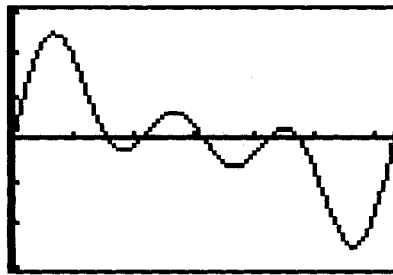


FIGURA 6 $[0, 6.3]$ por $[-3, 3]$

En el ejemplo anterior fue posible utilizar un equipo graficador para ayudar a encontrar las soluciones *exactas* de la ecuación; sin embargo, en muchas ecuaciones que se presentan en aplicaciones prácticas, sólo es posible aproximarlas.

3.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 34: halla todas las soluciones de la ecuación.

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos t = -1$
3. $\tan \theta = \sqrt{3}$
4. $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
5. $\sec \beta = 2$
6. $\csc \gamma = \sqrt{2}$
7. $\sin x = \frac{\pi}{2}$
8. $\cos x = -\frac{\pi}{3}$
9. $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$
10. $\csc \theta \sin \theta = 1$
11. $2 \cos 2\theta - \sqrt{3} = 0$
12. $2 \sin 3\theta + \sqrt{2} = 0$
13. $\sqrt{3} \tan \frac{1}{3}t = 1$
14. $\cos \frac{1}{4}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
15. $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$
16. $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1$
17. $\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$
18. $\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
19. $2 \cos t + 1 = 0$
20. $\cot \theta + 1 = 0$
21. $\tan^2 x = 1$
22. $4 \cos \theta - 2 = 0$
23. $(\cos \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0$
24. $2 \cos x = \sqrt{3}$
25. $\sec^2 \alpha - 4 = 0$
26. $3 - \tan^2 \beta = 0$

27. $\sqrt{3} + 2 \sin \beta = 0$
28. $4 \sin^2 x - 3 = 0$
29. $\cot^2 x - 3 = 0$
30. $(\sin t - 1) \cos t = 0$
31. $(2 \sin \theta + 1)(2 \cos \theta + 3) = 0$
32. $(2 \sin u - 1)(\cos u - \sqrt{2}) = 0$
33. $\sin 2x(\csc 2x - 2) = 0$
34. $\tan \alpha + \tan^2 \alpha = 0$

Ejercicios 35 al 58: encuentra las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

35. $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$
36. $\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$
37. $2 - 8 \cos^2 t = 0$
38. $\cot^2 \theta - \cot \theta = 0$
39. $2 \sin^2 u = 1 - \sin u$
40. $2 \cos^2 t + 3 \cos t + 1 = 0$
41. $\tan^2 x \sin x = \sin x$
42. $\sec \beta \csc \beta = 2 \csc \beta$
43. $2 \cos^2 \gamma + \cos \gamma = 0$
44. $\sin x - \cos x = 0$
45. $\sin^2 \theta + \sin \theta - 6 = 0$
46. $2 \sin^2 u + \sin u - 6 = 0$
47. $1 - \sin t = \sqrt{3} \cos t$
48. $\cos \theta - \sin \theta = 1$
49. $\cos \alpha + \sin \alpha = 1$
50. $\sqrt{3} \sin t + \cos t = 1$
51. $2 \tan t - \sec^2 t = 0$
52. $\tan \theta + \sec \theta = 1$
53. $\cot \alpha + \tan \alpha = \csc \alpha \sec \alpha$

54. $\sin x + \cos x \cot x = \csc x$
 55. $2 \sin^3 x + \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$
 56. $\sec^5 \theta = 4 \sec \theta$
 57. $2 \tan t \csc t + 2 \csc t + \tan t + 1 = 0$
 58. $2 \sin v \csc v - \csc v = 4 \sin v - 2$

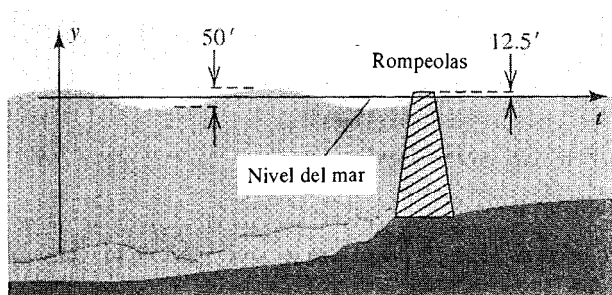
Ejercicios 59 al 64: calcula, a los 10' más cercanos, las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 360^\circ)$.

59. $\sin^2 t - 4 \sin t + 1 = 0$ 60. $\cos^2 t - 4 \cos t + 2 = 0$
 61. $\tan^2 \theta + 3 \tan \theta + 2 = 0$
 62. $2 \tan^2 x - 3 \tan x - 1 = 0$
 63. $12 \sin^2 u - 5 \sin u - 2 = 0$
 64. $5 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 2 = 0$

65. **Olas de marea** Una ola, de 50 pies de altura y 30 minutos de periodo, se aproxima a un rompeolas que sobresale 12.5 pies del nivel del mar (ve la figura). En un punto particular en la playa, la distancia y desde el nivel del mar a la parte alta de la ola está dada por

$$y = 25 \cos \frac{\pi}{15} t,$$

con t en minutos. ¿Durante cuántos minutos de cada media hora la parte alta de la ola rebasa el rompeolas?



EJERCICIO 65

66. **Temperatura en Fairbanks** La temperatura mínima T (en $^\circ\text{F}$) esperada en Fairbanks, Alaska, se puede calcular mediante

$$T = 36 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 101) \right] + 14,$$

en donde t está en días, con $t = 0$ correspondiente al 1.º de enero. ¿Durante cuántos días del año la temperatura mínima esperada estará abajo de -4°F ?

67. **Intensidad de la luz solar** En un día despejado con D horas de iluminación, la intensidad de luz solar I (en calorías/cm²) se puede calcular mediante

$$I = I_M \sin^3 \frac{\pi t}{D} \quad \text{por} \quad 0 \leq t \leq D,$$

en donde $t = 0$ corresponde al amanecer y además I_M es la intensidad máxima. Si $D = 12$, ¿aproximadamente cuántas horas después del amanecer será $I = \frac{1}{2}I_M$?

68. **Intensidad de luz solar** Consulta el ejercicio 67. En días nublados, un cálculo más aproximado de la intensidad luminosa I está dado por

$$I = I_M \sin^2 \frac{\pi t}{D}.$$

Si $D = 12$, ¿Alrededor de cuántas horas después del amanecer serán $I = \frac{1}{2}I_M$?

69. **Protección de la luz solar** Consulta los dos ejercicios anteriores. Un dermatólogo recomienda protegerse del Sol cuando la intensidad I rebase el 75% de la máxima. Si $D = 12$ horas, calcula el número de horas para las que se requiere protección en

- a) Un día despejado b) un día nublado

70. **Ingeniería de carreteras** En el estudio de problemas de penetración de hielo en ingeniería de carreteras, la temperatura T en un instante de t horas y profundidad de x pies, estará dada por

$$T = T_o e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x),$$

en donde T_o , ω y λ son constantes y el periodo de T es de 24 horas.

- a) Halla una fórmula para la temperatura de la superficie.
 b) ¿A qué horas será mínima la temperatura de la superficie?
 c) Si $\lambda = 2.5$, halla las horas cuando la temperatura sea mínima a una profundidad de 1 pie.

71. **Población de conejos** Muchas poblaciones de animales, como la de los conejos, fluctúan en periodos cíclicos de 10 años. Supón que el número de conejos en el instante t (en años) está dado por

$$N(t) = 1000 \cos \frac{\pi}{5} t + 4000.$$

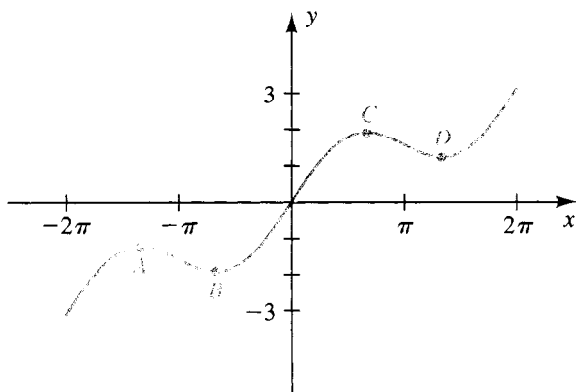
- a) Traza la gráfica de N para $0 \leq t \leq 10$.
 b) ¿Para qué valores de t de la parte a) la población de conejos rebasará los 4500?

72. **Caudal de un río** El caudal (o rapidez de descarga de agua) en la desembocadura del río Orinoco en Sudamérica se puede calcular mediante

$$F(t) = 26\,000 \sin \left[\frac{\pi}{6} (t - 5.5) \right] + 34\,000$$

en donde t es el tiempo en meses y $F(t)$ es el caudal en m³/s. ¿Durante aproximadamente cuántos meses de cada año rebasará el caudal los 55 000 m³/s?

73. En la figura se muestra una gráfica de $y = \frac{1}{2}x + \sin x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Mediante cálculo, se puede demostrar que las coordenadas x de los puntos de inflexión A , B , C y D de la gráfica son soluciones de la ecuación $\frac{1}{2} + \cos x = 0$. Determina las coordenadas de estos puntos.

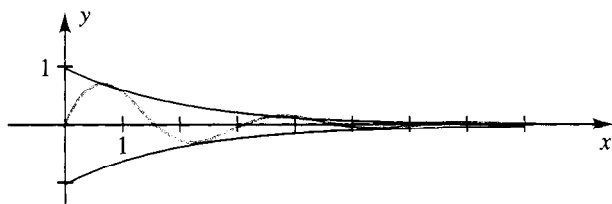


EJERCICIO 73

74. En la figura se ilustra la gráfica de la ecuación

$$y = e^{-x/2} \sin 2x.$$

Las coordenadas de x de los puntos de inflexión de la gráfica son soluciones de $4 \cos 2x - \sin 2x = 0$. Calcula las coordenadas x de estos puntos para $x > 0$.



EJERCICIO 74

Ejercicios 75 y 76: si $I(t)$ es la corriente (en amperes) de un circuito de corriente alterna en el instante t (en segundos), determina el mínimo valor exacto de t para el que $I(t) = k$.

75. $I(t) = 20 \sin(60\pi t - 6\pi)$; $k = -10$

76. $I(t) = 40 \sin(100\pi t - 4\pi)$; $k = 20$



Ejercicios 77 al 80: calcula la solución de cada desigualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$.

77. $\cos x \geq 0.3$

78. $\sin x < -0.6$

79. $\cos 3x < \sin x$

80. $\tan x \leq \sin 2x$



Ejercicios 81 al 86: calcula las soluciones de la ecuación en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

81. $\sin 2x = 2 - x^2$

82. $\cos^3 x + \cos 3x - \sin^3 x = 0$

83. $\ln(1 + \sin^2 x) = \cos x$

84. $e^{\sin x} = \sec\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)$

85. $3 \cos^4 x - 2 \cos^3 x + \cos x - 1 = 0$

86. $\cos 2x + \sin 3x - \tan \frac{1}{3}x = 0$

- 87. Peso a diversas latitudes** El peso W de una persona en la superficie terrestre es directamente proporcional a la fuerza de gravedad g (en m/s^2). Debido a la rotación del planeta, éste se ha achatado en los polos y, como resultado, el peso varía en las diferentes latitudes. Si θ es la latitud, entonces g se puede calcular con $g = 9.8066(1 - 0.00264 \cos 2\theta)$.

a) ¿A qué latitud $g = 9.8$?

b) Si una persona pesa 150 libras en el ecuador ($\theta = 0^\circ$), ¿en qué latitud pesará 150.5 libras?

3.3 Fórmulas de suma y resta

En esta sección deduciremos fórmulas con funciones trigonométricas de $u + v$ o $u - v$ para cualesquier números reales o ángulos u y v , las cuales se conocen como *fórmulas de suma y resta*, respectivamente. La primera fórmula que consideramos se puede expresar así:

Fórmula de la resta para coseno

$$\cos(u - v) = u \cos v + \sin u \sin v$$

PRUEBA Sean u y v cualesquier números reales, y considera los ángulos u y v en radianes. Sea $w = u - v$. La figura 7 ilustra una posibilidad con los ángulos en posición estándar. Por conveniencia hemos supuesto que tanto u como v son positivos y que $0 \leq u - v < v$.

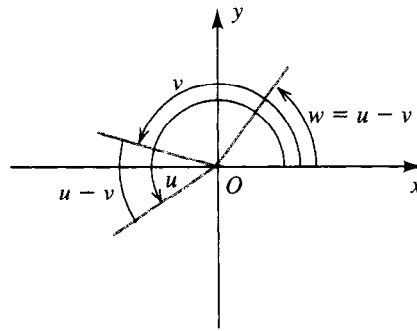


FIGURA 7

Al igual que en la figura 8, sean $P(u_1, u_2)$, $Q(v_1, v_2)$, y $R(w_1, w_2)$ los puntos de los lados terminal de los ángulos indicados que están cada uno a una distancia 1 del origen. En este caso, P , Q y R se localizan en el círculo unitario U con centro en el origen. De la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo (con $r = 1$),

$$\cos u = u_1 \quad \cos v = v_1 \quad \cos(u - v) = w_1$$

(*)

$$\sin u = u_2 \quad \sin v = v_2 \quad \sin(u - v) = w_2$$

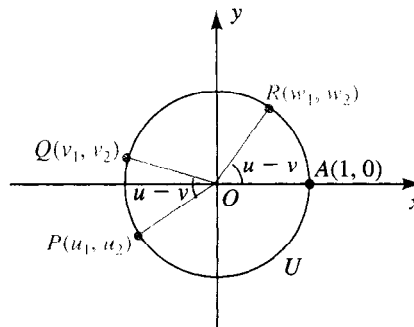


FIGURA 8

En seguida se observa que la distancia entre $A(1, 0)$ y R debe ser igual a la distancia entre Q y P porque los ángulos AOR y QOP tienen la misma medida, $u - v$. Con la fórmula de la distancia se obtiene

$$d(A, R) = d(Q, P)$$

$$\sqrt{(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 0)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Ambos lados se elevan al cuadrado, se simplifican las expresiones bajo los radicales y resulta

$$w_1^2 - 2w_1 + 1 + w_2^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2.$$



Como los puntos (u_1, u_2) , (v_1, v_2) y (w_1, w_2) están en el círculo unitario U y una ecuación para U es $x^2 + y^2 = 1$, se puede sustituir 1 para cada uno de los términos $u_1^2 + u_2^2$, $v_1^2 + v_2^2$, y $w_1^2 + w_2^2$. Al hacer esto y simplificar, se obtiene

$$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2,$$

que se reduce a

$$w_1 = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Al sustituir de las fórmulas expresadas en (*) se obtiene

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v,$$

que es lo que se quería demostrar. Es posible ampliar este análisis a todos los valores de u y de v . ■

El próximo ejemplo demuestra el uso de la fórmula de la resta para hallar el valor exacto de $\cos 15^\circ$. Por supuesto, si sólo se desea una aproximación, basta una calculadora o una tabla.

EJEMPLO 1 Usar la fórmula de la resta

Halla el valor exacto de $\cos 15^\circ$ aprovechando que $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$.

Solución Se utiliza la fórmula de la resta con $u = 60^\circ$ y $v = 45^\circ$:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Es relativamente fácil obtener una fórmula para $\cos(u + v)$. Se comienza por escribir $u + v$ como $u - (-v)$ y luego se utiliza la fórmula de la resta para coseno:

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos[u - (-v)] \\ &= \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v)\end{aligned}$$

Al usar las fórmulas para negativos, $\cos(-v) = \cos v$ y $\sin(-v) = -\sin v$, se obtiene:

Fórmula de la suma para coseno

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula para la suma

Halla el valor exacto de $\cos 7\pi/12$ usando el hecho de que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

Solución Aplicamos la fórmula para $\cos(u + v)$:

$$\begin{aligned}\cos \frac{7\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Las funciones seno y coseno se denominan **cofunciones** una de la otra. En forma análoga, las funciones tangente y cotangente son cofunciones, así como lo son las funciones secante y cosecante. Si u es la medida en radianes de un ángulo agudo, el ángulo con medida en radianes $\pi/2 - u$ es complementario de u , y podemos considerar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 9. Al usar razones, se ve que

$$\sin u = \frac{a}{c} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$$

$$\cos u = \frac{b}{c} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$$

$$\tan u = \frac{a}{b} = \cot \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$$

Estas tres fórmulas, y sus análogas para $\sec u$, $\csc u$ y $\cot u$, indican que *el valor de la función de u es igual a la cofunción del ángulo complementario $\pi/2 - u$.*

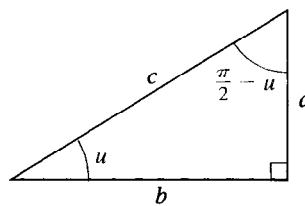


FIGURA 9

En las siguientes fórmulas usamos las fórmulas de la resta para ampliar estas relaciones a cualquier número u .



Fórmulas de cofunciones

Si u es un número real o la medida en radianes de un ángulo, entonces

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u.$$

PRUEBA Al usar la fórmula de la resta para coseno, tenemos

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos u + \sin \frac{\pi}{2} \sin u \\ &= (0) \cos u + (1) \sin u = \sin u\end{aligned}$$

Ésta da la primera fórmula.

Si sustituimos $\pi/2 - v$ con u en la primera fórmula, llegamos a

$$\begin{aligned}\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right] &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right), \\ \cos v &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\end{aligned}$$

Dado que el símbolo v es arbitrario, la ecuación equivale a esta fórmula de cofunción:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

Si usamos la identidad tangente, las primeras dos fórmulas de cofunción y la identidad cotangente, obtenemos

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \frac{\cos u}{\sin u} = \cot u$$

Las pruebas de las tres fórmulas restantes son semejantes. ■

Una forma fácil de recordar las fórmulas de cofunciones es consultar el triángulo de la figura 9. Se pueden demostrar las siguientes identidades.

Fórmulas de suma y resta para seno y tangente

$$(1) \quad \operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$(2) \quad \operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$(3) \quad \tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$(4) \quad \tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

PRUEBA Demostraremos las fórmulas (1) y (3). Con las fórmulas de cofunción y la fórmula de la resta para coseno se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u+v) &= \cos \left[\frac{\pi}{2} - (u+v) \right] \\ &= \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - u \right) - v \right] \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \cos v + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \operatorname{sen} v \\ &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v \end{aligned}$$

A fin de comprobar la fórmula (3), se comienza como sigue:

$$\begin{aligned} \tan(u+v) &= \frac{\operatorname{sen}(u+v)}{\cos(u+v)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \end{aligned}$$

Si $\cos u \cos v \neq 0$, cabe dividir el numerador y el denominador entre $\cos v$, con lo que resulta

$$\begin{aligned} \tan(u+v) &= \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \right) \left(\frac{\cos v}{\cos v} \right) + \left(\frac{\cos u}{\cos u} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v} \right)}{\left(\frac{\cos u}{\cos u} \right) \left(\frac{\cos v}{\cos v} \right) - \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v} \right)} \\ &= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}. \end{aligned}$$

Si $\cos u \cos v = 0$, ya sea $\cos u = 0$ o $\cos v = 0$. En este caso $\tan u$ o $\tan v$ no están definidas y la fórmula no es válida. ■

EJEMPLO 3 Usar fórmulas de la suma a fin de hallar el cuadrante que contenga un ángulo

Supón que $\sin \alpha = 4/5$ y $\cos \beta = -12/13$, en donde α está en el primer cuadrante y β en el segundo.

a) Halla los valores exactos de $\sin(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$.

b) Localiza el cuadrante que contenga $\alpha + \beta$.

Solución En la figura 10 se ilustran los ángulos α y β . No hay pérdida de generalidad en relación con α y β como ángulos positivos entre 0 y 2π , según se ha hecho en la figura. Dado que $\sin \alpha = 4/5$, podemos escoger el punto (3, 4) en el lado terminal de α . En forma análoga, puesto que $\cos \beta = -12/13$, el punto (-12, 5) está en el lado terminal de β . Si consultas la figura 10 y usas la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, verás que

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{4}{3}, \quad \sin \beta = \frac{5}{13}, \quad \tan \beta = -\frac{5}{12}.$$

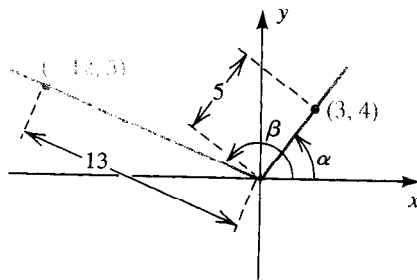


FIGURA 10

a) Con la fórmula para la suma se obtiene

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{33}{65}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)} = \frac{33}{56}.$$

b) Como $\sin(\alpha + \beta)$ es negativo y $\tan(\alpha + \beta)$ es positivo, el ángulo $\alpha + \beta$ debe estar en el tercer cuadrante.

El tipo de simplificación ilustrado en el próximo ejemplo aparece en cálculo.

EJEMPLO 4 Una fórmula usada en cálculo

Si $f(x) = \sin x$ y $h \neq 0$, demuestra que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right).$$

Solución Usamos la definición de f y la fórmula de la suma para seno:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right)\end{aligned}$$

Las fórmulas de la suma también sirven para derivar **fórmulas de reducción**. Estas últimas se pueden usar a fin de cambiar expresiones como

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{para cualquier entero } n$$

en expresiones en donde sólo haya $\sin \theta$ o $\cos \theta$. Las fórmulas semejantes son verdaderas para las otras funciones trigonométricas. En lugar de deducir fórmulas generales de reducción, ilustraremos dos casos especiales en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Obtener fórmulas de reducción**

En términos de una sola función trigonométrica de θ , expresa:

a) $\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ **b)** $\cos(\theta + \pi)$

Solución Si se usan las fórmulas de la suma y resta, se obtiene:

a)
$$\begin{aligned}\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) &= \sin \theta \cos \frac{3\pi}{2} - \cos \theta \sin \frac{3\pi}{2} \\ &= \sin \theta \cdot (0) - \cos \theta \cdot (-1) = \cos \theta\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\cos(\theta + \pi) &= \cos \theta \cos \pi - \sin \theta \sin \pi \\ &= \cos \theta \cdot (-1) - \sin \theta \cdot (0) = -\cos \theta\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 **Combinar una suma con funciones de seno y coseno**

Sean a y b números reales con $a > 0$. Demuestra que para toda x ,

$$a \cos Bx + b \sin Bx = A \cos(Bx - C),$$

donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan C = \frac{b}{a}$ con $-\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2}$.

Solución Dados $a \cos Bx + b \sin Bx$, consideremos $\tan C = b/a$ con $-\pi/2 < C < \pi/2$; por lo tanto, $b = a \tan C$, y se puede escribir

$$\begin{aligned} a \cos Bx + b \sin Bx &= a \cos Bx + (a \tan C) \sin Bx \\ &= a \cos Bx + a \frac{\sin C}{\cos C} \sin Bx \\ &= \frac{a}{\cos C} (\cos C \cos Bx + \sin C \sin Bx) \\ &= (a \sec C) \cos (Bx - C). \end{aligned}$$

Completaremos la prueba al demostrar que $a \sec C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Puesto que $-\pi/2 < C < \pi/2$, se deduce que $\sec C$ es positiva y, por lo tanto,

$$a \sec C = a \sqrt{1 + \tan^2 C}.$$

Con $\tan C = b/a$ y $a > 0$, se obtiene

$$a \sec C = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

EJEMPLO 7 Una aplicación del ejemplo 6

Si $f(x) = \cos x + \sin x$, usa las fórmulas del ejemplo 6 para expresar $f(x)$ en la forma $A \cos(Bx - C)$ y luego trazar la gráfica de f .

Solución Con $a = 1$, $b = 1$ y $B = 1$ en las fórmulas del ejemplo 6, tenemos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \tan C = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1.$$

Como $\tan C = 1$ y $-\pi/2 < C < \pi/2$, se obtiene $C = \pi/4$. Al sustituir por a , b , A , B y C en la fórmula

$$a \cos Bx + b \sin Bx = A \cos (Bx - C)$$

se obtiene

$$f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Al comparar la última fórmula con la ecuación $y = a \cos (bx + c)$, que estudiamos en la sección 2.6, vemos que la amplitud de la gráfica es $\sqrt{2}$, el periodo es 2π , y el desfaseamiento es $\pi/4$. En la figura 11

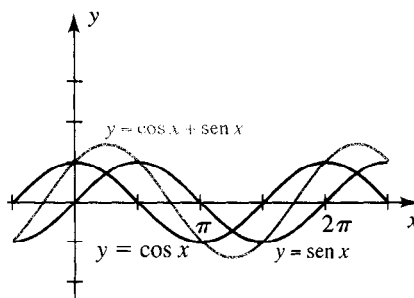


FIGURA 11

aparece la gráfica de f , en donde también se muestran las gráficas de $y = \sin x$ y $y = \cos x$. Estos trazos concuerdan con el obtenido en la sección 2.7, en donde se utilizó un equipo graficador (Fig. 71, Cap. 2).

3.3 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: expresa como cofunción de un ángulo complementario.

1. a) $\sin 46^\circ 37'$ b) $\cos 73^\circ 12'$
c) $\tan \frac{\pi}{6}$ d) $\sec 17.28^\circ$
2. a) $\tan 24^\circ 12'$ b) $\sin 89^\circ 41'$
c) $\cos \frac{\pi}{3}$ d) $\cot 61.87^\circ$
3. a) $\cos \frac{7\pi}{20}$ b) $\sin \frac{1}{4}$
c) $\tan 1$ d) $\csc 0.53$
4. a) $\sin \frac{\pi}{12}$ b) $\cos 0.64$
c) $\tan \sqrt{2}$ d) $\sec 1.2$

Ejercicios 5 al 10: halla los valores exactos.

5. a) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6}$
b) $\cos \frac{5\pi}{12} \left(\text{usar } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right)$
6. a) $\sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4}$
b) $\sin \frac{11\pi}{12} \left(\text{usar } \frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$
7. a) $\tan 60^\circ + \tan 225^\circ$
b) $\tan 285^\circ$ (usar $285^\circ = 60^\circ + 225^\circ$)
8. a) $\cos 135^\circ - \cos 60^\circ$
b) $\cos 75^\circ$ (usar $75^\circ = 135^\circ - 60^\circ$)
9. a) $\sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6}$
b) $\sin \frac{7\pi}{12} \left(\text{usar } \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$
10. a) $\tan \frac{3\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}$
b) $\tan \frac{7\pi}{12} \left(\text{usar } \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$

Ejercicios 11 al 16: expresa como función trigonométrica de un ángulo.

11. $\cos 48^\circ \cos 23^\circ + \sin 48^\circ \sin 23^\circ$
12. $\cos 13^\circ \cos 50^\circ - \sin 13^\circ \sin 50^\circ$
13. $\cos 10^\circ \sin 5^\circ - \sin 10^\circ \cos 5^\circ$
14. $\sin 57^\circ \cos 4^\circ + \cos 57^\circ \sin 4^\circ$
15. $\cos 3 \sin (-2) - \cos 2 \sin 3$
16. $\sin (-5) \cos 2 + \cos 5 \sin (-2)$
17. Si α y β son ángulos agudos tales que $\cos \alpha = 4/5$ y $\tan \beta = 8/15$, encuentra
a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$
c) el cuadrante que contenga $\alpha + \beta$
18. Si α y β son ángulos agudos tales que $\csc \alpha = 13/12$ y $\cot \beta = 4/3$, halla
a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha + \beta)$
c) el cuadrante que contenga $\alpha + \beta$
19. Si $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\sec \beta = 5/3$ para un ángulo α en el tercer cuadrante y un ángulo β en el primer cuadrante, encuentra
a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha + \beta)$
c) el cuadrante que contenga $\alpha + \beta$
20. Si $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$ y $\cot \beta = \frac{3}{4}$ para un ángulo α en el segundo cuadrante y un ángulo β en el tercer cuadrante, determina
a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\tan(\alpha + \beta)$
d) $\sin(\alpha - \beta)$ e) $\cos(\alpha - \beta)$ f) $\tan(\alpha - \beta)$
21. Si α y β son ángulos en el tercer cuadrante tales que $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ y $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, encuentra
a) $\sin(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$
c) el cuadrante que contenga $\alpha - \beta$
22. Si α y β son ángulos en el segundo cuadrante tales que $\sin \alpha = 2/3$ y $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, halla
a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha + \beta)$
c) el cuadrante que contiene $\alpha + \beta$

Ejercicios 23 al 34: verifica la fórmula de reducción.

23. $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ 24. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$$25. \sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\cos x \quad 26. \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$27. \cos(\theta - \pi) = -\cos \theta \quad 28. \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$29. \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x \quad 30. \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin \theta$$

$$31. \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x \quad 32. \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$33. \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$$

$$34. \tan(x + \pi) = \tan x$$

Ejercicios 35 al 44: comprueba la identidad.

$$35. \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$36. \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta)$$

$$37. \tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$$

$$38. \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

$$39. \cos(u + v) + \cos(u - v) = 2 \cos u \cos v$$

$$40. \sin(u + v) + \sin(u - v) = 2 \sin u \cos v$$

$$41. \sin(u + v) \cdot \sin(u - v) = \sin^2 u - \sin^2 v$$

$$42. \cos(u + v) \cdot \cos(u - v) = \cos^2 u - \sin^2 v$$

$$43. \frac{1}{\cot \alpha - \cot \beta} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$44. \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

45. Expresa $\sin(u + v + w)$ en términos de funciones trigonométricas de u , v y w . (Sugerencia: escribe

$$\sin(u + v + w) \text{ como } \sin[(u + v) + w]$$

y usa las fórmulas para la suma.)

46. Expresa $\tan(u + v + w)$ en términos de funciones trigonométricas de u , v y w .

$$47. \text{ Deriva la fórmula } \cot(u + v) = \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot u + \cot v}.$$

48. Si α y β son ángulos complementarios, demuestra que $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$.

49. Deriva la fórmula de la resta para la función seno.

50. Deriva la fórmula de la resta para la función tangente.

51. Si $f(x) = \cos x$, demuestra que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right).$$

52. Si $f(x) = \tan x$, demuestra que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sec^2 x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \frac{1}{\cos h - \sin h \tan x}.$$

Ejercicios 53 al 58: usa una fórmula de suma o resta para hallar las soluciones de la ecuación que están en el intervalo $[0, \pi)$.

$$53. \sin 4t \cos t = \sin t \cos 4t$$

$$54. \cos 5t \cos 3t = \frac{1}{2} + \sin(-5t) \sin 3t$$

$$55. \cos 5t \cos 2t = -\sin 5t \sin 2t$$

$$56. \sin 3t \cos t + \cos 3t \sin t = -\frac{1}{2}$$

$$57. \tan 2t + \tan t = 1 - \tan 2t \tan t$$

$$58. \tan t - \tan 4t = 1 + \tan 4t \tan t$$

Ejercicios 59 al 62:

a) Utiliza la fórmula del ejemplo 6 para expresar f en términos de la función coseno.

b) Determina la amplitud, periodo y desfase (o corrimiento de fase) de f .

c) Traza la gráfica de f .

$$59. f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$$

$$60. f(x) = \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x$$

$$61. f(x) = 2 \cos 3x - 2 \sin 3x$$

$$62. f(x) = 5 \cos 10x - 5 \sin 10x$$

Ejercicios 63 y 64: para ciertas aplicaciones en ingeniería eléctrica, la suma de varias señales de voltaje u ondas de radio de la misma frecuencia se expresa en la forma compacta $y = A \cos(Bt - C)$. Expresa la señal dada en esta forma.

$$63. y = 50 \sin 60\pi t + 40 \cos 60\pi t$$

$$64. y = 10 \sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \sin 120\pi t$$

65. Movimiento de una masa Si una masa sujeta a un resorte se eleva y_0 pies y se suelta con una velocidad vertical inicial de v_0 ft/s, la posición subsecuente y de la masa está dada por

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

en donde t es el tiempo en segundos y ω es una constante positiva.

a) Si $\omega = 1$, $y_0 = 2$ pies, y $v_0 = 3$ ft/s, expresa y en la forma $A \cos(Bt - C)$ y encuentra la amplitud y periodo del movimiento resultante.

- b) Determina los tiempos cuando $y = 0$ es decir, cuando la masa pase por la posición de equilibrio.

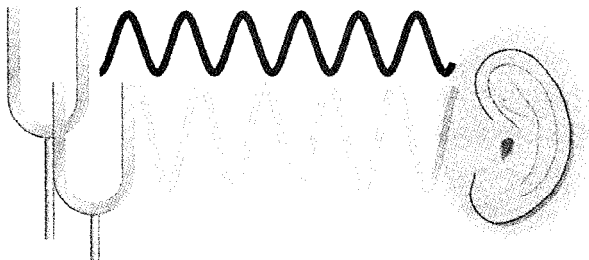
66. Movimiento de una masa consulta el ejercicio 65. Si $y_0 = 1$ y $\omega = 2$, encuentra las velocidades iniciales que resulten en una amplitud de 4 pies.

67. Presión en el tímpano Si se golpea ligeramente un diapasón y luego se mantiene a cierta distancia del tímpano, la presión $p_1(t)$ en la parte exterior del tímpano en el tiempo t se puede representar por $p_1(t) = A \sin \omega t$, en donde A y ω son constantes positivas. Si otro diapasón idéntico se golpea con una fuerza diferente y se sostiene a una distancia distinta (ve la figura), su efecto se puede representar por $p_2(t) = B \sin(\omega t + \tau)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, en donde B es una constante positiva. La presión total $p(t)$ en el tímpano está dada por

$$p(t) = A \sin \omega t + B \sin(\omega t + \tau).$$

- a) Demuestra que $p(t) = a \cos \omega t$, donde $a = B \sin \tau$ y $b = A + B \cos \tau$.
b) Prueba que la amplitud C de p está dada por

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau.$$



EJERCICIO 67

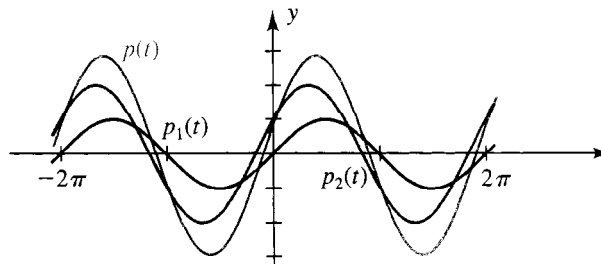
68. Interferencia destructiva Consulta el ejercicio 67. Una interferencia destructiva ocurre si la amplitud de la onda acústica resultante es menor que A . Supón que los dos diapasones son golpeados por la misma fuerza; esto es, $A = B$.

- a) Cuando ocurre una interferencia destructiva total, la amplitud de p es cero y no se escucha nada. Encuentra el mínimo valor positivo de τ para que esto ocurra.

- b) Determina el intervalo (a, b) de τ para que haya interferencia y a tenga el mínimo valor positivo.

69. Interferencia constructiva Consulta el ejercicio 67. Si se golpean dos diapasones, hay interferencia constructiva si la amplitud C de la onda acústica resultante es mayor que A o B (ve la figura).

- a) Demuestra que $C \leq A + B$.
b) Halla los valores de τ tales que $C = A + B$.
c) Si $A \geq B$, determina una condición en que se presente interferencia constructiva.



EJERCICIO 69

C 70. Presión en el tímpano Consulta el ejercicio 67. Si dos diapasones de frecuencias diferentes se golpean en forma simultánea con fuerza distinta, la presión total $p(t)$ sobre el tímpano en el instante t está dada por

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin(\omega_2 t + \tau),$$

en donde A, B, ω_1, ω_2 , y τ son constantes.

- a) Grafica p para $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ si $A = B = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 20$, y $\tau = 3$.
b) Con la gráfica describe la variación del tono que se produce.

C Ejercicios 71 y 72: consulta el ejercicio 69. Grafica la ecuación para $-\pi \leq t \leq \pi$, y calcula los intervalos en que ocurre interferencia constructiva.

71. $y = 3 \sin 2t + 2 \sin(4t + 1)$

72. $y = 2 \sin t + 2 \sin(3t + 3)$

3.4 Fórmulas de ángulos múltiples

Las fórmulas consideradas en esta sección se conocen como **fórmulas de ángulo múltiple**. Las siguientes identidades son **fórmulas de ángulo doble**, porque contienen la expresión $2u$.

Fórmulas de ángulo doble

$$(1) \sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$(2) \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$= 1 - 2 \sin^2 u$$

$$= 2 \cos^2 u - 1$$

$$(3) \tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

PRUEBA Es posible demostrar cada una de estas fórmulas con $v = u$ en las fórmulas apropiadas de la suma. Si usamos la fórmula para $\sin(u + v)$, entonces

$$\begin{aligned} \sin 2u &= \sin(u + u) \\ &= \sin u \cos u + \cos u \sin u \\ &= 2 \sin u \cos u \end{aligned}$$

Con la fórmula para $\cos(u + v)$, tenemos

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos(u + u) \\ &= \cos u \cos u - \sin u \sin u \\ &= \cos^2 u - \sin^2 u \end{aligned}$$

Para obtener las otras dos formas para $\cos 2u$, utilizamos la identidad fundamental $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\ &= (1 - \sin^2 u) - \sin^2 u \\ &= 1 - 2 \sin^2 u \end{aligned}$$

En forma análoga, si se sustituye $\sin^2 u$ en lugar de $\cos^2 u$, se obtiene

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - (1 - \cos^2 u) \\ &= 2 \cos^2 u - 1. \end{aligned}$$

La fórmula (3) para $\tan 2u$ se obtiene con $v = u$ en la fórmula para $\tan(u + v)$. ■

EJEMPLO 1 Usar fórmulas de doble ángulo

Si $\sin \alpha = 4/5$ y α es un ángulo agudo, halla los valores exactos de $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

Solución Si se considera α como un ángulo agudo de un triángulo rectángulo (Fig. 12), se obtiene $\cos \alpha = 3/5$. A continuación se sustituye en las fórmulas de doble ángulo:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

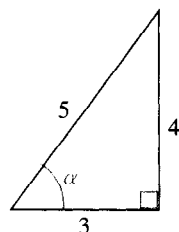


FIGURA 12

EJEMPLO 2 Cambiar la forma de $\cos 3\theta$

Expresa $\cos 3\theta$ en términos de $\cos \theta$.

Solución

$$\begin{aligned}
 \cos 3\theta &= \cos (2\theta + \theta) && 3\theta = 2\theta + \theta \\
 &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta && \text{fórmula de la suma} \\
 &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - (2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta && \text{fórmulas de doble ángulo} \\
 &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta && \text{multiplicar} \\
 &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) && \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\
 &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta && \text{simplificar}
 \end{aligned}$$

Cada una de las tres fórmulas siguientes recibe el nombre de **identidad de ángulo mitad**, porque el número u es la mitad del número $2u$.

Identidades de ángulo mitad

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

PRUEBA La primera identidad se puede verificar así:

$$\cos 2u = 1 - 2 \sin^2 u \quad \text{fórmula de ángulo doble}$$

$$2 \sin^2 u = 1 - \cos 2u \quad \text{despejar para } 2 \sin^2 u$$

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \quad \text{dividir entre 2}$$

La segunda identidad se puede derivar de modo semejante con

$$\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1.$$

La tercera identidad se obtiene de las dos primeras, aprovechando que

$$\tan^2 u = \left(\frac{\sin u}{\cos u} \right)^2 = \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}. \blacksquare$$

Las identidades de ángulo mitad sirven para expresar potencias pares de funciones trigonométricas en términos de funciones con exponente 1, como se expone en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3 *Usar identidades de ángulo mitad para comprobar una identidad*

Verifica la identidad $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$.

Solución

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) && \text{identidades de ángulos mitad} \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x) && \text{multiplicar} \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 2x && \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) && \text{identidad de ángulo doble con } u = 2x \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) && \text{multiplicar} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 *Usar identidades de ángulo mitad para reducir una potencia de cos t*

Expresa $\cos^4 t$ en términos de valores de la función coseno con exponente 1.

Solución

$$\begin{aligned} \cos^4 t &= (\cos^2 t)^2 && \text{ley de exponentes} \\ &= \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 && \text{identidad de ángulo mitad} \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) && \text{elevar al cuadrado} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) && \text{identidad de ángulo mitad con } u = 2t \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t && \text{simplificar} \end{aligned}$$

Si sustituyes $v/2$ con u en las tres identidades de ángulo mitad tendrás

$$\sin^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{2} \quad \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \cos v}{2} \quad \tan^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}$$

Tomamos las raíces cuadradas de ambos lados de cada una de estas ecuaciones y obtenemos las *fórmulas de ángulo mitad*, llamadas así para distinguirlas de las identidades de los ángulos mitad.

Fórmulas de ángulos mitad

$$\begin{aligned}\sin \frac{\nu}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \nu}{2}} & \cos \frac{\nu}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \nu}{2}} \\ \tan \frac{\nu}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \nu}{1 + \cos \nu}}\end{aligned}$$

Al usar una fórmula de ángulo mitad, se selecciona el signo + o el -, dependiendo del cuadrante que contenga el ángulo de medida $\nu/2$ en radianes; por lo tanto, para $\sin(\nu/2)$, se usa + si $\nu/2$ es un ángulo del primero o segundo cuadrante, y - si $\nu/2$ está en el tercero o cuarto cuadrante. Para $\cos(\nu/2)$, se utiliza + si $\nu/2$ está en el primero o cuarto cuadrante, y así sucesivamente.

EJEMPLO 5 Usar fórmulas de ángulo mitad para el seno y coseno

Halla los valores exactos de $\sin 22.5^\circ$ y $\cos 22.5^\circ$.

Solución Se usa la fórmula para $\sin(\nu/2)$ y el hecho de que 22.5° está en el primer cuadrante:

$$\begin{aligned}\sin 22.5^\circ &= \sin \frac{45^\circ}{2} & 22.5^\circ &= \frac{45^\circ}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} & \text{fórmula de ángulo mitad para seno} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} & \cos 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} & \text{multiplicar radicando por } 2/2 \text{ y simplificar}\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}\cos 22.5^\circ &= \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} & \text{fórmula de semiángulo para coseno} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}/2}}{2} & \cos 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} & \text{multiplicar radicando por } 2/2 \text{ y simplificar}\end{aligned}$$

Se puede obtener una forma alternativa para $\tan(\nu/2)$. Multiplicar el numerador y el denominador del radicando de la tercera fórmula de ángulo mitad por $1 - \cos \nu$, dará

$$\begin{aligned}\tan \frac{\nu}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \nu}{1 + \cos \nu} \cdot \frac{1 - \cos \nu}{1 - \cos \nu}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \nu)^2}{\sin^2 \nu}} \\ &= \pm \frac{1 - \cos \nu}{\sin \nu}\end{aligned}$$

Podemos eliminar el signo \pm de la fórmula precedente. Observa primero que el numerador $1 - \cos v$ nunca es negativo. Se puede demostrar que $\tan (v/2)$ y $\sin v$ siempre tienen el mismo signo; por ejemplo, si $0 < v < \pi$, entonces $0 < v/2 < \pi/2$ y, en consecuencia, $\sin v$ y $\tan (v/2)$ son positivos. Si $\pi < v < 2\pi$, entonces $\pi/2 < v/2 < \pi$, por lo cual $\sin v$ y $\tan (v/2)$ son negativos, lo que da la primera de las siguientes dos identidades. La segunda identidad para $\tan (v/2)$ se obtiene multiplicando el numerador y el denominador del radicando de la tercera fórmula de ángulo mitad por $1 + \cos v$.

Fórmulas de ángulo mitad para la tangente

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{\sin v} \quad \tan \frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v}$$

EXAMPLE 2 Halla la fórmula de ángulo mitad para la tangente

Si $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ y α está en el cuarto cuadrante, halla $\tan \frac{\alpha}{2}$.

SOLUCIÓN Si se escoge el punto $(3, -4)$ en el lado terminal de α (Fig. 13), entonces $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. La aplicación de una fórmula de ángulo mitad da lugar a

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{1}{2}.$$

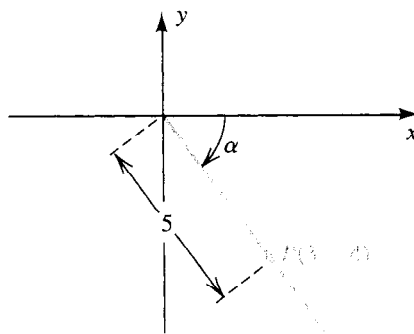


FIGURA 13

EXAMPLE 3 Halla las intersecciones de $y = \cos 2x + \cos x$

En la figura 14 se ve una gráfica de la ecuación $y = \cos 2x + \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Se aprecia que las intersecciones de x son aproximadamente 1.1, 3.1 y 5.2. Halla sus valores exactos y aproximaciones de tres lugares decimales.

SOLUCIÓN Para hallar las intersecciones de x , se procede de esta forma:

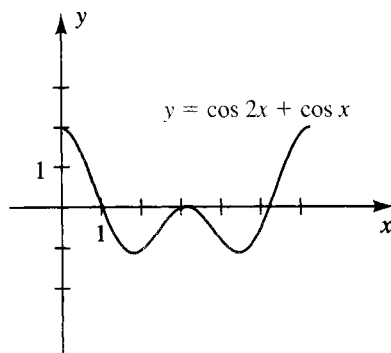


FIGURA 14

$$\cos 2x + \cos x = 0 \quad \text{sea } y = 0$$

$$(2 \cos^2 x - 1) + \cos x = 0 \quad \text{fórmula de ángulo doble}$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad \text{ecuación equivalente}$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \quad \text{factorizar}$$

$$2 \cos x - 1 = 0, \quad \cos x + 1 = 0 \quad \text{igualar cada factor a 0}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -1 \quad \text{despejar } \cos x$$

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ dan estas intersecciones de x :

$$\frac{\pi}{3} \approx 1.047, \quad \frac{5\pi}{3} \approx 5.236, \quad \pi \approx 3.142$$

EJEMPLO 8 Deducir una fórmula para el área de un triángulo isósceles

Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales de longitud a con un ángulo θ entre ellos (Fig. 15). Expresa el área A del triángulo en términos de a y de θ .

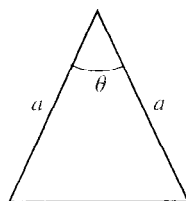


FIGURA 15

Solución En la figura 16 vemos que la altitud desde el punto P corta en dos el ángulo θ y que $A = \frac{1}{2}(2k)h = kh$; por lo tanto, tendremos lo siguiente, en donde $\theta/2$ es un ángulo agudo:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{k}{a} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{h}{a} \quad \text{Figura 16}$$

$$k = a \sin \frac{\theta}{2} \quad h = a \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{multiplicar por } a$$

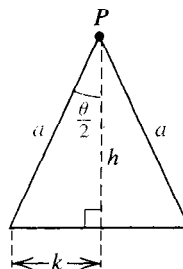


FIGURA 16

A continuación se encuentra el área:

$$A = a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{sustituir en } A = kh$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \text{fórmulas de ángulo mitad con } \theta/2 \text{ en primer cuadrante}$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{4}} \quad \text{ley de radicales}$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{4}} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \frac{1}{2} a^2 |\sin \theta| \quad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin \theta \quad \sin \theta > 0 \text{ para } 0^\circ < \theta < 180^\circ$$

Otro método es escribir la fórmula de ángulo doble para el seno, $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$, como

$$(*) \quad \sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$$

y proceder así:

$$A = a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{sustituir en } A = kh$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{sea } u = \frac{\theta}{2} \text{ en } (*)$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin \theta \quad \text{simplificar}$$



3.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: halla los valores exactos de $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ para los valores dados de θ .

1. $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $0^\circ < \theta < 90^\circ$
2. $\cot \theta = \frac{4}{3}$; $180^\circ < \theta < 270^\circ$
3. $\sec \theta = -3$; $90^\circ < \theta < 180^\circ$
4. $\sin \theta = -\frac{4}{5}$; $270^\circ < \theta < 360^\circ$

Ejercicios 5 al 8: encuentra los valores exactos de $\sin(\theta/2)$, $\cos(\theta/2)$ y $\tan(\theta/2)$ para las condiciones dadas.

5. $\sec \theta = \frac{5}{4}$; $0^\circ < \theta < 90^\circ$
6. $\csc \theta = -\frac{5}{3}$; $-90^\circ < \theta < 0^\circ$
7. $\tan \theta = 1$; $-180^\circ < \theta < -90^\circ$
8. $\sec \theta = -4$; $180^\circ < \theta < 270^\circ$

Ejercicios 9 y 10: usa las fórmulas de ángulo mitad para hallar los valores exactos.

9. a) $\cos 67^\circ 30'$ b) $\sin 15^\circ$ c) $\tan \frac{3\pi}{8}$
10. a) $\cos 165^\circ$ b) $\sin 157^\circ 30'$ c) $\tan \frac{\pi}{8}$

Ejercicios 11 al 28: verifica la identidad.

11. $\sin 10\theta = 2 \sin 5\theta \cos 5\theta$
12. $\cos^2 3x - \sin^2 3x = \cos 6x$
13. $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin x$
14. $\frac{\sin^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 - 4 \sin^2 \alpha$
15. $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$
16. $\csc 2u = \frac{1}{2} \csc u \sec u$
17. $\sin 3u = \sin u (3 - 4 \sin^2 u)$
18. $\sin 4t = 4 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t)$
19. $\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$
20. $\cos 6t = 32 \cos^6 t - 48 \cos^4 t + 18 \cos^2 t - 1$
21. $\sin^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$
22. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
23. $\sec 2\theta = \frac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta}$
24. $\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2 \cot u}$
25. $2 \sin^2 2t + \cos 4t = 1$

$$26. \tan \theta + \cot \theta = 2 \csc 2\theta$$

$$27. \tan 3u = \frac{\tan u (3 - \tan^2 u)}{1 - 3 \tan^2 u}$$

$$28. \frac{1 + \sin 2v + \cos 2v}{1 + \sin 2v - \cos 2v} = \cot v$$

Ejercicios 29 al 32: en términos de la función coseno con exponente 1, expresa

$$29. \cos^4 \frac{\theta}{2} \qquad 30. \cos^4 2x$$

$$31. \sin^4 2x \qquad 32. \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

Ejercicios 33 al 40: halla las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

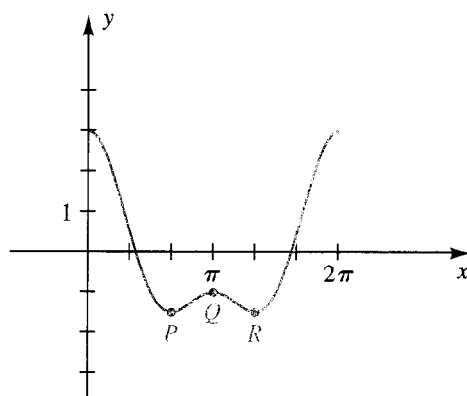
33. $\sin 2t + \sin t = 0$ 34. $\cos t - \sin 2t = 0$
35. $\cos u + \cos 2u = 0$ 36. $\cos 2\theta - \tan \theta = 1$
37. $\tan 2x = \tan x$ 38. $\tan 2t - 2 \cos t = 0$
39. $\sin \frac{1}{2}u + \cos u = 1$ 40. $2 - \cos^2 x = 4 \sin^2 \frac{1}{2}x$

41. Si $a > 0$, $b > 0$, y $0 < u < \pi/2$, demostrar que

$$a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(u + v)$$

$$\text{para } 0 < v < \frac{\pi}{2}, \sin v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ y } \cos v = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

42. Usa el ejercicio 41 para expresar $8 \sin u + 15 \cos u$ en la forma $c \sin(u + v)$.
43. En la figura hay una gráfica de $y = \cos 2x + 2 \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

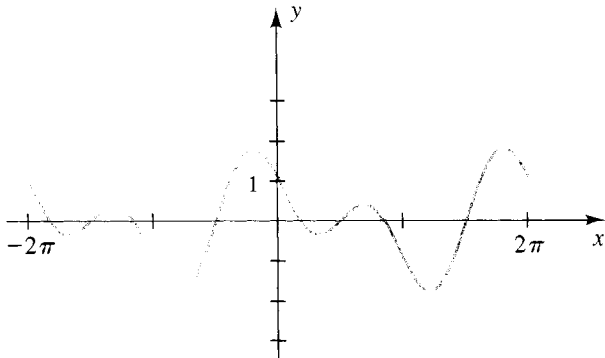


EJERCICIO 43

- a) Calcula las intersecciones de x a dos lugares decimales.
- b) Las coordenadas x de los puntos de inflexión P , Q y R de la gráfica son soluciones de la ecuación $\sin 2x + \sin x = 0$. Encuentra las coordenadas de estos puntos.

44. En la figura se muestra una gráfica de $y = \cos x - \sin 2x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

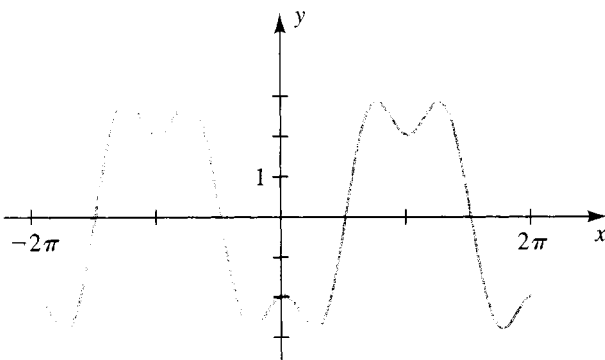
- a) Encuentra las intersecciones de x .
- b) Las coordenadas x de los ocho puntos de inflexión en la gráfica son soluciones de $\sin x + 2 \cos 2x = 0$. Calcula estas coordenadas de x a dos lugares decimales.



EJERCICIO 44

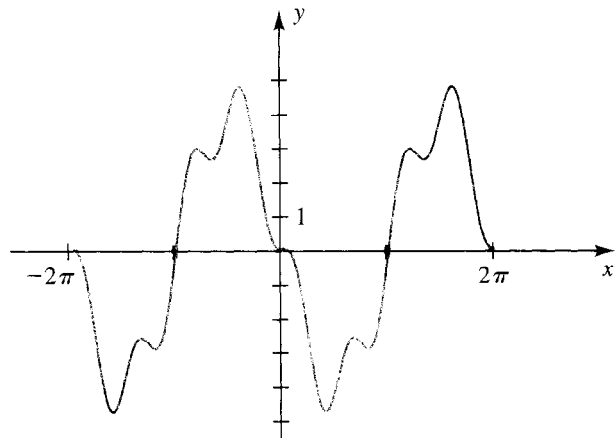
45. En la figura se muestra una gráfica de $y = \cos 3x - 3 \cos x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- a) Halla las intersecciones de x : (Sugerencia: usa la fórmula para $\cos 3\theta$ del segundo ejemplo.)
- b) Las coordenadas x de los 13 puntos de inflexión de la gráfica son soluciones de $\sin 3x - \sin x = 0$. Halla estas coordenadas de x . (Sugerencia: utiliza la fórmula para $\sin 3u$ del ejercicio 17.)



EJERCICIO 45

46. En la figura hay una gráfica de $y = \sin 4x - 4 \sin x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Halla las intersecciones de x . (Sugerencia: emplea la fórmula para $\sin 4t$ del ejercicio 18.)

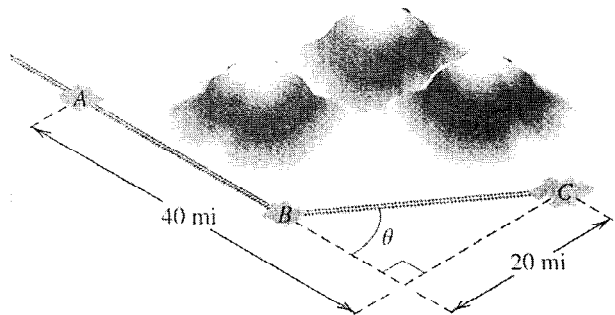


EJERCICIO 46

47. **Planeación de una ruta ferroviaria** En la figura se ve una ruta ferroviaria propuesta para tres poblaciones ubicadas en los puntos A , B y C . La vía se desviará de B hacia C a un ángulo θ .

a) Demuestra que la distancia total d de A a C está dada por $d = 20 \tan \frac{1}{2} \theta + 40$.

b) Debido a las montañas que se encuentran entre A y C , el punto de desviación B debe estar al menos a 20 millas de A . ¿Hay una ruta que evite las montañas y mida exactamente 50 millas?



EJERCICIO 47

48. **Alcance de un proyectil** Si al nivel del suelo se dispara un proyectil con una velocidad inicial de v ft/s y a un

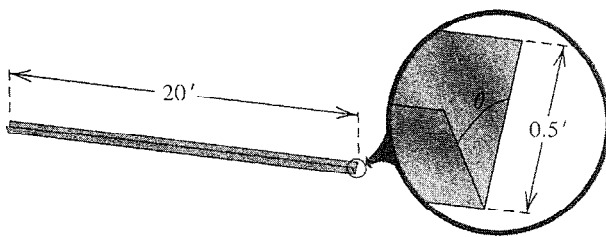
ángulo de θ grados con la horizontal, el alcance R del proyectil está dado por

$$R = \frac{v^2}{16} \sin \theta \cos \theta.$$

Si $v = 80$ ft/s. Calcula los ángulos que resulten en un alcance de 150 pies.

49. Construcción de un canal de desagüe En la figura se ilustra el diseño de un canal de desagüe.

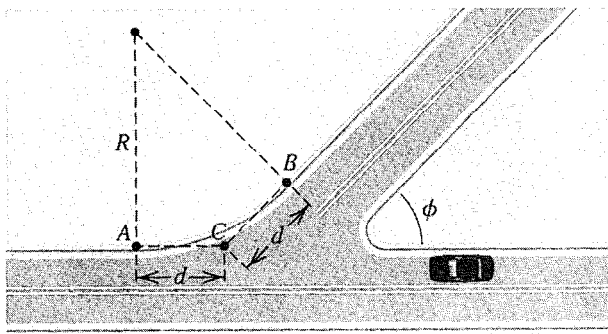
- Expresa el volumen V como función de θ . (Sugerencia: ve el ejemplo 8.)
- Calcula el ángulo agudo θ que resulte en un volumen de 2 ft^3 .



EJERCICIO 49

50. Diseño de una guarnición Un ingeniero está diseñando guarniciones en un punto en que dos carreteras se cruzan a un ángulo ϕ (ve la figura). La guarnición entre A y B ha de construirse usando un círculo tangente a la carretera en estos dos puntos.

- Demuestra que la relación entre el radio R del círculo y la distancia d de la figura está dado por la fórmula $d = R \tan(\phi/2)$.
- Si $\phi = 45^\circ$ y $d = 20$ pies, calcula R y la longitud de la guarnición.



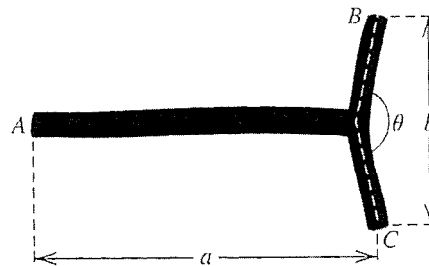
EJERCICIO 50

51. Bifurcación arterial Una forma común de ramificación cardiovascular es la bifurcación, en que una arteria se divide en dos vasos sanguíneos más pequeños. El ángulo θ de bifurcación es el formado por las dos arterias más pequeñas; en la figura, la línea de A a D corta el ángulo θ y es perpendicular a la línea de B a C .

- Demuestra que la longitud l de la arteria de A a B está dada por

$$l = a + \frac{b}{2} \tan \frac{\theta}{4}.$$

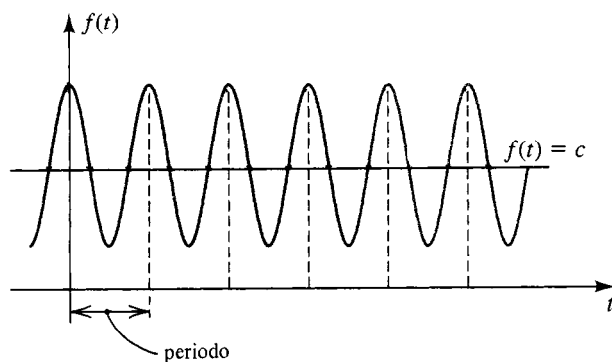
- Calcula l de la medición $a = 10$ mm, $b = 6$ mm y $\theta = 156^\circ$.



EJERCICIO 51

52. Generación de calor en un circuito de CA Por definición, el valor promedio de $f(t) = c + a \cos bt$ para uno o más ciclos completos es c (ve la figura).

- Usa una fórmula de doble ángulo para hallar el valor promedio de $f(t) = \sin^2 \omega t$ para $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$, con t en segundos.
- En un circuito eléctrico con una corriente alterna $I = I_0 \sin \omega t$, la razón r (en cal/s) a que se produce calor en un resistor de R ohms está dada por $r = RI^2$. Halla la razón promedio con que se genera calor para un ciclo completo.



EJERCICIO 52

Ejercicios 53 y 54: con la gráfica de f halla la expresión $g(x)$ más sencilla tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifica esta identidad.

$$53. f(x) = \frac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x + \cos x + 1}$$

$$54. f(x) = \frac{\sin x (1 + \cos 2x)}{\sin 2x}$$

3.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

Las siguientes fórmulas sirven para cambiar la forma de ciertas expresiones trigonométricas de productos en sumas. Se denominan **fórmulas de producto a suma** (aun cuando dos de ellas expresan un producto como diferencia) porque cualquier diferencia $x - y$ de dos números reales también es una suma $x + (-y)$.

Fórmulas de producto a suma

$$(1) \sin u \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) + \sin(u - v)]$$

$$(2) \cos u \sin v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) - \sin(u - v)]$$

$$(3) \cos u \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$(4) \sin u \sin v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

PRUEBA Sumemos los lados izquierdo y derecho de las fórmulas de suma y resta para la función seno:

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\sin(u + v) + \sin(u - v) = 2 \sin u \cos v$$

Al dividir ambos lados de la última ecuación entre 2 tendremos la fórmula (1).

La fórmula (2) se obtiene al *restar* los lados izquierdo y derecho de las fórmulas de suma y resta para la función seno. Las fórmulas (3) y (4) se desarrollaron de modo semejante, usando las fórmulas de la suma y resta para la función coseno.

EJEMPLO 1 Usar las fórmulas de producto a suma

Expresa como suma:

a) $\sin 4\theta \cos 3\theta$ **b)** $\sin 3x \sin x$

Solución **a)** Usamos la fórmula (1) de producto a suma con $u = 4\theta$ y $v = 3\theta$:

$$\begin{aligned} \sin 4\theta \cos 3\theta &= \frac{1}{2} [\sin(4\theta + 3\theta) + \sin(4\theta - 3\theta)] \\ &= \frac{1}{2} (\sin 7\theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

También se puede obtener esta relación con la fórmula (2) de producto a suma.

b) Empleamos la fórmula (4) de producto a suma con $u = 3x$ y $v = x$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} [\cos (3x - x) - \cos (3x + x)] \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x)\end{aligned}$$

Las fórmulas de producto a suma también sirven para expresar una suma o diferencia en forma de producto. A fin de obtener formas de aplicación más simple, cambiaremos la notación como sigue. Si se hace

$$u + v = a \quad \text{y} \quad u - v = b,$$

entonces $(u + v) + (u - v) = a + b$, que se simplifica a

$$u = \frac{a + b}{2}.$$

Del mismo modo, puesto que $(u + v) - (u - v) = a - b$

$$v = \frac{a - b}{2}$$

Ahora se sustituye para $u + v$ y $u - v$ en los lados derechos de las fórmulas de producto a suma y para u y v en los lados izquierdos. Si luego multiplicamos por 2, tendremos:

Fórmulas de suma a producto

$$(1) \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$(2) \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b}{2}$$

$$(3) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$(4) \cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b}{2}$$

EJEMPLO 2 Usar una fórmula de suma a producto

Expresa $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x$ como producto.

Solución Usamos la fórmula (2) de suma a producto con $a = 5x$ y $b = 3x$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x &= 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \operatorname{sen} \frac{5x - 3x}{2} \\ &= 2 \cos 4x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$



EJEMPLO 3

Verifica las fórmulas de suma a producto y producto a suma comprobando una identidad.

Verifica la identidad $\frac{\sin 3t + \sin 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \cot t$.

SOLUCIÓN Primero usamos una fórmula de suma a producto para el numerador y otra para el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3t + \sin 5t}{\cos 3t - \cos 5t} &= \frac{2 \sin \frac{3t+5t}{2} \cos \frac{3t-5t}{2}}{-2 \sin \frac{3t+5t}{2} \sin \frac{3t-5t}{2}} && \text{fórmulas (1) y (6) de suma a producto} \\ &= \frac{2 \sin 4t \cos(-t)}{-2 \sin 4t \sin(-t)} && \text{simplificamos} \\ &= \frac{\cos(-t)}{-\sin(-t)} && \text{cancelamos } 2 \sin 4t \\ &= \frac{\cos t}{\sin t} && \text{fórmulas para el ángulo } -t \\ &= \cot t && \text{identidad cotangente} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Halla las soluciones de una ecuación trigonométrica para resolver una ecuación.

Halla las soluciones de $\sin 5x + \sin x = 0$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \sin 5x + \sin x &= 0 && \text{dado} \\ 2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} &= 0 && \text{fórmula (1) de suma a producto} \\ \sin 3x \cos 2x &= 0 && \text{simplificamos, cancelamos } 2 \\ \sin 3x = 0, \quad \cos 2x &= 0 && \text{igualamos cada factor a } 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones son

$$3x = \pi n \quad \text{y} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Al dividir entre 3 y 2, respectivamente, se obtiene

$$\frac{\pi}{3}n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad \text{para todo entero } n.$$

EJEMPLO 5 Hallar las intersecciones de x de una gráfica

En la figura 17 se muestra la gráfica de la ecuación $y = \cos x - \cos 3x - \sin 2x$. Encuentra las 13 intersecciones de x que están en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

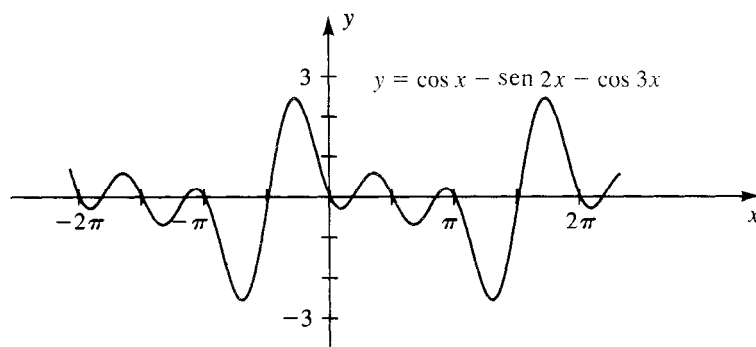


FIGURA 17

Solución Para hallar las intersecciones de x , se procede de esta manera:

$$\cos x - \cos 3x - \sin 2x = 0 \quad \text{sea } y = 0$$

$$(\cos x - \cos 3x) - \sin 2x = 0 \quad \text{agrupar los primeros dos términos}$$

$$-2 \sin \frac{x+3x}{2} \sin \frac{x-3x}{2} = \sin 2x = 0 \quad \text{fórmula (4) de suma a producto}$$

$$-2 \sin 2x \sin(-x) - \sin 2x = 0 \quad \text{simplificar}$$

$$2 \sin 2x \sin x - \sin 2x = 0 \quad \text{fórmula para negativos}$$

$$\sin 2x (2 \sin x - 1) = 0 \quad \text{factorizar } \sin 2x$$

$$\sin 2x = 0, \quad 2 \sin x - 1 = 0 \quad \text{igualar cada factor a 0}$$

$$\sin 2x = 0, \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{despejar } \sin x$$

La ecuación $\sin 2x = 0$ tiene soluciones $2x = \pi n$, o, al dividir entre 2,

$$x = \frac{\pi}{2} n \quad \text{para todo entero } n.$$

Si hacemos $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, y ± 4 , se obtienen nueve intersecciones de x en $[-2\pi, 2\pi]$:

$$0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$$

Las soluciones de la ecuación $\sin x = \frac{1}{2}$ son

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Las cuatro soluciones en $[-2\pi, 2\pi]$ se obtienen con $n = 0$ y $n = -1$:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$$

3.5 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: expresa como una suma o diferencia.

1. $\sin 7t \sin 3t$
2. $\sin(-4x) \cos 8x$
3. $\cos 6u \cos(-4u)$
4. $\cos 4t \sin 6t$
5. $2 \sin 9\theta \cos 3\theta$
6. $2 \sin 7\theta \sin 5\theta$
7. $3 \cos x \sin 2x$
8. $5 \cos u \cos 5u$

Ejercicios 9 al 16: expresa como un producto.

9. $\sin 6\theta + \sin 2\theta$
10. $\sin 4\theta - \sin 8\theta$
11. $\cos 5x - \cos 3x$
12. $\cos 5t + \cos 6t$
13. $\sin 3t - \sin 7t$
14. $\cos \theta - \cos 5\theta$
15. $\cos x + \cos 2x$
16. $\sin 8t + \sin 2t$

Ejercicios 17 al 24: verifica la identidad.

17. $\frac{\sin 4t + \sin 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \cot t$
18. $\frac{\sin \theta + \sin 3\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$
19. $\frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \tan \frac{1}{2}(u + v)$
20. $\frac{\sin u - \sin v}{\cos u - \cos v} = -\cot \frac{1}{2}(u + v)$
21. $\frac{\sin u - \sin v}{\sin u + \sin v} = \frac{\tan \frac{1}{2}(u - v)}{\tan \frac{1}{2}(u + v)}$
22. $\frac{\cos u - \cos v}{\cos u + \cos v} = -\tan \frac{1}{2}(u + v) \tan \frac{1}{2}(u - v)$
23. $4 \cos x \cos 2x \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$
24. $\frac{\cos t + \cos 4t + \cos 7t}{\sin t + \sin 4t + \sin 7t} = \cot 4t$

Ejercicios 25 y 26: expresa como suma.

25. $(\sin ax)(\cos bx)$
26. $(\cos au)(\cos bu)$

Ejercicios 27 al 34: usa fórmulas de suma a producto para hallar las soluciones de la ecuación.

27. $\sin 5t + \sin 3t = 0$
28. $\sin t + \sin 3t = \sin 2t$

$$29. \cos x = \cos 3x$$

$$30. \cos 4x - \cos 3x = 0$$

$$31. \cos 3x + \cos 5x = \cos x$$

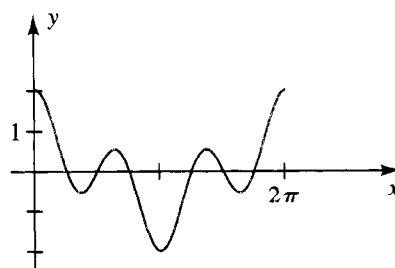
$$32. \cos 3x = -\cos 6x$$

$$33. \sin 2x - \sin 5x = 0$$

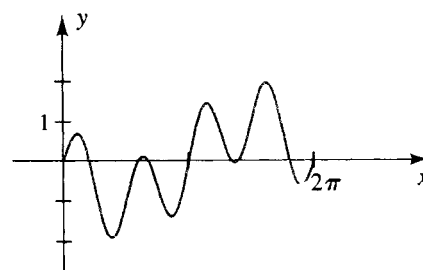
$$34. \sin 5x - \sin x = 2 \cos 3x$$

Ejercicios 35 y 36: en la figura se muestra una gráfica de la función f para $0 \leq x \leq 2\pi$. Usa una fórmula de suma a producto para ayudar a encontrar las intersecciones de x .

$$35. f(x) = \cos x + \cos 3x$$



$$36. f(x) = 4x - \sin x$$



37. Consulta el ejercicio 45 de la sección 3.4. La gráfica de $y = \cos 3x - 3 \cos x$ tiene 13 puntos de inflexión para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Las coordenadas de x de estos puntos son soluciones de la ecuación $\sin 3x - \sin x = 0$. Con una fórmula de suma a producto halla estas coordenadas de x .

38. Consulta el ejercicio 46 de la sección 3.4. Las coordenadas de x de los puntos de inflexión de la gráfica de $y = \sin 4x - 4 \sin x$ son soluciones de la ecuación $\cos 4x -$

$\cos x = 0$. Con una fórmula de suma a producto encuentra estas coordenadas de x para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- 39. Vibración de una cuerda de violín** En el análisis matemático de una cuerda de violín de longitud l en vibración, intervienen funciones como

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{x}\right) \cos\left(\frac{k\pi n}{l} t\right),$$

en donde n es un entero, k constante y t tiempo. Expresa f como una suma de dos funciones seno.

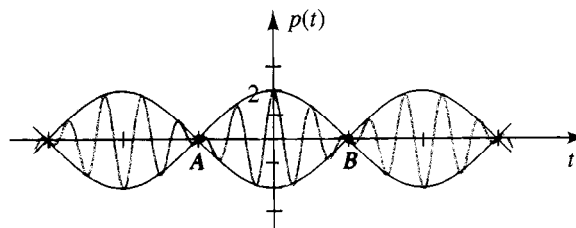
- 40. Presión en el tímpano** Si se golpean simultáneamente dos diapasones con la misma fuerza y luego se sostienen a igual distancia del tímpano, la presión en la parte externa de éste en el tiempo t está dada por

$$p(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t,$$

en donde a , ω_1 y ω_2 son constantes. Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, se produce un tono que se alterna entre intenso y casi silencio. Este fenómeno se conoce con el nombre de pulsaciones.

- Con una fórmula de suma a producto expresa $p(t)$ como producto.
- Prueba que $p(t)$ puede considerarse como una onda cosenoidal con periodo aproximado de $2\pi/\omega_1$ y amplitud variable $f(t) = 2a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$. Halla la amplitud máxima.
- En la figura se ve una gráfica de la ecuación $p(t) = \cos 4.5t + \cos 3.5t$. Ocurre un silencio casi completo en los puntos A y B , donde la amplitud variable $f(x)$ en la parte b) es cero. Encuentra las coordenadas de estos puntos y determina con cuánta frecuencia se presenta un silencio casi completo.

- d) Usa la gráfica para demostrar que la función p de la parte c) tiene un periodo de 4π . Concluye que la amplitud máxima de 2 ocurre cada 4π unidades de tiempo.



EJERCICIO 40



Ejercicios 41 y 42: grafica f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

- Calcula las intersecciones x .
- Halla los valores exactos de las intersecciones de x con las fórmulas de suma a producto.

41. $f(x) = \sin 4x + \sin 2x$

42. $f(x) = \cos 3x - \cos 2x$



Ejercicios 43 y 44: con la gráfica de f halla la expresión $g(x)$ más sencilla tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Comprueba esta identidad.

43. $f(x) = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

44. $f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$

3.6 Funciones trigonométricas inversas

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R . Así, para cada número u en R hay *exactamente un* número v en D tal que $u = f(v)$, como lo indica la flecha de la figura 18a). En consecuencia, se puede definir una función f^{-1} de R a D por medio de esta regla:

$$v = f^{-1}(u)$$

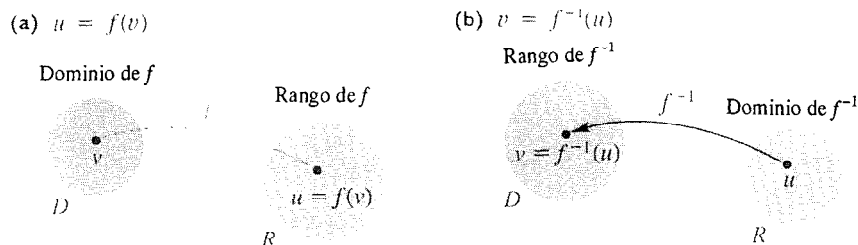


FIGURA 18

Según se ilustra en la figura 18b), f^{-1} invierte la correspondencia dada por f . Llamamos *función inversa* de f a f^{-1} , como en la siguiente definición.

Definición de función inversa

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R . Una función f^{-1} con dominio R y rango D es la **función inversa** de f , siempre que sea cierta la siguiente condición para toda u en R y toda v en D :

$$v = f^{-1}(u) \quad \text{si y sólo si} \quad u = f(v)$$

Para definir la inversa de una función f , es indispensable que f sea biunívoca. Los ejemplos más comunes de funciones biunívocas son los crecientes o decrecientes en sus dominios.

El -1 que se usa en esta notación no debe confundirse con un exponente; es decir $f^{-1}(u)$ no quiere decir $1/[f(u)]$. El recíproco $1/[f(u)]$ se puede denotar por $[f(u)]^{-1}$.

En la definición de función inversa, estas ecuaciones son equivalentes:

$$v = f^{-1}(u)$$

y

$$u = f(v)$$

Al sustituir, primero con u a la izquierda y luego con v a la derecha, se obtienen las siguientes propiedades.

Propiedades de funciones inversas

$$(1) \quad v = f^{-1}(u) = f^{-1}(f(v)) \quad \text{para toda } v \text{ en el dominio de } f$$

$$(2) \quad u = f(u) = f(f^{-1}(u)) \quad \text{para toda } u \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

Las propiedades (1) y (2) se esquematizan en la figura 19a) y b), respectivamente, en donde la flecha azul indica que f es una función de D a R y la flecha gris, que f^{-1} es una función de R a D .



FIGURA 19

Notarás que en la figura 19a) se aplica primero f al número v en D , con lo que se obtiene el valor de función $f(v)$ en R ; en seguida se aplica f^{-1} a $f(v)$, con lo que resulta el número $f^{-1}(f(v))$ en D . La propiedad (1) expresa que $f^{-1}(f(v)) = v$ para toda v ; esto es, f^{-1} invierte la correspondencia dada por f .

En la figura 19b) usamos el orden opuesto para las funciones. Primero aplicamos f^{-1} al número u en R , y tenemos el valor de función $f^{-1}(u)$ en D ; en seguida aplicamos f a $f^{-1}(u)$ para obtener el número $f(f^{-1}(u))$ en R . La propiedad (2) expresa que $f(f^{-1}(u)) = u$ para toda u ; esto es, f invierte la correspondencia dada por f^{-1} .

Cuando estudiamos funciones, a menudo denotamos con x un número arbitrario en el dominio. En particular, para la función inversa f^{-1} consideraremos $y = f^{-1}(x)$, donde x está en el dominio R de f^{-1} y y en el dominio de f . Las ecuaciones equivalentes en la definición de función inversa toman las formas que se muestran en la relación (1) que aparece a continuación. Las relaciones (4) y (5) son otras expresiones de las propiedades (2) y (1) de funciones inversas, con $u = x$ y $v = y$.

Relaciones entre f^{-1} y f

- (1) $y = f^{-1}(x)$ si y sólo si $x = f(y)$, donde x está en el dominio de f^{-1} y y en el dominio de f
- (2) Dominio de f^{-1} = rango de f
- (3) intervalo de f^{-1} = dominio de f
- (4) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}
- (5) $f^{-1}(f(y)) = y$ para toda y en el dominio de f

También hay una relación interesante entre la gráfica de una función f y la gráfica de su función inversa f^{-1} . Observemos primero que $b = f(a)$ equivale a $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones implican que el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1} .

Como ilustración, las funciones de f y f^{-1} dadas por

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}$$

son funciones inversas, siempre que x sea adecuadamente restringida. Algunos puntos de la gráfica de f son $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$ y $(3, 6)$. Los puntos correspondientes de la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$. Las gráficas de f y f^{-1} están trazadas en el mismo plano coordenado en la figura 20. Si la página se doblara por la línea $y = x$ que bisecta los cuadrantes primero y tercero (conforme la línea punteada de la figura), las gráficas de f y f^{-1} coincidirían. Las dos gráficas son

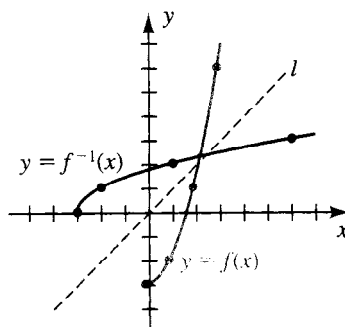


FIGURA 20

reflexiones una de la otra a través de la línea $y = x$, o son *simétricas* con respecto a esta línea. Esto es típico de la gráfica de toda función f que tenga una función inversa f^{-1} .

Usaremos la relación (1) para definir cada una de las *funciones trigonométricas inversas*.

La función seno no es biunívoca porque diferentes números, como $\pi/6$, $5\pi/6$ y $-7\pi/6$, producen el mismo valor de función ($\frac{1}{2}$). Si se restringe el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces, como ilustra la porción azul de la gráfica de $y = \sin x$ en la figura 21, se obtiene una función biunívoca (creciente) que toma todo valor de la función seno una vez y sólo una. Usamos esta *nueva* función con dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ y rango $[-1, 1]$ para definir la *función seno inversa*.

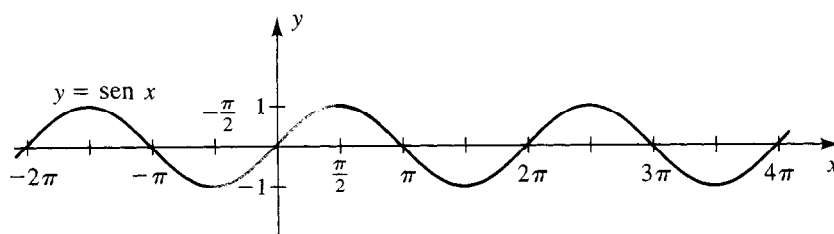


FIGURA 21

Definición de la función seno inversa

La **función inversa**, denotada por \sin^{-1} , está definida por

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sin y$$

$$\text{para } -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

El dominio de la función seno inversa es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

La notación $y = \sin^{-1} x$ se lee como “y es el seno inverso de x”. La ecuación $x = \sin y$ de la definición permite considerar que y sea un ángulo, así que $y = \sin^{-1} x$ denota que “y es el ángulo cuyo seno es x” (con $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$).

La función seno inversa también se llama **función arcoseno (arcsen)**, y se puede usar arcoseno en lugar de $\sin^{-1} x$. Si $t = \arcsen x$, entonces $\sin t = x$, y t puede interpretarse como una *longitud de arco* en el círculo unitario U con centro en el origen. En todo este libro usaremos ambas notaciones (\sin^{-1} y arcsen).

En la tabla que sigue aparecen diversos valores de la función seno inversa.

Precaución



Es *esencial* seleccionar el valor y en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ de sen^{-1} ; por lo tanto, aun cuando $\text{sen}(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$, el número $y = 3\pi/4$ no es el valor de la función inversa $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$.

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\text{sen } y = \frac{1}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\text{sen } y = -\frac{1}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{6}$
$y = \text{sen}^{-1}(1)$	$\text{sen } y = 1 \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arcsen}(0)$	$\text{sen } y = 0 \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = 0$
$y = \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\text{sen } y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{3}$

Hemos justificado ahora el método para resolver una ecuación de la forma $\text{sen } \theta = k$ como se estudió en el capítulo 2. Vemos que la tecla $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ de una calculadora que se use para obtener $\theta = \text{sen}^{-1}k$ indica el valor de la función seno inversa.

Por definición, la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}x$ es la misma que la de la ecuación $\text{sen } y = x$, excepto que las variables están restringidas de este modo:

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad y \quad -1 \leq x \leq 1$$

Las coordenadas de algunos puntos de la gráfica de $\text{sen } y = x$ se enumeran en la tabla de abajo.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

La gráfica está trazada en la figura 22.

La relación (4), $f(f^{-1}(x)) = x$, y la relación (5), $f^{-1}(f(y)) = y$, que se cumplen para cualquier función inversa f^{-1} , nos dan las siguientes propiedades.

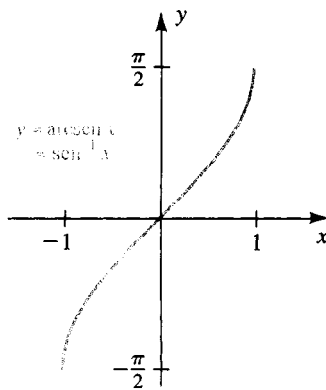


FIGURA 22

Propiedades para sen^{-1}

$$(1) \text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = \text{sen}(\text{arcsen } x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$(2) \text{sen}^{-1}(\text{sen } y) = \text{arcsen}(\text{sen } y) = y \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 1*Usar las propiedades de sen^{-1}*

Halla el valor exacto:

a) $\text{sen}(\text{sen}^{-1} \frac{1}{2})$

b) $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$

Solución a) El modo *difícil* de encontrar el valor de esta expresión es hallar primero el ángulo $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$, o sea, $\pi/6$, y evaluar $\text{sen}(\pi/6)$, con lo que se obtiene $\frac{1}{2}$. El modo *fácil* es usar la propiedad (1) de sen^{-1} :

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{ya que} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$$

b) Puesto que $-\pi/2 < \pi/4 < \pi/2$, es viable utilizar la propiedad (2) de sen^{-1} a fin de obtener

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen} \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

c) Cuidado. Dado que $2\pi/3$ no está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, no se puede usar la propiedad (2) de sen^{-1} . En lugar de esto, primero se evalúa la expresión interior, $\text{sen}(2\pi/3)$, y luego se aplica la definición de sen^{-1} :

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

EJEMPLO 2*Hallar un valor de sen^{-1}*

Encuentra el valor exacto de $\text{sen}^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$

Solución No es factible utilizar la propiedad (2) de sen^{-1} , ya que la expresión dada no tiene la forma $\text{sen}^{-1}(\text{sen } y)$. En su lugar, primero se evalúa la expresión interior que es $\tan(3\pi/4)$ y luego se halla el seno inverso de ese número. Si

$$y = \text{sen}^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right),$$

luego

$$y = \text{sen}^{-1}(-1).$$

Por definición,

$$\text{sen } y = -1 \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Se deduce que $y = -\pi/2$ y, por lo tanto,

$$\text{sen}^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

También se pueden emplear las otras funciones trigonométricas para introducir funciones trigonométricas inversas. El procedimiento consiste en determinar primero un subconjunto conveniente del dominio a fin de obtener una función biunívoca. Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$ (porción azul de la gráfica de $y = \cos x$ de la Fig. 23), se obtiene una función biunívoca (decreciente) que toma todo valor de la función coseno una y sólo una vez. Entonces, se usa esta *nueva* función con dominio $[0, \pi]$ e intervalo $[-1, 1]$ para definir la *función coseno inversa*.

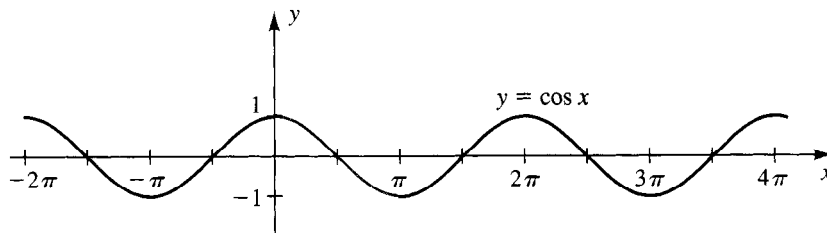


FIGURA 23

Definición de la función coseno inversa

La **función coseno inversa**, denotada por \cos^{-1} , está definida por

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y$$

porque $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

El dominio de la función coseno inversa es $[-1, 1]$ y el rango es $[0, \pi]$.

La notación $y = \cos^{-1} x$ se puede leer “y es el coseno inverso de x” o bien “y es el ángulo cuyo coseno es x” (con $0 \leq y \leq \pi$).

La función coseno inversa también se llama **función arcoseno (arccos)**, y se usa la notación $\arccos x$ en forma indistinta con $\cos^{-1} x$.

En esta tabla se enumeran diversos valores de la función coseno inversa:

Precaución



Es esencial seleccionar el valor y en el intervalo $[0, \pi]$ de \cos^{-1} .

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$	$\cos y = \frac{1}{2} \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)$	$\cos y = -\frac{1}{2} \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{2\pi}{3}$
$y = \cos^{-1} (1)$	$\cos y = 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = 0$
$y = \arccos (0)$	$\cos y = 0 \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{5\pi}{6}$

Se puede trazar la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ si se refleja la porción azul de la figura 23 en la línea $y = x$; esto dará el trazo de la figura 24. También se podría usar la ecuación $x = \cos y$, con $0 \leq y \leq \pi$, para hallar puntos en la gráfica. Según se indica en la gráfica, los valores de la función coseno inversa nunca son negativos.

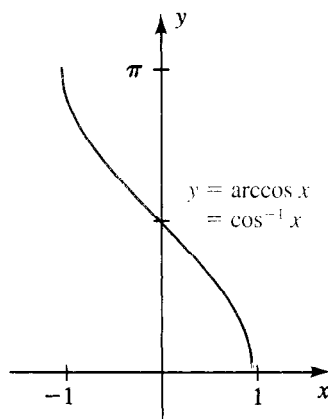


FIGURA 24

Al utilizar las relaciones (4) y (5) para las funciones inversas generales f y f^{-1} , se obtienen estas propiedades.

Propiedades de \cos^{-1}

$$(1) \cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$(2) \cos^{-1}(\cos y) = \arccos(\cos y) = y \quad \text{si} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

EJEMPLO 3 *Uso de las propiedades de \cos^{-1}*

Halla el valor exacto:

$$\text{a) } \cos[\cos^{-1}(-0.5)] \quad \text{b) } \cos^{-1}(\cos 3.14) \quad \text{c) } \cos^{-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Solución Para las partes a) y b), se pueden emplear las propiedades de \cos^{-1} .

$$\text{a) } \cos[\cos^{-1}(-0.5)] = -0.5, \text{ porque } -1 < -0.5 < 1.$$

$$\text{b) } \cos^{-1}(\cos 3.14) = 3.14, \text{ porque } 0 < 3.14 < \pi.$$

$$\text{c) } \text{Primero se encuentra } \sin(-\pi/6) \text{ y luego se utiliza la definición de } \cos^{-1}:$$

$$\cos^{-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

EJEMPLO 4 *Hallar el valor de una función trigonométrica*

Determina el valor exacto de $\sin[\arccos(-\frac{2}{3})]$.

Solución No se puede emplear la propiedad (1) de \cos^{-1} porque la expresión dada no tiene la forma $\cos(\cos^{-1}x)$; sin embargo, si

$$\theta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right),$$

entonces, con la definición de la función coseno inverso, se tiene

$$\cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Por lo tanto, θ está en el segundo cuadrante, según se ilustra en la figura 25. Si se escoge el punto P en el lado terminal con coordenada $x = -2$, la hipotenusa del triángulo de la figura debe tener longitud 3 porque $\cos \theta = -\frac{2}{3}$; en consecuencia, por el teorema de Pitágoras, la coordenada y de P es

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5},$$

y por lo tanto

$$\sin\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

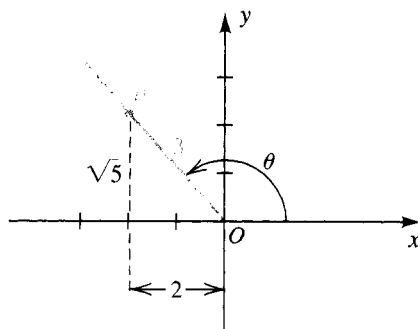


FIGURA 25

Si se restringe el dominio de la función tangente al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, se obtiene la función biunívoca (creciente) de la figura 3, página 173. Esta *nueva* función sirve para definir la *función tangente inversa*.

Definición de la función tangente inversa

La **función tangente inversa**, o **función arcotangente**, que se denota por \tan^{-1} o \arctan , se define por

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y$$

para cualquier número real x y para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

El dominio de la función arcotangente es \mathbb{R} y el rango es el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$.

Se puede obtener la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ de la figura 26 trazando la gráfica de $x = \tan y$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Al igual que con \sin^{-1} y \cos^{-1} , tenemos lo siguiente para \tan^{-1} .

Propiedades de \tan^{-1}

(1) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ para toda x

(2) $\tan^{-1}(\tan y) = \arctan(\tan y) = y$ si $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

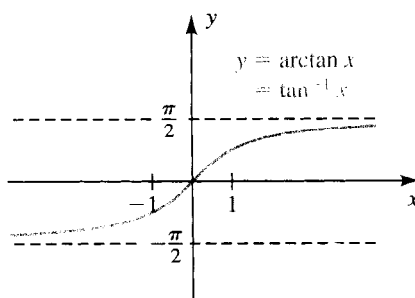


FIGURA 26

EJEMPLO 5 *Uso de las propiedades de \tan^{-1}*

Halla el valor exacto:

a) $\tan(\tan^{-1} 1000)$ **b)** $\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\arctan(\tan \pi)$

Solución **a)** Por la propiedad (1) de \tan^{-1} ,

$$\tan(\tan^{-1} 1000) = 1000.$$

b) Puesto que $-\pi/2 < \pi/4 < \pi/2$ tenemos, por la propiedad (2) de \tan^{-1} ,

$$\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

c) Dado que $\pi > \pi/2$, no se puede usar la segunda propiedad de \tan^{-1} ; por lo tanto, primero se encuentra $\tan \pi$ y luego se evalúa de esta forma:

$$\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0$$

EJEMPLO 6 *Hallar el valor de una función trigonométrica*Determina el valor exacto de $\sec(\arctan \frac{2}{3})$.**Solución** Si se hace $y = \arctan \frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Deseamos hallar $\sec y$.

Como $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$ para toda x y $\tan y > 0$, se deduce que $0 < y < \pi/2$; por lo tanto, podemos considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo como $\tan y = \frac{2}{3}$ (Fig. 27). Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Con referencia al triángulo, se obtiene

$$\sec\left(\arctan \frac{2}{3}\right) = \sec y = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

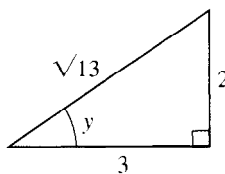


FIGURA 27

EJEMPLO 7 *Hallar el valor de una función trigonométrica*Encuentra el valor exacto de $\sin(\arctan \frac{1}{2} - \arccos \frac{4}{5})$.**Solución** Sea

$$u = \arctan \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad v = \arccos \frac{4}{5},$$

entonces

$$\tan u = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{4}{5}.$$

Deseamos encontrar $\sin(u - v)$. Dado que u y v están en el intervalo $(0, \pi/2)$, se pueden considerar como las medidas en radianes de ángulos agudos positivos, y podemos referirnos a los triángulos rectángulos de la figura 28. Esto dará

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin v = \frac{3}{5}, \quad \cos v = \frac{4}{5}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sin(u - v) &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{3}{5} \\ &= \frac{-2}{5\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{25}. \end{aligned}$$

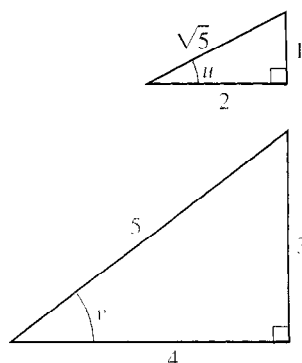


FIGURA 28

EJEMPLO 8 Cambiar una expresión con $\sin^{-1} x$ a expresión algebraica

Si $-1 \leq x \leq 1$, se reescribe $\cos(\sin^{-1} x)$ como expresión algebraica en x .

Solución Sea

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{o, lo que es equivalente,} \quad \sin y = x.$$

Deseamos expresar $\cos y$ en términos de x . Dado que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se deduce que $\cos y \geq 0$ y, por lo tanto,

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

En consecuencia,

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

La última identidad también es evidente geoméricamente si $0 < x < 1$. En este caso $0 < y < \pi/2$, y se puede considerar y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que

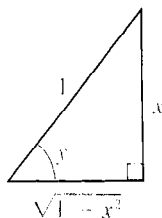


FIGURA 29

$\cos y = x$, como se ilustra en la figura 29. (El lado de longitud $\sqrt{1-x^2}$ se encuentra por el teorema de Pitágoras.) Con referencia al triángulo, tenemos

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}.$$

La mayor parte de las ecuaciones trigonométricas que consideramos en la sección 3.2 tenían soluciones que eran múltiplos racionales de π , como $\pi/3$, $3\pi/4$, π , etcétera. Si las soluciones de ecuaciones trigonométricas no son de ese tipo, a veces cabe usar funciones inversas para expresarlas en forma exacta, según se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Usar funciones trigonométricas para resolver una ecuación

Halla las soluciones de la ecuación $5 \operatorname{sen}^2 t + 3 \operatorname{sen} t - 1 = 0$ que se encuentren en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Solución Puesto que la ecuación se puede considerar cuadrática en $\operatorname{sen} t$, cabe aplicar la fórmula cuadrática:

$$\operatorname{sen} t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

Con la definición de la función seno inversa, obtenemos estas soluciones:

$$t = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{10} (-3 + \sqrt{29}) \approx 0.2408$$

$$t = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{10} (-3 - \sqrt{29}) \approx -0.9946$$

El siguiente ejemplo expone una de las muchas identidades ciertas para las funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 10 Verificar una identidad con funciones trigonométricas inversas

Comprueba la identidad $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

Solución Sea

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{y} \quad \beta = \cos^{-1} x.$$



Deseamos demostrar que $\alpha + \beta = \pi/2$. De las definiciones de \sin^{-1} y \cos^{-1} ,

$$\sin \alpha = x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$\cos \beta = x \quad \text{para} \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Al sumar las dos desigualdades de la derecha, vemos que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Notarás también que

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$$

y

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Con una fórmula de suma obtenemos

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= x \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - x^2} \\ &= x^2 + (1 - x^2) = 1. \end{aligned}$$

En vista de que $\alpha + \beta$ está en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$, la ecuación $\sin(\alpha + \beta) = 1$ tiene una sola solución, $\alpha + \beta = \pi/2$, que es lo que deseábamos demostrar.

Cabe demostrar geoméricamente la identidad si $0 < x < 1$. Si construimos un triángulo rectángulo con un lado de longitud x e hipotenusa de longitud 1 (Fig. 30), el ángulo β en B es un ángulo cuyo coseno es x ; esto es, $\beta = \cos^{-1} x$. En forma análoga, el ángulo α en A es un ángulo cuyo seno es x ; es decir, $\alpha = \sin^{-1} x$. Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios,

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

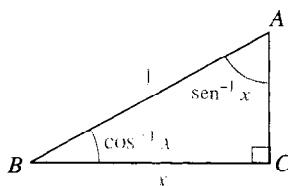


FIGURA 30

Cada una de las funciones trigonométricas restantes se define de la misma manera que las primeras tres; es decir, se selecciona un dominio D en que la función trigonométrica correspondiente sea biunívoca y luego se aplica la técnica acostumbrada (en donde y esté en D):

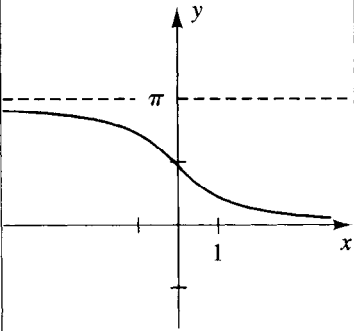
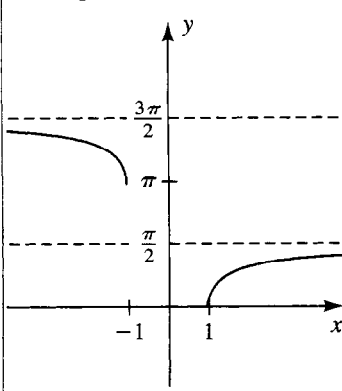
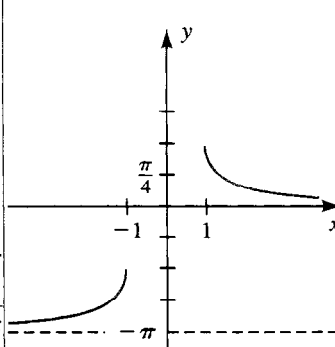
$$y = \cot^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cot y$$

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y$$

$$y = \csc^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \csc y$$

La función \sec^{-1} se utiliza en cálculo, pero \cot^{-1} y \csc^{-1} raras veces se emplean. Debido a su uso limitado en aplicaciones, no consideraremos ejemplos o ejercicios en relación con estas funciones; tan sólo resumiremos las gráficas, dominios y rangos característicos en la siguiente tabla.

Resumen de características de \cot^{-1} , \sec^{-1} y \csc^{-1}

Característica	$y = \cot^{-1} x$	$y = \sec^{-1} x$	$y = \csc^{-1} x$
Dominio	\mathbb{R}	$ x \geq 1$	$ x \geq 1$
Rango	$(0, \pi)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
Gráfica			

3.6 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 22: halla el valor exacto de la expresión siempre que se encuentre definida.

1. a) $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ b) $\cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)$

c) $\tan^{-1} (-\sqrt{3})$

2. a) $\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)$ b) $\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

c) $\tan^{-1} (-1)$

3. a) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

4. a) $\arcsen 0$ b) $\arccos (-1)$ c) $\arctan 0$

5. a) $\sin^{-1} \frac{\pi}{3}$ b) $\cos^{-1} \frac{\pi}{2}$ c) $\tan^{-1} 1$

6. a) $\arcsen \frac{\pi}{2}$ b) $\arccos \frac{\pi}{3}$ c) $\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$

7. a) $\sin [\arcsen (-\frac{3}{10})]$ b) $\cos (\arccos \frac{1}{2})$

c) $\tan (\arctan 14)$

8. a) $\sin(\sin^{-1} \frac{2}{3})$ b) $\cos[\cos^{-1}(-\frac{1}{5})]$
 c) $\tan[\tan^{-1}(-9)]$
9. a) $\sin^{-1}(\sin \frac{\pi}{3})$ b) $\cos^{-1}[\cos(\frac{5\pi}{6})]$
 c) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{\pi}{6})]$
10. a) $\arcsin[\sin(-\frac{\pi}{2})]$ b) $\arccos(\cos 0)$
 c) $\arctan(\tan \frac{\pi}{4})$
11. a) $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{4})$ b) $\arccos(\cos \frac{5\pi}{4})$
 c) $\arctan(\tan \frac{7\pi}{4})$
12. a) $\sin^{-1}(\sin \frac{2\pi}{3})$ b) $\cos^{-1}(\cos \frac{4\pi}{3})$
 c) $\tan^{-1}(\tan \frac{7\pi}{6})$
13. a) $\sin[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$ b) $\cos(\tan^{-1} 1)$
 c) $\tan[\sin^{-1}(-1)]$
14. a) $\sin(\tan^{-1} \sqrt{3})$ b) $\cos(\sin^{-1} 1)$
 c) $\tan(\cos^{-1} 0)$
15. a) $\cot(\sin^{-1} \frac{2}{3})$ b) $\sec[\tan^{-1}(-\frac{3}{5})]$
 c) $\csc[\cos^{-1}(-\frac{1}{4})]$
16. a) $\cot[\sin^{-1}(-\frac{2}{5})]$ b) $\sec(\tan^{-1} \frac{7}{4})$
 c) $\csc(\cos^{-1} \frac{1}{5})$
17. a) $\sin(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos 0)$
 b) $\cos[\arctan(-\frac{3}{4}) - \arcsin \frac{4}{5}]$
 c) $\tan(\arctan \frac{4}{3} + \arccos \frac{8}{17})$
18. a) $\sin[\sin^{-1} \frac{5}{13} - \cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$
 b) $\cos(\sin^{-1} \frac{4}{5} + \tan^{-1} \frac{3}{4})$
 c) $\tan[\cos^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1}(-\frac{1}{2})]$
19. a) $\sin[2 \arccos(-\frac{3}{5})]$ b) $\cos(2 \sin^{-1} \frac{15}{17})$
 c) $\tan(2 \tan^{-1} \frac{3}{4})$
20. a) $\sin(2 \tan^{-1} \frac{5}{12})$ b) $\cos(2 \arccos \frac{9}{41})$
 c) $\tan[2 \arcsin(-\frac{8}{17})]$
21. a) $\sin[\frac{1}{2} \sin^{-1}(-\frac{7}{25})]$ b) $\cos(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{8}{15})$
 c) $\tan(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5})$
22. a) $\sin[\frac{1}{2} \cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$ b) $\cos(\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{12}{13})$
 c) $\tan(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{40}{9})$

Ejercicios 23 al 30: escribe como expresión algebraica en x para $x > 0$.

23. $\sin(\tan^{-1} x)$ 24. $\tan(\arccos x)$
 25. $\sec(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}})$ 26. $\cot(\sin^{-1} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x})$
 27. $\sin(2 \sin^{-1} x)$ 28. $\cos(2 \tan^{-1} x)$
 29. $\cos(\frac{1}{2} \arccos x)$ 30. $\tan(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{x})$

Ejercicios 31 y 32: completa los enunciados.

31. a) A medida que $x \rightarrow -1^+$, $\sin^{-1} x \rightarrow$ ____
 b) A medida que $x \rightarrow 1^-$, $\cos^{-1} x \rightarrow$ ____
 c) A medida que $x \rightarrow \infty$, $\tan^{-1} x \rightarrow$ ____
 32. a) A medida que $x \rightarrow 1^-$, $\sin^{-1} x \rightarrow$ ____
 b) A medida que $x \rightarrow -1^+$, $\cos^{-1} x \rightarrow$ ____
 c) A medida que $x \rightarrow -\infty$, $\tan^{-1} x \rightarrow$ ____

Ejercicios 33 al 42: traza la gráfica de la ecuación.

33. $y = \sin^{-1} 2x$ 34. $y = \frac{1}{2} \sin^{-1} x$
 35. $y = \sin^{-1}(x+1)$ 36. $y = \sin^{-1}(x-2) + \frac{\pi}{2}$
 37. $y = \cos^{-1} \frac{1}{2} x$ 38. $y = 2 \cos^{-1} x$
 39. $y = 2 + \tan^{-1} x$ 40. $y = \tan^{-1} 2x$
 41. $y = \sin(\arccos x)$ 42. $y = \sin(\sin^{-1} x)$

Ejercicios 43 al 46: la ecuación dada tiene la forma $y = f(x)$; a) halla el dominio de f ; b) encuentra el rango de f , y c) despeja x en términos de y .

43. $y = \frac{1}{2} \sin^{-1}(x-3)$ 44. $y = 3 \tan^{-1}(2x+1)$
 45. $y = 4 \cos^{-1} \frac{2}{3} x$ 46. $y = 2 \sin^{-1}(3x-4)$

Ejercicios del 47 al 50: resuelve la ecuación para x en términos de y si x está restringida al intervalo dado.

47. $y = -3 - \sin x; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 48. $y = 2 + 3 \sin x; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

49. $y = 15 - 2 \cos x; [0, \pi]$

50. $y = 6 - 3 \cos x; [0, \pi]$

Ejercicios 51 y 52: despeja la ecuación para x en términos de y si $0 < x < \pi$ y $0 < y < \pi$.

51. $\frac{\sin x}{3} = \frac{\sin y}{4}$ 52. $\frac{4}{\sin x} = \frac{7}{\sin y}$

Ejercicios 53 al 60: con funciones trigonométricas inversas, encuentra las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo y calcula las soluciones a cuatro lugares decimales.

53. $\cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0;$ $[0, 2\pi)$

54. $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0;$ $[0, 2\pi)$

55. $2 \tan^2 t + 9 \tan t + 3 = 0;$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

56. $3 \sin^2 t + 7 \sin t + 3 = 0;$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

57. $15 \cos^4 x - 14 \cos^2 x + 3 = 0;$ $[0, \pi]$

58. $3 \tan^4 \theta - 19 \tan^2 \theta + 2 = 0;$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

59. $6 \sin^3 \theta + 18 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta - 15 = 0;$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

60. $6 \sin 2x - 8 \cos x + 9 \sin x - 6 = 0;$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicios 61 y 62: si un temblor tiene un desplazamiento horizontal total de S metros a lo largo de su línea de falla, el movimiento horizontal M de un punto sobre la superficie de la Tierra, a d kilómetros de la línea de falla, se puede calcular mediante la fórmula

$$M = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{d}{D} \right),$$

en donde D es la profundidad (en km) bajo la superficie del punto focal del temblor.

61. Movimiento telúrico Para el temblor de San Francisco en 1906, S fue de 4 metros y D alcanzó 3.5 kilómetros. Calcula M para los valores expresados de d .

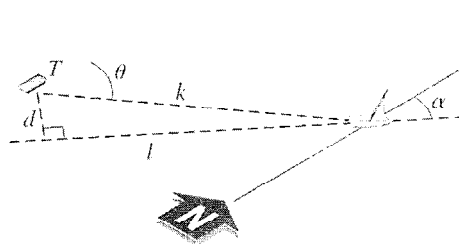
- a) 1 kilómetro b) 4 kilómetros
c) 10 kilómetros

62. Movimiento telúrico Calcula la profundidad D del punto focal de un temblor con $S = 3$ metros, si un punto sobre la superficie terrestre a 5 kilómetros de la línea de falla se movió horizontalmente 0.6 metros.

63. Seguimiento de un velero Como se muestra en la figura, un velero sigue un rumbo l en línea recta. La distancia más corta desde una estación T de rastreo (o seguidora) a la línea de rumbo es d millas. A medida que el velero se desplaza, la estación de rastreo registra su distancia k desde T y su dirección θ respecto a T . El ángulo α especifica la dirección de la embarcación.

- a) Expresa α en términos de d , k y θ .

- b) Calcula α al grado más cercano si $d = 50$ millas, $k = 210$ millas y $\theta = 53.4^\circ$.



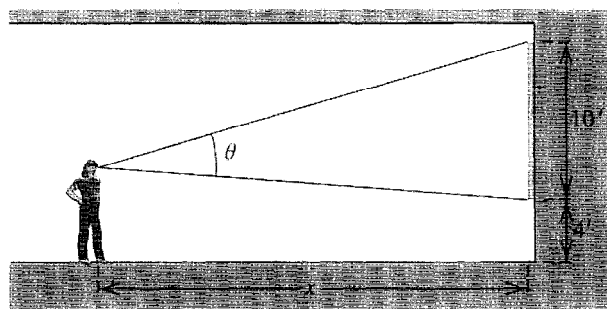
EJERCICIO 63

64. Cálculo de ángulos de visión Un crítico de arte, cuyos ojos están a 6 pies del suelo, observa una pintura que mide 10 pies de altura y está montada a 4 pies sobre el piso, como se muestra en la figura.

- a) Si el crítico está parado a x pies de la pared, expresa el ángulo de visión θ en términos de x .
b) Con la fórmula de la suma para la tangente demuestra que

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{10x}{x^2 - 16} \right).$$

- c) ¿Para qué valor de x es $\theta = 45^\circ$?



EJERCICIO 64

Ejercicios 65 al 70: verifica la identidad.

65. $\sin^{-1} x = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

66. $\arccos x + \arccos \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 1$

67. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

68. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

69. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$

$$70. 2 \cos^{-1} x = \cos^{-1} (2x^2 - 1), 0 \leq x \leq 1$$

C Ejercicios 71 y 72: grafica f y determina su dominio y rango.

$$71. f(x) = 2 \sin^{-1} (x - 1) + \cos^{-1} \frac{1}{2} x$$

$$72. f(x) = \frac{1}{2} \tan^{-1} (1 - 2x) + 3 \tan^{-1} \sqrt{x + 2}$$

C Ejercicios 73 y 74: usa una gráfica para calcular las soluciones de la ecuación.

$$73. \sin^{-1} 2x = \tan^{-1} (1 - x)$$

$$74. \cos^{-1} (x - \frac{1}{5}) = 2 \sin^{-1} (\frac{1}{2} - x)$$

C 75. **Diseño de un colector solar** Al diseñar un colector para energía solar, una consideración importante es determinar la cantidad de luz solar transmitida por el vidrio al agua que se calienta. Si el ángulo de incidencia θ de los rayos solares se mide de una línea perpendicular a la superficie del vidrio, la fracción $f(\theta)$ de luz solar reflejada por el vidrio se calcula con

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta} \right)$$

en donde $\alpha = \theta - \gamma$, $\beta = \theta + \gamma$ y $\gamma = \sin^{-1} (\sin \theta / 1.52)$. Grafica f para $0 < \theta < \pi/2$, y calcula θ cuando $f(\theta) = 0.2$.

C 76. **Diseño de un colector solar** La altitud del Sol es el ángulo ϕ que los rayos solares forman con el horizonte en un momento y lugar dados. Determinar ϕ es importante cuando se inclina un colector solar a fin de obtener la máxima eficiencia. El 21 de junio, a una latitud de 51.7° , la altitud del Sol se puede calcular mediante la fórmula

$$\sin \phi = \sin 23.5^\circ \sin 51.7^\circ + \cos 23.5^\circ \cos 51.7^\circ \cos H,$$

en donde H se llama ángulo horario, con $H = -\pi/2$ a las 6 a.m., $H = 0$ al mediodía y $H = \pi/2$ a las 6 p.m.

a) Resuelve la fórmula para ϕ y grafica la ecuación resultante para $-\pi/2 \leq H \leq \pi/2$.

b) Calcula los tiempos cuando $\phi = 45^\circ$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

Ejercicios 1 al 22: verifica la identidad.

$$1. (\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = 1$$

$$2. \cos \theta + \sin \theta \tan \theta = \sec \theta$$

$$3. \frac{(\sec^2 \theta - 1) \cot \theta}{\tan \theta \sin \theta + \cos \theta} = \sin \theta$$

$$4. (\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x \csc^2 x$$

$$5. \frac{1}{1 + \sin t} = (\sec t - \tan t) \sec t$$

$$6. \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$7. \tan 2u = \frac{2 \cot u}{\csc^2 u - 2} \quad 8. \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \sec v}{2 \sec v}$$

$$9. \frac{\tan^3 \phi - \cot^3 \phi}{\tan^2 \phi + \csc^2 \phi} = \tan \phi - \cot \phi$$

$$10. \frac{\sin u + \sin v}{\csc u + \csc v} = \frac{1 - \sin u \sin v}{-1 + \csc u \csc v}$$

$$11. \left(\frac{\sec^2 x}{\tan^4 x} \right)^3 \left(\frac{\csc^3 x}{\cot^6 x} \right)^2 = 1$$

$$12. \frac{\cos \gamma}{1 - \tan \gamma} + \frac{\sin \gamma}{1 - \cot \gamma} = \cos \gamma + \sin \gamma$$

$$13. \frac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = 1 + \sin t$$

$$14. \frac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\sin(-t)} = \frac{1}{1 - \cos t}$$

$$15. \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \frac{1 - \cos t}{|\sin t|} \quad 16. \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{|\cos \theta|}{1 + \sin \theta}$$

$$17. \cos \left(x - \frac{5\pi}{2} \right) = \sin x$$

$$18. \tan \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$$

$$19. \frac{1}{4} \sin 4\beta = \sin \beta \cos^3 \beta - \cos \beta \sin^3 \beta$$

$$20. \tan \frac{1}{2} \theta = \csc \theta - \cot \theta$$

$$21. \sin 8\theta = 8 \sin \theta \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) (1 - 8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

$$22. \arctan x = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1 - x^2}, -1 < x < 1$$

Ejercicios 23 al 40: halla las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$23. 2 \cos^3 \theta - \cos \theta = 0 \quad 24. 2 \cos \alpha + \tan \alpha = \sec \alpha$$

$$25. \sin \theta = \tan \theta \quad 26. \csc^5 \theta - 4 \csc \theta = 0$$

$$27. 2 \cos^3 t + \cos^2 t - 2 \cos t - 1 = 0$$

$$28. \cos x \cot^2 x = \cos x \quad 29. \sin \beta + 2 \cos^2 \beta = 1$$

30. $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$

31. $2 \sec v \sin v + 2 = 4 \sin v + \sec v$

32. $\tan 2x \cos 2x = \sin 2x$

33. $2 \cos 3x \cos 2x = 1 - 2 \sin 3x \sin 2x$

34. $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 0$

35. $\cos \pi x + \sin \pi x = 0$

36. $\sin 2u = \sin u$

37. $2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 3 \cos \theta = 0$

38. $\sec 2x \csc 2x = 2 \csc 2x$

39. $\sin 5x = \sin 3x$

40. $\cos 3x = -\cos 2x$

Ejercicios 41 al 44: determina el valor exacto.

41. $\cos 75^\circ$

42. $\tan 285^\circ$

43. $\sin 195^\circ$

44. $\csc \frac{\pi}{8}$

Ejercicios 45 al 56: si θ y ϕ son ángulos agudos tales que $\csc \theta = 5/3$ y $\cos \phi = 8/17$, halla el valor exacto.

45. $\sin(\theta + \phi)$

46. $\cos(\theta + \phi)$

47. $\tan(\phi + \theta)$

48. $\tan(\theta - \phi)$

49. $\sin(\phi - \theta)$

50. $\sin(\theta - \phi)$

51. $\sin 2\phi$

52. $\cos 2\phi$

53. $\tan 2\theta$

54. $\sin \frac{1}{2}\theta$

55. $\tan \frac{1}{2}\theta$

56. $\cos \frac{1}{2}\theta$

57. Expresa como suma o diferencia:

a) $\sin 7t \sin 4t$

b) $\cos \frac{1}{4}u \cos(-\frac{1}{6}u)$

c) $6 \cos 5x \sin 3x$

d) $4 \sin 3\theta \cos 7\theta$

58. Expresa como producto:

a) $\sin 8u = \sin 2u$

b) $\cos 3\phi - \cos 8\theta$

c) $\sin \frac{1}{4}t - \sin \frac{1}{5}t$

d) $3 \cos 2x + 3 \cos 6x$

Ejercicios 59 al 70: halla el valor exacto de la expresión siempre que esté definida.

59. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

60. $\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

61. $\arctan \sqrt{3}$

62. $\arccos\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$

63. $\arcsen\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right)$

64. $\cos^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$

65. $\sin\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

66. $\tan(\tan^{-1} 2)$

67. $\sec(\sin^{-1} \frac{3}{2})$

68. $\cos^{-1}(\sin 0)$

69. $\cos(\sin^{-1} \frac{15}{17} - \sin^{-1} \frac{8}{17})$

70. $\cos(2 \sin^{-1} \frac{4}{5})$

Ejercicios 71 al 74: traza la gráfica de la ecuación.

71. $y = \cos^{-1} 3x$

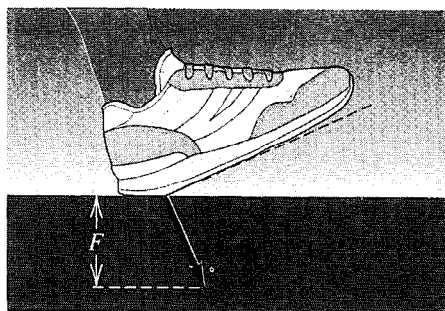
72. $y = 4 \sin^{-1} x$

73. $y = 1 - \sin^{-1} x$

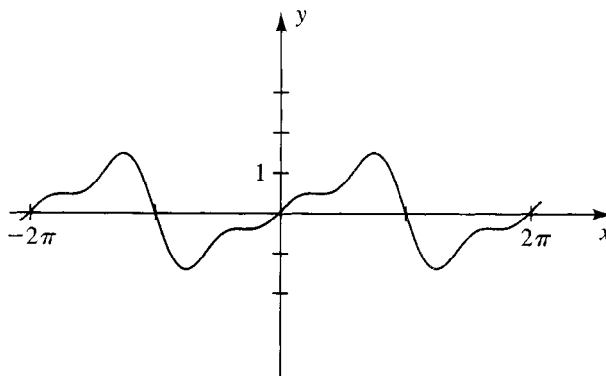
74. $y = \sin(\frac{1}{2} \cos^{-1} x)$

75. Expresa $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ en términos de las funciones trigonométricas α , β y γ .76. **Fuerza de un pie** Cuando una persona camina, la magnitud F de la fuerza vertical de un pie en el suelo (ve la figura) se puede describir mediante

$$F = A(\cos bt - a \cos 3bt),$$

en donde t está en segundos, $A > 0$, $b > 0$, y $a < 1$.a) Demuestra que $F = 0$ cuando $t = -\pi/(2b)$ y $t = \pi/(2b)$. (El tiempo $t = -\pi/(2b)$ corresponde al momento en que el pie toca el suelo y el peso del cuerpo está sostenido por el otro pie.)b) La fuerza máxima ocurre cuando $3a \sin bt = \sin bt$. Si $a = 1/3$, halla la solución de esta ecuación para $-\pi/(2bn) < t < \pi/(2b)$ c) Si $a = 1/3$, expresa la fuerza máxima en términos de A .

EJERCICIO 76

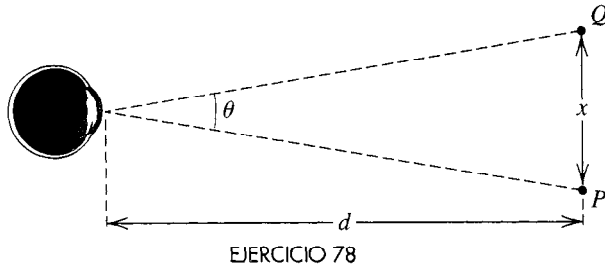
77. En la figura se muestra una gráfica de la ecuación $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$. Las coordenadas x de los puntos de inflexión son soluciones de la ecuación $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$. Usa una fórmula de suma a producto para hallar estas coordenadas.

EJERCICIO 77

78. Distinción visual El ojo humano puede distinguir entre dos puntos distantes P y Q siempre que el ángulo de resolución θ no sea demasiado pequeño. Supón que P y Q están a x unidades entre sí y a d unidades del ojo, como se ilustra en la figura.

a) Expresa x en términos de d y θ .

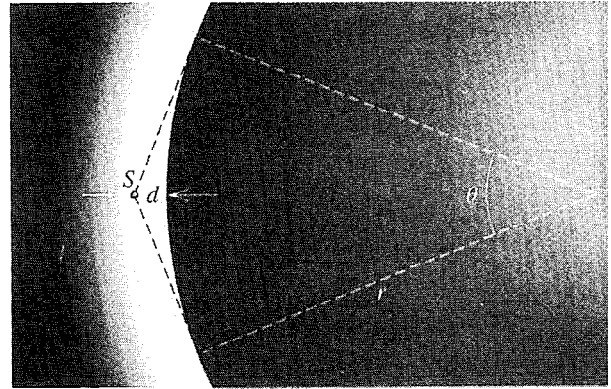
b) Para una persona con visión normal, el ángulo de resolución mínimo que se puede distinguir es de alrededor de 0.0005 radianes. Si un individuo observa una pluma de 6 pulgadas de largo desde una distancia de d pies, ¿para qué valores de d serán perceptibles los puntos extremos de la pluma?



79. Satélites Un satélite S orbita un planeta a una distancia de d millas de la superficie. La porción de la superficie del planeta visible desde el satélite se determina por el ángulo θ indicado en la figura.

a) Suponiendo que el planeta es de forma esférica, expresa d en términos de θ y el radio r del planeta.

b) Calcula θ para un satélite ubicado a 300 millas de la superficie de la Tierra, usando $r = 4000$ millas.



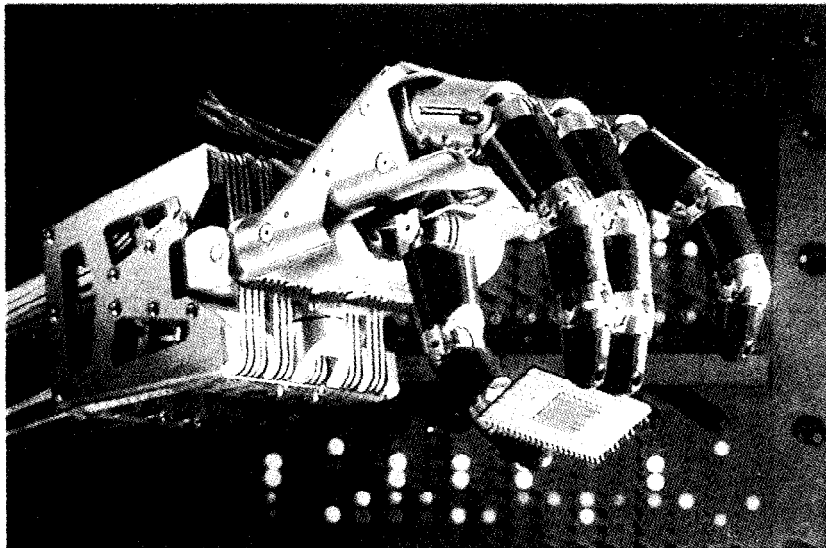
80. Cañones urbanos Debido a los altos edificios y a las calles relativamente angostas de algunas ciudades, la cantidad de luz solar que ilumina estos "cañones" se ha reducido en gran parte. Si h es la altura promedio de los edificios y w es el ancho de la calle, la estrechez N de la calle estará determinada por $N = h/w$. El ángulo θ del horizonte está definido por $\tan \theta = N$, (el valor $\theta = 63^\circ$ puede dar como resultado una pérdida de iluminación de 85%). Calcula el ángulo del horizonte para los siguientes valores de h y w .

- a) $h = 400$ ft, $w = 80$ ft
 b) $h = 55$ m, $w = 30$ m

..... *Aplicaciones de la trigonometría*

4

- 4.1 Ley de los senos
- 4.2 Ley de los cosenos
- 4.3 Números complejos
- 4.4 Forma trigonométrica para números complejos
- 4.5 Teorema de De Moivre y raíces n -ésimas de números complejos
- 4.6 Vectores
- 4.7 Producto punto



Las funciones trigonométricas y los vectores se pueden usar para especificar la posición de los brazos de un robot.



■ En las primeras dos secciones de este capítulo se estudian métodos para resolver triángulos oblicuos mediante la ley de los senos y la ley de los cosenos. En seguida se introduce la forma trigonométrica de los números complejos, que sirve para hallar todas las soluciones n de ecuaciones de la forma $w^n = z$, en donde n es cualquier entero positivo, y w y z son números complejos. Las últimas dos secciones contienen una introducción a los vectores, tema con muchas aplicaciones en ingeniería, ciencias naturales y matemáticas avanzadas. ■

4.1 Ley de los senos

Un **triángulo oblicuo** (u oblicuángulo) es aquel que no contiene un ángulo recto. Usaremos las literales $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta$ y γ para distinguir partes de triángulos, como en el capítulo 2. Dado el triángulo ABC , coloquemos un ángulo α en posición estándar, de modo que B se localice en el eje x positivo. Aun cuando el caso para el ángulo obtuso α se ilustra en la figura 1, el estudio que presentamos a continuación también es válido si α es agudo.

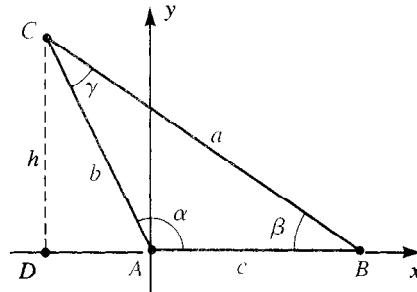


FIGURA 1

Considera la línea que pasa por C , paralela al eje de las y , y que corta al eje x en el punto D . Si hacemos $d(C, D) = h$, entonces la ordenada de C es h . De las definiciones de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, tendremos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b} \quad \text{y} \quad h = b \operatorname{sen} \alpha$$

Con referencia al triángulo BDC , se ve que

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{h}{a} \quad \text{y} \quad h = a \operatorname{sen} \beta$$

En consecuencia, puedes escribir

$$b \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \beta,$$

como

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}.$$

Si α se pone en posición estándar con C en el eje positivo de las x , entonces, por el mismo razonamiento,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

Las dos últimas igualdades nos dan el siguiente resultado.

Ley de los senos

Si ABC es un triángulo oblicuo con los ángulos y lados marcados en la forma acostumbrada, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

Observa que la ley de los senos consta de las siguientes tres fórmulas:

$$(1) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} \quad (2) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \quad (3) \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Para aplicar cualquiera de estas fórmulas a un triángulo específico, debemos conocer los valores de tres de las cuatro variables. Si sustituyes estos tres valores en la fórmula apropiada, podrás despejar el valor de la cuarta variable. Se deduce que la ley de los senos se puede usar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo siempre que se conozca cualquiera de los dos puntos siguientes (las tres letras dentro del paréntesis denotan las partes conocidas, con L representando un lado y A un ángulo):

(1) dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos (LLA)

(2) dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA)

En la sección siguiente estudiaremos la ley de los cosenos y demostraremos cómo se usa para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo cuando se conozca lo siguiente:

(1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)

(2) tres lados (LLL)

La ley de los senos no se puede aplicar directamente a los dos últimos casos.

Esta ley también se puede escribir en la forma

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

En lugar de memorizar las tres fórmulas relacionadas con la ley de los senos, puede ser más conveniente recordar el siguiente enunciado que toma en cuenta a todas ellas.

Ley de los senos (forma general)

En cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.

En ejemplos y ejercicios con triángulos, supondremos que las longitudes y ángulos conocidos se han obtenido por medición y, por lo tanto, son aproximaciones a los valores exactos. A menos que se indique de otra manera, cuando se encuentren partes de triángulos redondearemos las respuestas según la regla siguiente: *si los lados o ángulos conocidos se indican con cierta precisión, los lados o ángulos desconocidos deben calcularse a la misma precisión*. Para ilustrar lo anterior, si los lados conocidos se presentan al 0.1 más cercano, los lados desconocidos se calcularán al 0.1 más próximo. Si los ángulos conocidos se indican a los 10' más cercanos, hay que calcular los ángulos desconocidos a los 10' más próximos. Observaciones semejantes se cumplen para precisiones al más cercano 0.0°, 0.1°, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Usar la ley de los senos (ALA)

Dado el triángulo ABC con $\alpha = 48^\circ$, $\gamma = 57^\circ$ y $b = 47$, calcula las partes restantes.

Solución El triángulo aparece en la figura 2. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° ,

$$\beta = 180^\circ - (57^\circ + 48^\circ) = 75^\circ.$$

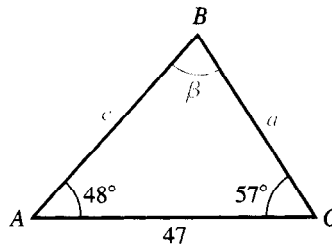


FIGURA 2

Dado que se conoce el lado b y los tres ángulos, se puede encontrar a usando la fórmula de la ley de los senos donde intervengan a , α , b y β :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{despejar } a$$

$$= \frac{47 \sin 48^\circ}{\sin 75^\circ} \quad \text{sustituir por } b, \alpha \text{ y } \beta$$

$$\approx 36 \quad \text{calcular al entero más cercano}$$

Para hallar c , basta sustituir $\frac{a}{\sin \alpha}$ con $\frac{c}{\sin \gamma}$ de la solución precedente con a , con la que resulta

$$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{47 \sin 57^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 41.$$

Datos como los del ejemplo 1 conducen a un triángulo ABC ; sin embargo, si nos dan dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos, no siempre el triángulo que se representa es único. Para ilustrar este caso, supón que a y b son las longitudes de lados del triángulo ABC y que un ángulo dado α ha de ser opuesto al lado de longitud a . Examinemos el caso para α agudo; pongamos α en posición estándar y consideremos el segmento de recta AC de longitud b en el lado terminal de α (Fig. 3). El tercer vértice, B , debe estar en algún punto del eje x . Como nos dan la longitud a del lado opuesto a α , se puede encontrar B si trazamos un arco circular de longitud a con centro en C . En la figura 4 se presentan cuatro posibles resultados (sin los ejes coordenados).

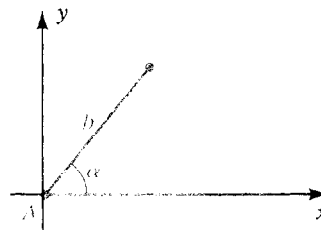


FIGURA 3

Las cuatro opciones de la figura se pueden describir de esta forma:

- a) El arco no corta al eje x y no se forma un triángulo.
- b) El arco es tangente al eje x y se forma un triángulo rectángulo.
- c) El arco corta al eje x positivo en dos puntos distintos y se forman dos triángulos.
- d) El arco corta las partes positiva y no positiva del eje x y se forma un triángulo.

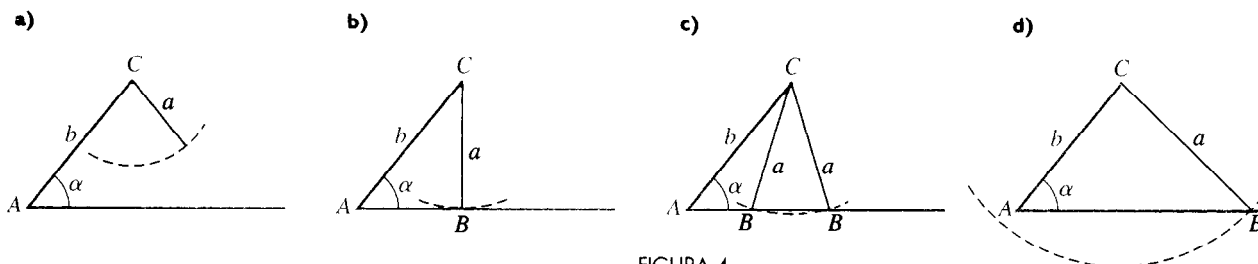


FIGURA 4

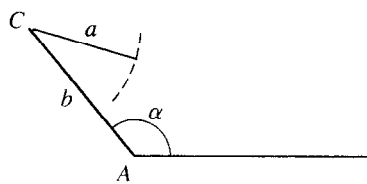
El caso particular que se presenta en un problema dado se hará evidente al tratar de obtener la solución; por ejemplo, si resolvemos la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}$$

y obtenemos $\operatorname{sen} \beta > 1$, entonces no existe un triángulo y tenemos el caso a); si se obtiene $\operatorname{sen} \beta = 1$, entonces $\beta = 90^\circ$ y, por lo tanto, aparece b); si $\operatorname{sen} \beta < 1$, hay dos posibles opciones para el ángulo β . Al comprobar ambas, se puede determinar si aparece c) o d).

Si la medida de α es mayor de 90° , entonces existe un triángulo si y sólo si $a > b$ (Fig. 5). En virtud de que se puede tener más de una posibilidad cuando nos den dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, esta situación a veces recibe el nombre de **caso ambiguo**.

a) $a < b$



b) $a > b$

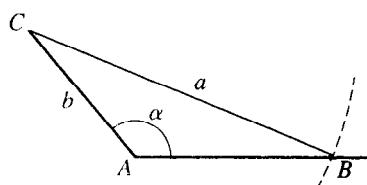


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Usar la ley de los senos (LLA)

Calcula las partes restantes del triángulo ABC con $\alpha = 67^\circ$, $a = 100$ y $c = 125$.

Solución Dado que se conocen α , a y c , se puede encontrar γ con la fórmula de la ley de los senos en donde aparece a , α , c y γ :

$$\frac{\text{sen } \gamma}{c} = \frac{\text{sen } \alpha}{a} \quad \text{ley de los senos}$$

$$\text{sen } \gamma = \frac{c \text{ sen } \alpha}{a} \quad \text{despejar sen } \gamma$$

$$= \frac{125 \text{ sen } 67^\circ}{100} \quad \text{sustituir } c, \alpha \text{ y } a$$

$$\approx 1.1506 \quad \text{calcular}$$

Como $\text{sen } \gamma > 1$, no se puede construir un triángulo con las partes dadas.

EJEMPLO 3 Usar la ley de los senos (LLA)

Calcula las partes restantes del triángulo ABC con $a = 12.4$, $b = 8.7$ y $\beta = 36.7^\circ$.

Para hallar α , se procede como sigue:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \quad \text{ley de los senos}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a \text{ sen } \beta}{b} \quad \text{despejar sen } \alpha$$

$$= \frac{12.4 \text{ sen } 36.7^\circ}{8.7} \quad \text{sustituir por } a, \beta \text{ y } b$$

$$\approx 0.8518 \quad \text{calcular}$$

Hay dos posibles ángulos α entre 0° y 180° tales que $\text{sen } \alpha \approx 0.8518$. El ángulo de referencia α_R es

$$\alpha_R \approx \text{sen}^{-1}(0.8518) \approx 58.4^\circ.$$

En consecuencia, las dos posibilidades para α son

$$\alpha_1 \approx 58.4^\circ \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \approx 121.6^\circ.$$

El ángulo $\alpha_1 \approx 58.4^\circ$ da el triángulo A_1BC de la figura 6 y el ángulo $\alpha_2 \approx 121.6^\circ$, el triángulo A_2BC .

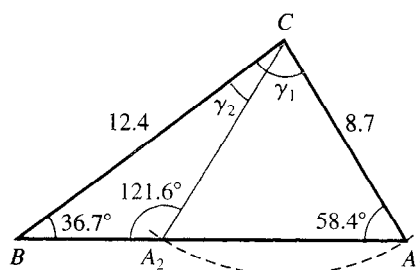


FIGURA 6

Si γ_1 y γ_2 denotan los terceros ángulos de los triángulos A_1BC y A_2BC correspondientes a los ángulos α_1 y α_2 , respectivamente, entonces

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta) \approx 180^\circ - (58.4^\circ + 36.7^\circ) \approx 84.9^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha_2 + \beta) \approx 180^\circ - (121.6^\circ + 36.7^\circ) \approx 21.7^\circ$$

Si c_1 es el lado opuesto a γ_1 en el triángulo A_1BC , entonces

$$\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha_1} \quad \text{ley de los senos}$$

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha_1} \quad \text{despejar } c_1$$

$$\approx \frac{12.4 \sin 84.9^\circ}{\sin 58.4^\circ} \approx 14.5 \quad \text{sustituir y calcular}$$

Por lo tanto, las partes restantes del triángulo A_1BC son

$$\alpha_1 \approx 58.4^\circ, \quad \gamma_1 \approx 84.9^\circ, \quad \text{y} \quad c_1 \approx 14.5.$$

Del mismo modo, si c_2 es el lado opuesto a γ_2 en el triángulo A_2BC , entonces

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha_2} \approx \frac{12.4 \sin 21.7^\circ}{\sin 121.6^\circ} \approx 5.4,$$

y las partes restantes del triángulo A_2BC son

$$\alpha_2 \approx 121.6^\circ, \quad \gamma_2 \approx 21.7^\circ, \quad \text{y} \quad c_2 \approx 5.4.$$

EJEMPLO 4 Usar un ángulo de elevación

Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 64° , un poste de teléfonos inclinado a un ángulo de 9° en dirección opuesta al Sol arroja una sombra de 21 pies de largo a nivel del suelo. Calcula la longitud del poste.

Solución El problema se ilustra en la figura 7 (no a escala). El triángulo ABC de la figura 8 también muestra los datos dados; cualquiera de los dos dibujos es suficiente para nuestro propósito. Observa que en la figura 8 hemos calculado los siguientes ángulos:

$$\beta = 90^\circ - 9^\circ = 81^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (64^\circ + 81^\circ) = 35^\circ$$

Para hallar la longitud del poste; es decir, el lado a del triángulo ABC , se procede como sigue:

$$\frac{a}{\sin 64^\circ} = \frac{21}{\sin 35^\circ} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{21 \sin 64^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 33 \quad \text{despejar } a \text{ y calcular}$$

Por lo tanto, el poste de teléfonos mide unos 33 pies de largo.

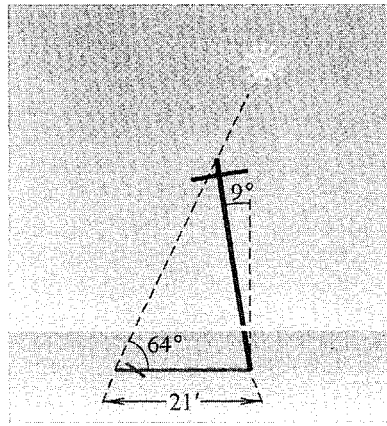


FIGURA 7

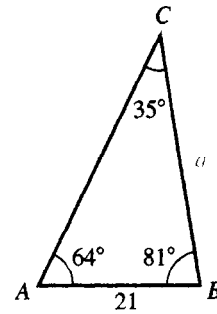


FIGURA 8

EJEMPLO 5 Usar rumbos

Un punto P a nivel del suelo está a 3.0 kilómetros al norte del punto Q . Un corredor avanza en dirección $N25^\circ E$ desde Q al punto R , y luego de R a P en dirección $S70^\circ O$. Calcula la distancia recorrida.

Solución La notación utilizada para especificar direcciones se presentó en la sección 2.8. Las flechas de la figura 9 dan la trayectoria del corredor, junto con una línea punteada en dirección norte-sur desde R a otro punto S .

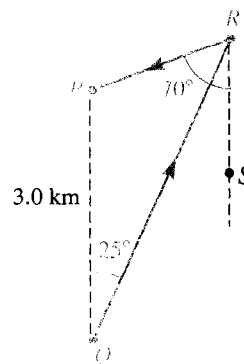


FIGURA 9

Como las líneas que pasan por PQ y RS son paralelas, se deduce por geometría que los ángulos alternos internos PQR y QRS miden ambos 25° . Así pues,

$$\angle PRQ = 70^\circ - 25^\circ = 45^\circ.$$

Estas observaciones dan el triángulo PQR de la figura 10 con

$$\angle QPR = 180^\circ - (25^\circ + 45^\circ) = 110^\circ.$$

Aplicamos dos veces la ley de los senos:

$$\frac{q}{\sen 25^\circ} = \frac{3.0}{\sen 45^\circ} \quad y \quad \frac{p}{\sen 110^\circ} = \frac{3.0}{\sen 45^\circ}$$

Por lo tanto

$$q = \frac{3.0 \sen 25^\circ}{\sen 45^\circ} \approx 1.8,$$

$$p = \frac{3.0 \sen 110^\circ}{\sen 45^\circ} \approx 4.0.$$

La distancia recorrida, $p + q$, es de aproximadamente $1.8 + 4.0 = 5.8$ km.

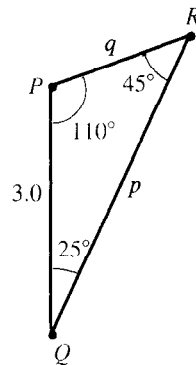


FIGURA 10

EJEMPLO 6 Localizar un banco de peces

Una embarcación pesquera utiliza equipo de sonar para detectar un banco (o cardumen) de peces a 2 millas al este de la embarcación, el cual se mueve en dirección $N51^\circ O$ a razón de 8 millas por hora (Fig. 11).

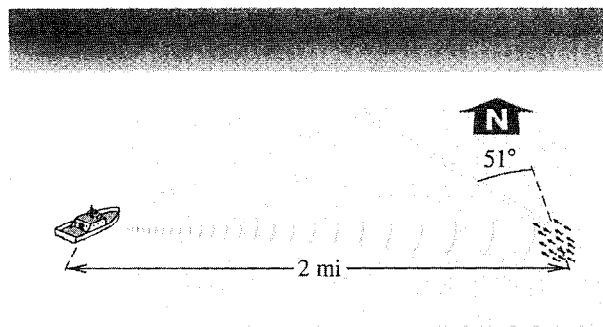


FIGURA 11

a) Si la embarcación navega a 20 millas por hora, calcula, al 0.1° más cercano, el área a que debe dirigirse para interceptar el cardumen.

b) Halla, al minuto más cercano, el tiempo que tardará en llegar a donde está el banco.

Solución

a) El triángulo de la figura 12, ilustra el problema, con el banco de peces en A , la embarcación en B y el punto de intercepción en C . Notarás que $\alpha = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$. Para obtener β comenzamos como sigue:

$$\frac{\sen \beta}{b} = \frac{\sen 39^\circ}{a} \quad \text{ley de los senos}$$

$$\sen \beta = \frac{b}{a} \sen 39^\circ \quad \text{despejar } \sen \beta$$

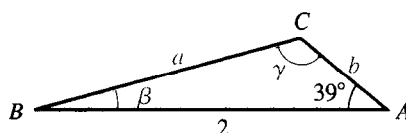


FIGURA 12

A continuación se encuentra b/a , denotando con t el tiempo en que la embarcación y los peces se encontrarán en C :

$$a = 20t, \quad b = 8t \quad \text{(distancia) = (velocidad)(tiempo)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8t}{20t} = \frac{2}{5} \quad \text{dividir } b \text{ entre } a$$

$$\sen \beta = \frac{2}{5} \sen 39^\circ \quad \text{sustituir con } b/a$$

$$\beta = \sen^{-1} \left(\frac{2}{5} \sen 39^\circ \right) \approx 14.6^\circ \quad \text{calcular}$$

Como $90^\circ - 14.6^\circ = 75.4^\circ$, el pesquero debe navegar en dirección (aproximada) N75.4°E.

b) Encontremos primero la distancia a de B a C ; comenzamos por advertir que

$$\gamma \approx 180^\circ - (39^\circ + 14.6^\circ) = 126.4^\circ.$$

En seguida tendremos

$$\frac{a}{\sen \alpha} = \frac{c}{\sen \gamma} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \sen \alpha}{\sen \gamma} \quad \text{despejar } a$$

$$\approx \frac{2 \sen 39^\circ}{\sen 126.4^\circ} \approx 1.56 \text{ min} \quad \text{sustituir y calcular}$$

Con $a = 20t$, encontramos el tiempo t para que la nave alcance el punto C :

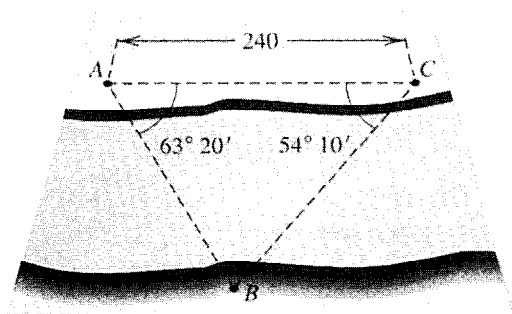
$$t = \frac{a}{20} \approx \frac{1.56}{20} \approx 0.08 \text{ h} \approx 5 \text{ min}$$

4.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 16: calcula las partes restantes del triángulo ABC .

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------|-------------|
| 1. $\alpha = 41^\circ$, | $\gamma = 77^\circ$, | $a = 10.5$ |
| 2. $\beta = 20^\circ$, | $\gamma = 31^\circ$, | $b = 210$ |
| 3. $\alpha = 27^\circ 40'$, | $\beta = 52^\circ 10'$, | $a = 32.4$ |
| 4. $\beta = 50^\circ 50'$, | $\gamma = 70^\circ 30'$, | $c = 537$ |
| 5. $\alpha = 42^\circ 10'$, | $\gamma = 61^\circ 20'$, | $b = 19.7$ |
| 6. $\alpha = 103.45^\circ$, | $\gamma = 27.19^\circ$, | $b = 38.84$ |
| 7. $\gamma = 81^\circ$, | $c = 11$, | $b = 12$ |
| 8. $\alpha = 32.32^\circ$, | $c = 574.3$, | $a = 263.6$ |
| 9. $\gamma = 53^\circ 20'$, | $a = 140$, | $c = 115$ |
| 10. $\alpha = 27^\circ 30'$, | $c = 52.8$, | $a = 28.1$ |
| 11. $\gamma = 47.74^\circ$, | $a = 131.08$, | $c = 97.84$ |
| 12. $\alpha = 42.17^\circ$, | $a = 5.01$, | $b = 6.12$ |
| 13. $\alpha = 65^\circ 10'$, | $a = 21.3$, | $b = 18.9$ |
| 14. $\beta = 113^\circ 10'$, | $b = 248$, | $c = 195$ |
| 15. $\beta = 121.624^\circ$, | $b = 0.283$, | $c = 0.178$ |
| 16. $\gamma = 73.01^\circ$, | $a = 17.31$, | $c = 20.24$ |

- 17. Agrimensura** Para hallar la distancia entre dos puntos A y B en las márgenes opuestas de un río, un agrimensor traza un segmento de recta AC de 240 yardas de longitud junto a una de las márgenes, y determina que las medidas de $\angle BAC$ y $\angle ACB$ son $63^\circ 20'$ y $54^\circ 10'$, respectivamente (ve la figura). Calcula la distancia entre A y B .



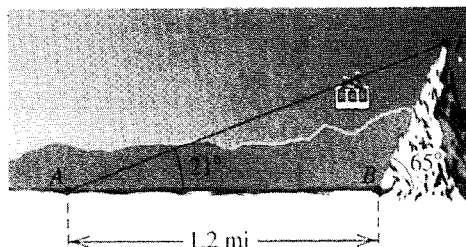
EJERCICIO 17

- 18. Agrimensura** A fin de establecer la distancia entre los puntos A y B , un agrimensor selecciona un punto C que

está a 375 yardas de A y 530 yardas de B . Si el $\angle BAC$ mide $49^\circ 30'$, calcula la distancia entre A y B .

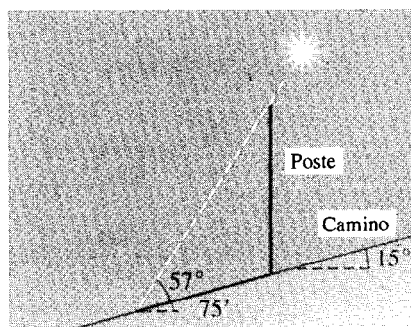
- 19. Ruta de un teleférico** Como se muestra en la figura, un teleférico transporta pasajeros desde el punto A , que está a 1.2 millas del punto B que se halla en la base de una montaña, hasta un punto P de la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21° y 65° , respectivamente.

- a) Calcula la distancia entre A y P .
b) Calcula la altura de la montaña.



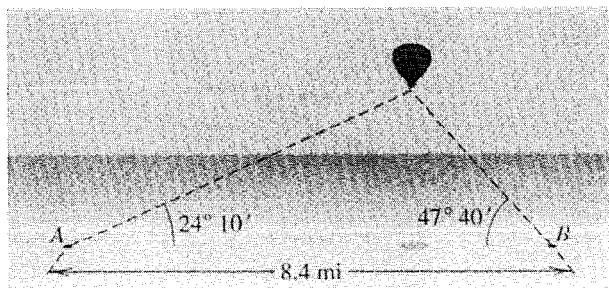
EJERCICIO 19

- 20. Longitud de una sombra** Un camino recto hace un ángulo de 15° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 57° , un poste vertical que está a un lado del camino proyecta una sombra de 75 pies de largo directamente cuesta abajo, como se muestra en la figura. Calcula la longitud del poste.



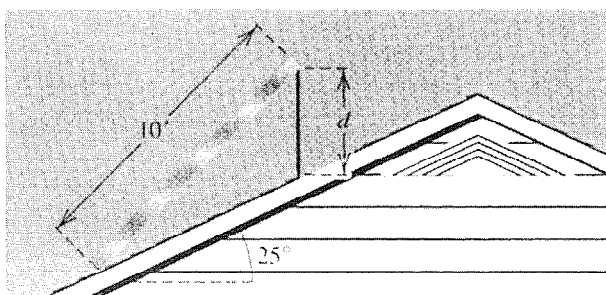
EJERCICIO 20

- 21. Altura de un globo de aire caliente** Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son $24^\circ 10'$ y $47^\circ 40'$, respectivamente. Según la figura, los puntos A y B están a 8.4 millas entre sí y el globo se encuentra entre ambos puntos, en el mismo plano vertical. Calcula la altura del globo sobre el suelo.



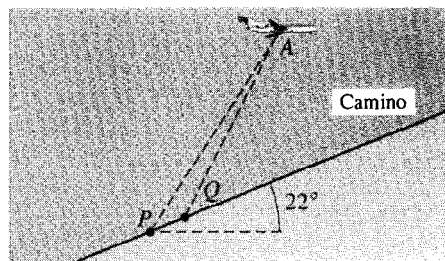
EJERCICIO 21

- 22. Instalación de un panel solar** En la figura se ilustra un panel solar de 10 pies de ancho, que debe instalarse en un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Calcula la longitud d del puntal que se requiere para que el panel haga un ángulo de 45° con la horizontal.



EJERCICIO 22

- 23. Distancia a un aeroplano** Un camino recto hace un ángulo de 22° con la horizontal. Desde un punto P sobre el camino, el ángulo de elevación de un aeroplano en el punto A es de 57° . En el mismo instante, desde otro punto Q situado a 100 metros cuesta arriba, el ángulo de elevación es de 63° . Como se indica en la figura, los puntos P , Q y A están en el mismo plano vertical. Calcula la distancia desde P al aeroplano.
- 24. Agrimensura** Un agrimensor observa que la dirección del punto A al B es $S63^\circ O$ y la dirección de A a C es $S38^\circ O$. La distancia de A a B es de 239 yardas y la de B a C , de 374 yardas. Calcula la distancia de A a C .

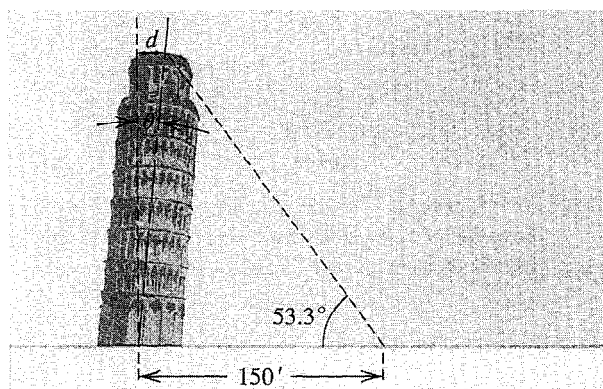


EJERCICIO 23

- 25. Localización de un incendio forestal** Un guardabosques ubicado en un punto de observación A , avista un incendio en dirección $N27^\circ 10' E$. Otro guardabosques, que está en un punto de observación B a 6.0 millas directamente al este de A , advierte el mismo incendio en $N52^\circ 40' O$. Calcula la distancia desde cada punto de observación al incendio.

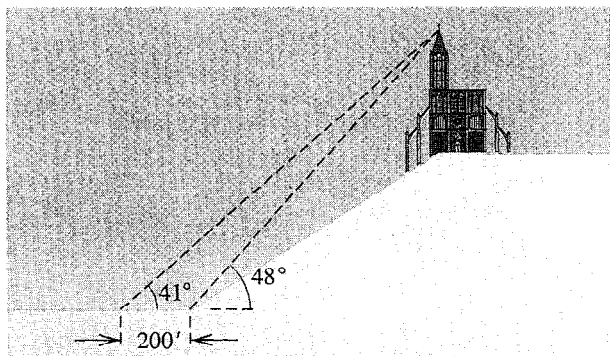
- 26. Inclinación de la torre de Pisa** Originalmente, esta torre estaba perpendicular al suelo y medía 179 pies de altura; debido al hundimiento del suelo, ahora se ha inclinado a cierto ángulo θ de la perpendicular, como se muestra en la figura. Cuando se observa la parte alta de la torre desde un punto situado a 150 pies del centro de su base, el ángulo de elevación es de 53.3° .

- a) Calcula el ángulo θ .
- b) Calcula la distancia d que se ha movido el centro de la parte superior de la torre con respecto a la perpendicular.



EJERCICIO 26

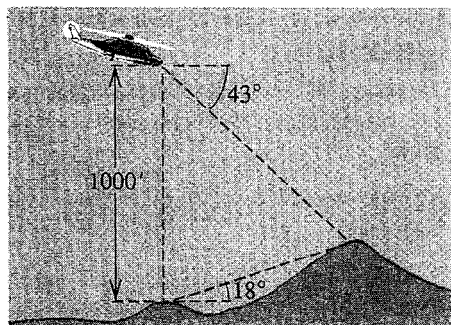
- 27. Altura de una catedral** Una catedral se encuentra sobre una colina, como en la figura (pág. que sigue). Cuando se observa la parte superior del campanario desde la base de la colina, el ángulo de elevación es de 48° ; cuando se ve a una distancia de 200 pies desde la base de la colina, es de 41° . La colina se eleva a un ángulo de 32° . Calcula la altura de la catedral.



EJERCICIO 27

- 28. Observación desde un helicóptero** Un helicóptero vuela a una altitud de 1000 pies sobre la cima de una montaña que mide 5210 pies, según se indica en la figura. Desde lo alto de esta montaña y desde el helicóptero se ve una segunda montaña, más elevada que la primera. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de 43° , y desde la cima de la primera montaña, el ángulo de elevación es de 18° .

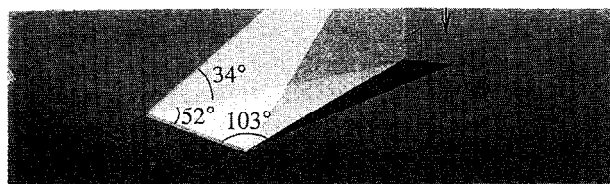
- Calcula la distancia de pico a pico.
- Calcula la altitud de la montaña más alta.



EJERCICIO 28

- 29.** El volumen V del prisma triangular recto que se muestra en la figura es de $\frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura del prisma. Calcula

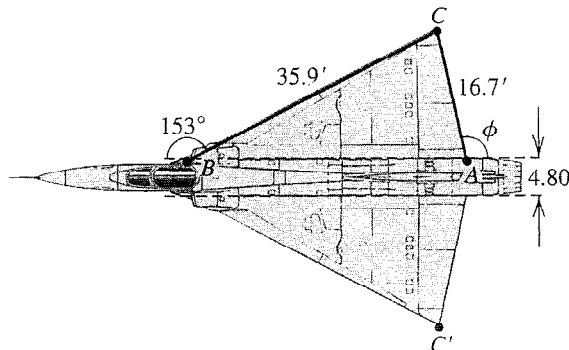
- h
- V



EJERCICIO 29

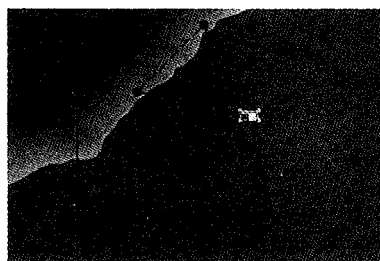
- 30. Diseño de un avión caza a reacción** En la figura se ilustra la planta de la parte superior del ala de un caza a reacción.

- Calcula el ángulo ϕ .
- Si el fuselaje mide 4.80 pies de ancho, calcula la envergadura CC' .
- Calcula el área del triángulo ABC .



EJERCICIO 30

- 31. Programa de computadora para agrimensores** Un programa emplea sistemas de coordenadas para ubicar posiciones geográficas. Una torre de perforación petrolera, situada frente a la costa en el punto R de la figura, se observa desde los puntos P y Q , y se encuentra que los triángulos $\angle QPR$ y $\angle RQP$ están a $55^\circ 50'$ y $65^\circ 22'$, respectivamente. Si los puntos P y Q tienen coordenadas (1487.7, 3452.8) y (3145.8, 5127.5), respectivamente, calcula las coordenadas de R .



EJERCICIO 31

- 32. Fórmula de Mollweide** La siguiente ecuación, llamada fórmula de Mollweide, se utiliza en ocasiones para comprobar soluciones de triángulos porque en ella aparecen todos los ángulos y lados:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$$

a) Usa la ley de los senos para demostrar que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma}$$

b) Usa una fórmula de suma a producto y una fórmula de doble ángulo para verificar la fórmula de Mollweide.

4.2 Ley de los cosenos

En la sección anterior expresamos que la ley de los senos no se puede aplicar directamente para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo, cuando se dan cualquiera de los dos casos siguientes:

(1) Dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)

(2) Tres lados (LLL)

Para estos casos aplicamos la *ley de los cosenos* que sigue:

Ley de los cosenos

Si ABC es un triángulo marcado en la forma acostumbrada, entonces:

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

PRUEBA Demostremos la primera de las fórmulas. Dado el triángulo ABC , pongamos el ángulo α en posición estándar, conforme se ilustra en la figura 13. Hemos dibujado α como obtuso, pero el análisis también es válido si α es agudo.

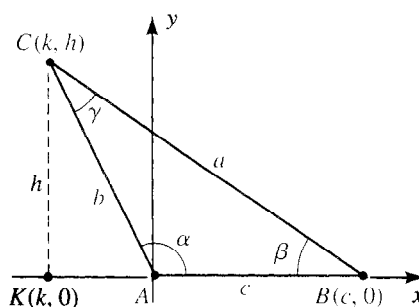


FIGURA 13

Considera la línea que pasa por C , paralela al eje y cortando al eje x en el punto $K(k, 0)$. Si hacemos $d(C, K) = h$, entonces C tiene coordenadas (k, h) . Por la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo,

$$\cos \alpha = \frac{k}{b} \quad \text{y} \quad \sin \alpha = \frac{h}{b}.$$

Al despejar k y h se obtiene

$$k = b \cos \alpha \quad \text{y} \quad h = b \sin \alpha.$$

Como el segmento AB tiene longitud c , las coordenadas de B son $(c, 0)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= [d(B, C)]^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2 && \text{fórmula de la distancia} \\
 &= (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2 && \text{sustituir con } k \text{ y } h \\
 &= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha && \text{elevar al cuadrado} \\
 &= b^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{factorizar primero y último términos} \\
 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{identidad de Pitágoras}
 \end{aligned}$$

Nuestro resultado es la primera fórmula expresada en la ley de los cosenos. Las fórmulas segunda y tercera se pueden obtener al poner β y γ , respectivamente, en posición estándar en un sistema coordenado. ■

Observemos que si $\alpha = 90^\circ$ en la figura 13, entonces $\cos \alpha = 0$ y la ley de los cosenos se reduce a $a^2 = b^2 + c^2$. Esto demuestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

En lugar de aprender de memoria cada una de las tres fórmulas de la ley de los cosenos, es más conveniente recordar el siguiente enunciado, que toma en cuenta a todas.

Ley de los cosenos (forma general)

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los mismos lados por el coseno del ángulo entre ellos (Fig. 14).

Dados dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar el tercer lado, a continuación recurriremos a la ley de los senos y encontramos otro ángulo del triángulo. Siempre que se siga este procedimiento, es mejor determinar el ángulo opuesto al lado más corto, ya que siempre es agudo. De este modo evitamos la posibilidad de obtener dos soluciones cuando se despeja una ecuación trigonométrica que comprende ese ángulo, como se ilustra en el siguiente ejemplo. Por supuesto que también se puede usar la ley de los cosenos para hallar otro ángulo.

EJEMPLO 1 Usar la ley de los cosenos (LAL)

Calcula las partes restantes del triángulo ABC si $a = 5.0$, $c = 8.0$, y $\beta = 77^\circ$.

Solución El triángulo aparece en la figura 14. Como β es el ángulo *entre* los lados a y c , comenzamos por calcular b (lado opuesto a β):

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta && \text{ley de los cosenos} \\
 &= (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0) \cos 77^\circ && \text{sustituir con } a, c \text{ y } \beta \\
 &= 89 - 80 \cos 77^\circ \approx 71.0 && \text{simplificar y calcular} \\
 b &\approx \sqrt{71.0} \approx 8.4 && \text{tomar la raíz cuadrada}
 \end{aligned}$$

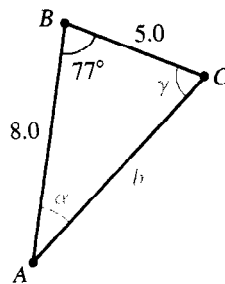


FIGURA 14

Encontremos otro ángulo del triángulo mediante la ley de los senos. De acuerdo con las observaciones que preceden este ejemplo, aplicaremos la ley de los senos y hallaremos α puesto que es el ángulo opuesto al lado más corto, el cual es a .

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \quad \text{ley de los senos}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a \text{ sen } \beta}{b} \quad \text{despejar sen } \alpha$$

$$= \frac{5.0 \text{ sen } 77^\circ}{\sqrt{71.0}} \approx 0.5782 \quad \text{sustituir y calcular}$$

Como α es agudo,

$$\alpha = \text{sen}^{-1}(0.5782) \approx 35.3^\circ.$$

Finalmente, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, tenemos

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (35.3^\circ + 77^\circ) = 67.7^\circ.$$

Dados los tres lados de un triángulo, se puede usar la ley de los cosenos para hallar *cualquiera* de los tres ángulos. Siempre encontraremos primero el ángulo más grande; es decir, el *ángulo opuesto al lado más largo*, ya que esta práctica garantizará que los ángulos restantes sean agudos. Luego se puede encontrar otro ángulo del triángulo aplicando la ley de los senos o la de los cosenos. Observemos que cuando se determina un ángulo por medio de la ley de los cosenos no hay caso ambiguo, ya que siempre se obtiene un ángulo único entre 0° y 180° .

EJEMPLO 2 Usar la ley de los cosenos (LLL)

Si el triángulo ABC tiene lados $a = 90$, $b = 70$ y $c = 40$, calcula los ángulos α , β y γ al grado más cercano.

Solución De acuerdo con la observación previa, primero se encuentra el ángulo opuesto al lado más largo a ; por lo tanto, se escoge la forma de la ley de los cosenos donde aparece α y se procede como sigue:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{despejar } \cos \alpha$$

$$= \frac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} = -\frac{2}{7} \quad \text{sustituir y simplificar}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{2}{7}\right) \approx 106.6^\circ \approx 107^\circ \quad \text{calcular } \alpha$$

En estas condiciones se puede usar la ley de los senos o la de los cosenos para hallar β . Usemos la ley de los cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{despejar } \cos \beta$$

$$= \frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \frac{2}{3} \quad \text{sustituir y simplificar}$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3}\right) \approx 48.2^\circ \approx 48^\circ \quad \text{calcular } \beta$$

Por último, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, tenemos

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (107^\circ + 48^\circ) = 25^\circ.$$

EJEMPLO 3 Calcular las diagonales de un paralelogramo

Un paralelogramo tiene lados de longitud 30 cm y 70 cm y uno de los ángulos mide 65° . Calcula la longitud de cada diagonal al centímetro más cercano.

Solución En la figura 15 se ilustra el paralelogramo $ABCD$ con sus diagonales AC y BD . Al usar el triángulo ABC con $\angle ABC = 65^\circ$, se puede calcular AC como sigue:

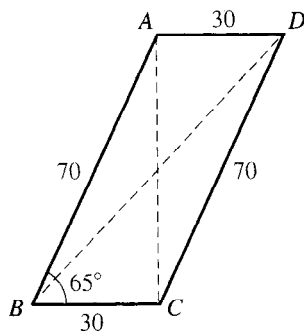


FIGURA 15

$$(AC)^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2(30)(70) \cos 65^\circ \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$\approx 900 + 4900 - 4200(0.4226) \approx 4025.1 \quad \text{calcular}$$

$$AC \approx \sqrt{4025.1} \approx 63 \text{ cm} \quad \text{tomar raíz cuadrada}$$

Análogamente, si se usa el triángulo BAD y $\angle BAD = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, se puede calcular BD como sigue:

$$(BD)^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2(30)(70) \cos 115^\circ \approx 7575.0 \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$BD \approx \sqrt{7575.0} \approx 87 \text{ cm} \quad \text{tomar raíz cuadrada}$$

EJEMPLO 4 Hallar la longitud de un cable

Un poste vertical de 40 pies de altura está en una cuesta que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcula la longitud mínima de cable que llegará de la parte superior del poste a un punto a 72 pies cuesta abajo (medido desde la base del poste).

Solución La figura 16 ilustra los datos dados. Se desea encontrar AC . Al consultar la figura se ve que

$$\angle ABD = 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ \quad \text{y} \quad \angle ABC = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ.$$

Si se usa el triángulo ABC , se puede calcular AC como sigue:

$$(AC)^2 = (72)^2 + (40)^2 - 2(72)(40) \cos 107^\circ \approx 8468 \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$AC \approx \sqrt{8468} \approx 92 \text{ pies} \quad \text{tomar raíz cuadrada.}$$

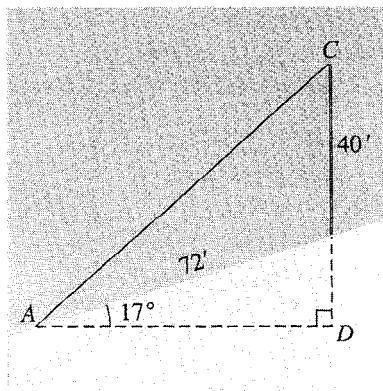


FIGURA 16

Con la ley de los cosenos se puede derivar una fórmula para encontrar el área de un triángulo. Demostremos primero un resultado preliminar.

Dado el triángulo ABC , pongamos el ángulo α en una posición estándar (Fig. 13). Según se muestra en la prueba de la ley de los cosenos, la altitud h desde el vértice C es $h = b \operatorname{sen} \alpha$. Como el área $\mathcal{A} = 1/2 ch$, se ve que

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha$$

Nuestro argumento es independiente del ángulo específico que se ponga en posición estándar. Al tomar β y γ en posición estándar se obtienen las fórmulas

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \beta \quad \text{y} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$$

Las tres fórmulas están cubiertas en el siguiente enunciado.

Área de un triángulo

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera y el seno del ángulo entre ellos.

Los siguientes dos ejemplos ilustran algunos usos de este resultado.

EJEMPLO 5 Calcular el área de un triángulo

Calcula el área del triángulo ABC con $a = 2.20$ cm, $b = 1.30$ cm y $\gamma = 43.2^\circ$.

Solución Dado que γ es el ángulo entre los lados a y b , el resultado anterior se puede usar directamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma && \text{fórmula del área de un triángulo} \\ &= \frac{1}{2} (2.20)(1.30) \operatorname{sen} 43.2^\circ \approx 0.98 \text{ cm}^2 && \text{sustituir y calcular} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Calcular el área de un triángulo

Calcula el área del triángulo ABC si $a = 5.0$ cm, $b = 3.0$ cm y $\alpha = 37^\circ$.

Solución A fin de aplicar la fórmula para encontrar el área de un triángulo, se debe usar el ángulo γ que está entre los lados a y b . Como nos dan a , b y α , primero se encuentra β :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{ley de los senos} \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{despejar } \operatorname{sen} \beta \\ &= \frac{3.0 \operatorname{sen} 37^\circ}{5.0} && \text{sustituir por } b, \alpha \text{ y } a \\ \beta_R &= \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{3.0 \operatorname{sen} 37^\circ}{5.0} \right) \approx 21^\circ && \text{ángulo de referencia para } \beta \\ \beta &\approx 21^\circ \quad \text{o} \quad \beta \approx 159^\circ && \beta_R \text{ o } 180^\circ - \beta_R \end{aligned}$$

Se rechaza $\beta \approx 159^\circ$ porque entonces $\alpha + \beta = 196^\circ \geq 180^\circ$; en consecuencia, $\beta \approx 21^\circ$ y

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (37^\circ + 21^\circ) = 122^\circ$$

Finalmente, se calcula el área del triángulo como sigue:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \text{fórmula del área de un triángulo}$$

$$\approx \frac{1}{2} (5.0)(3.0) \sin 122^\circ \approx 6.4 \text{ cm}^2 \quad \text{sustituir y calcular}$$

Usaremos el resultado anterior para el área de un triángulo con objeto de derivar la *fórmula de Herón*, que expresa el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados.

Fórmula de Herón

El área A de un triángulo con lados a , b y c está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

en donde s es el semiperímetro, es decir, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

PRUEBA Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} bc \sin \alpha \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} bc(1 + \cos \alpha) \cdot \frac{1}{2} bc(1 - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

Obtendremos la fórmula de Herón sustituyendo las expresiones bajo el signo del radical con expresiones donde sólo aparezca a , b y c . Se despeja $\cos \alpha$ de (1) de la ley de los cosenos y luego se sustituye como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} bc(1 + \cos \alpha) &= \frac{1}{2} bc \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{1}{2} bc \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4} \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} \\ &= \frac{(b+c)+a}{2} \cdot \frac{(b+c)-a}{2} \end{aligned}$$

Se usa el mismo tipo de manipulación en la segunda expresión bajo el signo de radical:

$$\frac{1}{2} bc (1 - \cos \alpha) = \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b + c}{2}$$

Si ahora se sustituye por las expresiones bajo el signo de radical, se obtiene

$$\therefore \mathcal{A} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

Al hacer $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, se ve que

$$s - a = \frac{b+c-a}{2}, \quad s - b = \frac{a-b+c}{2}, \quad s - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

La sustitución de \mathcal{A} en la última ecuación proporciona la fórmula de Herón.

EJEMPLO 7 Usar la fórmula de Herón

Un campo triangular tiene lados de longitudes 125, 160 y 225 yardas. Calcula el número de acres en el campo (un acre equivale a 4840 yardas cuadradas).

Solución Encontraremos el área del campo usando la fórmula de Herón, con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$:

$$s = \frac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \frac{1}{2}(510) = 255$$

$$s - a = 255 - 125 = 130$$

$$s - b = 255 - 160 = 95$$

$$s - c = 255 - 225 = 30$$

Al sustituir en la fórmula de Herón se obtiene

$$\therefore \mathcal{A} = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} \approx 9720 \text{ yd}^2.$$

Puesto que hay 4840 yardas cuadradas en un acre, el número de acres es $\frac{9720}{4840}$, o sea **alrededor de 2**.

4.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 10: calcula las partes restantes del triángulo ABC .

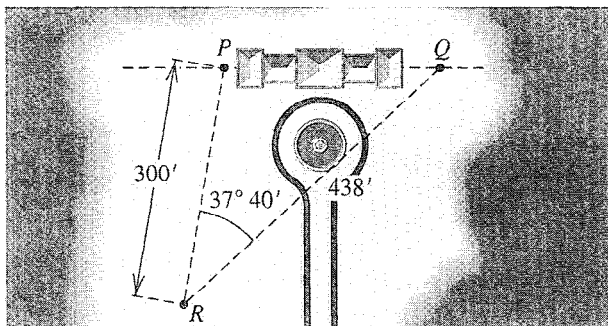
- | | | |
|-------------------------------|--------------|------------|
| 1. $\alpha = 60^\circ$, | $b = 20$, | $c = 30$ |
| 2. $\gamma = 45^\circ$, | $b = 10.0$, | $a = 15.0$ |
| 3. $\beta = 150^\circ$, | $a = 150$, | $c = 30$ |
| 4. $\beta = 73^\circ 50'$, | $c = 14.0$, | $a = 87.0$ |
| 5. $\gamma = 115^\circ 10'$, | $a = 1.10$, | $b = 2.10$ |
| 6. $\alpha = 23^\circ 40'$, | $c = 4.30$, | $b = 70.0$ |
| 7. $a = 2.0$, | $b = 3.0$, | $c = 4.0$ |
| 8. $a = 10$, | $b = 15$, | $c = 12$ |
| 9. $a = 25.0$, | $b = 80.0$, | $c = 60.0$ |
| 10. $a = 20.0$, | $b = 20.0$, | $c = 10.0$ |

11. Dimensiones de un terreno triangular El ángulo de una esquina de un terreno triangular mide $73^\circ 40'$, y los lados que se unen en esta esquina miden 175 pies y 150 de largo. Calcula la longitud del tercer lado.

12. Agrimensura Para hallar la distancia entre los puntos A y B , un agrimensor escoge un punto C que está a 420 yardas de A y a 540 yardas de B . Si el ángulo ACB mide $63^\circ 10'$, calcula la distancia entre A y B .

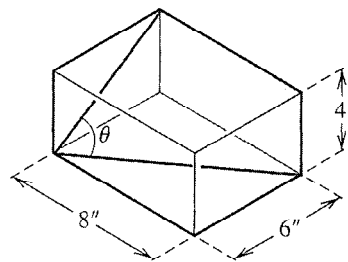
13. Distancia entre vehículos Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y circulan en carreteras rectas que difieren 84° en dirección. Si viajan a 60 y 45 millas por hora, respectivamente, ¿a qué distancia aproximada se hallarán al cabo de 20 minutos?

- 14. Ángulos de un terreno triangular** Un terreno triangular tiene lados de 420, 350 y 180 pies de longitud. Calcula el ángulo más pequeño entre los lados.
- 15. Distancia entre naves** Una embarcación sale de puerto a la 1:00 p.m. y navega al $S35^\circ E$ a una velocidad de 24 millas por hora. Otra sale del mismo puerto a la 1:30 p.m. y navega al $S20^\circ O$ a 18 millas por hora. ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentran una de otra a las 3:00 p.m.?
- 16. Distancia de vuelo** Un aeroplano vuela 165 millas desde el punto A en dirección 130° y luego 80 millas en dirección 245° . ¿A qué distancia aproximada se encontrará del punto A ?
- 17. Ruta de un trotador** Un trotador corre a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos en dirección $S40^\circ E$ durante 20 minutos y luego en dirección $N20^\circ E$ durante los siguientes 16 minutos. Calcula, al décimo de milla más cercano, la distancia desde el punto final al punto de partida de la pista.
- 18. Agrimensura** Los puntos P y Q ubicados a nivel del suelo están en lados opuestos de un edificio. Para hallar la distancia entre los puntos, un agrimensor escoge un punto R que está a 300 pies del punto P y a 438 pies del Q , y luego determina que el ángulo PRQ mide $37^\circ 40'$ (ve la figura). Calcula la distancia entre P y Q .



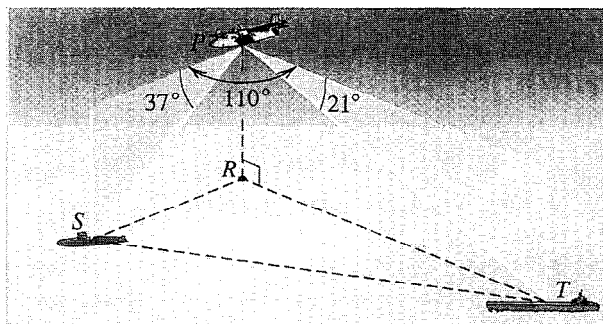
EJERCICIO 18

- 19. Rumbo de una lancha de motor** Una lancha de motor navegó a lo largo de una ruta con lados de 2 km, 4 km y 3 km, respectivamente. Recorrió el primer lado en dirección $N20^\circ O$ y el segundo en dirección $S\theta^\circ O$, en donde θ es la medida en grados de un ángulo agudo. Calcula, al minuto más cercano, la dirección en que recorrió el tercer lado.
- 20. Ángulo de una caja** La caja rectangular de la figura tiene dimensiones de $8'' \times 6'' \times 4''$. Calcula el ángulo θ formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado de $6'' \times 4''$.



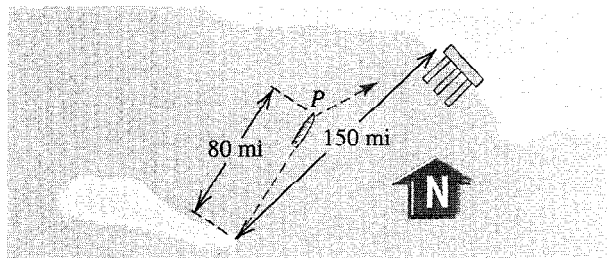
EJERCICIO 20

- 21. Distancia en un parque de beisbol** Un parque de beisbol (también llamado diamante) tiene cuatro bases que forman un cuadrado y están a 90 pies una de otra; el montículo del lanzador se halla a 60.5 pies del plato. Calcula la distancia del montículo del lanzador a cada una de las otras tres bases.
- 22.** Un rombo tiene lados de 100 centímetros de longitud y el ángulo en uno de los vértices es de 70° . Calcula las longitudes de las diagonales al décimo de centímetro más cercano.
- 23. Reconocimiento** Un aeroplano P de reconocimiento, que vuela a 10 000 pies del un punto R sobre la superficie del agua, localiza un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y un buque tanque T a un ángulo de depresión de 21° , como se muestra en la figura. Además, el $\angle SPT$ resulta ser de 110° . Calcula la distancia entre el submarino y el buque tanque.



EJERCICIO 23

- 24. Corrección del rumbo de un buque** Un crucero zarpa con rumbo $N47^\circ E$ desde una isla a un puerto en tierra firme que está a 150 millas. Después de navegar por aguas de fuertes corrientes, la nave está fuera de curso en una posición P ubicada a $N33^\circ E$ y a 80 millas de la isla, como se ilustra en la figura (pág. 254).
- a) ¿A qué distancia aproximada estará del puerto de arribo?
- b) ¿Qué dirección debe tomar para corregir su curso?

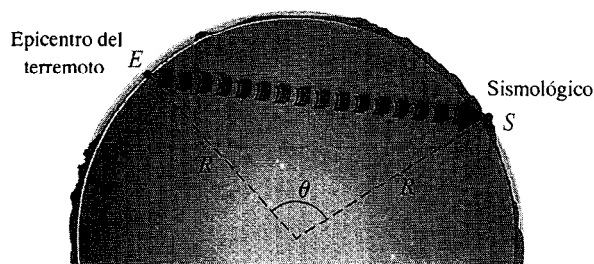


EJERCICIO 24

- 25. Sismología** Los sismólogos investigan la estructura del interior de la Tierra analizando las ondas sísmicas ocasionadas por terremotos. Si se supone que el interior del globo terráqueo es homogéneo, entonces estas ondas viajarán en línea recta a una velocidad constante v . La figura exhibe una sección transversal del planeta, con el epicentro en E y un observatorio en S . Con la ley de los cosenos demuestra que el tiempo t para que una onda viaje por el interior de la Tierra de E a S está dado por

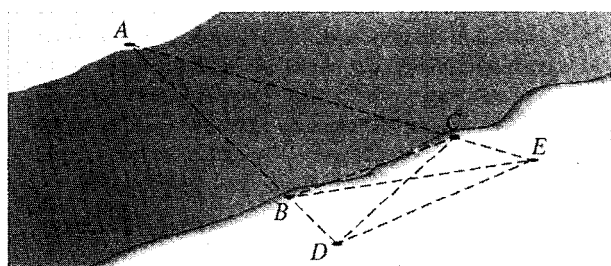
$$t = \frac{2R}{v} \sin \frac{\theta}{2},$$

en donde R es el radio de la Tierra y θ es el ángulo indicado por el vértice en el centro del planeta.



EJERCICIO 25

- 26. Cálculo de distancias** La distancia de una margen a otra del río que se ve en la figura se puede encontrar sin medir ángulos. Se seleccionan los puntos B y C de la orilla opuesta, y los segmentos de recta AB y AC se



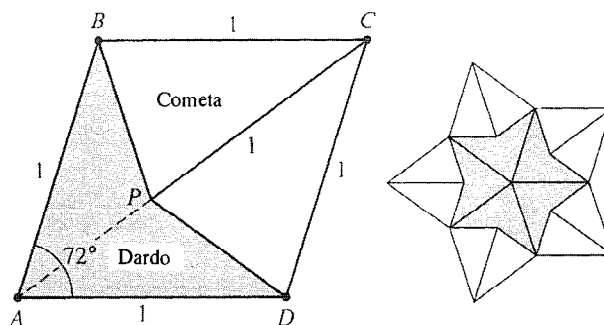
EJERCICIO 26

prolongan según se muestra. Se escogen los puntos D y E como se indica y se miden las distancias BC , BD , BE , CD y CE . Supón que $BC = 184$ pies, $BD = 102$ pies, $BE = 218$ pies, $CD = 236$ pies, y $CE = 80$ pies.

- Calcula las distancias AB y AC .
- Calcula la distancia más corta a la otra orilla desde el punto A .

- 27. Tejas en estrella** Las tejas en estrella se forman a partir de un rombo $ABCD$ con lados de longitud 1 y un ángulo interior de 72° . Primero se ubica un punto P de la diagonal AC que está a una distancia 1 del vértice C y luego se dibujan los segmentos PB y PD a los otros vértices de la diagonal, como se muestra en la figura. Las dos tejas formadas reciben el nombre de dardo y cometa. En química molecular se han aplicado figuras tridimensionales similares a estas tejas.

- Halla la medida en grados de $\angle BPC$, $\angle APB$, y $\angle ABP$.
- Calcula, al 0.01 más cercano, la longitud del segmento BP .
- Calcula, al 0.01 más cercano, el área de una cometa y el área de un dardo.

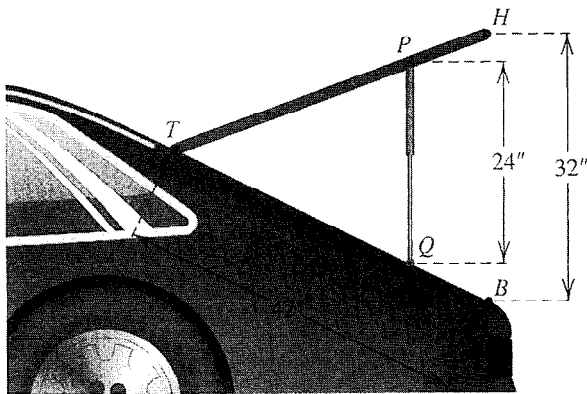


EJERCICIO 27

- 28. Diseño de automóviles** La portezuela trasera de un auto mide 42 pulgadas de largo. Hay que fijar un soporte que mide 24 pulgadas cuando está extendido por completo tanto a la portezuela como a la carrocería, de modo que cuando la portezuela se abra del todo, el soporte quedará en posición vertical y habrá un espacio libre de 32 pulgadas como se ilustra en la figura (pág. 255). Calcula las longitudes de los segmentos TQ y TP .

Ejercicios 29 al 36: calcula el área del triángulo ABC .

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------|------------|
| 29. $\alpha = 60^\circ$, | $b = 20$, | $c = 30$ |
| 30. $\gamma = 45^\circ$, | $b = 10.0$, | $a = 15.0$ |
| 31. $\alpha = 40.3^\circ$, | $\beta = 62.9^\circ$, | $b = 5.63$ |
| 32. $\alpha = 35.7^\circ$, | $\gamma = 105.2^\circ$, | $b = 17.2$ |



EJERCICIO 28

33. $\alpha = 80.1^\circ$, $a = 8.0$, $b = 3.4$
 34. $\gamma = 32.1^\circ$, $a = 14.6$, $c = 15.8$

35. $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$
 36. $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

Ejercicios 37 y 38: un campo triangular tiene longitudes a, b y c (en yd). Calcula el número de acres del campo (1 acre = 4840 yd²).

37. $a = 115$, $b = 140$, $c = 200$
 38. $a = 320$, $b = 350$, $c = 500$

Ejercicios 39 y 40: calcula el área de un paralelogramo que tiene lados de longitudes a y b (en ft) si el ángulo de un vértice mide θ .

39. $a = 12.0$, $b = 16.0$, $5\theta = 40^\circ$
 40. $a = 40.3$, $b = 52.6$, $\theta = 100^\circ$

4.3 Números complejos

En esta sección repasaremos el sistema de números complejos estudiado en álgebra. En las dos secciones que siguen introducimos la forma trigonométrica de estos números y la aplicamos a problemas donde aparecen raíces, potencias y soluciones de ecuaciones.

Los *números complejos* son necesarios para despejar ecuaciones que no se pueden resolver sólo con el conjunto \mathbb{R} de números reales. La siguiente tabla ilustra varias ecuaciones cuadráticas sencillas y los tipos de números que precisa su solución.

Ecuación	Soluciones	Tipos de números requeridos
$x^2 = 9$	3, -3	Enteros
$x^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$	Números racionales
$x^2 = 5$	$\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$	Números irracionales
$x^2 = -5$?	Números complejos

Las soluciones de las primeras tres ecuaciones de la tabla están en \mathbb{R} ; sin embargo, como los cuadrados de los números reales nunca son negativos, \mathbb{R} no contiene las soluciones de $x^2 = -5$. Para resolver esta ecuación se necesita el **sistema de números complejos** \mathbb{C} , que contiene tanto \mathbb{R} como los números cuyos cuadrados son negativos.

Comencemos por introducir la **unidad imaginaria**, denotada por i , que tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de i

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$$

Debido a que su cuadrado es negativo, la letra i no representa un número real y es una nueva entidad matemática que hace posible obtener \mathbb{C} . Como i , junto con \mathbb{R} , ha de estar en \mathbb{C} , debemos considerar productos de la forma bi para un número real b y expresiones de la forma $a + bi$ para números reales a y b . La siguiente tabla contiene las definiciones que utilizaremos.

Terminología	Definición
Número complejo	$a + bi$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$
Igualdad	$a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$
Suma	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Producto	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

No es necesario memorizar las definiciones de suma y multiplicación de los números complejos de la tabla; basta *tratar todos los símbolos como si tuvieran propiedades de números reales, con una excepción: se sustituye i^2 con -1* . Así, para el producto $(a + bi)(c + di)$ simplemente se usan las leyes distributivas y el hecho de que

$$(bi)(di) = bdi^2 = bd(-1) = -bd.$$

EJEMPLO 1 Suma y multiplicación de números complejos

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$ **b)** $(3 + 4i)(2 + 5i)$

Solución a) $(3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$

b) $(3 + 4i)(2 + 5i) = (3 + 4i)2 + (3 + 4i)(5i)$
 $= 6 + 8i + 15i + 20i^2$
 $= 6 + 23i + 20(-1)$
 $= -14 + 23i$

El conjunto \mathbb{R} de números reales puede identificarse con el conjunto de números complejos de la forma $a + 0i$. También es conveniente denotar el número complejo $0 + bi$ con bi . Así,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

En consecuencia, podemos considerar $a + bi$ como la suma de dos números complejos a y bi (es decir, $a + 0i$ y $0 + bi$). Llamamos a a la **parte real** y b a la **parte imaginaria** del número complejo $a + bi$.

Ahora podemos resolver una ecuación como $x^2 = -5$. Específicamente, como

$$(\sqrt{5}i)(\sqrt{5}i) = (\sqrt{5})^2 i^2 = 5(-1) = -5,$$

se ve que una solución es $\sqrt{5}i$ y otra es $-\sqrt{5}i$.

En la tabla que sigue se define la diferencia entre números complejos y la multiplicación de un número complejo por un número real.

Terminología	Definición
Diferencia	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Multiplicación por un número real	$k(a + bi) = ka + (kb)i$

Si se nos pide escribir una expresión de la forma $a + bi$, también aceptaremos la forma $a - di$, ya que $a - di = a + (-d)i$.

EJEMPLO 2 Operaciones con números complejos

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$ **b)** $(4 - 3i)(2 + i)$ **c)** $i(3 - 2i)^2$ **d)** i^{51}

Solución a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$

b) $(4 - 3i)(2 + i) = 8 - 6i + 4i - 3i^2 = 11 - 2i$

c) $i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

d) Si se toman potencias sucesivas de i , se obtiene

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

y luego el ciclo empieza de nuevo:

$$i^5 = i, \quad i^6 = i^2 = -1, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

En particular,

$$i^{51} = i^{48} i^3 = (i^4)^{12} i^3 = (1)^{12} i^3 = i^3 = -i.$$

El siguiente concepto tiene usos importantes cuando se trabaja con números complejos.

Definición del conjugado de un número complejo

Como $a - bi = a + (-bi)$, se deduce que el conjugado de $a + bi$ es

$$a - (-bi) = a + bi.$$

Por lo tanto, $a + bi$ y $a - bi$ son conjugados entre sí.

ILUSTRACIÓN

Conjugados

Número complejo	Conjugado
■ $5 + 7i$	$5 - 7i$
■ $5 - 7i$	$5 + 7i$
■ $4i$	$-4i$
■ 3	3

Las dos propiedades siguientes son consecuencia de las definiciones de suma y producto de números complejos.

Propiedades de conjugados	Demostración
$(a + bi) + (a - bi) = 2a$	$(4 + 3i) + (4 - 3i) = 4 + 4 = 2 \cdot 4$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$	$(4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 4^2 - 3^2 i^2 = 4^2 + 3^2$

Observa que la suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales.

Los conjugados son útiles para hallar el **inverso multiplicativo** $\frac{1}{a + bi}$ de $a + bi$ o a fin de simplificar el cociente $\frac{a + bi}{c + di}$ de dos números complejos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Cocientes de números complejos

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $\frac{1}{9 + 2i}$ b) $\frac{7 - i}{3 - 5i}$

Solución a) $\frac{1}{9 + 2i} = \frac{1}{9 + 2i} \cdot \frac{9 - 2i}{9 - 2i} = \frac{9 - 2i}{81 + 4} = \frac{9}{85} - \frac{2}{85}i$

b) $\frac{7 - i}{3 - 5i} = \frac{7 - i}{3 - 5i} \cdot \frac{3 + 5i}{3 + 5i} = \frac{21 + 35i - 3i - 5i^2}{9 + 25}$

$$= \frac{26 + 32i}{34} = \frac{13}{17} + \frac{16}{17}i$$

Si p es un número real positivo, entonces la ecuación $x^2 = -p$ tiene soluciones en \mathbb{C} . Una solución es $\sqrt{p}i$, ya que

$$(\sqrt{p}i)^2 = (\sqrt{p})^2 i^2 = p(-1) = -p.$$

Del mismo modo, $-\sqrt{p}i$ también es una solución.

La definición de $\sqrt{-r}$ de la siguiente tabla se origina en $(\sqrt{r}i)^2 = -r$ para $r > 0$. Cuando uses esta definición, ten cuidado de *no* escribir \sqrt{ri} cuando en realidad buscas $\sqrt{r}i$.

Terminología	Definición	Demostraciones
Raíz cuadrada principal $\sqrt{-r}$ para $r > 0$	$\sqrt{-r} = \sqrt{r}i$	$\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3$ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$ $\sqrt{-1} = \sqrt{1}i = i$

El signo de radical debe usarse con cuidado cuando el radicando sea negativo; por ejemplo, la fórmula $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que se cumple para números reales positivos, no es cierta cuando a y b son negativos, como se ilustra a continuación

$$\sqrt{-3} \sqrt{-3} = (\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i) = (\sqrt{3})^2 i^2 = 3(-1) = -3$$

pero

$$\sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{9} = 3.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{-3} \sqrt{-3} \neq \sqrt{(-3)(-3)}.$$

Si sólo a , o sólo b , es negativa, entonces $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. En general, no aplicamos leyes de radicales si los radicandos son negativos. En lugar de esto se cambia la forma de radicales antes de efectuar operación alguna, como se ve en este ejemplo:

EJEMPLO 4 Trabajar con raíces negativas de números complejos

Expresa en la forma $a + bi$, cuando a y b son números reales:

$$(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4})$$

Solución Primero se usa la definición $\sqrt{-r} = \sqrt{r}i$, y luego se simplifica:

$$\begin{aligned} (5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}) &= (5 - \sqrt{9}i)(-1 + \sqrt{4}i) \\ &= (5 - 3i)(-1 + 2i) \\ &= -5 + 10i + 3i - 6i^2 \\ &= -5 + 13i + 6 = 1 + 13i \end{aligned}$$

Si a , b y c son números reales tales que $b^2 - 4ac \geq 0$, si $a \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son los dos números *complejos* dados líneas arriba. Observa que las soluciones son conjugadas una de otra.

EJEMPLO 5 Una ecuación cuadrática con soluciones complejasResuelve $5x^2 + 2x + 1 = 0$.**Solución** Si aplicas la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = 2$ y $c = 1$, verás que

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.**EJEMPLO 6** Una ecuación con soluciones complejasResuelve $x^3 - 1 = 0$.**Solución** Si utilizamos la fórmula de factorización de la diferencia de dos cubos (consulta el Ap. I), escribimos $x^3 - 1 = 0$ como

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Al igualar cada factor a cero y resolver las ecuaciones resultantes, se obtienen las soluciones

$$1, \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Las tres soluciones de $x^3 - 1 = 0$ se llaman **raíces cúbicas de la unidad**.**4.3 EJERCICIOS****Ejercicios 1 al 34:** escribe la expresión en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1. $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$

2. $(-5 + 7i) + (4 + 9i)$

3. $(7 - 6i) - (-11 - 3i)$

4. $(-3 + 8i) - (2 + 3i)$

5. $(3 + 5i)(2 - 7i)$

6. $(-2 + 6i)(8 - i)$

7. $(1 - 3i)(2 + 5i)$

8. $(8 + 2i)(7 - 3i)$

9. $(5 - 2i)^2$

10. $(6 + 7i)^2$

11. $i(3 + 4i)^2$

12. $i(2 - 7i)^2$

13. $(3 + 4i)(3 - 4i)$

14. $(4 + 9i)(4 - 9i)$

15. i^{43}

16. i^{92}

17. i^{73}

18. i^{66}

19. $\frac{3}{2 + 4i}$

20. $\frac{5}{2 - 7i}$

21. $\frac{1 - 7i}{6 - 2i}$

22. $\frac{2 + 9i}{-3 - i}$

23. $\frac{-4 + 6i}{2 + 7i}$

24. $\frac{-3 - 2i}{5 + 2i}$

25. $\frac{4 - 2i}{-5i}$

26. $\frac{-2 + 6i}{3i}$

27. $(2 + 5i)^3$

28. $(3 - 2i)^3$

29. $(2 - \sqrt{-4})(3 - \sqrt{-16})$

30. $(-3 + \sqrt{-25})(8 - \sqrt{-36})$

31. $\frac{4 + \sqrt{-81}}{7 - \sqrt{-64}}$

32. $\frac{5 - \sqrt{-121}}{1 + \sqrt{-25}}$

33. $\frac{\sqrt{-36}\sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$

34. $\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16}\sqrt{-81}}$

Ejercicios 35 al 38: encuentra los valores de x y de y .

35. $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$

36. $(x - y) + 3i = 7 + yi$

37. $(3x + 2y) - y^3i = 9 - 27i$

38. $x^3 + (2x - y)i = -8 - 3i$

Ejercicios 39 al 54: encuentra las soluciones de la ecuación.

39. $x^2 - 6x + 13 = 0$

40. $x^2 - 2x + 26 = 0$

41. $x^2 + 4x + 13 = 0$

42. $x^2 + 8x + 17 = 0$

43. $x^2 - 5x + 20 = 0$

44. $x^2 + 3x + 6 = 0$

45. $4x^2 + x + 3 = 0$

46. $-3x^2 + x - 5 = 0$

47. $x^3 + 125 = 0$

48. $x^3 - 27 = 0$

49. $x^4 = 256$

50. $x^4 = 81$

51. $4x^4 + 25x^2 + 36 = 0$

52. $27x^4 + 21x^2 + 4 = 0$

53. $x^3 + 3x^2 + 4x = 0$

54. $8x^3 - 12x^2 + 2x - 3 = 0$

Ejercicios 55 al 60: si $z = a + bi$ es un número complejo, su conjugado se denota a veces como \bar{z} es decir, $\bar{z} = a - bi$. Verifica la propiedad.

55. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

56. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

57. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

58. $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$

59. $\bar{\bar{z}} = z$ si y sólo si z es real.

60. $z\bar{z} = (\bar{z})^2$

4.4 Forma trigonométrica para números complejos

En la sección 1.1 representamos números reales mediante puntos en una línea coordenada; se pueden obtener representaciones geométricas para números complejos si se usan puntos en un plano coordenado. Específicamente, cada número complejo $a + bi$ determina un par ordenado único (a, b) . El punto correspondiente $P(a, b)$ de un plano coordenado es la **representación geométrica de $a + bi$** . Para destacar el hecho de que asignamos números complejos a puntos de un plano, podemos marcar el punto $P(a, b)$ como $a + bi$. Un plano coordenado con un número complejo asignado a cada punto se conoce como **plano complejo** en lugar de plano xy . El eje x es el **eje real** y el eje y es el **eje imaginario**. En la figura 17 hemos representado en forma geométrica varios números complejos. Observemos que para obtener el punto correspondiente al conjugado $a - bi$ de cualquier número complejo $a + bi$, basta reflejarlo en el eje real.

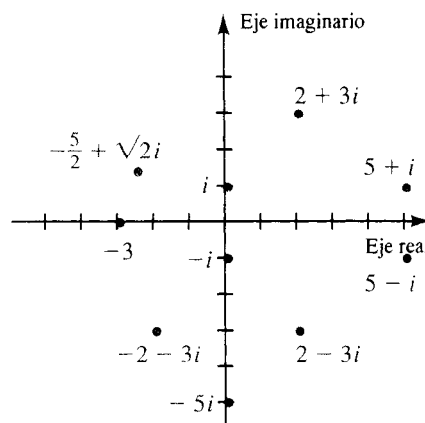


FIGURA 17

El valor absoluto $|a|$ de un número real a es la distancia entre el origen y el punto sobre el eje de las x que corresponde a a ; por lo tanto, es natural interpretar el valor absoluto $|a + bi|$ de un número complejo como la distancia $\sqrt{a^2 + b^2}$ entre el origen de un plano complejo y el punto (a, b) de $a + bi$.

Definición del valor absoluto de un número complejo

El valor absoluto $|a + bi|$ de un número complejo $a + bi$ es

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 1 Encontrar el valor absoluto de un número complejo

Halla

a) $|2 - 6i|$ b) $|3i|$

Solución Usamos la definición previa:

a) $|2 - 6i| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.3$

b) $|3i| = |0 + 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

Los puntos correspondientes de todos los números complejos que tienen un valor absoluto fijo están en un círculo de radio k con centro en el origen del plano complejo; por ejemplo, los puntos correspondientes a los números complejos z con $|z| = 1$ están en un círculo unitario.

Consideremos un número complejo $z = a + bi$ distinto de cero y su representación geométrica $P(a, b)$, en la figura 18.

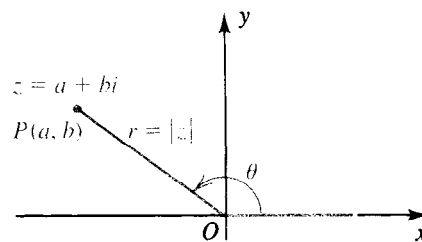


FIGURA 18 $z = a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

Sea θ cualquier ángulo en posición estándar, cuyo lado terminal se encuentra sobre el segmento OP , y sea $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dado que $\cos \theta = a/r$ y $\operatorname{sen} \theta = b/r$, vemos que $a = r \cos \theta$ y $b = r \operatorname{sen} \theta$. Se sustituye a y b en $z = a + bi$, para obtener

$$z = a + bi = (r \cos \theta) + (r \operatorname{sen} \theta)i = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Esta expresión se llama **forma trigonométrica para el número complejo $a + bi$** . Una abreviatura común es

$$r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis} \theta.$$

La forma trigonométrica para $z = a + bi$ no es única, ya que hay un número ilimitado de opciones diferentes para el ángulo θ . Cuando se usa la forma trigonométrica, el valor absoluto r de z se conoce a veces como **módulo** de z y un ángulo θ relacionado con z es el **argumento** (o **amplitud**) de z .

Este análisis se resume en la forma siguiente:

Forma trigonométrica para $a + bi$

Sea $z = a + bi$. Si $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y si θ es un argumento de z , entonces

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis} \theta.$$

EJEMPLO 2 Expresar un número complejo en forma trigonométrica

Expresa el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$:

- a) $-4 + 4i$ b) $2\sqrt{3} - 2i$ c) $2 + 7i$ d) $-2 + 7i$

Solución Se comienza por representar geoméricamente cada número complejo, igual que en la figura 19.

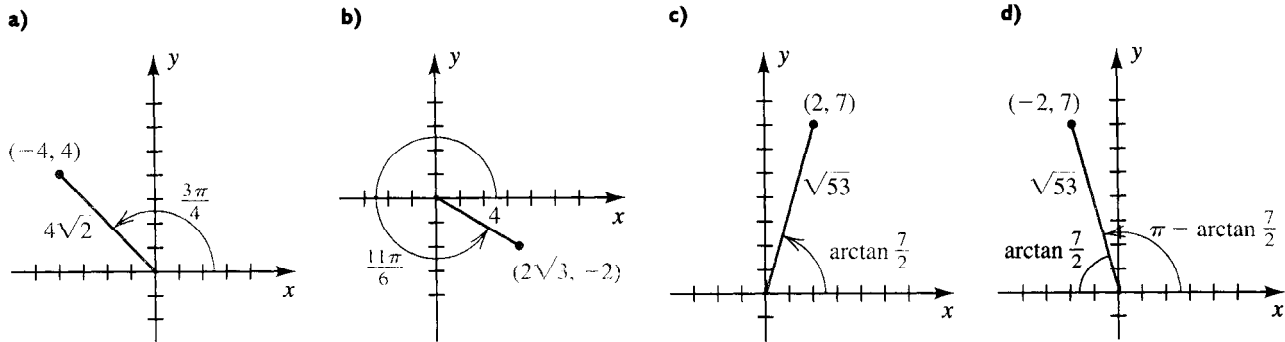


FIGURA 19

En seguida se sustituye con r y θ en la forma trigonométrica:

$$\text{a)} \quad -4 + 4i = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{b)} \quad 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \right) = 4 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{c)} \quad 2 + 7i = \sqrt{53} [\cos(\arctan \frac{7}{2}) + i \operatorname{sen}(\arctan \frac{7}{2})] = \sqrt{53} \operatorname{cis}(\arctan \frac{7}{2})$$

$$\text{d)} \quad \begin{aligned} -2 + 7i &= \sqrt{53} [\cos(\pi - \arctan \frac{7}{2}) + i \operatorname{sen}(\pi - \arctan \frac{7}{2})] \\ &= \sqrt{53} \operatorname{cis}(\pi - \arctan \frac{7}{2}) \end{aligned}$$

Si se permiten valores arbitrarios para θ , hay muchas otras formas trigonométricas para los números complejos del ejemplo 2; por lo tanto, para $-4 + 4i$ en la parte a) pudimos usar

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{para cualquier entero } n.$$

Si, por ejemplo, se hace $n = 1$ y $n = -1$, se obtiene

$$-4 + 4i = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{4}$$

$$-4 + 4i = 4\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right] = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{4} \right).$$

En general, los argumentos para el mismo número complejo siempre difieren por un múltiplo de 2π .

Cuando los números complejos se expresan en forma trigonométrica, la multiplicación y la división se pueden efectuar según se indica en el siguiente teorema.

Teorema sobre productos y cocientes de números complejos

Si las formas trigonométricas para dos números complejos z_1 y z_2 son

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

entonces

$$(1) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$(2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$$

PRUEBA Demostraremos (1) aquí y dejaremos la prueba de (2) como ejercicio. Por lo tanto,

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)].$$

La aplicación de las fórmulas de la suma para $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ y $\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ da (1). ■

La parte (1) del teorema expresa que *el módulo de un producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y el argumento es la suma de sus argumentos*. Se puede elaborar una expresión análoga para (2).

EJEMPLO 3 Usar formas trigonométricas para hallar productos y cocientes

Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, utiliza formas trigonométricas a fin de encontrar **a)** $z_1 z_2$ y **b)** z_1/z_2 . Comprueba por métodos algebraicos.

Solución El número complejo $2\sqrt{3} - 2i$ está representado geoméricamente en la figura 19b). Si se usa $\theta = -\pi/6$ en la forma trigonométrica, entonces

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$



El número complejo $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ está geoméricamente representado en la figura 20. Una forma trigonométrica es

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$$

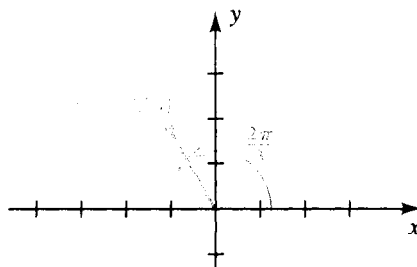


FIGURA 20

a) Se aplica (1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = 8(0 + i) = 8i \end{aligned}$$

Al usar métodos algebraicos para comprobar nuestro resultado, tendremos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2\sqrt{3} - 2i)(-1 + \sqrt{3}i) \\ &= (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + (2 + 6)i = 0 + 8i = 8i. \end{aligned}$$

b) Se aplica (2) del teorema:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Al utilizar métodos algebraicos, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) + (2 - 6)i}{4} = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

4.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 10: encuentra el valor absoluto.

1. $|3 - 4i|$
2. $|5 + 8i|$
3. $|-6 - 7i|$
4. $|1 - i|$
5. $|8i|$
6. $|i^7|$
7. $|i^{500}|$
8. $|-15i|$
9. $|0|$
10. $|-15|$

Ejercicios 11 al 20: representa geoméricamente el número complejo.

11. $4 + 2i$
12. $-5 + 3i$
13. $3 - 5i$
14. $-2 - 6i$
15. $-(3 - 6i)$
16. $(1 + 2i)^2$
17. $2i(2 + 3i)$
18. $(-3i)(2 - i)$
19. $(1 + i)^2$
20. $4(-1 + 2i)$

Ejercicios 21 al 46: expresa en forma trigonométrica el número complejo con $0 \leq \theta < 2\pi$.

21. $1 - i$
22. $\sqrt{3} + i$
23. $-4\sqrt{3} + 4i$
24. $-2 - 2i$
25. $2\sqrt{3} + 2i$
26. $3 - 3\sqrt{3}i$
27. $-4 - 4i$
28. $-10 + 10i$
29. $-20i$
30. $-6i$
31. 12
32. 15
33. -7
34. -5
35. $6i$
36. $4i$
37. $-5 - 5\sqrt{3}i$
38. $\sqrt{3} - i$
39. $2 + i$
40. $3 + 2i$
41. $-3 + i$
42. $-4 + 2i$

43. $-5 - 3i$

45. $4 - 3i$

44. $-2 - 7i$

46. $1 - 3i$

Ejercicios 47 al 56: expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

47. $4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$
48. $8 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right)$
49. $6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$
50. $12 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right)$
51. $5(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$
52. $3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$
53. $\sqrt{34} \operatorname{cis} (\tan^{-1} \frac{3}{5})$
54. $\sqrt{53} \operatorname{cis} [\tan^{-1} (-\frac{2}{7})]$
55. $\sqrt{5} \operatorname{cis} [\tan^{-1} (-\frac{1}{2})]$
56. $\sqrt{10} \operatorname{cis} (\tan^{-1} 3)$

Ejercicios 57 al 64: usa formas trigonométricas para hallar $z_1 z_2$ y z_1/z_2 .

57. $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 1 + i$
58. $z_1 = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i$
59. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = 5i$
60. $z_1 = -5 + 5i, \quad z_2 = -3i$
61. $z_1 = -10, \quad z_2 = -4$
62. $z_1 = 2i, \quad z_2 = -3i$
63. $z_1 = 4, \quad z_2 = 2 - i$
64. $z_1 = -3, \quad z_2 = 5 + 2i$
65. Demuestra (2) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos.
66. a) Amplía (1) del teorema a tres números complejos.
b) Generaliza (1) del teorema a n números complejos.

4.5 Teorema de De Moivre y raíces n -ésimas de números complejos

Si z es un número complejo y n un entero positivo, entonces un número complejo w es una **raíz n -ésima** de z si $w^n = z$. Demostraremos que todo número complejo diferente de cero tiene n raíces n -ésimas diferentes. Como \mathbb{R} está contenido en \mathbb{C} , también se deduce que todo número real diferente de cero tiene n raíces n -ésimas distintas (complejas). Cuando a es un número real positivo y $n = 2$, sabemos que las raíces son \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$.

Si, en el teorema sobre productos y cocientes de números complejos hacemos que z_1 y z_2 sean iguales al número complejo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, obtenemos

$$\begin{aligned} z^2 &= r \cdot r [\cos (\theta + \theta) + i \operatorname{sen} (\theta + \theta)] \\ &= r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta). \end{aligned}$$

Si se aplica el mismo teorema a z^2 y z resultará

$$z^2 \cdot z = (r^2 \cdot r)[\cos(2\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(2\theta + \theta)],$$

o bien

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta).$$

Si se aplica el teorema a z^3 y z , se llega a

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta).$$

En general, tenemos el siguiente resultado llamado teorema de De Moivre en honor del matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

Teorema de De Moivre

Para todo entero n ,

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

EJEMPLO 1 Uso del teorema de De Moivre

Encuentra $(1 + i)^{20}$.

Solución Sería tedioso hallar $(1 + i)^{20}$ mediante métodos algebraicos; por lo tanto, recurramos a una forma trigonométrica para $1 + i$. Con referencia a la figura 21, se ve que

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right).$$

Ahora aplicamos el teorema de De Moivre:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{20} &= (2^{1/2})^{20} \left[\cos \left(20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi) = 2^{10}(-1) = -1024 \end{aligned}$$

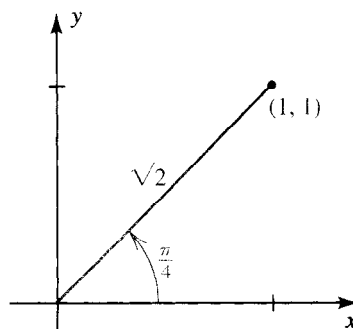


FIGURA 21

Si un número complejo z diferente de cero tiene una raíz w n -ésima, entonces $w^n = z$. Si las formas trigonométricas para w y z son

$$w = s(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \quad \text{y} \quad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

al aplicar el teorema de De Moivre a $w^n = z$ se obtiene

$$s^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Cuando dos números complejos son iguales, también lo son sus valores absolutos; en consecuencia, $s^n = r$, y como s y r no son negativos, $s = \sqrt[n]{r}$. Al sustituir s^n con r en la última ecuación mostrada y dividir ambos lados entre s^n , resulta

$$\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Como los argumentos de números complejos iguales difieren en un múltiplo de 2π , hay un entero k tal que $n\alpha = \theta + 2\pi k$. Si se dividen entre n ambos lados de la última ecuación, vemos que

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{para algún entero } k.$$

Al sustituir w en la forma trigonométrica se obtiene la fórmula

$$w = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

Si se sustituye $k = 0, 1, \dots, n-1$, etc., se obtienen n diferentes raíces n -ésimas de z . Ningún otro valor de k producirá una nueva raíz n -ésima; por ejemplo, si $k = n$, se obtiene el ángulo $(\theta + 2\pi n)/n$, o $(\theta/n) + 2\pi$ lo que dará la misma n -ésima raíz que $k = 0$. Del mismo modo, $k = n + 1$ produce la misma n -ésima raíz que $k = 1$, y así sucesivamente. Lo mismo es cierto para valores negativos de k . Hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema sobre raíces n -ésimas

Si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ es cualquier número complejo diferente de cero y si n es cualquier entero positivo, entonces z tiene exactamente n raíces n -ésimas $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$. Estas raíces, para θ en radianes, son

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

o bien, lo que es equivalente, para θ en grados,

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right]$$

en donde $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Todas las n -ésimas raíces de z de este teorema tienen valor absoluto $\sqrt[n]{r}$; de aquí que sus representaciones geométricas se encuentren en un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en O . Además están igualmente espaciadas en este círculo, ya que la diferencia en los argumentos de n -ésimas raíces sucesivas es $2\pi/n$.

EJEMPLO 2 Hallar las raíces cuartas de un número complejo

Encuentra las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$.

Solución La representación geométrica de $-8 - 8\sqrt{3}i$ se muestra en la figura 22. Al introducir la forma trigonométrica, tendremos

$$-8 - 8\sqrt{3}i = 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ).$$

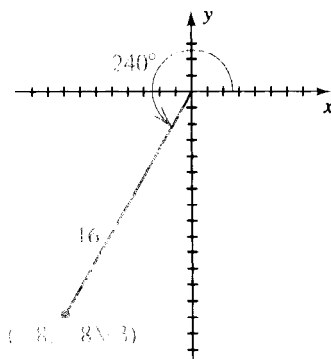


FIGURA 22

Si se usa el teorema de raíces n -ésimas con $n = 4$, y se observa que $\sqrt[4]{16} = 2$, se encuentra que las raíces cuartas son

$$w_k = 2 \left[\cos \left(\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} \right) \right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3$. Esta fórmula se puede escribir como

$$w_k = 2[\cos(60^\circ + 90^\circ k) + i \sin(60^\circ + 90^\circ k)]$$

La sustitución de 0, 1, 2 y 3 con k en $(60^\circ + 90^\circ k)$, da las cuatro raíces cuartas:

$$w_0 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$w_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$w_3 = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i$$

EJEMPLO 3 Encontrar las raíces sextas de un número real

a) Halla las seis raíces sextas de -1 .

b) Representa geométricamente las raíces.

Solución **a)** Se escribe $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$ se aplica el teorema sobre n -ésimas raíces con $n = 6$ y resulta que las raíces sextas de -1 están dadas por

$$w_k = \cos \left(\frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2\pi k}{6} \right)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. También se puede escribir w_k en la forma

$$w_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right).$$

Al sustituir 0, 1, 2, 3, 4, 5 para k , se obtienen las seis raíces sextas de -1 :

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$$

$$w_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$w_5 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

b) Como $|-1| = 1$, todos los puntos que representan las raíces de -1 están en el círculo unitario de la figura 23. Además, están equidistantes en este círculo.

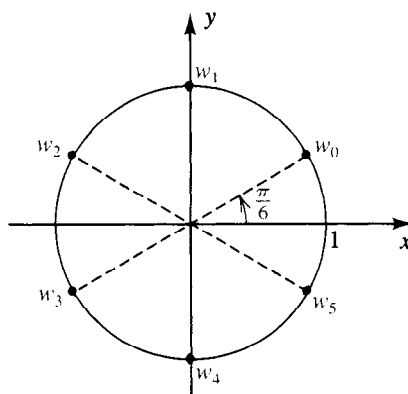


FIGURA 23

El caso especial en que $z = 1$ es de particular interés. Las n raíces diferentes n -ésimas de 1 se llaman **raíces n -ésimas de la unidad**. En particular, si $n = 3$, se llaman **raíces cúbicas de la unidad**.

EJEMPLO 4

Hallar las raíces cúbicas de la unidad

Determina las tres raíces cúbicas de la unidad.



Al escribir $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ y usar el teorema sobre raíces n -ésimas con $n = 3$, se obtiene

$$w_k = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{3}$$

para $k = 0, 1, 2$. Las tres raíces se obtienen sustituyendo a k :

$$w_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Observemos que encontrar las n -ésimas raíces de un número complejo c , como en los ejemplos 2, 3 y 4, equivale a hallar todas las soluciones de la ecuación

$$x^n = c, \quad \text{o} \quad x^n - c = 0.$$

(Consulta los ejercicios 23 al 30.)

4.5 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 12: usar el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1. $(3 + 3i)^5$

2. $(1 + i)^{12}$

3. $(1 - i)^{10}$

4. $(-1 + i)^8$

5. $(1 - \sqrt{3}i)^3$

6. $(1 - \sqrt{3}i)^5$

7. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$

8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{25}$

9. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

10. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{50}$

11. $(\sqrt{3} + i)^7$

12. $(-2 - 2i)^{10}$

13. Encuentra las dos raíces cuadradas de $1 + \sqrt{3}i$.

14. Halla las dos raíces cuadradas de $-9i$.

15. Determina las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}i$.

16. Encuentra las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}i$.

17. Halla las tres raíces cúbicas de $-27i$.

18. Determina las tres raíces cúbicas de $64i$.

Ejercicios 19 al 22: encuentra las raíces indicadas y represéntalas geoméricamente.

19. Las seis raíces sextas de la unidad

20. Las ocho raíces octavas de la unidad

21. Las cinco raíces quintas de $1 + i$

22. Las cinco raíces quintas de $-\sqrt{3} - i$

Ejercicios 23 al 30: halla las soluciones de la ecuación.

23. $x^4 - 16 = 0$

24. $x^6 - 64 = 0$

25. $x^6 + 64 = 0$

26. $x^5 + 1 = 0$

27. $x^3 + 8i = 0$

28. $x^3 - 64i = 0$

29. $x^5 - 243 = 0$

30. $x^4 + 81 = 0$

4.6 Vectores

Las cantidades como área, volumen, longitud, temperatura y tiempo sólo tienen magnitud y se pueden caracterizar por completo mediante un solo número real (con una unidad apropiada de medida, como in^2 , ft^3 , cm , grado o s). Una cantidad de este tipo es una **cantidad escalar** y el número real correspondiente, un **escalar**. Los conceptos como velocidad y fuerza tienen magnitud y dirección y suelen representarse con un **segmento de recta dirigido**; es decir, un segmento de recta al que se ha asignado dirección. Otro nombre para un segmento dirigido es **vector**.

De acuerdo con la figura 24, usamos \vec{PQ} para denotar el vector con **punto inicial** P y **punto terminal** Q , y se indica la dirección del vector colocando a una punta de flecha a Q . La **magnitud** de \vec{PQ} es la longitud del segmento PQ y se denota con $\|\vec{PQ}\|$. Al igual que en la figura, se usan letras negritas como \mathbf{u} y \mathbf{v} para denotar vectores cuyos puntos extremos no están especificados. En manuscritos, con frecuencia se usa la notación \vec{u} o \vec{v} .

Se dice que los vectores que tienen la misma magnitud y dirección son **equivalentes**. En matemáticas, un vector está determinado sólo por su magnitud y dirección, no por su ubicación; por lo tanto, se consideran iguales los vectores equivalentes, como los de la figura 24, y se anota

$$\mathbf{u} = \vec{PQ}, \quad \mathbf{v} = \vec{PQ}, \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

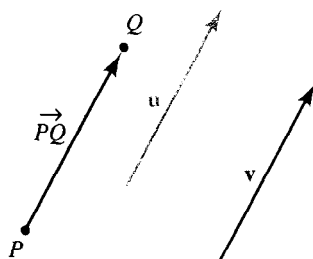


FIGURA 24 Vectores iguales

En consecuencia, *un vector se puede trasladar de una ubicación a otra siempre que no cambien su magnitud ni su dirección*.

Muchos conceptos físicos se representan mediante vectores. Para ilustrar lo anterior, imaginemos que un avión desciende a una velocidad constante de 100 millas por hora y que la línea de vuelo hace un ángulo de 20° con la horizontal. El vector \mathbf{v} de magnitud 100 representa ambos datos (Fig. 25). El vector \mathbf{v} es un **vector velocidad**.

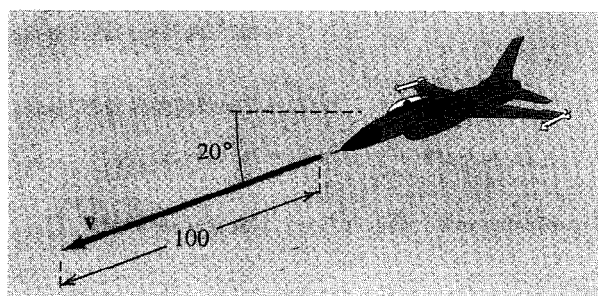


FIGURA 25 Vector velocidad

Un vector que representa un empuje o tracción de algún tipo es un **vector fuerza**. El vector \mathbf{F} de magnitud 5 ilustra la fuerza ejercida cuando una persona sostiene un peso de 5 libras (Fig. 26). Esta fuerza tiene la misma magnitud que la fuerza ejercida por la gravedad sobre el peso, pero actúa en dirección opuesta. Como resultado de esto, no hay movimiento hacia arriba o abajo.

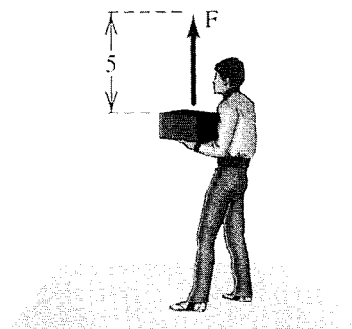


FIGURA 26 Vector fuerza

A veces usamos \vec{AB} a fin de representar la trayectoria de un punto (o partícula) a medida que se mueve a lo largo del segmento de A a B . Entonces \vec{AB} recibe el nombre de **desplazamiento** del punto (o partícula). Como en la figura 27, un desplazamiento \vec{AB} seguido de otro desplazamiento \vec{BC} lleva al mismo punto que el solo desplazamiento \vec{AC} . Por definición, el vector \vec{AC} es la **suma** de \vec{AB} y de \vec{BC} , y escribimos

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$$

Dado que los vectores se pueden trasladar de una ubicación a otra, es viable sumar *cualquier* dos vectores si se coloca el punto inicial del segundo en el punto terminal del primero y se dibuja el segmento del punto inicial del primero al punto terminal del segundo (Fig. 27). Otra forma de hallar la suma es escoger los vectores \vec{PQ} y \vec{PR} que son iguales a \vec{AB} y \vec{BC} , respectivamente, y que tengan el mismo punto inicial P (Fig. 28).

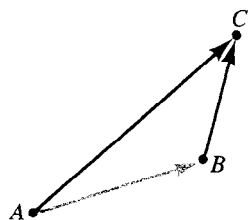


FIGURA 27 Suma de vectores

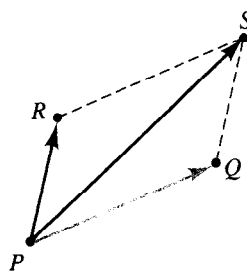


FIGURA 28 Fuerza resultante

Si construimos el paralelogramo $RPQS$, entonces, como $\vec{PR} = \vec{QS}$, se deduce que $\vec{PS} = \vec{PQ} + \vec{PR}$. Si \vec{PQ} y \vec{PR} son dos fuerzas que actúan en P , entonces \vec{PS} es la **fuerza resultante**; es decir, la fuerza única que produce el mismo efecto que las dos fuerzas combinadas.

Cuando c es un escalar y \mathbf{v} es un vector, $c\mathbf{v}$ se define como un vector cuya magnitud es $|c|$ por la magnitud $\|\mathbf{v}\|$ de \mathbf{v} , cuya dirección puede ser la misma de \mathbf{v} (si $c > 0$) u opuesta a la de \mathbf{v}

(si $c < 0$). En la figura 29 aparecen ilustraciones de estos casos. A cv se le conoce como **múltiplo escalar** de v .

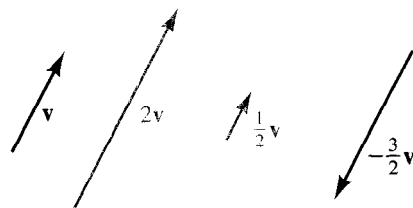


FIGURA 29 Múltiplos escalares

En el resto de esta sección restringiremos nuestro estudio a los vectores que se encuentran en un plano xy . Si \overrightarrow{PQ} es uno de dichos vectores, entonces, como se indica en la figura 30, existen muchos vectores que equivalen a \overrightarrow{PQ} ; sin embargo, hay exactamente *un* vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ equivalente con punto inicial en el origen. En este sentido, *cada vector determina un par ordenado único de números reales*, que son las coordenadas (a_1, a_2) del punto terminal A . Por el contrario, todo par ordenado (a_1, a_2) determina el vector \overrightarrow{OA} , en donde A tiene coordenadas (a_1, a_2) . En consecuencia, *hay una correspondencia biunívoca entre vectores de un plano xy y pares ordenados de números reales*. Esta correspondencia nos permite interpretar un vector como un segmento de recta dirigido y *además*, como un par ordenado. Para evitar confusiones con la notación de intervalos abiertos o puntos, se usa el símbolo $\langle a_1, a_2 \rangle$ para un par ordenado que represente un vector, y lo denotamos con una letra en negritas, por ejemplo $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Los números a_1 y a_2 son los **componentes** del vector $\langle a_1, a_2 \rangle$. Si A es el punto (a_1, a_2) , como en la figura 30, \overrightarrow{OA} se llama **vector posición** para $\langle a_1, a_2 \rangle$ o para el *punto* A .

Este análisis evidencia que los vectores tienen dos naturalezas, una geométrica y la algebraica. Muchas veces no distinguimos entre ellas, pero a partir de nuestro estudio debe quedar claro cuándo se refieren a pares ordenados o a segmentos de recta dirigidos.

La **magnitud** $\|\mathbf{a}\|$ del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es, por definición, la longitud de su vector posición OA (Fig. 31). La siguiente definición expresa este dato de otro modo.

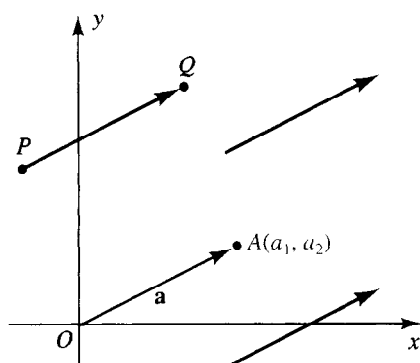


FIGURA 30

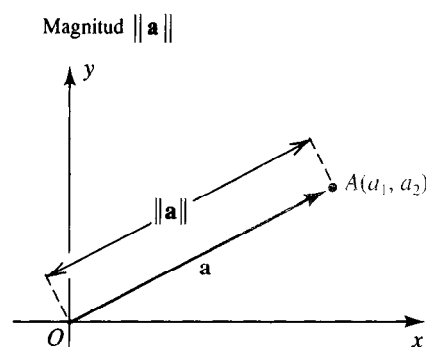


FIGURA 31

Definición de la magnitud de un vector

La magnitud $\| \mathbf{a} \|$ del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es

$$\| \mathbf{a} \| = \| \langle a_1, a_2 \rangle \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

EJEMPLO 1 Hallar la magnitud de un vector

Traza los vectores para

$$\mathbf{a} = \langle -3, 2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, -2 \rangle, \quad \mathbf{c} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$$

en un plano coordenado y encuentra la magnitud de cada vector.

Solución Los vectores están trazados en la figura 32. Por definición de la magnitud de un vector,

$$\| \mathbf{a} \| = \| \langle -3, 2 \rangle \| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\| \mathbf{b} \| = \| \langle 0, -2 \rangle \| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\| \mathbf{c} \| = \| \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle \| = \sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1.$$

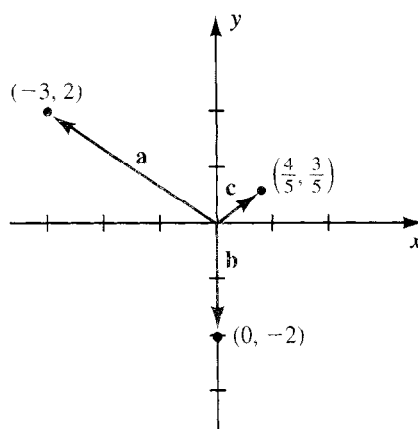


FIGURA 32

Consideremos los vectores \vec{OA} y \vec{OB} correspondientes a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, respectivamente (Fig. 33). Si \vec{OC} corresponde a $\mathbf{c} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, se puede demostrar, usando pendientes, que O, A, C y B son vértices de un paralelogramo; es decir,

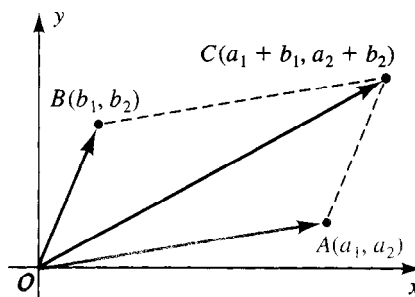


FIGURA 33

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$$

Expresar esta ecuación en términos de pares ordenados lleva a:

Definición de suma de vectores

$$\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

Notarás que para sumar dos vectores se suman los componentes correspondientes.

ILUSTRACIÓN

Suma de vectores

$$\blacksquare \langle 3, -4 \rangle + \langle 2, 7 \rangle = \langle 3 + 2, -4 + 7 \rangle = \langle 5, 3 \rangle$$

$$\blacksquare \langle 5, 1 \rangle + \langle -5, 1 \rangle = \langle 5 + (-5), 1 + 1 \rangle = \langle 0, 2 \rangle$$

También se puede demostrar que si c es un escalar y \vec{OA} corresponde a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, el par ordenado determinado por \vec{OA} es (ca_1, ca_2) , como se ilustra en la figura 34 para $c > 0$. Esto lleva a la siguiente definición:

Definición de un escalar múltiplo de un vector

$$c\langle a_1, a_2 \rangle = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

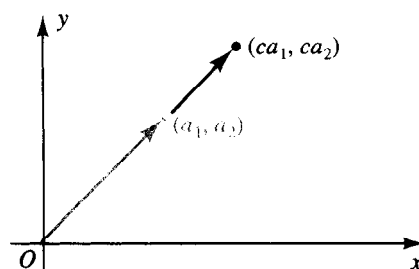


FIGURA 34

Por lo tanto, para hallar un escalar múltiplo de un vector, cada componente se multiplica por el escalar.

ILUSTRACIÓN

Escalar múltiplo de un vector

$$\blacksquare 2\langle -3, 4 \rangle = \langle 2(-3), 2(4) \rangle = \langle -6, 8 \rangle$$

$$\blacksquare -2\langle -3, 4 \rangle = \langle (-2)(-3), (-2)(4) \rangle = \langle 6, -8 \rangle$$

$$\blacksquare 1\langle 5, 2 \rangle = \langle 1 \cdot 5, 1 \cdot 2 \rangle = \langle 5, 2 \rangle$$

EJEMPLO 2

Hallar un escalar múltiplo de un vector

Si $\mathbf{a} = \langle 2, 1 \rangle$, encuentra $3\mathbf{a}$ y $-2\mathbf{a}$ y traza los tres vectores en un plano coordenado.

Reflexión Con la definición de múltiplos escalares de vectores encontramos

$$3\mathbf{a} = 3\langle 2, 1 \rangle = \langle 3 \cdot 2, 3 \cdot 1 \rangle = \langle 6, 3 \rangle$$

$$-2\mathbf{a} = -2\langle 2, 1 \rangle = \langle (-2) \cdot 2, (-2) \cdot 1 \rangle = \langle -4, -2 \rangle.$$

Los vectores están trazados en la figura 35.

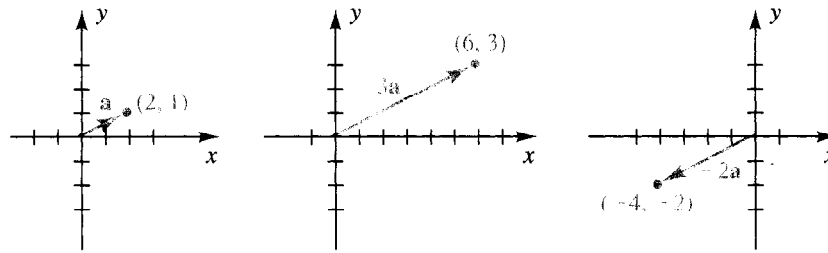


FIGURA 35

El vector $\mathbf{0}$ y el negativo $-\mathbf{a}$ de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se definen como sigue.

Definición de $\mathbf{0}$ y $-\mathbf{a}$

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{y} \quad -\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle$$

ILUSTRACIÓN

El vector cero y el negativo de un vector

$$\langle 3, 5 \rangle + \mathbf{0} = \langle 3, 5 \rangle + \langle 0, 0 \rangle = \langle 3 + 0, 5 + 0 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$$

$$-\langle 3, -5 \rangle = \langle -3, -(-5) \rangle = \langle -3, 5 \rangle$$

$$\langle 3, -5 \rangle + \langle -3, 5 \rangle = \langle 3 + (-3), -5 + 5 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$$

$$0\langle 2, 3 \rangle = \langle 0 \cdot 2, 0 \cdot 3 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$$

$$5 \cdot \mathbf{0} = 5\langle 0, 0 \rangle = \langle 5 \cdot 0, 5 \cdot 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$$

A continuación expresamos las propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores, para cualesquier vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y escalares c , d . Tendrás poca dificultad para recordar estas propiedades, ya que son semejantes a las conocidas propiedades de los de números reales.

Propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

(6) $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$

(2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

(7) $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a}) = d(c\mathbf{a})$

(3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

(8) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

(4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

(9) $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$

(5) $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$

PRUEBA Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. Para demostrar (1), observemos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

La prueba de (5) es:

$$\begin{aligned}
 c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle && \text{definición de suma} \\
 &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle && \text{definición de múltiplo escalar} \\
 &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle && \text{definición de suma} \\
 &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} && \text{definición de múltiplo escalar}
 \end{aligned}$$

Las pruebas de las propiedades restantes son similares. ■

La **sustracción** de vectores (denotada por $-$) está definida por $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Si se usa la notación de par ordenado para \mathbf{a} y \mathbf{b} , entonces $-\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$, y se obtiene:

Definición de sustracción de vectores

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

Por lo tanto, para hallar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, basta restar los componentes de \mathbf{b} de los componentes correspondientes de \mathbf{a} .

ILUSTRACIÓN

Sustracción de vectores si $\mathbf{a} = \langle 5, -4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \langle 5, -4 \rangle - \langle -3, 2 \rangle \\
 &= \langle 5 - (-3), -4 - 2 \rangle = \langle 8, -6 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} &= 2\langle 5, -4 \rangle - 3\langle -3, 2 \rangle \\
 &= \langle 10, -8 \rangle - \langle -9, 6 \rangle = \langle 19, -14 \rangle
 \end{aligned}$$

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores arbitrarios, entonces

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a};$$

es decir, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es el vector que, cuando se suma a \mathbf{b} , dará \mathbf{a} . Si se representan \mathbf{a} y \mathbf{b} con los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} con el mismo punto inicial, como en la figura 36, entonces \overrightarrow{RQ} representa a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

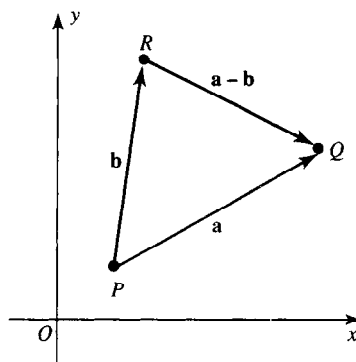


FIGURA 36

Los vectores especiales \mathbf{i} y \mathbf{j} se definen de este modo:

Definición de \mathbf{i} y \mathbf{j}

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Un **vector unitario** es un vector de magnitud 1. Los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios, como lo es el vector $\mathbf{c} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$ en el ejemplo 1.

Los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} sirven para obtener una forma alternativa de denotar vectores. Específicamente, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1 \langle 1, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1 \rangle.$$

Este resultado dará:

Forma \mathbf{i} , \mathbf{j} para vectores

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$$

ILUSTRACIÓN

Ejemplo 1, \mathbf{j}

$$\langle 5, 2 \rangle = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\langle -3, 4 \rangle = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\langle 0, -6 \rangle = 0\mathbf{i} + (-6)\mathbf{j} = -6\mathbf{j}$$

Los vectores correspondientes a \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{a} se ilustran en la figura 37. Como \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios, $a_1 \mathbf{i}$ y $a_2 \mathbf{j}$ pueden representarse con vectores horizontales y verticales de magnitudes $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$, respectivamente (Fig. 38). Por esta razón se llama a_1 al **componente horizontal** y a_2 al **componente vertical** del vector \mathbf{a} .

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$$

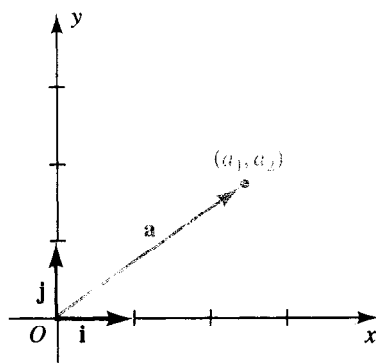


FIGURA 37

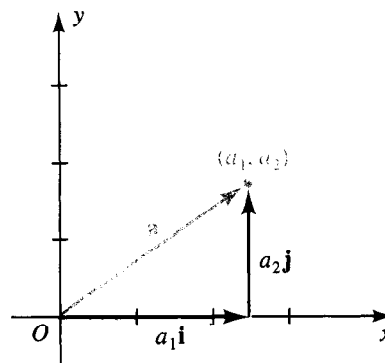


FIGURA 38

El vector suma $a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ es una **combinación lineal** de \mathbf{i} y \mathbf{j} . Las reglas para suma, resta y multiplicación por un escalar se pueden escribir como sigue, con $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$:

$$\vec{PQ} = (5 \cos 70^\circ) \mathbf{i} + (5 \sin 70^\circ) \mathbf{j}$$

$$\vec{PR} = (8 \cos 25^\circ) \mathbf{i} + (8 \sin 25^\circ) \mathbf{j}$$

Como $\vec{PS} = \vec{PQ} + \vec{PR}$,

$$\begin{aligned}\vec{PS} &= (5 \cos 70^\circ + 8 \cos 25^\circ) \mathbf{i} + (5 \sin 70^\circ + 8 \sin 25^\circ) \mathbf{j} \\ &\approx (9.0) \mathbf{i} + (8.1) \mathbf{j}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\vec{PS}\| \approx \sqrt{(9.0)^2 + (8.1)^2} \approx 12.1.$$

También se puede encontrar $\|\vec{PS}\|$ usando la ley de los cosenos (ve el ejemplo 3, Sec. 4.2). Como $\angle QPR = 45^\circ$, se deduce que $\angle PRS = 135^\circ$ y, por lo tanto,

$$\|\vec{PS}\|^2 = (8.0)^2 + (5.0)^2 - 2(8.0)(5.0) \cos 135^\circ \approx 145.6$$

y

$$\|\vec{PS}\| \approx \sqrt{145.6} \approx 12.1$$

Si θ es el ángulo desde el eje positivo de las x a la resultante PS , entonces al usar las coordenadas (aproximadas) $(8.9606, 8.0794)$ de S , se obtiene:

$$\tan \theta \approx \frac{8.0794}{8.9606} \approx 0.9017$$

$$\theta \approx \tan^{-1}(0.9017) \approx 42^\circ$$

Por lo tanto, la dirección de \vec{PS} es aproximadamente N48°E.

4.6 EJERCICIOS

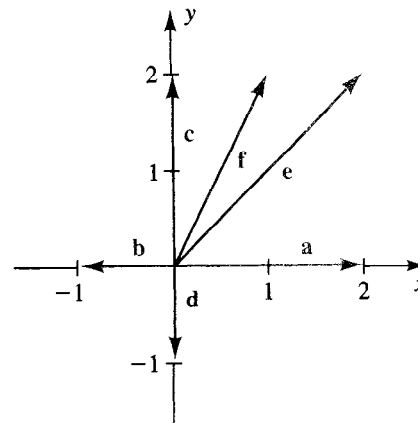
Ejercicios 1 al 6: encuentra $a + b$, $a - b$, $4a + 5b$ y $4a - 5b$.

1. $a = \langle 2, -3 \rangle$, $b = \langle 1, 4 \rangle$
2. $a = \langle -2, 6 \rangle$, $b = \langle 2, 3 \rangle$
3. $a = \langle -7, -2 \rangle$, $b = 4\langle -2, 1 \rangle$
4. $a = 2\langle 5, -4 \rangle$, $b = -\langle 6, 0 \rangle$
5. $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $b = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
6. $a = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $b = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejercicios 7 al 10: traza los vectores correspondientes a , b , $a + b$, $2a$, y $-3b$.

7. $a = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $b = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
8. $a = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $b = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
9. $a = \langle -4, 6 \rangle$, $b = \langle -2, 3 \rangle$
10. $a = \langle 2, 0 \rangle$, $b = \langle -2, 0 \rangle$

Ejercicios 11 al 16: utiliza componentes para expresar la suma o diferencia como un múltiplo escalar de uno de los vectores a , b , c , d , e o f que se muestran en la figura.



- | | |
|-------------|-------------|
| 11. $a + b$ | 12. $c - d$ |
| 13. $b + e$ | 14. $f - b$ |
| 15. $b + d$ | 16. $e + c$ |

Ejercicios 17 al 26: si $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$, $c = \langle c_1, c_2 \rangle$ y m y n son números reales, demuestra la propiedad expresada.

17. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

18. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

19. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

20. $(m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$

21. $(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$

22. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

23. $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = m\mathbf{0}$

24. $(-m)\mathbf{a} = -m\mathbf{a}$

25. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$

26. $m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m\mathbf{a} - m\mathbf{b}$

27. Si $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, demuestra que la magnitud de $2\mathbf{v}$ es el doble de la magnitud de \mathbf{v} .

28. Si $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ y k es cualquier número real, demuestra que la magnitud de $k\mathbf{v}$ es $|k|$ por la magnitud de \mathbf{v} .

Ejercicios 29 al 36: encuentra la magnitud de \mathbf{a} y el mínimo ángulo positivo θ desde el eje positivo de las x al vector OP que corresponda al de \mathbf{a} .

29. $\mathbf{a} = \langle 3, -3 \rangle$

30. $\mathbf{a} = \langle -2, -2\sqrt{3} \rangle$

31. $\mathbf{a} = \langle -5, 0 \rangle$

32. $\mathbf{a} = \langle 0, 10 \rangle$

33. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

34. $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

35. $\mathbf{a} = -18\mathbf{j}$

36. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Ejercicios 37 al 40: los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} representan dos fuerzas que actúan en el mismo punto, y θ es el mínimo ángulo positivo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} . Calcula la magnitud de la fuerza resultante.

37. $\mathbf{a} = 40 \text{ lb}$, $\mathbf{b} = 70 \text{ lb}$, $\theta = 45^\circ$

38. $\mathbf{a} = 5.5 \text{ lb}$, $\mathbf{b} = 6.2 \text{ lb}$, $\theta = 60^\circ$

39. $\mathbf{a} = 2.0 \text{ kg}$, $\mathbf{b} = 8.0 \text{ kg}$, $\theta = 120^\circ$

40. $\mathbf{a} = 30 \text{ kg}$, $\mathbf{b} = 50 \text{ kg}$, $\theta = 150^\circ$

Ejercicios 41 al 44: las magnitudes y direcciones de dos fuerzas que actúan en un punto P están dadas en a) y b). Calcula la magnitud y dirección del vector resultante.

41. a) 90 kg , $N75^\circ W$

b) 60 kg , $S5^\circ E$

42. a) 20 kg , $S17^\circ W$

b) 50 kg , $N82^\circ W$

43. a) 6.0 lb , 110°

b) 2.0 lb , 215°

44. a) 70 lb , 320°

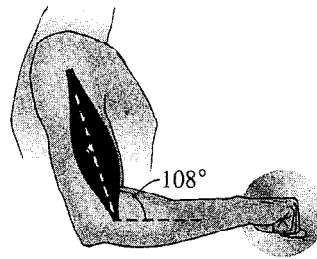
b) 40 lb , 30°

Ejercicios 45 al 48: calcula los componentes horizontal y vertical del vector descrito.

45. Un mariscal de campo de fútbol lanza el balón con una velocidad de 50 pies por segundo a un ángulo de 35° con la horizontal.

46. Un niño arrastra un trineo por la nieve y ejerce una fuerza de 20 libras a un ángulo de 40° con la horizontal.

47. Los músculos del bíceps, al sostener el antebrazo y un peso en la mano, ejercen una fuerza de 20 libras. Como se ve en la figura, el músculo forma un ángulo de 108° con el antebrazo.



EJERCICIO 47

48. Un avión a chorro se aproxima a una pista con un ángulo de 7.5° con la horizontal, volando a una velocidad de 160 millas por hora.

Ejercicios 49 al 52: si las fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n actúan sobre el punto P , la fuerza neta F (o resultante) es la suma de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$. Si $F = 0$, se dice que las fuerzas están en equilibrio. Las fuerzas dadas actúan en el origen O de un plano xy .

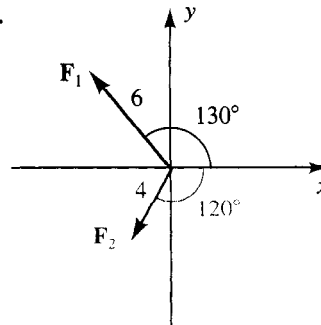
a) Encuentra la fuerza neta F .

b) Halla otra fuerza G tal que ocurra el equilibrio.

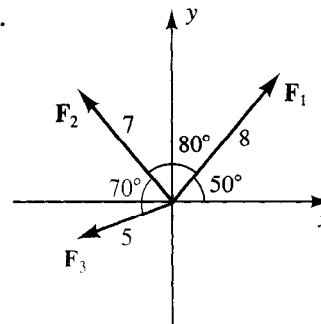
49. $F_1 = \langle 4, 3 \rangle$, $F_2 = \langle -2, -3 \rangle$, $F_3 = \langle 5, 2 \rangle$

50. $F_1 = \langle -3, -1 \rangle$, $F_2 = \langle 0, -3 \rangle$, $F_3 = \langle 3, 4 \rangle$

51.

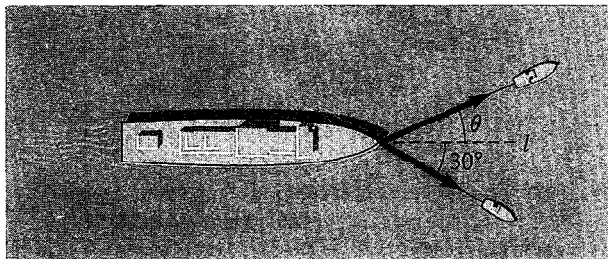


52.



53. **Fuerza de un remolcador** Dos remolcadores tiran de un gran barco hacia puerto, como se muestra en la figura; el remolcador más grande ejerce una fuerza de 4000

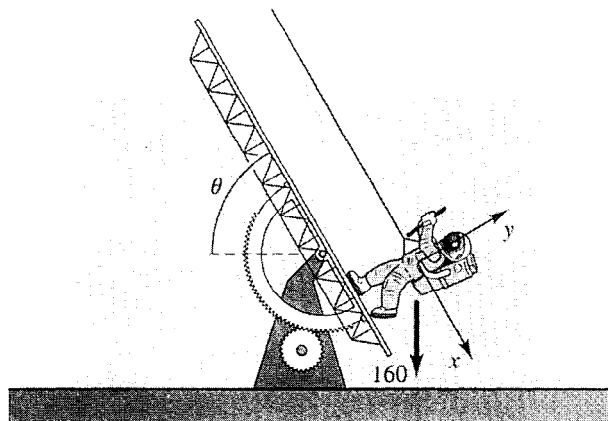
libras sobre su cable y el menor, de 3200 libras. Si el barco ha de navegar en línea recta de A a B , calcula el ángulo θ que el remolcador más grande debe formar con el segmento de recta AB .



EJERCICIO 53

54. Simulación de la gravedad En la figura se presenta un aparato simple que simula condiciones de gravedad en otros planetas. Una cuerda está sujeta a un astronauta que maniobra en un plano inclinado que hace un ángulo de θ grados con la horizontal.

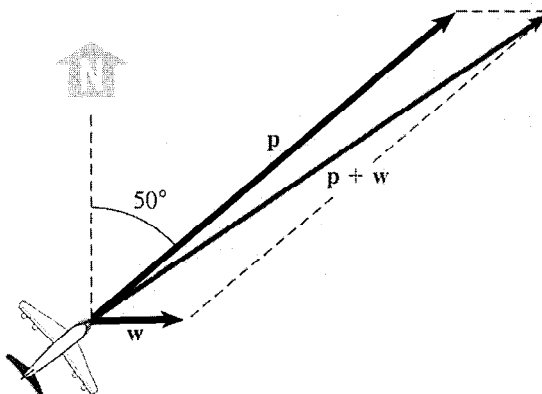
- Si el astronauta pesa 160 libras, encuentra las componentes x y y de la fuerza descendente (observa los ejes en la figura)
- El componente y de la parte a) es el peso del astronauta en relación con el plano inclinado. El sujeto debe pesar 27 libras en la Luna y 60 libras en Marte. Calcula los ángulos θ grados (al 0.01° de grado más cercano), de modo que el aparato del plano inclinado simule una caminata en estas superficies.



EJERCICIO 54

55. Rumbo de un avión y velocidad en tierra Un aeroplano con velocidad de 200 millas por hora vuela en dirección 50° , y un viento de 40 millas por hora sopla desde el oeste. Como se muestra en la figura, estos datos se pueden representar con vectores \mathbf{p} y \mathbf{w} de magnitudes

200 y 40, respectivamente. La dirección de la resultante $\mathbf{p} + \mathbf{w}$ dará el rumbo verdadero del avión en relación con tierra, y la magnitud $\|\mathbf{p} + \mathbf{w}\|$ es la velocidad en tierra del avión. Calcula el rumbo verdadero y la velocidad en tierra.



EJERCICIO 55

56. Rumbo de un avión y velocidad en tierra Consulta el ejercicio 55. Un avión vuela en dirección 140° a una velocidad en aire de 500 millas por hora, con un viento de 30 millas por hora que sopla en dirección 65° . Calcula el rumbo verdadero y la velocidad en tierra del avión.

57. Rumbo de un avión y velocidad en tierra El piloto de una aeronave desea mantener un rumbo verdadero en dirección 250° , con una velocidad en tierra de 400 millas por hora cuando el viento está soplando directamente hacia el norte a 50 millas por hora. Calcula la velocidad en aire que se requiere y el rumbo de la brújula.

58. Dirección y velocidad del viento Un avión vuela en dirección 20° con una velocidad en aire de 300 millas por hora. Su velocidad en tierra y rumbo verdadero son 350 millas por hora y 30° , respectivamente. Estima la dirección y velocidad del viento.

59. Navegación de un bote de remos La corriente de un río se mueve directamente desde el oeste a 1.5 ft/s. Una persona que rema en un bote a 4 ft/s en aguas tranquilas desea remar directamente al norte hasta el otro lado del río. Calcula, al grado más cercano, la dirección en que debe remar.

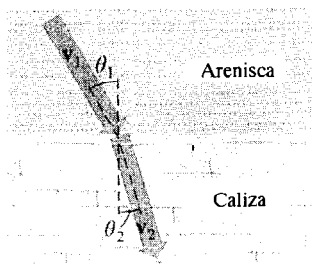
60. Navegación de un bote de motor Para que un bote de motor que se mueve a una velocidad de 30 millas por hora navegue directamente al norte hasta la otra rivera, ha de dirigirse a un punto que tiene un rumbo de $N15^\circ E$.

Si la corriente se mueve directamente al oeste, calcula la rapidez a que circula.

- 61. Circulación de aguas freáticas** Los contaminantes de las aguas subterráneas pueden entrar en el agua potable de una comunidad atravesando la roca porosa del manto acuífero. Si las aguas freáticas fluyen a una velocidad \mathbf{v}_1 por una zona de contacto entre dos tipos de rocas, su velocidad cambia a \mathbf{v}_2 y tanto la dirección como la velocidad de circulación se pueden obtener mediante la fórmula

$$\frac{\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2},$$

en donde los ángulos θ_1 y θ_2 son como se presentan en la figura. Para la piedra arenisca, $\|\mathbf{v}_1\| = 5$ cm/día; para la piedra caliza, $\|\mathbf{v}_2\| = 3.8$ cm/día. Si $\theta_1 = 30^\circ$, calcula los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 en forma i, j .

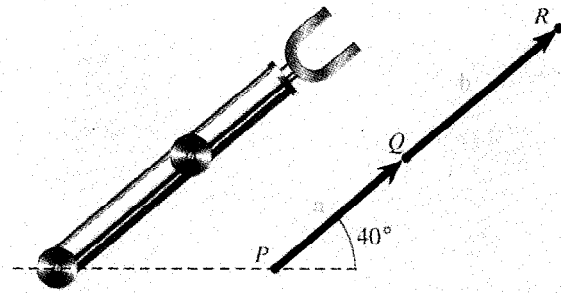


EJERCICIO 61

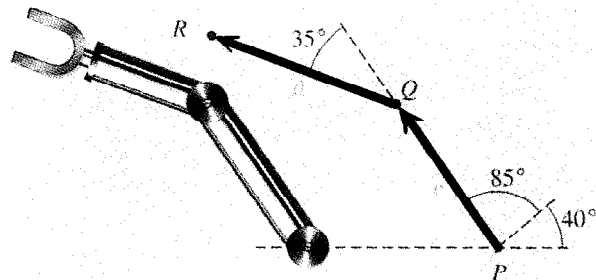
- 62. Circulación de aguas freáticas** Consulta el ejercicio 61. El agua subterránea contaminada corre por arenas arcillosas con una dirección de flujo θ_1 y velocidad (en cm/día) dada por el vector $\mathbf{v}_1 = 20\mathbf{i} - 82\mathbf{j}$. Cuando esta corriente entra en una región de arenas limpias, su rapidez aumenta a 725 cm/día. Encuentra la nueva dirección de circulación mediante el cálculo de θ_2 .

- 63. Movimiento de robots** Los vectores son útiles para describir el movimiento de los robots.

- a) El brazo de la máquina que se ilustra en la primera figura se puede hacer girar en las articulaciones P y Q . El brazo superior representado por \mathbf{a} mide 15 pulgadas de largo, y el antebrazo (incluyendo la mano) representado por \mathbf{b} , 17 pulgadas de largo. Calcula las coordenadas del punto R de la mano usando $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- b) Si el brazo superior gira 85° y el antebrazo gira otros 35° , como se ilustra en la segunda figura, calcula las nuevas coordenadas de R usando $\mathbf{c} + \mathbf{d}$.



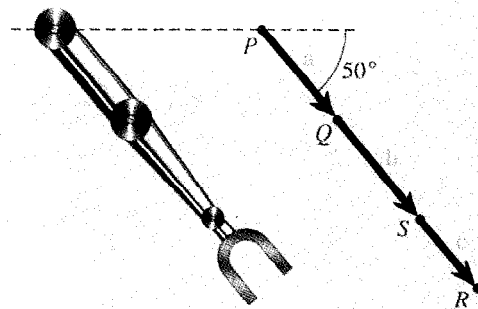
EJERCICIO 63a)



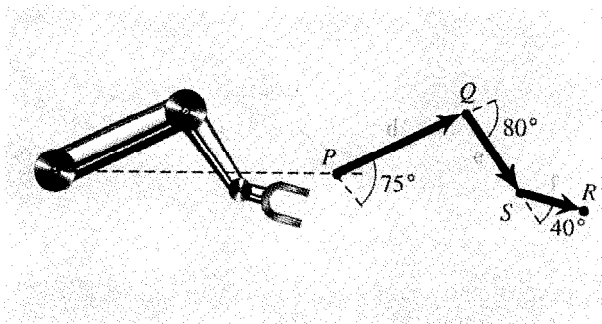
EJERCICIO 63b)

- 64. Movimiento de robots** Consulta el ejercicio 63.

- a) Supongamos que a la articulación de la muñeca del robot se le permite un giro en la articulación que enlaza S , y el brazo está ubicado como se muestra en la primera figura. El brazo superior mide 15 pulgadas de largo; el antebrazo, sin la mano, tiene una longitud de 10 pulgadas, y la mano alcanza 7 pulgadas. Calcula las coordenadas de R usando $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.



EJERCICIO 64a)



EJERCICIO 64b)

- b) Supón que el brazo superior del robot gira 75° , el antebrazo gira -80° y la mano otros 40° , como se muestra en la segunda figura. Calcula las nuevas coordenadas de R usando $\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}$.

4.7 Producto punto

El *producto punto* de dos vectores tiene muchas aplicaciones. Comencemos con una definición algebraica.

Definición del producto punto

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$. El **producto punto** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de \mathbf{a} y \mathbf{b} es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

El símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se lee “**a punto b**”. El producto punto también se conoce como **producto escalar** o **producto interior**. *Observemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un número real y no un vector*, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Hallar el producto punto de dos vectores

Encuentra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 6 \rangle$ **b)** $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

Solución

a) $\langle -5, 3 \rangle \cdot \langle 2, 6 \rangle = (-5)(2) + (3)(6) = -10 + 18 = 8$

b) $(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = (4)(3) + (6)(-7) = 12 - 42 = -30$

Propiedades del producto punto

Si \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son vectores y c es un número real, entonces

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

(2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(4) $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

(5) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$



PRUEBA La prueba de cada propiedad se deduce de la definición del producto punto y las propiedades de números reales; por lo tanto, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$ entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},\end{aligned}$$

que demuestra la propiedad (3). Las pruebas de las propiedades restantes se dejan como ejercicios. ■

Dos vectores cualesquiera diferentes de cero $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ se pueden representar en un plano coordenado por segmentos de recta dirigidos desde el origen O a los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, respectivamente. El **ángulo** θ entre \mathbf{a} y \mathbf{b} es, por definición, $\angle AOB$ (Fig. 42). Observemos que $0 \leq \theta \leq \pi$ y que $\theta = 0$ si \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen la misma dirección o $\theta = \pi$ y si \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen dirección opuesta.

Definición de vectores paralelos y ortogonales

Sea θ el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} diferentes de cero.

(1) \mathbf{a} y \mathbf{b} son **paralelos** si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$

(2) \mathbf{a} y \mathbf{b} son **ortogonales** si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

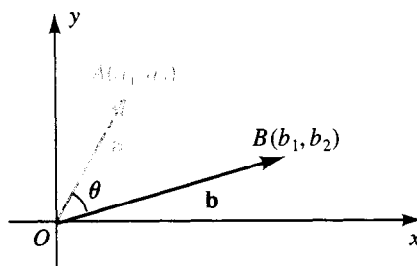


FIGURA 42

Los **vectores** \mathbf{a} y \mathbf{b} de la figura 42 son paralelos si y sólo si se encuentran en la misma línea que pasa por el origen. En este caso, $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún número real c . Los vectores son ortogonales si y sólo si están en líneas mutuamente perpendiculares que pasan por el origen. Suponemos que el vector $\mathbf{0}$ es paralelo y ortogonal a *todo* vector \mathbf{a} .

El siguiente teorema demuestra la cercana relación que hay entre el ángulo situado entre dos vectores y el producto punto de ambos.

Teorema sobre el producto punto

Si θ es el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

PRUEBA Si \mathbf{a} y \mathbf{b} no son paralelos, tenemos una situación similar a la ilustrada en la figura 42. Se puede aplicar entonces la ley de los cosenos para triangular AOB . Como las longitudes de los tres lados del triángulo son $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, y $d(A, B)$,

$$[d(A, B)]^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Con la fórmula de la distancia y la definición de la magnitud de un vector, se obtiene

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta,$$

que se reduce a

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Al dividir ambos lados de la última ecuación entre -2 resulta

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta,$$

que es lo que se deseaba demostrar.

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos, entonces $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, y, por lo tanto, $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún número real c con $c > 0$ si $\theta = 0$ y $c < 0$ si $\theta = \pi$. Se puede demostrar, mediante las propiedades del producto punto, que $\mathbf{a} \cdot (c\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|\|c\mathbf{a}\|\cos\theta$ y, por lo tanto, el teorema es cierto para todos los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} distintos de cero. ■

Teorema sobre el coseno del ángulo entre vectores

Si θ es el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} distintos de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}.$$

EJEMPLO 2 Hallar el ángulo entre dos vectores

Encuentra el ángulo entre $\mathbf{a} = \langle 4, -3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, 2 \rangle$.

Solución Los vectores están dibujados en la figura 43. Aplicamos el teorema anterior:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{(4)(1) + (-3)(2)}{\sqrt{16+9}\sqrt{1+4}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{25}$$

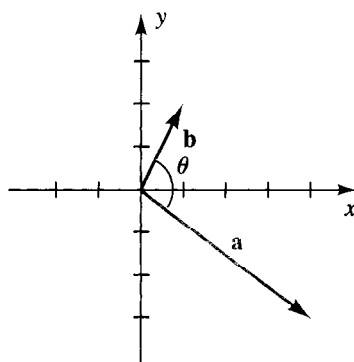


FIGURA 43

Así pues

$$\theta = \arccos\left(\frac{-2\sqrt{5}}{25}\right) \approx 100.3^\circ.$$

EJEMPLO 3 *Demstrar que dos vectores son paralelos*

Sea $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

a) Demuestra que \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos.

b) Encuentra el escalar c tal que $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$.

Solución a) Por definición, los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos si y sólo si el ángulo θ entre ellos es 0 o π . Como el coseno de este ángulo es

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{(\frac{1}{2})(-2) + (-3)(12)}{\sqrt{\frac{1}{4} + 9} \sqrt{4 + 144}} = \frac{-37}{37} = -1,$$

vemos que

$$\theta = \arccos(-1) = \pi.$$

b) Dado que \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos, hay un escalar c tal que $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$; es decir,

$$-2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} = c(\frac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \frac{1}{2}c\mathbf{i} - 3c\mathbf{j}.$$

Al igualar los componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} tendremos

$$-2 = \frac{1}{2}c \quad \text{y} \quad 12 = -3c.$$

Por lo tanto, $c = -4$; esto es, $\mathbf{b} = -4\mathbf{a}$. Tomemos nota de que \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen direcciones opuestas, ya que $c < 0$.

El uso de la fórmula $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$, junto con el hecho de que dos vectores son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ (o uno de los vectores es $\mathbf{0}$), nos dará este resultado:

Teorema sobre vectores ortogonales

Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 *Demstrar que dos vectores son ortogonales*

Demuestra que el par de vectores es ortogonal:

a) \mathbf{i}, \mathbf{j} b) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

Solución Se puede usar el teorema sobre vectores ortogonales para probar la ortogonalidad demostrando que el producto punto de cada par es cero:

a) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \langle 1, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle = (1)(0) + (0)(1) = 0 + 0 = 0$

b) $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2)(6) + (3)(-4) = 12 - 12 = 0$

Definición de $\text{comp}_b a$

Sea θ el ángulo entre dos vectores a y b diferentes de cero. El **componente de a proyectado a lo largo de b** , denotado por $\text{comp}_b a$, está dado por:

$$\text{comp}_b a = \|a\| \cos \theta.$$

El significado geométrico de esta definición con θ agudo u obtuso se ilustra en la figura 44, en donde no se registran los ejes x y y .

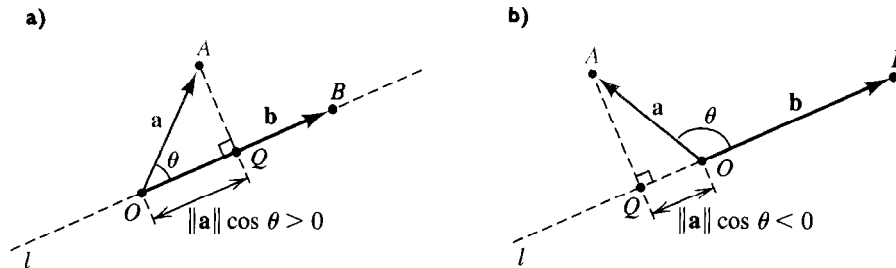


FIGURA 44 $\text{comp}_b a = \|a\| \cos \theta$.

Si el ángulo θ es agudo, entonces, como en la figura 44a), se puede formar un triángulo rectángulo trazando un segmento de recta AQ perpendicular a la línea l que pase por O y B . Observemos que \vec{OQ} tiene la misma dirección que \vec{OB} . Con referencia a la parte a) de la figura, vemos que

$$\cos \theta = \frac{d(O, Q)}{\|a\|} \quad \text{o, lo que es equivalente,} \quad \|a\| \cos \theta = d(O, Q).$$

Si θ es obtuso, entonces, como en la figura 44b), se traza otra vez AQ perpendicular a l . En este caso, la dirección de \vec{OQ} es opuesta a la de \vec{OB} , y como $\cos \theta$ es negativo,

$$\cos \theta = \frac{-d(O, Q)}{\|a\|} \quad \text{o, lo que es equivalente,} \quad \|a\| \cos \theta = -d(O, Q).$$

Si $\theta = \pi/2$, entonces a es ortogonal a b y $\text{comp}_b a = 0$.

Si $\theta = 0$, entonces a tiene la misma dirección que b y $\text{comp}_b a = \|a\|$.

Si $\theta = \pi$, entonces a y b tienen dirección opuesta y $\text{comp}_b a = -\|a\|$.

El análisis precedente demuestra que el componente de a a lo largo de b se puede encontrar *proyectando* el punto extremo de a sobre la línea l que contiene b . Por esta razón, $\|a\| \cos \theta$ a veces se llama **proyección de a sobre b** y se denota con $\text{proy}_b a$.

Fórmula para $\text{comp}_b a$

Si a y b son vectores distintos de cero, entonces

$$\text{comp}_b a = \frac{a \cdot b}{\|b\|}.$$

PRUEBA Si θ es el ángulo entre a y b , entonces, por el teorema sobre el producto punto,

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta$$

Al dividir ambos lados de esta ecuación entre $\| \mathbf{b} \|$, resulta

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\| \mathbf{b} \|} = \| \mathbf{a} \| \cos \theta = \text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}. \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Hallar los componentes de un vector \mathbf{a} lo largo de otro

Si $\mathbf{c} = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, encuentra $\text{comp}_{\mathbf{d}} \mathbf{c}$ y $\text{comp}_{\mathbf{c}} \mathbf{d}$ e ilustra gráficamente estos números.

Solución Los vectores \mathbf{c} , \mathbf{d} y los componentes descados aparecen en la figura 45. Usamos la fórmula para $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$, como sigue:

$$\text{comp}_{\mathbf{d}} \mathbf{c} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\| \mathbf{d} \|} = \frac{(10)(3) + (4)(-2)}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{22}{\sqrt{13}} \approx 6.10$$

$$\text{comp}_{\mathbf{c}} \mathbf{d} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}}{\| \mathbf{c} \|} = \frac{(3)(10) + (-2)(4)}{\sqrt{100 + 16}} = \frac{22}{\sqrt{116}} \approx 2.04$$

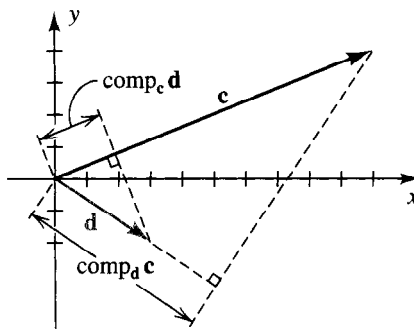


FIGURA 45

Concluimos esta sección con una aplicación física del producto punto. Analicemos brevemente el concepto científico de *trabajo*.

Fuerza se puede considerar como la entidad física que se usa para describir un empuje o tracción sobre un objeto; por ejemplo, se requiere una fuerza a fin de empujar o tirar de un objeto a lo largo de un plano horizontal, para levantar un objeto del suelo o con objeto de mover una partícula cargada en un campo electromagnético. Con frecuencia las fuerzas se miden en libras; si un objeto pesa 10 libras, entonces por definición, la fuerza requerida para levantarlo (o sostenerlo sobre el suelo) es de 10 libras. Una fuerza de este tipo es una **fuerza constante**, ya que su magnitud no cambia mientras se aplique al objeto dado.

Si se aplica una fuerza constante a un objeto, desplazándolo una distancia d en la dirección de la fuerza, entonces, por definición, el **trabajo** W realizado es

$$W = Fd.$$

Si F se mide en libras y d en pies, las unidades para W son pies-libras (ft-lb). En el sistema cgs se usa la **dina** como unidad de fuerza. Si F se expresa en dinas y d en centímetros, la unidad para W es la dina-centímetro, o **erg**; en el sistema MKS, el **newton** se usa como unidad de fuerza. Si F está en newtons y d en metros, la unidad para W es el newton-metro, o **joule**.

EJEMPLO 6 *Determinar el trabajo realizado por una fuerza constante*

Encuentra el trabajo realizado al empujar un automóvil a lo largo de un camino a nivel, desde un punto A a otro punto B situado a 40 pies de A , si se ejerce una fuerza constante de 90 libras.

Solución El problema se ilustra en la figura 46, en donde hemos representado la carretera como parte de una línea l . Dado que la fuerza constante es $F = 90$ lb y la distancia que el automóvil se mueve es $d = 40$ pies, el trabajo realizado es

$$W = (90)(40) = 3600 \text{ ft-lb.}$$

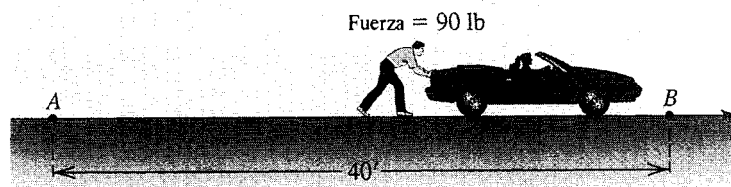


FIGURA 46

La fórmula $W = Fd$ es muy restrictiva, ya que se puede usar sólo si la fuerza se aplica a lo largo de la línea de movimiento. En forma más general, supón que un vector \mathbf{a} representa una fuerza y que su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector \mathbf{b} . Esto se ilustra en la figura 47, en donde la fuerza \mathbf{a} se usa para tirar de un objeto a lo largo de una trayectoria a nivel desde O hasta B , y $\mathbf{b} = \vec{OB}$.

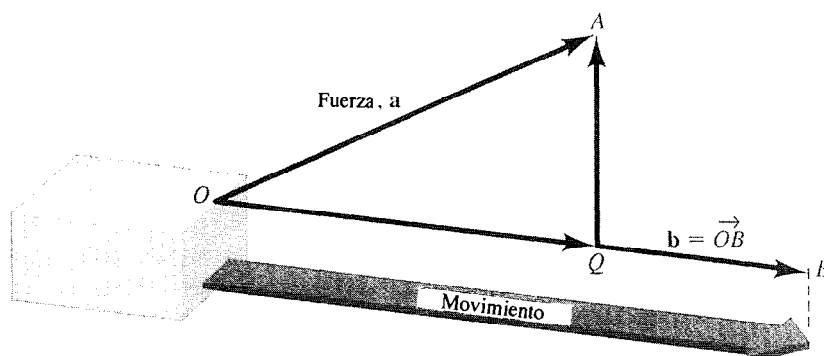


FIGURA 47

El vector \mathbf{a} es la suma de los vectores OQ y QA , en donde \vec{QA} es ortogonal a \mathbf{b} . Como \vec{QA} no contribuye al movimiento horizontal, se puede suponer que el movimiento de O a B se debe sólo por \vec{OQ} . Aplicando $W = Fd$, sabemos que el trabajo es el producto de $\|\vec{OQ}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$. Como $\|\vec{OQ}\| = \text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$, se obtiene

$$W = (\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) \|\mathbf{b}\| = (\|\mathbf{a}\| \cos \theta) \|\mathbf{b}\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

en donde θ representa $\angle AOQ$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición de trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante \mathbf{a} conforme su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector \mathbf{b} es $W = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

EJEMPLO 7

Determinar el trabajo realizado por una fuerza constante

La magnitud y dirección de una fuerza constante están dadas por $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{j}$. Halla el trabajo realizado si el punto de aplicación de la fuerza se mueve del origen al punto $P(4, 1)$.

Solución

La fuerza \mathbf{a} y el vector $\mathbf{b} = \vec{OP}$ aparecen en la figura 48. Como $\mathbf{b} = \langle 4, 1 \rangle = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, tenemos, por la definición precedente,

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (2)(4) + (5)(1) = 13. \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, la unidad de longitud está en pies y la magnitud de la fuerza se mide en libras, el trabajo realizado es 13 ft-lb.

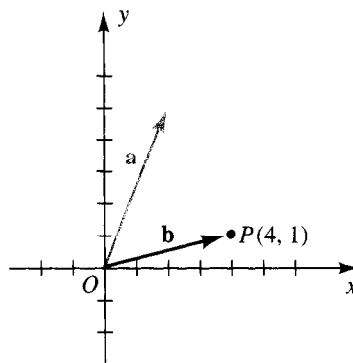


FIGURA 48

EJEMPLO 8

Determinar el trabajo realizado contra la gravedad

Un pequeño carro, de 100 libras de peso, es empujado hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal (Fig. 49). Determina el trabajo realizado contra la gravedad al empujar el carro una distancia de 80 pies.

Solución

Introduzcamos un sistema coordenado xy (Fig. 50). El vector PQ representa la fuerza de gravedad que actúa verticalmente hacia abajo con una magnitud de 100 libras. El vector \mathbf{F} correspondiente es $0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$. El punto de aplicación de esta fuerza se mueve a lo largo del vector PR de magnitud 80. Si \vec{PR} corresponde a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces, con referencia al triángulo PTR , vemos que

$$a_1 = 80 \cos 30^\circ = 40\sqrt{3},$$

$$a_2 = 80 \sin 30^\circ = 40,$$

y por lo tanto

$$\mathbf{a} = 40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}.$$

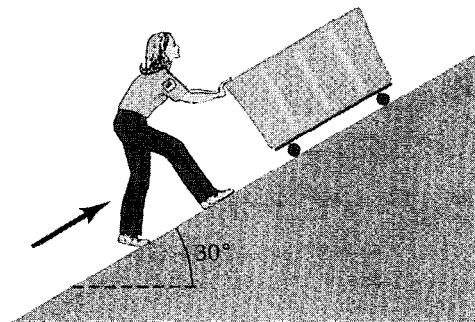


FIGURA 49

Al aplicar la definición, encontramos que el trabajo realizado *por* la gravedad es

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = (0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) \cdot (40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) = 0 - 4000 = -4000 \text{ ft-lb.}$$

El trabajo realizado *contra* la gravedad es

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = 4000 \text{ ft-lb.}$$

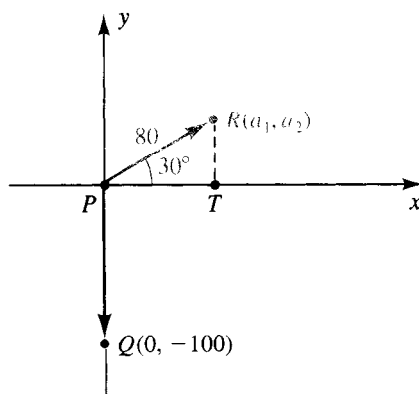


FIGURA 50

4.7 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: encuentra a) el producto cruz de los dos vectores y b) el ángulo entre los dos vectores.

- | | |
|---|--|
| 1. $\langle -2, 5 \rangle$, $\langle 3, 6 \rangle$ | 2. $\langle 4, -7 \rangle$, $\langle -2, 3 \rangle$ |
| 3. $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ | 4. $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ |
| 5. $9\mathbf{i}$, $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ | 6. $6\mathbf{j}$, $-4\mathbf{i}$ |
| 7. $\langle 10, 7 \rangle$, $\langle -2, -\frac{7}{5} \rangle$ | 8. $\langle -3, 6 \rangle$, $\langle -1, 2 \rangle$ |

Ejercicios 9 al 12: demuestra que los vectores son ortogonales.

- | | |
|---|--|
| 9. $\langle 4, -1 \rangle$, $\langle 2, 8 \rangle$ | 10. $\langle 3, 6 \rangle$, $\langle 4, -2 \rangle$ |
| 11. $-4\mathbf{j}$, $-7\mathbf{i}$ | 12. $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $6\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ |

Ejercicios 13 al 16: demuestra que los vectores son paralelos y determina si tienen la misma dirección o es opuesta.

- | |
|--|
| 13. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\frac{12}{7}\mathbf{i} + \frac{20}{7}\mathbf{j}$ |
| 14. $\mathbf{a} = -\frac{5}{2}\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -10\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$ |
| 15. $\mathbf{a} = \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 8, 6 \rangle$ |
| 16. $\mathbf{a} = \langle 6, 18 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, -12 \rangle$ |

Ejercicios 17 al 20: determina c tal que los dos vectores sean ortogonales.

- | | |
|--|---|
| 17. $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $4\mathbf{i} + 5c\mathbf{j}$ | 18. $4c\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $9c\mathbf{i} - 25\mathbf{j}$ |
|--|---|



$$19. 9\mathbf{i} - 16\mathbf{j}, \quad \mathbf{i} + 4\mathbf{j} \qquad 20. 5\mathbf{ci} + 3\mathbf{j}, \quad 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$$

Ejercicios 21 al 28: si $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 4 \rangle$, y $\mathbf{c} = \langle -1, 5 \rangle$, encuentra el número.

21. a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
 22. a) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
 23. $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$ 24. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
 25. $\text{comp}_{\mathbf{c}} \mathbf{b}$ 26. $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{c}$
 27. $\text{comp}_{\mathbf{b}} (\mathbf{a} + \mathbf{c})$ 28. $\text{comp}_{\mathbf{c}} \mathbf{c}$

Ejercicios 29 al 32: si \mathbf{c} representa una fuerza constante, halla el trabajo realizado si el punto de aplicación de \mathbf{c} se mueve a lo largo del segmento de recta de P a Q .

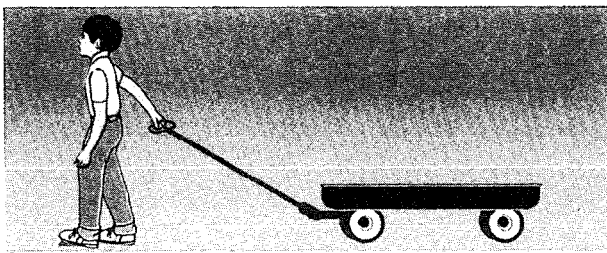
29. $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(5, -2)$
 30. $\mathbf{c} = -10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(4, 7)$
 31. $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(2, -1)$, $Q(4, 3)$
 (Sugerencia: determina el vector $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ tal que $\mathbf{b} = \overrightarrow{PQ}$.)

32. $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $P(-2, 5)$, $Q(6, 1)$
 33. Una fuerza constante de magnitud 4 tiene la misma dirección que \mathbf{j} . Halla el trabajo realizado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 0)$ a $Q(8, 3)$.
 34. Una fuerza constante de magnitud 10 tiene la misma dirección que $-\mathbf{i}$. Halla el trabajo realizado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 1)$ a $Q(1, 0)$.

Ejercicios 35 al 40: demuestra la propiedad si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores y c es un número real.

35. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$ 36. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
 37. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ 38. $c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
 39. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$
 40. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$

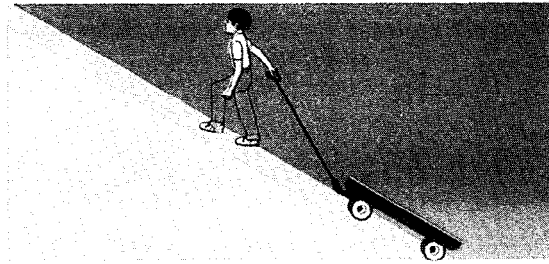
41. **Tirar de un carro pequeño** Un niño jala un carro pequeño al nivel del suelo ejerciendo una fuerza de 20 libras en una agarradera que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se muestra en la figura. Encuentra el



EJERCICIO 41

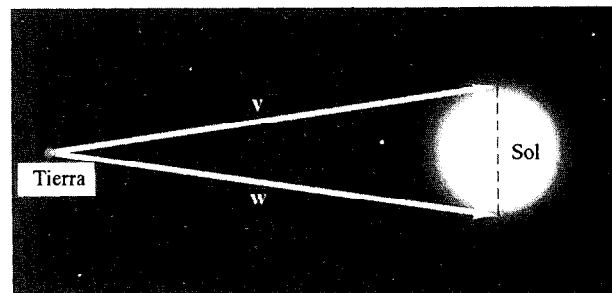
trabajo realizado al jalar el carro una distancia de 100 pies.

42. **Tirar de un carro pequeño** Ve el ejercicio 41. Determina el trabajo realizado si el carro es jalado, con la misma fuerza, 100 pies hacia arriba en un plano inclinado que hace un ángulo de 30° con la horizontal, según se exhibe en la figura.



EJERCICIO 42

43. **Rayos solares** El Sol tiene un radio de 432 000 millas, y su centro está a 93 000 000 millas del centro de la Tierra. Sean \mathbf{v} y \mathbf{w} los vectores ilustrados en la figura.

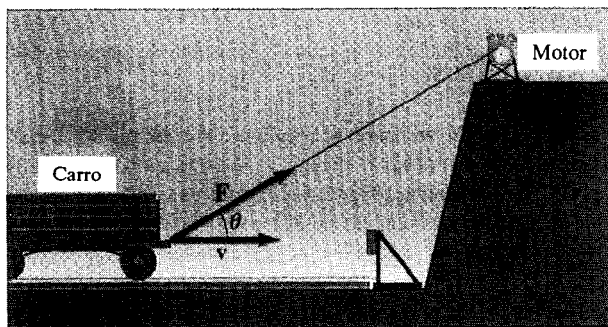


EJERCICIO 43

- a) Expresa \mathbf{v} y \mathbf{w} en forma \mathbf{i} , \mathbf{j} .
 b) Calcula el ángulo aproximado entre \mathbf{v} y \mathbf{w} .

44. **Luz solar en julio** La intensidad I de la luz solar (en watts/m^2) se puede calcular mediante la fórmula $I = ke^{-c/\sin \phi}$, donde k y c son constantes positivas y ϕ es el ángulo entre los rayos solares y el horizonte. La cantidad de luz solar que incide sobre una pared vertical que mira al Sol es igual al componente de los rayos solares a lo largo de la horizontal. Si, durante julio, $\phi = 30^\circ$, $k = 978$ y $c = 0.136$, calcula la cantidad total de luz solar que incide sobre una pared vertical que tiene una superficie de 160 m^2 .

45. **Determinación de la potencia** La cantidad de potencia P producida por un motor se determina mediante la



EJERCICIO 45

fórmula $P = \frac{1}{550} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$, donde \mathbf{F} es la fuerza (en lb) ejercida por el motor y \mathbf{v} es la velocidad (en ft/s) de un objeto movido por el motor. Un motor tira de un cable con una fuerza de 2200 libras cuando el cable hace un ángulo θ con la horizontal, y mueve el carro horizontalmente como se muestra en la figura. Determina la potencia del motor si la velocidad del carro es 8 ft/s cuando $\theta = 30^\circ$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

Ejercicios 1 al 4: encuentra los valores exactos de las partes restantes del triángulo ABC .

1. $\alpha = 60^\circ$, $b = 6$, $c = 7$,
2. $\gamma = 30^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2$
3. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $b = 100$
4. $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

Ejercicios 5 al 8: calcula las partes restantes del triángulo ABC .

5. $\beta = 67^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, $b = 12$
6. $\alpha = 23^\circ 30'$, $c = 125$, $a = 152$
7. $\beta = 115^\circ$, $a = 4.6$, $c = 7.3$
8. $a = 37$, $b = 55$, $c = 43$

Ejercicios 9 y 10: calcula el área del triángulo ABC al 0.1 de unidad cuadrada más cercana.

9. $\alpha = 75^\circ$, $b = 20$, $c = 30$
10. $a = 4$, $b = 7$, $c = 10$

Ejercicios 11 al 16: expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

11. $(7 + 5i) - (-8 + 3i)$
12. $(4 + 2i)(-5 + 4i)$
13. $(3 + 8i)^2$
14. $\frac{1}{9 - \sqrt{-4}}$
15. $\frac{6 - 3i}{2 + 7i}$
16. $\frac{20 - 8i}{4i}$

Ejercicios 17 al 20: resuelve la ecuación.

17. $5x^2 = 2x - 3$
18. $x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$
19. $6x^4 + 29x^2 + 28 = 0$
20. $x^2 + 10x + 38 = 0$

Ejercicios 21 al 26: expresa el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$.

21. $-10 + 10i$
22. $2 - 2\sqrt{3}i$
23. -17
24. $-12i$
25. $-5\sqrt{3} - 5i$
26. $4 + 5i$

Ejercicios 27 y 28: expresa en forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

27. $20 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$
28. $13 \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{5}{12} \right)$

Ejercicios 29 y 30: usa formas trigonométricas para hallar $z_1 z_2$ y z_1/z_2 .

29. $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$
30. $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$, $z_2 = -1 - i$

Ejercicios 31 al 34: usa el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

31. $(-\sqrt{3} + i)^9$
32. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^{30}$
33. $(3 - 3i)^5$
34. $(2 + 2\sqrt{3}i)^{10}$

35. Encuentra las tres raíces cúbicas de -27 .

36. Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$.

a) Encuentra z^{24} . b) Halla las tres raíces cúbicas de z .

37. Encuentra las soluciones de la ecuación $x^5 - 32 = 0$.

38. Si $\mathbf{a} = \langle -4, 5 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -8 \rangle$, traza los vectores correspondientes a

- a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ c) $2\mathbf{a}$ d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

39. Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, encuentra el vector o número que corresponda a

- a) $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ b) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$
c) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ d) $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$

- 50. Distancias entre ciudades** Las comunidades costañas de San Clemente y Long Beach están a 41 millas una de otra, a lo largo de una línea relativamente recta de costa. En la figura se muestra el triángulo formado por las dos ciudades y la población de Avalon, en la parte sudeste de la isla de Santa Catalina, los ángulos ALS y ASL miden 66.4° y 47.2° , respectivamente.

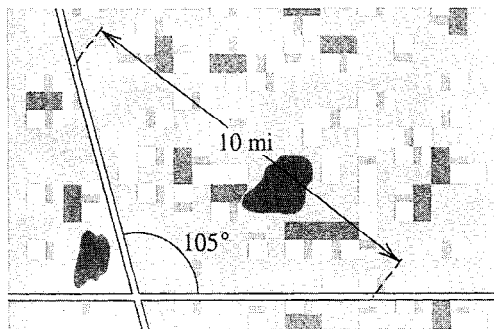


- ### EJERCICIO 50

- ### EJERCICIO 51

- 52. Contacto por radio** Dos muchachas que llevan radios están en la intersección de dos caminos rurales que se cruzan a un ángulo de 105° (ve la figura). Una comienza a caminar en dirección norte por un camino a 5 millas

por hora; al mismo tiempo la otra camina al este por el otro camino a la misma velocidad. Si cada radio tiene un alcance de 10 millas, ¿durante cuánto tiempo se mantendrán en comunicación las muchachas?



EJERCICIO 52

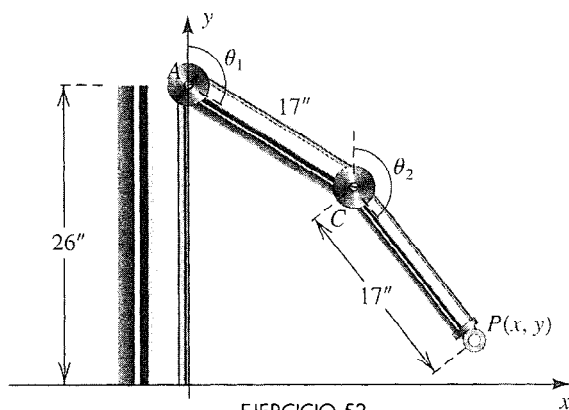
53. Diseño de robots En la figura se muestra un diseño para el brazo de un robot con dos partes móviles. Las dimensiones se seleccionan para simular un brazo humano. El brazo superior AC y el inferior CP giran en ángulos θ_1 y θ_2 , respectivamente, para tomar un objeto en el punto $P(x, y)$.

a) Demuestra que $\angle ACP = 180^\circ - (\theta_2 - \theta_1)$.

b) Encuentra $d(A, P)$, y luego usa la parte a) y la ley de los cosenos para demostrar que

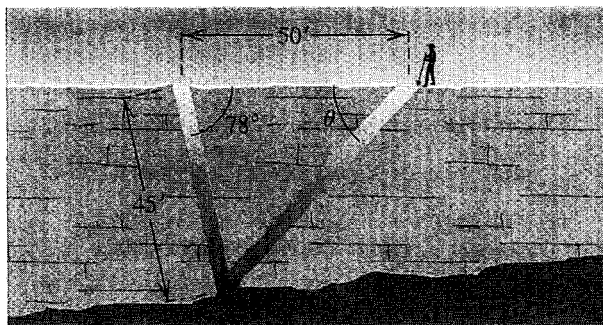
$$1 = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x^2 + (y - 26)^2}{578}.$$

c) Si $x = 25$, $y = 4$ y $\theta_1 = 135^\circ$, calcula θ_2 .



EJERCICIO 53

54. Esfuerzos de rescate Un niño está atrapado a 45 pies bajo el nivel del suelo en el tiro de una mina abandonada inclinado a un ángulo de 78° con la horizontal. Ha de excavarse un túnel a 50 pies de la abertura del tiro (ve la figura)

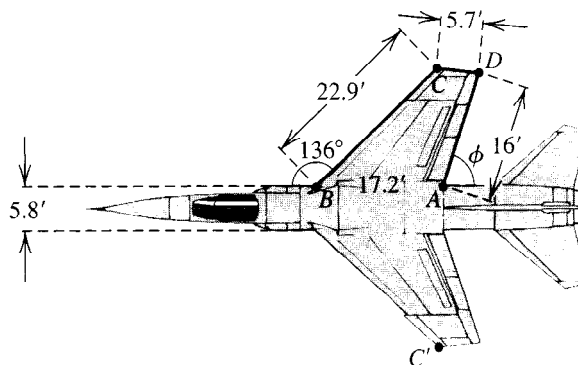


EJERCICIO 54

a) ¿A qué ángulo debe excavarse el túnel?

b) Si el túnel se puede excavar a razón de 3 pies/hora, ¿cuántas horas se tardará en llegar a donde está el niño?

55. Diseño de un avión caza a reacción En la figura se muestra la planta del ala de un caza a reacción.



EJERCICIO 55

a) Calcula el ángulo ϕ .

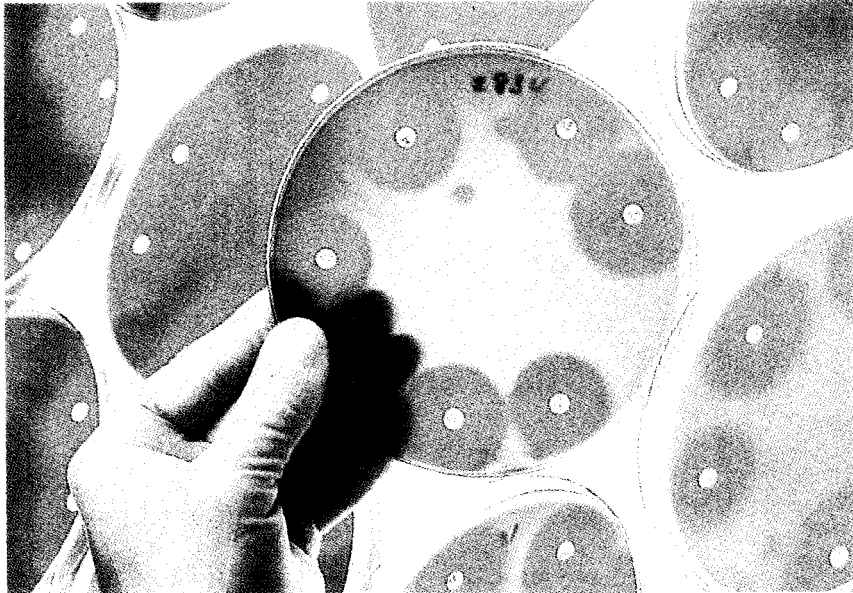
b) Calcula el área del cuadrilátero $ABCD$.

c) Si el fuselaje mide 5.8 pies de ancho, calcula la envergadura de las alas de CC' .

Funciones exponenciales ... y logarítmicas

5

- 5.1 Funciones exponenciales
- 5.2 Función exponencial natural
- 5.3 Funciones logarítmicas
- 5.4 Propiedades de los logaritmos
- 5.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas



Con frecuencia, el número de bacterias de un cultivo aumenta en sentido exponencial.

■ Las funciones exponenciales y logarítmicas son trascendentales, ya que no se pueden definir sólo en términos de suma, resta, multiplicación, división y potencias racionales de una variable x , como es el caso de las funciones algebraicas consideradas en capítulos anteriores. Son de la mayor importancia en matemáticas y tienen aplicaciones en casi todos los campos de trabajo del hombre; resultan especialmente útiles en los campos de la química, biología, física e ingeniería, en donde ayudan a describir cómo crecen o decrecen las magnitudes en la naturaleza. Según veremos en este capítulo, hay una estrecha relación entre funciones específicas exponenciales y logarítmicas, mismas que son inversas entre sí. (Una parte del material de este capítulo se traslapa con el breve estudio de la sección 1.5.) ■

5.1 Funciones exponenciales

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = 2^x,$$

en donde x está restringida a números *racionales* (recuerda que si $x = m/n$ para los enteros m y n con $n > 0$, entonces $2^x = 2^{m/n} = (\sqrt[n]{2})^m$). En la tabla de abajo se enumeran las coordenadas de varios puntos de la gráfica de $y = 2^x$.

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
$y = 2^x$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	1024

Otros valores de y para el racional x , como $2^{1/3}$, $2^{-9/7}$ y $2^{5.143}$, se pueden obtener con calculadora. Algebraicamente es factible demostrar que si x_1 y x_2 son números racionales tales que $x_1 < x_2$, entonces $2^{x_1} < 2^{x_2}$. De este modo, f es una función creciente y su gráfica sube. Localizar puntos nos lleva al trazo de la figura 1, en donde los puntos pequeños indican que sólo los puntos con coordenadas x *racionales* están en la gráfica. Hay un *hueco* en la gráfica siempre que la coordenada x de un punto sea irracional.

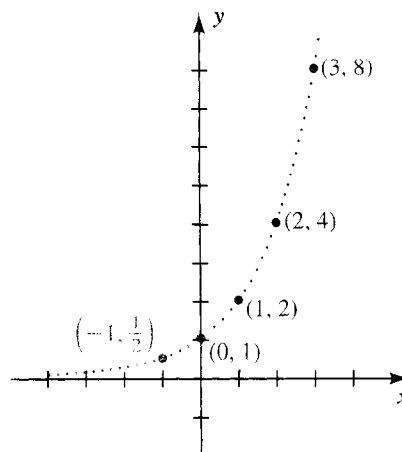


FIGURA 1

A fin de ampliar el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente x *irracional*. A fin de ilustrar esto, si se desea definir 2^π se utiliza el decimal que no sea finito y represente 3.1415926... con π y se consideran las siguientes potencias *racionales* de 2:

$$2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, 2^{3.1415}, 2^{3.14159}, \dots$$

Cabe demostrar, mediante cálculo, que cada potencia sucesiva se aproxima a un número real único denotado por 2^π . De este modo,

$$2^x \rightarrow 2^\pi \quad \text{a medida que } x \rightarrow \pi, \text{ con } x \text{ racional.}$$

Es factible usar la misma técnica para cualquier otra potencia irracional de 2. Con objeto de trazar la gráfica de $y = 2^x$ con x *real*, se sustituyen los huecos de la gráfica de la figura 1 con puntos y se

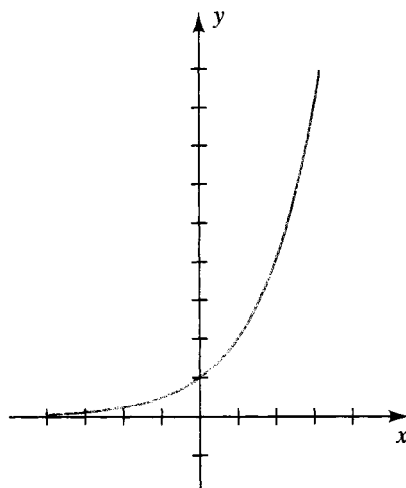


FIGURA 2

obtiene la gráfica de la figura 2. La función f definida por $f(x) = 2^x$ para todo número real x se llama *función exponencial con base 2*.

Consideremos en seguida *cualquier* base a , en donde a es un número real positivo diferente de 1. Al igual que en el análisis previo, a cada número real x corresponde un número positivo a^x para el que las leyes de los exponentes se cumplen; en consecuencia, como se ve en la tabla, resulta viable definir una función f cuyo dominio es \mathbb{R} y su rango es el conjunto de números reales positivos.

Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en \mathbb{R} donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Las gráficas de la tabla indican que si $a > 1$, entonces f es creciente en \mathbb{R} , y si $0 < a < 1$, f decrece en \mathbb{R} . (Esto es comprobable mediante cálculo.) Las gráficas simplemente indican la apariencia *general*; es decir, la forma *exacta* depende del valor de a . Observarás que como $a^0 = 1$, la intersección con el eje y es 1 para toda a .

Si $a > 1$, conforme x *decrece* hasta valores negativos, la gráfica de f se aproxima al eje de las x (consulta la tercera columna de la tabla); por lo tanto, el eje x es una *asíntota horizontal*. A medida que x aumenta hasta valores positivos, la gráfica sube con rapidez. Este tipo de variación es característica de la **ley exponencial de crecimiento** y f recibe a veces el nombre de **función de crecimiento**.

Si $0 < a < 1$, en tanto x *crece*, la gráfica de f se aproxima asintóticamente al eje x (consulta la última columna de la tabla). Este tipo de variación se conoce como **decremento** o **decaimiento exponencial**.

Cuando consideramos a^x excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Tomemos nota de que si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para muchos valores de x , como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{6}$. Si $a = 0$, entonces

$a^0 = 0^0$ es indefinido. Por último, cuando $a = 1$, $a^x = 1$ para toda x y la gráfica de $y = a^x$ es una línea horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente en todo su dominio o decreciente en el mismo; por lo tanto, f pasa la prueba de la línea horizontal (pág. 28) y, en consecuencia, f es biunívoca. Si se combina este resultado con la definición de una función biunívoca (pág. 27), resultan las partes (1) y (2) del teorema:

Teorema: las funciones exponenciales son biunívocas

La función exponencial f dada por

$$f(x) = a^x \quad \text{por } 0 < a < 1 \text{ o } a > 1$$

es biunívoca; en consecuencia, se satisfacen las condiciones equivalentes que siguen para números reales x_1 y x_2 :

(1) si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

(2) si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando se usa este teorema como razón para dar un paso en la solución de un ejemplo, *las funciones exponenciales son biunívocas*.

ILUSTRACIÓN

Las funciones exponenciales son biunívocas

■ Si $7^{3x} = 7^{2x+5}$, entonces $3x = 2x + 5$, o $x = 5$.

En el ejemplo que viene se resuelve una *ecuación exponencial*; es decir, una ecuación en que la variable aparece en un exponente.

EJEMPLO 1

Solución de una ecuación exponencial

Resuelve la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

Solución

$3^{5x-8} = 9^{x+2}$	dados
$3^{5x-8} = (3^2)^{x+2}$	expresar ambos lados con la misma base
$3^{5x-8} = 3^{2x+4}$	ley de los exponentes
$5x - 8 = 2x + 4$	las funciones exponenciales son biunívocas
$3x = 12$	restar $2x$ y sumar 8
$x = 4$	dividir entre 3

En los dos ejemplos que vienen se trazan las gráficas de funciones exponenciales.

EJEMPLO 2 *Trazar gráficas de funciones exponenciales*

Si $f(x) = (\frac{3}{2})^x$, y $g(x) = 3^x$, traza las gráficas de f y g en el mismo plano coordenado.

Solución Como $\frac{3}{2} > 1$ y $3 > 1$, cada gráfica *sube* a medida que x crece. La siguiente tabla muestra coordenadas para varios puntos de las gráficas.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (\frac{3}{2})^x$	$\frac{4}{9} \approx 0.4$	$\frac{2}{3} \approx 0.7$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
$y = 3^x$	$\frac{1}{9} \approx 0.1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3$	1	3	9	27	81

La localización de puntos y la familiaridad con la gráfica de $y = a^x$, nos conducen a las gráficas que aparecen en la figura 3.

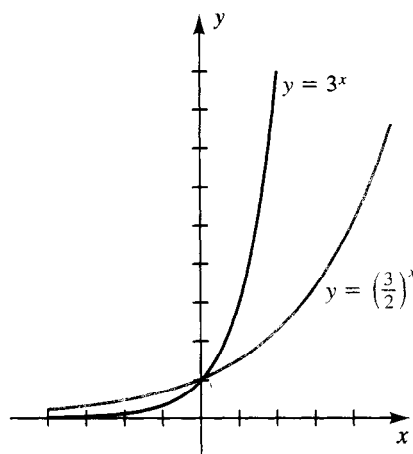


FIGURA 3

El ejemplo 2 hace ver que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x , y $b^x < a^x$ para valores negativos de x . En particular, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ de la figura 1 se encuentra entre las gráficas de f y g de la figura 3.

EJEMPLO 3 *Trazar la gráfica de una función exponencial*

Traza la gráfica de la ecuación $y = (\frac{1}{2})^x$.

Solución Puesto que $0 < \frac{1}{2} < 1$, la gráfica *cae* a medida que x crece. En la tabla de abajo se enumeran las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica está trazada en la figura 4. Puesto que $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, la gráfica es igual a la gráfica de la ecuación $y = 2^{-x}$. Notarás que es una reflexión hasta el eje y de la gráfica de $y = 2^x$ de la figura 2.

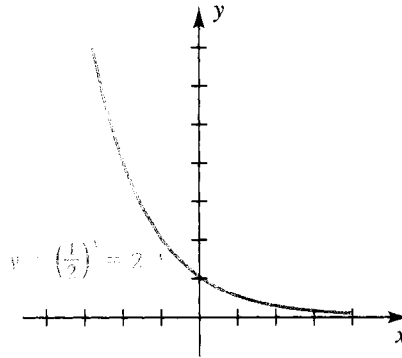


FIGURA 4

En la práctica se presentan ecuaciones de la forma $y = a^u$, en donde u es alguna expresión en x ; los dos próximos ejemplos presentan ecuaciones de este tipo.

EJEMPLO 4 Desplazamiento de gráficas de funciones exponenciales

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = 3^{x-2}$ **b)** $y = 3^x - 2$

a) La gráfica de $y = 3^x$ se trazó en la figura 3 y se vuelve a trazar en la 5. De nuestro análisis sobre desplazamientos horizontales de la sección 1.4, podemos obtener la gráfica de $y = 3^{x-2}$ corriendo la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades a la derecha (Fig. 5).

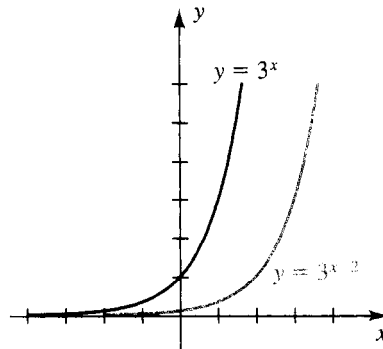


FIGURA 5

La gráfica de $y = 3^{x-2}$ también se puede obtener si se localizan varios puntos y se usan como guía para trazar una curva de tipo exponencial.

b) De nuestro análisis sobre desplazamientos verticales de la sección 1.4 podemos obtener la gráfica de $3^x - 2$, recorriendo la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades hacia abajo (Fig. 6). Observa que la intersección con el eje y es -1 y la línea $y = -2$ es una asíntota horizontal para la gráfica.

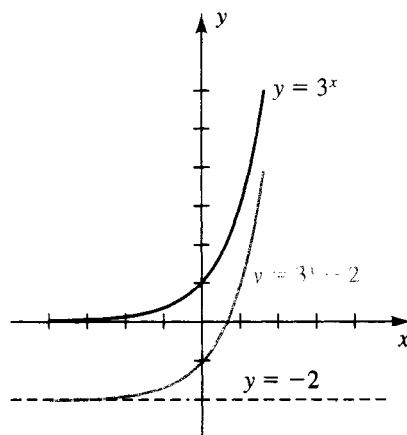


FIGURA 6

La gráfica en forma de campana de la función del próximo ejemplo es similar a una *curva de probabilidad normal* empleada en estudios estadísticos.

EJEMPLO 5 Trazar una gráfica en forma de campana

Si $f(x) = 2^{-x^2}$, traza la gráfica de f .

Solución Si reescribimos $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2^{(x^2)}}$$

se ve que para $x > 0$, $f(x)$ decrece con rapidez; de aquí que la gráfica se aproxime en sentido asíntótico al eje x . El valor máximo de f es $f(0) = 1$. Dado que f es una función par, la gráfica es simétrica con respecto al eje y . Algunos puntos de la gráfica son $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$ y $(2, \frac{1}{16})$. La gráfica de la figura 7 se obtiene localizando puntos y aplicando simetría.

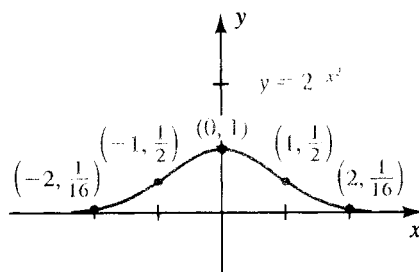


FIGURA 7

APLICACIÓN

Crecimiento de bacterias

Las funciones exponenciales resultan útiles para describir el crecimiento de ciertas poblaciones. Como ilustración, supongamos que a nivel experimental se observa que el número de bacterias de



un cultivo se duplica cada día. Si hay 1000 ejemplares al comienzo, se obtiene la tabla siguiente, en donde t es el tiempo en días y $f(t)$ es el conteo de bacterias en el tiempo t .

t (tiempo en días)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (conteo de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16 000

Está claro que $f(t) = (1000)2^t$. Con esta fórmula se puede predecir la cantidad de bacterias presentes en cualquier tiempo t ; por ejemplo, en $t = 1.5 = \frac{3}{2}$,

$$f(t) = (1000)2^{3/2} \approx 2828.$$

La gráfica de f aparece en la figura 8.

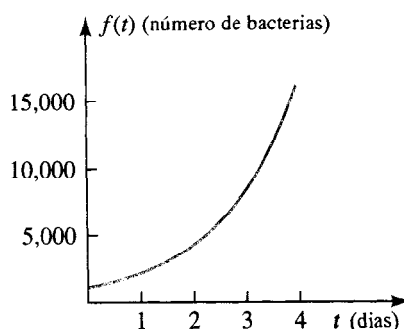


FIGURA 8

APLICACIÓN

Desintegración radiactiva

Ciertas cantidades físicas *decrecen* en forma exponencial. En tales casos, si a es la base de la función exponencial, entonces $0 < a < 1$. Uno de los ejemplos más comunes de decremento exponencial es la desintegración de una sustancia radiactiva o isótopo. La **vida media** (o **periodo radiactivo**) de un isótopo es el tiempo que tomará para que la mitad de la cantidad original de una muestra dada se desintegre. La vida media es la principal característica que distingue una sustancia radiactiva de otra. El isótopo del polonio ^{210}Po tiene una vida media de alrededor de 140 días; es decir, dada cualquier cantidad de esa sustancia, la mitad se desintegrará en 140 días. Si había 20 miligramos de ^{210}Po al inicio, la tabla de abajo indica la cantidad restante después de varios intervalos.

t (tiempo en días)	0	140	280	420	560
$f(t)$ (mg restantes)	20	10	5	2.5	1.25

La curva de la figura 9 ilustra la naturaleza exponencial de la desintegración.

Otras sustancias radiactivas poseen una vida media mucho más larga. En particular, un subproducto de los reactores nucleares es el isótopo del plutonio radiactivo ^{239}Pu , cuya vida media alcanza alrededor de 24 000 años. Es por esta razón que el almacenamiento de desechos radiactivos es un grave problema en la sociedad moderna.

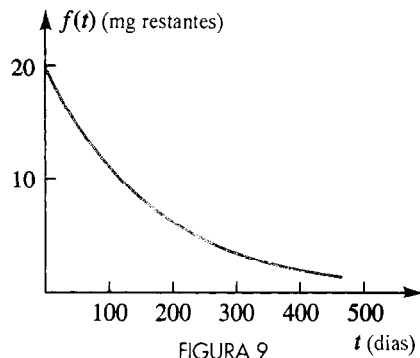


FIGURA 9

APLICACIÓN

Interés compuesto

El *interés compuesto* es una buena ilustración del crecimiento exponencial. Si una suma de dinero C , o capital inicial, se invierte a una tasa de interés *simple*, o i , el interés al término de un periodo es el producto Ci cuando i se expresa como decimal; por ejemplo, si $C = \$1000$ y la tasa de interés es 9% al año, $i = 0.09$ y el interés al finalizar un año es $\$1000(0.09)$, o sea $\$90$.

Si el interés se reinvierte con el capital al término del periodo, la cantidad acumulada (A) es

$$C + Ci, \quad \text{o} \quad C(1 + i).$$

Con objeto de hallar la cantidad acumulada, se multiplica el capital inicial por $(1 + i)$. En el ejemplo anterior, A es $\$1000(1.09)$ o sea $\$1090$.

Una vez transcurrido otro periodo de interés, la cantidad acumulada se encuentra multiplicando $C(1 + i)$ por $(1 + i)$; por lo tanto, después de dos periodos de interés será $C(1 + i)^2$. Si se continúa la reinversión, pasados tres periodos será $C(1 + i)^3$; luego de cuatro, $C(1 + i)^4$, y, en general, después de k periodos de interés es

$$A = C(1 + i)^k.$$

El interés acumulado por medio de esta fórmula es **interés compuesto**. Advertirás que A se expresa en términos de una función exponencial con base $1 + r$. El periodo de interés se puede medir en años, meses, semanas, días o cualquier otra unidad de tiempo apropiada. Al aplicar la fórmula para encontrar A , conviene recordar que i es la *tasa de interés por periodo de interés expresada como decimal*; por ejemplo, si la tasa se indica al 6% *por año compuesto mensualmente*, la tasa por mes es $(6/12)\%$, que equivale al 0.5%. En consecuencia, $i = 0.005$ y k es el número de meses. Si se invierten $\$100$ a esta tasa, la fórmula para A es

$$A = 100(1 + 0.005)^k = 100(1.005)^k.$$

En general, tenemos la fórmula siguiente.

Fórmula de interés compuesto

$$A = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt},$$

Donde C = capital inicial
 i = tasa de interés expresada como decimal
 n = número de periodos de interés por año
 t = número de años que P se invierte
 A = cantidad acumulada después de t años

El ejemplo que viene presenta un caso especial de la fórmula de interés compuesto.

EJEMPLO 6 *Uso de la fórmula de interés compuesto*

Supón que se invierten \$1000 a una tasa de interés de 9% compuesto mensualmente. Encuentra la cantidad acumulada después de cinco, 10 y 15 años. Ilustra gráficamente el crecimiento de la inversión.

Nota: Al aplicar la fórmula de interés compuesto con $i = 0.09$, $n = 12$, y $C = \$1000$, vemos que dicha cantidad luego de t años es

$$A = 1000 \left(1 + \frac{0.09}{12} \right)^{12t} = 1000(1.0075)^{12t}.$$

Al sustituir $t = 5$, 10 y 15 y usar calculadora, se obtiene esta tabla.

Número de años	Cantidad acumulada
5	$A = \$1000(1.0075)^{60} = \1565.68
10	$A = \$1000(1.0075)^{120} = \2451.36
15	$A = \$1000(1.0075)^{180} = \3838.04

La naturaleza exponencial del aumento está indicada porque durante los primeros cinco años, el crecimiento de la inversión es \$565.68; en el segundo quinquenio, fue de \$885.68, y en el último llegó a \$1368.68.

La curva de la figura 10 ilustra el crecimiento de \$1000 invertidos en un lapso de 15 años.

Concluimos esta sección con un ejemplo del uso de la calculadora graficadora.

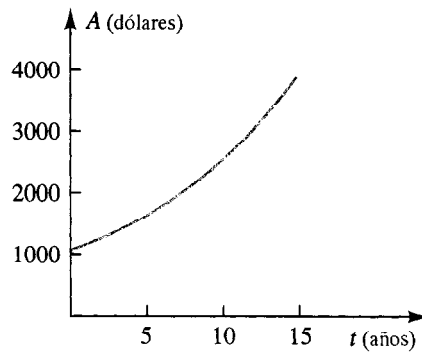
Interés compuesto: $A = 1000(1.0075)^{12t}$ 

FIGURA 10

EJEMPLO 7 Calcular cantidades de medicamento en el torrente sanguíneo

Si un adulto ingiere una pastilla de 100 miligramos de cierto medicamento, la rapidez R con que el fármaco entra en el torrente sanguíneo t minutos después está pronosticada por

$$R = 5(0.95)^t \text{ mg/min.}$$

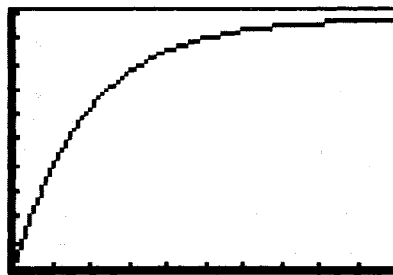
El cálculo permite demostrar que la cantidad A del medicamento en sangre en el tiempo t se puede estimar mediante

$$A = 97.4786[1 - (0.95)^t] \text{ mg.}$$

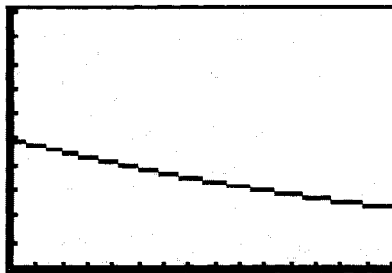
- a)** Calcula cuánto tardarán 50 mg del medicamento en entrar en la circulación.
b) Calcula el número de miligramos del fármaco en la corriente sanguínea cuando está entrando a razón de 3 mg/min.

Solución a) Se desea determinar t cuándo A es igual a 50. En vista de que el valor de A no puede rebasar 97.4786, la pantalla se dimensiona a $[0, 100]$ por $[0, 100]$.

A continuación se asigna $97.4786[1 - (0.95)^x]$ a Y_1 y se grafica Y_1 . Así se obtiene una curva semejante a la de la figura 11 (observarás que $x = t$). Si se usan las características de *trace* y *zoom*, resulta que $A = 50$ mg cuando $x \approx 14$ min.

FIGURA 11 $[0, 100]$ por $[0, 100]$

- b)** Se desea hallar t cuándo R es igual a 3. Asignemos primero $5(0.95)^x$ a Y_2 . Dado que el valor máximo de Y_2 es 5 (en $t = 0$), se usa una pantalla de $[0, 15]$ por $[0, 10]$ y se obtiene una curva

FIGURA 12 $[0, 15]$ por $[0, 10]$

similar a la de la figura 12. Si se traza Y_2 hasta $y = 3$, resulta $x \approx 9.96$; por lo tanto, después de 10 minutos, el medicamento estará entrando en el torrente sanguíneo a razón de 3 mg/min. (Observarás que la rapidez inicial, a $t = 0$, es 5 mg/min.) Al hallar el valor de Y en $x = 0$, vemos que hay casi 39 mg del producto en la sangre después de 10 minutos.

5.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: resuelve la ecuación.

1. $7^x + 6 = 7^{3x} - 4$
2. $6^{7-x} = 6^{2x+1}$
3. $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$
4. $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$
5. $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$
6. $(\frac{1}{2})^{6-x} = 2$
7. $4^x - 3 = 8^{4-x}$
8. $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

9. Traza la gráfica de f si $a = 2$.

- a) $f(x) = a^x$
- b) $f(x) = -a^x$
- c) $f(x) = 3a^x$
- d) $f(x) = a^{x+3}$
- e) $f(x) = a^x + 3$
- f) $f(x) = a^{x-3}$
- g) $f(x) = a^x - 3$
- h) $f(x) = a^{-x}$
- i) $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- j) $f(x) = a^{3-x}$

10. Trabaja el ejercicio 9 si $a = \frac{1}{2}$.

Ejercicios 11 al 20: traza la gráfica de f .

11. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$
12. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$
13. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$
14. $f(x) = -3^x + 9$
15. $f(x) = 2^{|x|}$
16. $f(x) = 2^{-|x|}$
17. $f(x) = 3^{1-x^2}$
18. $f(x) = 2^{-(x+1)^2}$
19. $f(x) = 3^x + 3^{-x}$
20. $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

21. Población de alces Se introducen cien alces, cada uno de un año de edad, en una biorreserva. El número $N(t)$ de animales vivos después de t años se predice mediante $N(t) = 100(0.9)^t$. Calcula el número de animales vivos después de

- a) Un año
- b) Cinco años
- c) 10 años

22. Dosis de medicamentos El cuerpo elimina cierto fármaco a través de la orina. Supón que para una dosis inicial de 10 mg, la cantidad $A(t)$ en el cuerpo, t horas después de administrada, está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$.

- a) Calcula la cantidad de medicamento en el cuerpo 8 horas después de la dosis inicial.
- b) ¿Qué porcentaje del producto que está en el cuerpo se elimina cada hora?

23. Crecimiento bacteriano El número de bacterias en cierto cultivo aumenta de 600 a 1800 entre las 7:00 a.m. y las 9:00 a.m. Suponiendo un crecimiento exponencial, el número $f(t)$ de bacterias t horas después de las 7:00 a.m. está dado por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

- a) Calcula el número de bacterias en el cultivo a las 8:00, 10:00 y 11:00 a.m.
- b) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.

24. Ley de Newton del enfriamiento Según esta ley, la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia en temperatura entre el objeto y el medio circundante. La cara de una plancha doméstica se enfría de 125° a 100° en 30 minutos en un cuarto que permanece a una temperatura constante de 75° . Por cálculo integral, la temperatura $f(t)$ de la cara de la plancha, después de t horas de enfriamiento, está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$.

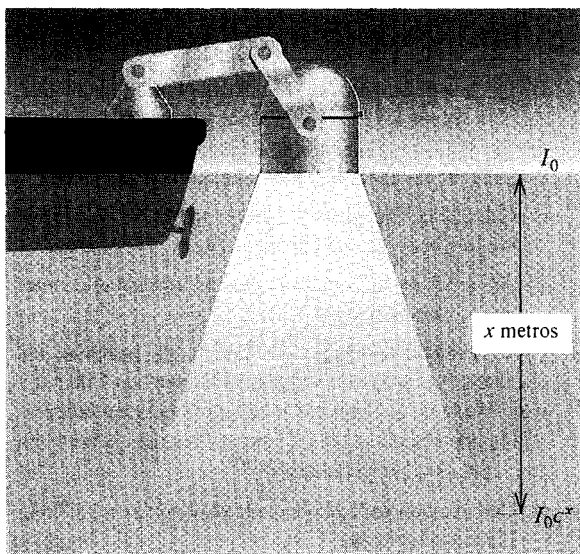
- a) Supón que $t = 0$ corresponde a la 1:00 p.m. y calcula, al décimo de grado más cercano, la temperatura a las 2:00, 3:30 y 4:00 p.m.
- b) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.

25. Desintegración radiactiva El isótopo radiactivo del bismuto ^{210}Bi tiene una vida media de cinco días. Si hay 100 mg de ^{210}Bi presente en $t = 0$, entonces la cantidad $f(t)$ restante al cabo de t días está dada por $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.

- a) ¿Cuánto ^{210}Bi quedará después de cinco, 10 y 12.5 días?
b) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 30$.

26. Penetración de la luz en el océano Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La ley de Beer-Lambert afirma que la función exponencial dada por $I(x) = I_0 e^{-kx}$ es un modelo para este fenómeno (ve la figura). Para cierto lugar, $I(x) = 10(0.4)^x$ es la cantidad de luz (en $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{s}$) que llega a una profundidad de x metros.

- a) Encuentra la cantidad de luz a una profundidad de 2 metros
b) Traza la gráfica de I para $0 \leq x \leq 5$.



EJERCICIO 26

27. Desintegración del radio La vida media del radio es de 1600 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante después de t años está dada por $q(t) = q_0 2^{-t/1600}$. Encuentra k .

28. Disolución de sal en agua Si se agregan 10 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad $q(t)$ insoluble luego de t minutos está dada por $q(t) = 10(\frac{4}{5})^t$. Traza una gráfica que muestre el valor de $q(t)$ en cualquier tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 10$.

29. Interés compuesto Si se invierte \$1000 a razón de 12% anual compuesto mensualmente, encuentra la cantidad acumulada transcurridos

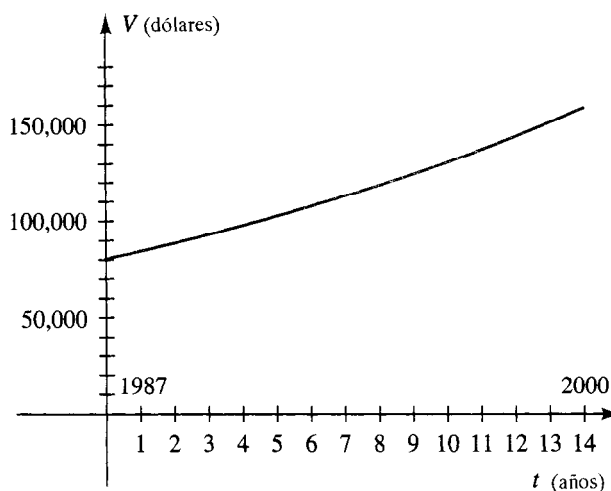
- a) Un mes c) Seis meses
b) Dos meses d) Un año

30. Interés compuesto Si un fondo de ahorros paga interés a razón de 10% compuesto semestralmente, ¿cuánto habrá que invertir para tener \$5000 al cabo de un año?

31. Valor de cambio de un auto usado por uno nuevo Si se compra cierta marca en C dólares, su valor, $V(t)$, luego de t años, está dado por $V(t) = 0.78C(0.85)^t - 1$. Si el costo original es \$10 000, calcula, al dólar más cercano, el valor después de

- a) Un año b) Cuatro años c) Siete años

32. Avalúo de bienes raíces Si el valor inmobiliario crece a razón de 5% anual, después de t años el valor V de una casa comprada con P dólares es $V = P(1.05)^t$. En la figura se muestra una gráfica para determinar el valor de una propiedad adquirida en \$80 000 en 1986. Calcula su valor, a los \$1000 más cercanos, en el año 2000.



EJERCICIO 32

33. Interés compuesto Si se invierten \$1000 a una tasa de 6% anual compuesto trimestralmente, encuentra la cantidad acumulada al término de

- a) Un año b) Dos años c) Cinco años d) 10 años

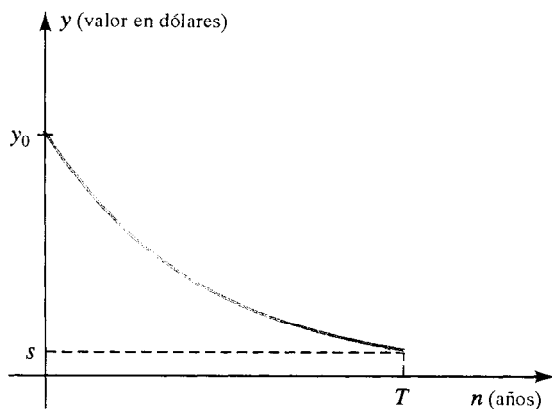
34. Interés de las tarjetas de crédito Una tienda departamental cobra a sus tarjetahabientes el 18% anual compuesto mensualmente sobre saldos insolutos. Si un cliente compra a crédito un televisor en \$500 y no paga durante un año, ¿cuánto debe al término del año?

35. Depreciación En contabilidad, el método de disminución de saldo es aquel en que la cantidad de depreciación tomada cada año es un porcentaje fijo del valor presente de un artículo. Si y es el valor del artículo en un año dado,



la depreciación tomada es ay para alguna tasa de depreciación a con $0 < a < 1$, y el nuevo valor es $(1-a)y$.

- a) Si el valor inicial del artículo es y_0 , demuestra que el valor después de n años de depreciación es $(1-a)^n y_0$.
- b) Al término de T años, el artículo tiene un valor de desecho de s dólares. El contribuyente desea escoger una tasa de depreciación tal que el valor del artículo después de T años sea igual al valor de desecho (ve la figura). Demuestra que $a = 1 - \sqrt[T]{s/y_0}$.



EJERCICIO 35

- 36. Estimar la antigüedad de un idioma** La glotocronología es un método para calcular la antigüedad de una lengua en una etapa en particular, con base en la teoría de que en un largo tiempo ocurren cambios lingüísticos con una rapidez más bien constante. Supón que un lenguaje tenía originalmente N_0 palabras básicas y que en un tiempo t , medido en milenios (1000 años), el número $N(t)$ de palabras básicas que permanece en uso común está dado por $N(t) = N_0 (0.805)^t$.

- a) Calcula el porcentaje de palabras básicas perdidas cada 100 años.
- b) Si $N_0 = 200$, traza la gráfica de N para $0 \leq t \leq 5$.

Ejercicios 37 al 40: algunas instituciones de préstamos calculan el pago mensual M , sobre un préstamo de L dólares, a una tasa de interés i (expresada como un decimal) mediante la fórmula

$$M = \frac{LiK}{12(k-1)},$$

donde $k = [1 + (i/12)]^{12t}$ y t es el número de años que el préstamo está en efecto.

37. Hipoteca sobre viviendas

- a) Encuentra el pago mensual de una hipoteca sobre vivienda de \$90 000 a 30 años, si la tasa de interés es 12%.

- b) Indica el total de intereses pagados sobre el préstamo de la parte a).

- 38. Hipoteca sobre viviendas** Halla la hipoteca sobre vivienda más alta, a un plazo de 25 años que se pueda obtener a una tasa de 10%, si el pago mensual es de \$800.

- 39. Préstamo sobre autos** En la compra de un auto, un distribuidor ofrece a sus clientes un préstamo sin enganche y pago a tres años a una tasa del 15 por ciento. Encuentra el precio del carro más caro que pueda comprar un cliente, si su capacidad de pago es de \$220 al mes.

- 40. Préstamo a empresas** El propietario de una pequeña empresa decide solicitar un financiamiento para adquirir una computadora; así pues, pide un préstamo de \$3000 a dos años y una tasa de interés de 12.5%.

- a) Determina el pago mensual.
- b) Encuentra el total de intereses pagados sobre el préstamo.

- C 41. Población de truchas** En un gran estanque se introducen 1000 especímenes de un año de edad. Se predice que el número de truchas todavía vivas después de t años se calcula mediante $N(t) = 1000(0.9)^t$. Utiliza la gráfica de N para hallar cuándo estarán todavía vivos 500 ejemplares.

- C 42. Poder de compra** Un economista predice que el poder de compra $B(t)$ de un dólar, t años a partir de ahora, está dado por $B(t) = (0.95)^t$. Calcula con la gráfica cuándo el poder de compra será la mitad de lo que es ahora.

- C Ejercicios 43 y 44: traza la gráfica de la ecuación.**

- a) Calcula y si $x = 40$. b) Calcula x si $y = 2$.

43. $y = (1.085)^x$

44. $y = (1.0525)^x$

- C Ejercicios 45 y 46: usa una gráfica para calcular las raíces de la ecuación.**

45. $1.4x^2 - 2.2^x = 1$

46. $1.21^{3x} + 1.4^{-1.1x} - 2x = 0.5$

- C Ejercicios 47 y 48: grafica f en el intervalo. a) Determina si f es biunívoca b) calcula los ceros de f .**

47. $f(x) = \frac{3.1^x - 2.5^{-x}}{2.7^x + 4.5 - x}$; $[-3, 3]$

48. $f(x) = \pi^{0.6x} - 1.3^{(x^{1.8})}$; $[-4, 4]$

- C Ejercicios 49 y 50: grafica f en el intervalo dado. a) Calcula en dónde crece o decrece F y b) calcula el rango de f .**

49. $f(x) = 0.7x^3 + 1.7(-1.8x)$; $[-4, 1]$

$$50. f(x) = \frac{3 \cdot 1^{-x} - 4 \cdot 1^x}{4 \cdot 4^{-x} + 5 \cdot 3^x}; \quad [-3, 3]$$

51. Función Gompertz La función Gompertz,

$$y = ka^{(b^x)} \text{ con } k > 0, 0 < a < 1, \text{ y } 0 < b < 1,$$

se emplea a veces para describir las ventas de un nuevo producto cuya comercialización inicial es voluminosa pero luego se dirige a un nivel de saturación máxima. Grafica, en el mismo plano coordenado, la línea $y = k$ y la función Gompertz con $k = 4$, $a = \frac{1}{8}$, y $b = \frac{1}{4}$. ¿Cuál es la importancia de la constante k ?

52. Función logística La función logística,

$$y = \frac{1}{k + ab^x} \text{ con } k > 0, a > 0, \text{ y } 0 < b < 1,$$

se utiliza en ocasiones para describir las ventas de un nuevo producto que experimenta ventas lentas al inicio,

seguidas por un crecimiento hacia un nivel de saturación máxima. Grafica, en el mismo plano coordenado, la línea $y = 1/k$ y la función logística con $k = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{5}{8}$. ¿Cuál es la importancia del valor de $1/k$?



Ejercicios 53 y 54: si se depositan pagos mensuales p en una cuenta de ahorros que pagan una tasa de interés anual i , la cantidad A de la cuenta después de n años está dada por

$$A = \frac{p \left(1 + \frac{i}{12} \right) \left[\left(\frac{1 + i}{12} \right)^{12n} - 1 \right]}{\frac{i}{12}}.$$

Grafica A para cada valor de p e i ; y calcula n para $A = \$100\,000$.

$$53. p = 100, \quad i = 0.05$$

$$54. p = 250, \quad i = 0.09$$

5.2 Función exponencial natural

La fórmula de interés compuesto estudiada en la sección anterior es

$$A = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt},$$

en donde C es el capital inicial invertido, i es la tasa de interés (expresada como decimal), n el número de periodos de interés por año y t la cantidad de años en que se invierte el capital. El siguiente ejemplo ilustra lo que ocurre si la tasa y el tiempo total invertido son fijos, pero el *periodo de interés* se hace variar.

EJEMPLO 1

Uso de la fórmula de interés compuesto

Supón que se invierten \$1000 a una tasa de interés compuesto de 9 por ciento. Encuentra la cantidad acumulada al cabo de un año, si el interés es compuesto a cada tres meses, un mes, una semana, a diario, por hora y cada minuto.

Solución Si hacemos $C = \$1000$, $t = 1$ e $i = 0.09$ en la fórmula de interés compuesto, entonces

$$A = \$1000 \left(1 + \frac{0.09}{n} \right)^n$$

para n periodos de interés por año. Los valores de n que deseamos considerar se enumeran en la tabla siguiente, en donde hemos supuesto que hay 365 días en un año y, por lo tanto $(365)(24) = 8760$ horas y $(8760)(60) = 525\,600$ minutos. (En transacciones financieras prácticas, un año de inversión tiene 360 días.)

Periodo de interés	Tres meses	Un mes	Semana	Día	Hora	Minuto
	4	12	52	365	8760	525 600

Con la fórmula de interés compuesto (y una calculadora), se obtienen las cantidades de la tabla de abajo:

Periodo de interés	Cantidad acumulada después de un año
Tres meses	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^4 = \1093.08
Un mes	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} = \1093.81
Semana	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{52}\right)^{52} = \1094.09
Día	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365} = \1094.16
Hora	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{8760}\right)^{8760} = \1094.17
Minuto	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{525\,600}\right)^{525\,600} = \1094.17

Observarás que en el ejemplo anterior, después de que se llega a un periodo de interés de una hora, el número de periodos de interés por año no tiene efecto en la cantidad final. Si el interés se hubiera compuesto cada *segundo*, el resultado sería aún de \$1094.17, siempre que se corte A al centavo más cercano. (Algunos lugares decimales, *después* de los primeros dos, *cambian*.) Por lo tanto, la cantidad se aproxima a un valor fijo a medida que n aumenta. Se dice que el interés es **compuesto continuamente** si el número n de periodos por año aumenta sin límite.

Si $C = 1$, $i = 1$ y $t = 1$ en la fórmula de interés compuesto, se obtiene

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La expresión del lado derecho (LD) de la ecuación es importante en cálculo. En el ejemplo 1 consideramos una situación similar: a medida que n aumenta, A se aproxima a un valor límite. El mismo fenómeno ocurre para esta fórmula, como se ilustra en la tabla inmediata, misma que se obtuvo con calculadora.

n	Aproximación a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10 000	2.71814593
100 000	2.71826824
1 000 000	2.71828047
10 000 000	2.71828169
100 000 000	2.71828181
1 000 000 000	2.71828183

En cálculo se demuestra que a medida que n aumenta sin límite, el valor de $\left[1 + (1/n)\right]^n$ se aproxima a cierto número irracional, denotado por e . El número e aparece en la investigación de muchos fenómenos físicos. Una aproximación es $e \approx 2.71828$. Con la notación introducida en la sección 1.4, denotamos este dato como sigue:

El número e

Si n es un entero positivo, entonces

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \approx 2.71828 \text{ a medida que } n \rightarrow \infty$$

En la próxima definición usamos e como base para una importante función exponencial.

Definición de la función exponencial natural

La función exponencial natural f está definida por

$$f(x) = e^x$$

para todo número real x .

La función exponencial natural es una de las funciones más útiles en matemáticas avanzadas y en la práctica. Ya que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, según

se exhibe en la figura 13. Las calculadoras científicas tienen una tecla e^x para calcular valores de la función exponencial natural.

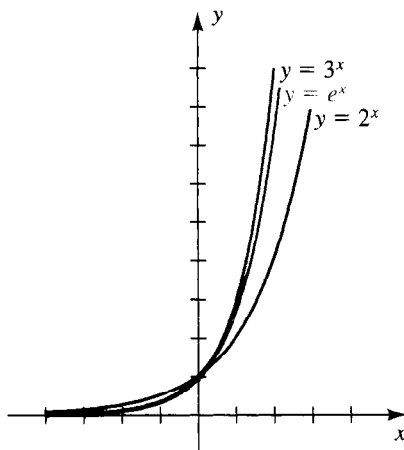


FIGURA 13

APLICACIÓN

Interés compuesto continuamente

La fórmula del interés compuesto es

$$A = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt}$$

Si hacemos $k = n/i$, entonces $n = ki$, $nt = kit$ y se puede reescribir la fórmula como

$$A = C \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{kit} = C \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^{it}$$

Para un interés compuesto continuamente (i) se hace que n (número de periodos de interés por año) aumente sin límite, denotado por $n \rightarrow \infty$ o bien, lo que es equivalente, por $k \rightarrow \infty$. Si se usa la definición de e , vemos que

$$C \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^{it} \rightarrow C[e]^{it} = Pe^{it} \quad \text{a medida que } k \rightarrow \infty$$

Este resultado da la fórmula que viene:

Fórmula de interés compuesto continuamente

$$A = Ce^{it}$$

donde C = principal (capital inicial)
 i = tasa de interés expresada como decimal
 t = número de años que C está invertido
 A = cantidad después de t años

El ejemplo adjunto ilustra un caso especial de esta fórmula.

EJEMPLO 2 *Uso de la fórmula de interés compuesto continuamente*

Supón que se depositan \$20 000 en una cuenta de mercado de dinero que paga interés a razón de 8% por año compuesto continuamente. Determina el saldo de la cuenta después de cinco años.

Solución Al aplicar la fórmula para interés compuesto continuamente con $C = 20\,000$, $i = 0.08$, y $t = 5$, se tiene

$$A = Ce^{it} = 20\,000e^{0.08(5)} = 20\,000e^{0.4}.$$

Con la calculadora se encuentra que $A = \$29\,836.49$.

La función f del ejemplo de abajo es importante en aplicaciones avanzadas de matemáticas.

EJEMPLO 3 *Una gráfica con dos funciones exponenciales*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Solución Observa que f es una función par porque

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x).$$

Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje y . Mediante calculadora o la tabla 2 del apéndice II, se obtienen estas aproximaciones de $f(x)$.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$ (aproximado)	1	1.13	1.54	2.35	3.76

Al localizar puntos y usar simetría con respecto al eje y , obtenemos la curva de la figura 14. La gráfica *parece* una parábola, pero no es el caso.

APLICACIÓN

Cables flexibles

La función f del ejemplo 3 ocurre en matemáticas aplicadas e ingeniería, en donde recibe el nombre de **función coseno hiperbólica**. Sirve para describir la forma de una cadena o cable flexible uniforme cuyos extremos estén sostenidos a la misma altura, como las líneas telefónicas o de



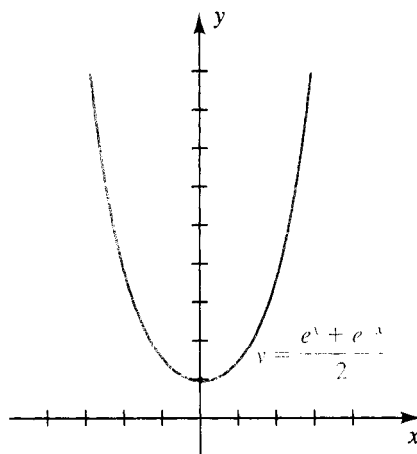


FIGURA 14

energía eléctrica (Fig. 15). Si introducimos un sistema coordenado, según se indica en la figura, podemos demostrar que una ecuación que corresponde a la forma del cable es

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

donde a es un número real. La gráfica se llama **catenaria**, derivada de la palabra latina *cadena*. La función del ejemplo 3 es el caso especial en que $a = 1$.

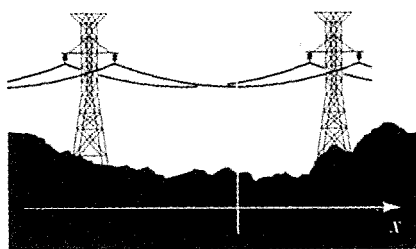


FIGURA 15

APLICACIÓN

Radioterapia

Las funciones exponenciales desempeñan una importante función en el campo de la *radioterapia*, que es el tratamiento de tumores por radiación. La cantidad de células de tumor que resisten el tratamiento, llamada *fracción sobreviviente*, depende no sólo de la energía y naturaleza de la radiación, sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor. La exposición a radiaciones puede considerarse como diversos procesos potencialmente dañinos, en los cuales se requiere al menos un *impacto* para matar a una célula de un tumor; por ejemplo, supón que cada célula tiene un *blanco* que se debe impactar. Si k denota el tamaño promedio del blanco de una célula de tumor y x es el número de procesos dañinos (*dosis*), la fracción sobreviviente $f(x)$ está dada por

$$f(x) = e^{-kx}.$$

A éste se denomina *fracción sobreviviente de un blanco-un impacto*.

Consideremos ahora que cada célula tiene n blancos y que hay que impactar cada uno una vez para que la célula muera. En este caso, la *fracción sobreviviente de un blanco-un impacto* está dada por

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

El análisis de la gráfica de f (Fig. 16) permite determinar qué efecto tendrá el aumento de la dosis x en la disminución de la fracción tumoral sobreviviente. Observarás que $f(0) = 1$; es decir, si no hay dosis, todas las células sobreviven. Como ejemplo, si $k = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2 \\ &= 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

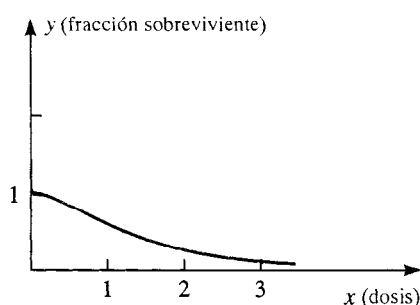


FIGURA 16 fracción sobreviviente de células tumorales, después de radioterapia

Un análisis completo de la gráfica de f requiere cálculo integral. El *hombro* de la curva cerca del punto $(0, 1)$ representa la naturaleza de umbral del tratamiento; esto es, una pequeña dosis elimina una reducida cantidad de células tumorales. Notarás que para una x considerable, un aumento de la dosis tiene poco efecto en la fracción sobreviviente. A fin de establecer la dosis ideal para cierto paciente, los especialistas en radioterapia también deben tomar en cuenta el número de células sanas que mueren durante un tratamiento.

En el siguiente ejemplo se presentan problemas del tipo ilustrado en el estudio de cálculo integral.

EJEMPLO 4 Hallar ceros de una función con exponenciales

Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, halla los ceros de f .

Solución Se puede factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \\ &= 2xe^{-2x}(1 - x) \end{aligned}$$

Para encontrar los ceros de f , se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que $e^{-2x} > 0$ para toda x , se ve que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $1 - x = 0$; por lo tanto, los ceros de f son 0 y 1.

EJEMPLO 5 Trazar una curva de crecimiento Gompertz

En biología, la **función de crecimiento Gompertz** G dada por

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})},$$

donde k , A y B son constantes positivas, se usa para calcular el tamaño de ciertas cantidades en un tiempo t . La gráfica de G se llama **curva de crecimiento Gompertz**. La función siempre es positiva y creciente, y a medida que t aumenta sin límite, $G(t)$ se nivela y aproxima al valor de k . Grafica G en el intervalo $[0, 5]$ para $k = 1.1$, $A = 3.2$ y $B = 1.1$, y calcula el tiempo t en que $G(t) = 1$.

Solución Comenzamos por asignar

$$1.1e^{(-3.2e^{-1.1t})}$$

a Y_1 . Puesto que se desea graficar G en el intervalo $[0, 5]$, se escoge X mín = 0 y X máx = 5. Dado que $G(t)$ siempre es positiva y no rebasa el valor de $k = 1.1$, se escoge Y mín = 0 y Y máx = 2; por lo tanto, las dimensiones de la pantalla de la calculadora graficadora son $[0, 5]$ por $[0, 2]$. Al graficar G se obtiene un trazo similar al de la figura 17. Los valores de los puntos finales de la gráfica son aproximadamente $(0, 0.045)$ y $(5, 1.086)$.

Para establecer el tiempo cuando $y = G(t) = 1$, se usan las funciones de *trace* y *zoom* y se obtiene $x = t \approx 3.194$.

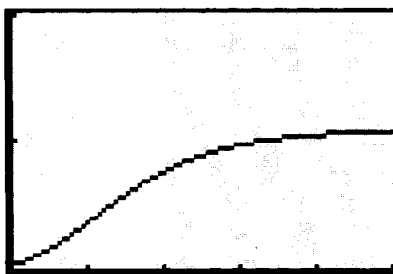


FIGURA 17 $[0, 5]$ por $[0, 2]$

5.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: usa la gráfica de $y = e^x$ para ayudarte a trazar la gráfica de f .

1. a) $f(x) = e^{-x}$ b) $f(x) = -e^x$
2. a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = 2e^x$
3. a) $f(x) = e^{x+4}$ b) $f(x) = e^x + 4$
4. a) $f(x) = e^{-2x}$ b) $f(x) = -2e^x$

Ejercicios 5 y 6: si se depositan P dólares en una cuenta de ahorros que paga interés a razón de $i\%$ por año compuesto continuamente, encuentra el saldo después de t años.

5. $P = 1000$, $i = 8\frac{1}{4}\%$, $t = 5$
6. $P = 100$, $i = 12\frac{1}{2}\%$, $t = 10$

Ejercicios 7 y 8: ¿cuánto dinero, invertido a una tasa de interés de $i\%$ por año compuesto continuamente, alcanzará un monto de A dólares después de t años?

7. $A = 100\,000$, $i = 11$, $t = 18$
8. $A = 15\,000$, $i = 9.5$, $t = 4$

Ejercicios 9 y 10: una inversión de P dólares aumentó a A dólares en t años. Si el interés era compuesto continuamente, encuentra la tasa de interés usando la tabla 2 del apéndice II.

9. $A = 13\,464$, $P = 1000$, $t = 20$
10. $A = 890.20$, $P = 400$, $t = 16$

Ejercicios 11 y 12: resuelve la ecuación.

11. $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$ 12. $e^{3x} = e^{2x-1}$

Ejercicios 13 al 16: encuentra los ceros de f .

13. $f(x) = xe^x + e^x$

14. $f(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$

15. $f(x) = x^3(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$

16. $f(x) = x^2(2e^{2x}) + 2xe^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$

Ejercicios 17 y 18: simplifica la expresión.

17. $\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

18. $\frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$

19. Crecimiento de la cosecha Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0 e^{kt}$ para $k > 0$ describe el primer mes de crecimiento de cosechas como el maíz, algodón y frijol de soya. El valor de la función $W(t)$ es el peso total en miligramos, W_0 es el peso en el día de su aparición y t es el tiempo en días. Si, para una especie de frijol de soya, $k = 0.2$, y $W_0 = 68$ mg, predice el peso al término de 30 días.

20. Crecimiento de la cosecha Consulta el ejemplo 19. Muchas veces es difícil medir el peso W_0 de una planta cuando brota del suelo. Si, para una especie de algodón, $k = 0.21$ y el peso después de 10 días es 575 mg, calcula W_0 .

21. Crecimiento poblacional en Estados Unidos En 1980 la población estadounidense era de unos 227 millones y ha estado creciendo a razón de 0.7% por año. La población $N(t)$, t años después de 1980, se puede calcular mediante $N(t) = 227e^{0.007t}$. Predice la población para el año 2000 si se mantiene esta tendencia de crecimiento.

22. Crecimiento poblacional en la India En 1985 la población estimada de la India era de 762 millones y ha estado aumentando a razón de 2.2% por año. La población $N(t)$, t años después, se puede calcular mediante $N(t) = 762e^{0.022t}$. Supón que esta tasa de rápido crecimiento continúe, y calcula la población india para el año 2000.

23. Longevidad del lenguado En la ciencia piscícola, un cardumen es un grupo de peces que resulta de una reproducción anual. Por lo general, se supone que el número de peces $N(t)$ aún vivos después de t años está dado por una función exponencial. Para el lenguado del Pacífico, $N(t) = N_0 e^{-0.2t}$ en donde N_0 es el tamaño inicial del cardumen. Calcula el porcentaje del número original de ejemplares aún vivos después de 10 años.

24. Indicador radiactivo El indicador radiactivo ^{51}Cr es útil para ubicar la posición de la placenta de una embarazada; en ocasiones es necesario solicitar estos indicadores a los laboratorios médicos. Si se remiten A_0 unidades (microcuries), por la desintegración radiactiva, el número de unidades $A(t)$ presente después de t días está dado por $A(t) = A_0 e^{-0.0249t}$.

a) Si se envían 35 unidades y tardan dos días en llegar a su destino, ¿alrededor de cuántas unidades estarán disponibles para la prueba?

b) Si se requieren 35 unidades para el análisis ¿aproximadamente cuántas unidades deben enviarse?

25. Crecimiento de la población de la ballena azul En 1978 se calculó que la población de ballenas azules en el hemisferio sur era de 5000. Como la pesca de cetáceos se ha prohibido y existe abundancia de alimento para estos animales, se espera que la población $N(t)$ crezca en sentido exponencial según la fórmula $N(t) = 5000e^{0.0036t}$, en donde t es en años y $t = 0$ corresponde a 1978. Predice la población para el año 2000.

26. Crecimiento del lenguado La longitud (en centímetros) de muchos peces comerciales comunes, de t años de edad, se calcula con la función de crecimiento de Bertalanffy de la forma $f(t) = a(1 - be^{-kt})$, donde a , b y k son constantes.

a) Para el lenguado del Pacífico, $a = 200$, $b = 0.956$ y $k = 0.18$. Calcula la longitud de un espécimen de 10 años de edad.

b) Utiliza la gráfica de f para calcular la longitud máxima que puede alcanzar el lenguado del Pacífico.

27. Presión atmosférica En ciertas condiciones, la presión atmosférica p (en in) a una altitud de h pies está dada por $p = 29e^{-0.000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altitud de 40 000 pies?

28. Desintegración del isótopo del polonio Si comenzamos con c miligramos del isótopo de polonio ^{210}Po , la cantidad restante después de t días se calcula por medio de $A = ce^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es 50 miligramos, calcula, al centésimo más cercano, la cantidad restante después de

a) 30 días b) 180 días c) 365 días

29. Crecimiento de los niños Por lo general se considera que el modelo Jenss es la fórmula más precisa para predecir la estatura de los preescolares. Si y es la estatura (en cm) y x es la edad (en años), entonces

$$y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}$$

para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$. De acuerdo con el cálculo integral, la tasa de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 6.39 + 0.993e^{3.261 - 0.993x}$. Encuentra la estatura y tasa de crecimiento de un niño normal de un año.

- 30. Velocidad de las partículas** Una partícula esférica muy pequeña (unos 5 micrones de diámetro) es lanzada en aire quieto con una velocidad inicial de v_0 m/s, pero su velocidad disminuye por la fuerza de la resistencia al avance. Su velocidad t segundos después está dada por $v(t) = v_0 e^{-at}$ para alguna $a > 0$, y la distancia $s(t)$ que la partícula recorre está dada por

$$s(t) = \frac{v_0}{a}(1 - e^{-at}).$$

La distancia de parada es la distancia recorrida por la partícula antes que llegue al reposo.

- a) Expresa la distancia de parada en términos de v_0 y a .
b) Utiliza la fórmula de la parte a) para calcular la distancia de parada si $v_0 = 10$ m/s y $a = 8 \times 10^5$.
- 31. Salario mínimo** En 1971, el salario mínimo en Estados Unidos era de \$1.60 por hora. Suponiendo que la tasa de inflación aumenta continuamente a razón de 5% por año, indica el salario mínimo equivalente en el año 2000.
- 32. Valor de tierras** En 1867, Estados Unidos compró Alaska a los rusos en \$7 200 000. Hay 586 400 mi^2 de tierra en Alaska. Supón que el valor de las tierras aumenta en forma continua a razón de 3% por año y que las tierras se pueden comprar a un precio equivalente; determina el precio de un acre en el año 2000 (1 mi^2 equivale a 640 acres).

Ejercicios 33 y 34: el rendimiento efectivo (o tasa de interés anual efectiva) para una inversión es la tasa de interés simple que produciría, al cabo de un año, la misma cantidad dada por la tasa compuesta que se aplica. Calcula, al 0.01% más cercano, el rendimiento efectivo correspondiente a una tasa de interés de $i\%$ por año compuesto a) trimestralmente y b) continuamente.

33. $i = 7$

34. $i = 12$

- C** Ejercicios 35 y 36: traza la gráfica de la ecuación.
a) Calcula y si $x = 40$ y b) calcula x si $y = 2$.

35. $y = e^{0.085x}$

36. $y = e^{0.0525x}$

- C** Ejercicios 37 al 39: a) grafica f en una calculadora y b) traza la gráfica de g tomando los recíprocos de las coordenadas y de a) sin usar el dispositivo.

37. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $g(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

38. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $g(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

39. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

- 40. Función de densidad de probabilidad** En estadística, la función de densidad de probabilidad para la distribución normal está definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \text{ con } z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

donde μ y σ son números reales (μ es la media y σ^2 es la varianza de la distribución). Traza la gráfica de f para el caso $\sigma = 1$ y $\mu = 0$.

- C** Ejercicios 41 y 42: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

41. $f(x) = e^{0.5x} - e^{-0.4x}$; $g(x) = x^2 - 2$

42. $f(x) = 0.3e^x$; $g(x) = x^3 - x$

- C** Ejercicios 43 y 44: las funciones f y g son útiles para calcular e^x en el intervalo $[0, 1]$. Grafica f , g y $y = e^x$ en el mismo plano coordenado y compara la precisión de $f(x)$ y $g(x)$ como aproximación a e^x .

43. $f(x) = x + 1$; $g(x) = 1.72x + 1$

44. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; $g(x) = 0.84x^2 + 0.878x + 1$

- C** Ejercicios 45 y 46: grafica f y calcula sus ceros.

45. $f(x) = x^2 e^x - x e^{(x^2)} + 0.1$

46. $f(x) = x^3 e^x - x^2 e^{2x} + 1$

- C** Ejercicios 47 y 48: grafica f en el intervalo $(0, 200]$. Halla una ecuación aproximada para la asíntota horizontal.

47. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

48. $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

- C** Ejercicios 49 y 50: calcula la raíz real de la ecuación.

49. $e^{-x} = x$

50. $e^{3x} = 5 - 2x$

- C** Ejercicios 51 y 52: grafica f y determina en dónde f es creciente o es decreciente.

51. $f(x) = x e^x$ 52. $f(x) = x^2 e^{-2x}$

- 53. Contaminación de una chimenea** La concentración C (en unidades por m^3) de contaminación cerca de un punto a nivel del suelo que está a favor del viento desde una fuente de chimenea de altura h , se encuentra a veces por medio de

$$C = \frac{Q}{\pi v a b} e^{-y^2/(2a^2)} [e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}],$$

donde Q es la intensidad de la fuente (en unidades por segundo), v es la velocidad promedio del viento (en m/s),

z la altura (en m) sobre el punto a favor del viento, y la distancia desde el punto a favor del mismo en la dirección que es perpendicular a éste (dirección de viento transversal) y a y b son constantes que dependen de la distancia a favor del viento (ve la figura).

- ¿De qué forma modifica el aumento de la altura de la chimenea la concentración de contaminación al nivel del suelo en la posición a favor del viento ($y = 0$ y $z = 0$) si aumenta la altura de la chimenea?
- ¿De qué modo se altera la concentración de contaminación al nivel del suelo ($z = 0$), para una chimenea de altura h fija si una persona se mueve con el viento de costado al aumentar y ?

C 54. **Concentración de la contaminación** Consulta el ejercicio 53. Si la altura de la chimenea es de 100 metros y $b = 12$, usa una gráfica para calcular la altura z sobre el punto a favor del viento ($y = 0$) donde ocurre la máxima concentración de contaminación. (Sugerencia: haz $h = 100$, $b = 12$ y grafica la ecuación $C = e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}$.)



EJERCICIO 53

- C** 55. **Circuitos integrados de computadora** Para los fabricantes de microchips, es importante considerar la fracción F de estos circuitos que fallarán después de t años de servicio. En ocasiones esta fracción se puede calcular con la fórmula $F = 1 - e^{-ct}$, donde c es una constante positiva.
- ¿Cómo afecta el valor de c la confiabilidad de un circuito integrado?
 - Si $c = 0.125$, ¿después de cuántos años fallará el 35% de los circuitos integrados?

5.3 Funciones logarítmicas

En la sección 5.1 analizamos que la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ o $a > 1$ es biunívoca; en consecuencia, f tiene una función inversa f^{-1} (Secc. 3.6). Esta inversa de la función exponencial con base a se llama **función logarítmica con base a** y se denota con \log_a . Sus valores se escriben $\log_a(x)$ o $\log_a x$, que se lee “el logaritmo de x con base a ”. Así pues por la definición de una función inversa f^{-1} ,

$$y = f^{-1}(x) \text{ si y sólo si } x = f(y),$$

la definición de \log_a se expresa de esta forma:

Definición de \log_a

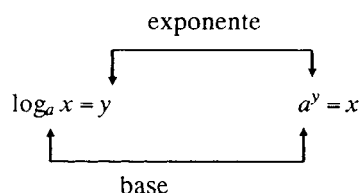
Sea a un número real positivo diferente de 1. El **logaritmo de x con base a** se define como

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y .

Notarás que las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. La primera se llama **forma logarítmica** y la segunda, **forma exponencial**. Debes esforzarte en dominar la conversión de una en otra. El siguiente diagrama puede ayudarte a alcanzar ésta meta.

Forma logarítmica Forma exponencial



Advertirás que cuando las formas se cambian, *las bases de las formas logarítmica y exponencial son las mismas*. El número y (o sea, $\log_a x$) corresponde al exponente en la forma exponencial; en otras palabras, $\log_a x$ es el exponente al que la base debe elevarse para obtener x .

La próxima ilustración ofrece ejemplos de formas equivalentes.

ILUSTRACIÓN

Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
■ $\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
■ $\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
■ $r = \log_p q$	$p^r = q$
■ $w = \log_4 (2t + 3)$	$4^w = 2t + 3$
■ $\log_3 x = 5 + 2z$	$3^{5+2z} = x$

El ejemplo que sigue contiene una aplicación donde se requiere cambiar de forma exponencial logarítmica.

EJEMPLO 1 Convertir la forma exponencial en logarítmica

El número N de bacterias de cierto cultivo después de t horas está dado por $N = (1000)2^t$. Expresa t como una función logarítmica de N con base 2.

Solución Si $N = (1000)2^t$, entonces

$$2^t = \frac{N}{1000}.$$

Se cambia en la forma logarítmica y

$$t = \log_2 \frac{N}{1000}.$$

En el próximo ejemplo se dan algunos casos de logaritmos.

EJEMPLO 2 Encontrar logaritmos

Encuentra el número

a) $\log_{10} 100$ **b)** $\log_2 \frac{1}{32}$ **c)** $\log_9 3$ **d)** $\log_7 1$

Solución En cada caso nos dan $\log_a x$ y debemos hallar el exponente y tal que $a^y = x$; así pues:

a) $\log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$.

b) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ porque $2^{-5} = \frac{1}{32}$

c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ porque $9^{1/2} = 3$.

d) $\log_7 1 = 0$ porque $7^0 = 1$.

Las propiedades generales que siguen se deducen de la interpretación de $\log_a x$ como exponente.

Propiedad de $\log_a x$	Razón	Ilustración
(1) $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_{10} 10 = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
(4) $a^{\log_a x} = x$	ve abajo	$5^{\log_5 7} = 7$

La razón para la propiedad (4) se deduce directamente de la definición de \log_a , puesto que

$$\text{si } y = \log_a x, \text{ luego } x = a^y \text{ o } x = a^{\log_a x}.$$

La función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a , de modo que la gráfica de $y = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ hasta la línea $y = x$ (Secc. 3.6). Este procedimiento se ilustra en la figura 18 para el caso $a > 1$. Observa que la intersección x de la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de números reales positivos, el intervalo es \mathbb{R} y el eje y es una asíntota vertical. Raras veces se usan los logaritmos con base $a < 1$; por lo tanto, obviaremos sus gráficas.

En la figura 18 se ve que si $a > 1$, entonces $\log_a x$ es creciente en $(0, \infty)$ y, por lo tanto, es biunívoco. Este resultado se combina con las partes (1) y (2) de la definición de una función biunívoca (pág. 27) se obtiene el siguiente teorema, que también se demuestra si $0 < a < 1$.

Teorema: las funciones logarítmicas son biunívocas

La función logarítmica con base a es biunívoca; por lo tanto, se satisfacen estas condiciones equivalentes para números reales x_1 y x_2 :

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.

(2) Si $\log_a x_1 = \log_a x_2$, entonces $x_1 = x_2$.

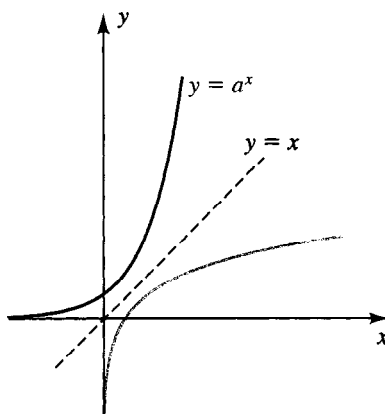


FIGURA 18

Cuando se usa este teorema como razón para un paso en la solución de un ejemplo, las *funciones logarítmicas son biunívocas*.

En el siguiente ejemplo resolvemos una *ecuación logarítmica* simple; es decir, que contiene el logaritmo de una expresión que comprende una variable.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelve la ecuación $\log_3(4x - 5) = \log_3(2x + 1)$.

Solución

$$\log_3(4x - 5) = \log_3(2x + 1)$$

dados

$$4x - 5 = 2x + 1$$

funciones logarítmicas son biunívocas

$$2x = 6$$

restar $2x$ y sumar 5

$$x = 3$$

dividir entre 2

PRUEBA $x = 3$ Se deben comprobar las soluciones de las ecuaciones logarítmicas para asegurarse de que se están tomando logaritmos *sólo de números reales positivos*, porque una función logarítmica no está definida para números reales no positivos.

$$\text{LI: } \log_3(4 \cdot 3 - 5) = \log_3 7$$

$$\text{LD: } \log_3(2 \cdot 3 + 1) = \log_3 7$$

Como $\log_3 7 = \log_3 7$ es una expresión cierta, $x = 3$ es una solución.

En el ejemplo que viene usamos la definición de logaritmo para resolver una ecuación logarítmica.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelve la ecuación $\log_4(5 + x) = 3$.

Solución

$$\log_4(5 + x) = 3 \quad \text{dados}$$

$$5 + x = 4^3 \quad \text{definición de logaritmo}$$

$$x = 59 \quad \text{restar 5}$$

PRUEBA $x = 59$ LI: $\log_4(5 + 59) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

LD: 3

Puesto que $3 = 3$ es una expresión cierta, $x = 59$ es una solución.

A continuación se traza la gráfica de una función logarítmica específica.

EJEMPLO 5 *Trazar la gráfica de una función logarítmica*

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 x$.

Solución Describiremos dos métodos para realizar lo anterior.

Método 1 Si se escribe $y = \log_3 x$ y se cambia en forma exponencial, resulta

$$x = 3^y$$

Al sustituir diversos valores con y y hallar los correspondientes de x , se obtiene la tabla de abajo, cuyos valores llevan al trazo de la figura 19.

y	$x = 3^y$
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

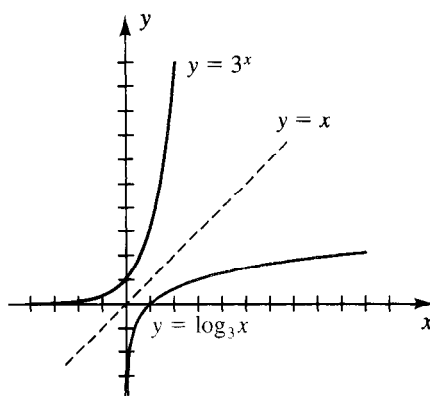


FIGURA 19

Método 2 Se pueden encontrar puntos en la gráfica de $y = \log_3 x$ si se hace $x = 3^k$, en donde k es un número real, y luego se aplica la propiedad (3) de logaritmos (pág. 320) de este modo:

$$y = \log_3 x = \log_3 3^k = k$$

Con esta fórmula se obtienen los puntos en la gráfica enumerados en la siguiente tabla.



$x = 3^k$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$y = \log_3 x = k$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Esto dará los puntos que se obtuvieron con el primer método.

Al igual que en los próximos ejemplos, con frecuencia deseamos trazar la gráfica de $f(x) = \log_a u$, donde u es alguna expresión con x .

EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de una función logarítmica

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 |x|$ para $x \neq 0$.

Solución La gráfica es simétrica con respecto al eje y , ya que

$$f(-x) = \log_3 |-x| = \log_3 |x| = f(x).$$

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y la gráfica coincide con la gráfica de $y = \log_3 x$ trazada en la figura 19. Mediante simetría, reflejamos esa parte de la gráfica hasta el eje y y obtenemos el trazo de la figura 20.

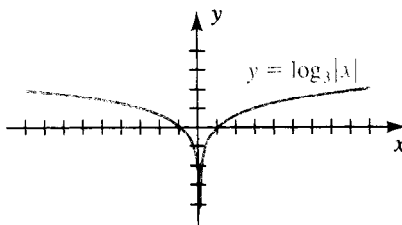


FIGURA 20

EJEMPLO 7 Reflejar la gráfica de una función logarítmica

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 (-x)$.

Solución El dominio de f es el conjunto de números reales negativos, ya que $\log_3 (-x)$ existe sólo si $-x > 0$ o, lo que es equivalente, $x < 0$. La gráfica de f se obtiene a partir de la gráfica de $y = \log_3 x$ sustituyendo con $(-x, y)$ cada punto (x, y) de la figura 19. Esto equivale a reflejar la gráfica de $y = \log_3 x$ hasta el eje y . La gráfica aparece en la figura 21.

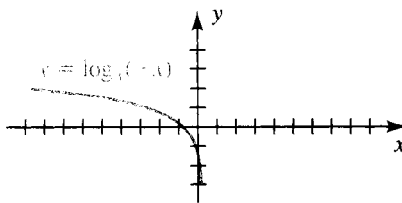


FIGURA 21

Otro método es cambiar $y = \log_3 (-x)$ en la forma exponencial $3^y = -x$ y luego trazar la gráfica de $x = -3^y$.

EJEMPLO 8 Desplazar gráficas de ecuaciones logarítmicas

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = \log_3(x - 2)$ **b)** $y = \log_3 x - 2$

Solución a) La gráfica de $y = \log_3 x$ se trazó en la figura 19 y se vuelve a trazar en la 22. Del análisis sobre desplazamientos horizontales de la sección 1.4, se puede obtener la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ corriendo la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades a la derecha (Fig. 22).

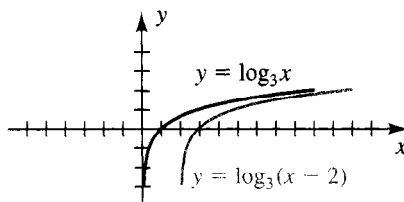


FIGURA 22

b) Del análisis sobre desplazamientos verticales de la sección 1.4, cabe obtener la gráfica de $y = \log_3 x - 2$ moviendo la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo, según se ve en la figura 23. Notarás que la intersección x está dada por $\log_3 x = 2$ o $x = 3^2 = 9$.

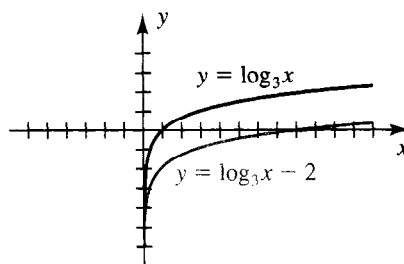


FIGURA 23

EJEMPLO 9 Reflejar la gráfica de una función logarítmica

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3(2 - x)$.

Solución Si escribimos

$$f(x) = \log_3(2 - x) = \log_3[-(x - 2)],$$

entonces, al aplicar la técnica usada para obtener la gráfica de la ecuación $y = \log_3(-x)$ en el ejemplo 7 (con x sustituida por $x - 2$), vemos que la gráfica de f es la reflexión de la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ hasta la línea vertical $x = 2$. Esto da el trazo de la figura 24.

Otro método es construir $y = \log_3(2 - x)$ en la forma exponencial $3^y = 2 - x$ y luego trazar la gráfica de $x = 2 - 3^y$.

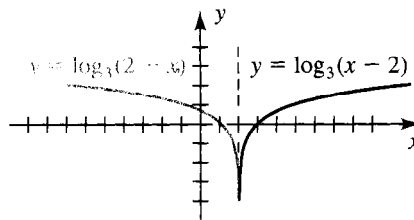


FIGURA 24

Antes de que se inventaran las calculadoras, se usaban los logaritmos con base 10 para complicados cálculos numéricos con factores, cocientes y potencias de números reales. Se utilizaba la base 10 porque estaba bien adaptada para números expresados en notación científica. Los logaritmos con base 10 se llaman **logaritmos comunes**. El símbolo $\log x$ se usaba como abreviatura de $\log_{10}x$.

Definición de logaritmo común

$$\log x = \log_{10}x \quad \text{para toda } x > 0$$

Dado que se dispone de calculadoras de poco costo, no hay necesidad de los logaritmos comunes como herramienta para trabajo de cálculos. No obstante, la base 10 tiene diversidad de aplicaciones y por ello muchas calculadoras cuentan con una tecla $\boxed{\text{LOG}}$ para calcular logaritmos comunes.

La función exponencial natural está dada por $f(x) = e^x$ (Secc. 5.2). La función logarítmica con base e se denomina **función logarítmica natural**. El símbolo $\ln x$ “léase ele ene de x ” es una abreviatura de $\log_e x$ y aquí lo conoceremos como **logaritmo natural de x** ; por lo tanto, *la función logarítmica natural y la exponencial natural son funciones inversas*.

Definición de logaritmo natural

$$\ln x = \log_e x \quad \text{para toda } x > 0$$

Muchas calculadoras tienen una tecla marcada $\boxed{\text{LN}}$, que sirve para calcular logaritmos naturales. La siguiente ilustración da varios ejemplos de formas equivalentes con logaritmos comunes y naturales.

ILUSTRACIÓN

Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log x = 2$	$10^2 = x$
$\log z = y + 3$	$10^{y+3} = z$
$\ln x = 2$	$e^2 = x$
$\ln z = y + 3$	$e^{y+3} = z$

En una calculadora, para hallar x cuando se conoce $\log x$ o $\ln x$ se usa la tecla $\boxed{10^x}$ o la $\boxed{e^x}$, respectivamente, como en el siguiente ejemplo. Si tu dispositivo tiene una tecla $\boxed{\text{INV}}$ (por inverso), pulsa x y enseguida presiona $\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{LOG}}$ o $\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{LN}}$.

EJEMPLO 10 Resolver una ecuación logarítmica

Halla x si

a) $\log x = 1.7959$ **b)** $\ln x = 4.7$

Solución **a)** Cambiar $\log x = 1.7959$ en su forma exponencial equivalente da

$$x = 10^{1.7959}$$

Al evaluar la última expresión a precisión de tres lugares decimales tendremos

$$x \approx 62.503.$$

b) Cambiar $\ln x = 4.7$ en su forma exponencial equivalente da

$$x = e^{4.7} \approx 109.95.$$

La tabla siguiente muestra formas de logaritmos comunes y naturales para algunas de las propiedades estudiadas.

Logaritmos de base a	Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
$\log_a 1 = 0$	$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
$\log_a a^x = x$	$\log 10^x = x$	$\ln e^x = x$
$a^{\log_a x} = x$	$10^{\log x} = x$	$e^{\ln x} = x$

Los próximos tres ejemplos ilustran aplicaciones de logaritmos comunes y naturales.

EJEMPLO 11 Escala Richter

En la escala Richter, la magnitud R de la intensidad I de un temblor está dada por

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

donde I_0 es cierta intensidad mínima.

a) Si la intensidad de un temblor es $1000I_0$, encuentra R .

b) Expresa I en la forma de R e I_0 .

*Solución***a)**

$$\begin{aligned}
 R &= \log \frac{I}{I_0} && \text{dados} \\
 &= \log \frac{1000I_0}{I_0} && \text{sea } I = 1000I_0 \\
 &= \log 1000 && \text{cancela } I_0 \\
 &= \log 10^3 && 1000 = 10^3 \\
 &= 3 && \log 10^x = x \text{ para toda } x
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 R &= \log \frac{I}{I_0} && \text{dados} \\
 \frac{I}{I_0} &= 10^R && \text{definición de } \log_{10} \\
 I &= I_0 \cdot 10^R && \text{multiplica por } I_0
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 12 *Ley de Newton del enfriamiento*

Esta ley expresa que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. La ley de Newton es útil para demostrar que, en ciertas condiciones, la temperatura T (en °C) de un objeto en un tiempo t (en horas) está dada por $t = 75e^{-2t}$. Expresa t como función de T .

Solución

$$\begin{aligned}
 T &= 75e^{-2t} && \text{dados} \\
 e^{-2t} &= \frac{T}{75} && \text{aisla expresión exponencial} \\
 -2t &= \ln \frac{T}{75} && \text{cambia a forma logarítmica} \\
 t &= -\frac{1}{2} \ln \frac{T}{75} && \text{divide entre } -2
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 13 *Vida media de una sustancia radiactiva*

Un físico encuentra que una sustancia radiactiva desconocida registra 2000 conteos por minuto en un contador Geiger; diez días después la sustancia registra 1500 conteos por minuto. Mediante cálculo integral, se puede demostrar que al cabo de t días la cantidad de material radiactivo, y por lo tanto el número de conteos por minuto $N(t)$, es directamente proporcional a e^{ct} para alguna constante c . Determina la vida media de la sustancia.

Solución En vista de que $N(t)$ es directamente proporcional a e^{ct} ,

$$N(t) = ke^{ct},$$

donde k es una constante. Con $t = 0$ y con $N(0) = 2000$, se obtiene

$$2000 = ke^{c \cdot 0} = k \cdot 1 = k.$$

En consecuencia, la fórmula para $N(t)$ se escribe

$$N(t) = 2000e^{ct}.$$

Como $N(10) = 1500$, c se determina así:

$$\begin{aligned} 1500 &= 2000e^{c \cdot 10} && \text{sea } t = 10 \text{ en } N(t) \\ \frac{3}{4} &= e^{10c} && \text{dividir entre 2000 y simplificar} \\ 10c &= \ln \frac{3}{4} && \text{cambiar a forma logarítmica} \\ c &= \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4} && \text{dividir entre 10} \end{aligned}$$

Por último, puesto que la vida media corresponde al tiempo t al que $N(t)$ es igual a 1000, tenemos:

$$\begin{aligned} 1000 &= 2000e^{ct} && \text{sea } N(t) = 1000 \\ \frac{1}{2} &= e^{ct} && \text{dividir entre 2000} \\ ct &= \ln \frac{1}{2} && \text{cambiar a forma logarítmica} \\ t &= \frac{1}{c} \ln \frac{1}{2} && \text{dividir entre } c \\ &= \frac{1}{\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}} \ln \frac{1}{2} && c = \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4} \\ &\approx 24 \text{ días} && \text{calcular} \end{aligned}$$

5.3 EJERCICIOS

Ejercicios 1 y 2: cambia en la forma logarítmica.

1. a) $4^3 = 64$ b) $4^{-3} = \frac{1}{64}$ c) $t^r = s$
- d) $3^x = 4 - t$ e) $5^{7t} = \frac{a+b}{a}$ f) $(0.7)^t = 5.3$
2. a) $3^5 = 243$ b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ c) $c^p = d$
- d) $7^x = 100p$ e) $3^{-2x} = \frac{P}{F}$ f) $(0.9)^t = \frac{1}{2}$

Ejercicios 3 y 4: pasa a la forma exponencial.

3. a) $\log_2 32 = 5$ b) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

$$\text{c) } \log_t r = p$$

$$\text{e) } \log_2 m = 3x + 4$$

$$\text{4. a) } \log_3 81 = 4$$

$$\text{c) } \log_v w = q$$

$$\text{e) } \log_4 p = 5 - x$$

$$\text{d) } \log_3 (x + 2) = 5$$

$$\text{f) } \log_b 512 = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \log_4 \frac{1}{256} = -4$$

$$\text{d) } \log_6 (2x - 1) = 3$$

$$\text{f) } \log_a 343 = \frac{3}{4}$$

Ejercicios 5 al 8: despeja t usando logaritmos de base a .

$$\text{5. } 2a^{t/3} = 5$$

$$\text{7. } A = Ba^{Ct} + D$$

$$\text{6. } 3a^{4t} = 10$$

$$\text{8. } L = Ma^{t/N} - P$$

Ejercicios 9 y 10: convierte en la forma logarítmica.

9. a) $10^5 = 100\,000$ b) $10^{-3} = 0.001$
 c) $10^x = y + 1$ d) $e^7 = p$
 e) $e^{et} = 3 - x$
10. a) $10^4 = 10\,000$ b) $10^{-2} = 0.01$
 c) $10^x = 38z$ d) $e^4 = D$
 e) $e^{0.1t} = x + 2$

Ejercicios 11 y 12: pasa a la forma exponencial.

11. a) $\log x = 50$ b) $\log x = 20t$
 c) $\ln x = 0.1$ d) $\ln w = 4 + 3x$
 e) $\ln(z - 2) = \frac{1}{6}$
12. a) $\log x = -8$ b) $\log x = y - 2$
 c) $\ln x = \frac{1}{2}$ d) $\ln z = 7 + x$
 e) $\ln(t - 5) = 1.2$

Ejercicios 13 y 14: encuentra el número, si es posible.

13. a) $\log_5 1$ b) $\log_3 3$ c) $\log_4 (-2)$
 d) $\log_7 7^2$ e) $3^{\log_3 8}$ f) $\log_5 125$
 g) $\log_4 \frac{1}{16}$
14. a) $\log_8 1$ b) $\log_9 9$ c) $\log_5 0$
 d) $\log_6 6^7$ e) $5^{\log_5 4}$ f) $\log_3 243$
 g) $\log_2 128$

Ejercicios 15 y 16: halla el número.

15. a) $10^{\log 3}$ b) $\log 10^5$ c) $\log 100$
 d) $\log 0.0001$ e) $e^{\ln 2}$ f) $\ln e^{-3}$
 g) $e^{2 + \ln 3}$
16. a) $10^{\log 7}$ b) $\log 10^{-6}$ c) $\log 100\,000$
 d) $\log 0.001$ e) $e^{\ln 8}$ f) $\ln e^{2/3}$
 g) $e^{1 + \ln 5}$

Ejercicios 17 al 30: resuelve la ecuación.

17. $\log_4 x = \log_4 (8 - x)$
 18. $\log_3 (x + 4) = \log_3 (1 - x)$
 19. $\log_5 (x - 2) = \log_5 (3x + 7)$
 20. $\log_7 (x - 5) = \log_7 (6x)$
 21. $\log x^2 = \log (-3x - 2)$ 22. $\ln x^2 = \ln (12 - x)$
 23. $\log_3 (x - 4) = 2$ 24. $\log_2 (x - 5) = 4$
 25. $\log_9 x = \frac{3}{2}$ 26. $\log_4 x = -\frac{3}{2}$
 27. $\ln x^2 = -2$ 28. $\log x^2 = -4$
 29. $e^{2 \ln x} = 9$ 30. $e^{-\ln x} = 0.2$

31. Traza la gráfica de f si $a = 4$:

- a) $f(x) = \log_a x$ b) $f(x) = -\log_a x$

- c) $f(x) = 2 \log_a x$ d) $f(x) = \log_a (x + 2)$
 e) $f(x) = (\log_a x) + 2$ f) $f(x) = \log_a (x - 2)$
 g) $f(x) = (\log_a x) - 2$ h) $f(x) = \log_a |x|$
 i) $f(x) = \log_a (-x)$ j) $f(x) = \log_a (3 - x)$
 k) $f(x) = |\log_a x|$

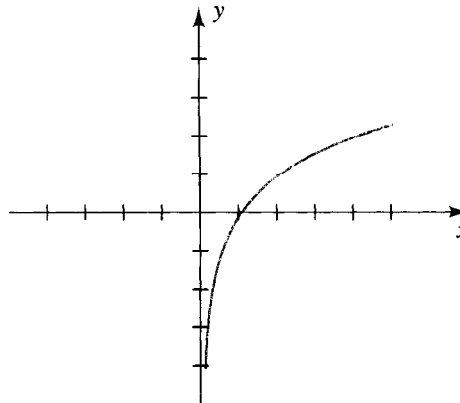
32. Trabaja el ejercicio 31 si $a = 5$.

Ejercicios 33 al 36: traza la gráfica de f .

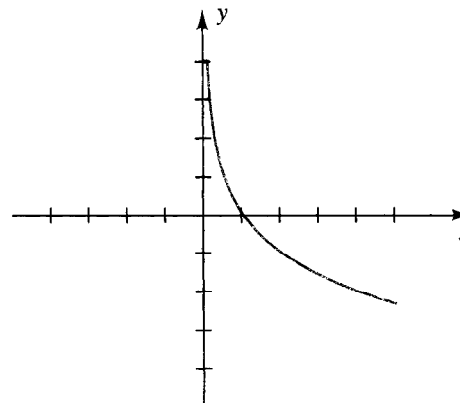
33. $f(x) = \log x$ 34. $f(x) = \ln x$
 35. $f(x) = \log_2 |x - 5|$ 36. $f(x) = \log_3 |x + 1|$

Ejercicios 37 al 44: en la figura se muestra la gráfica de una función f . Expresa $f(x)$ en términos de logaritmos con base 2.

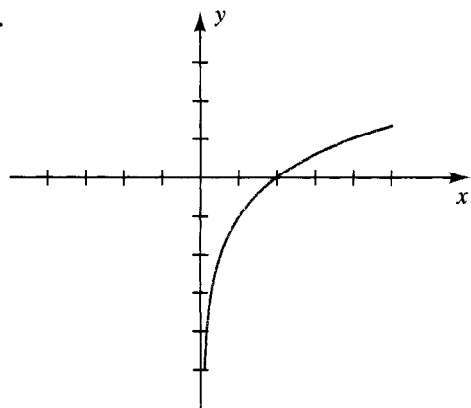
37.



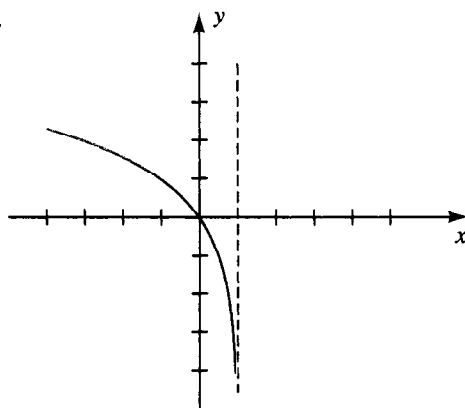
38.



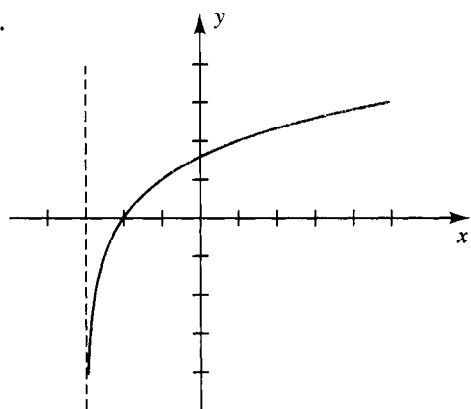
39.



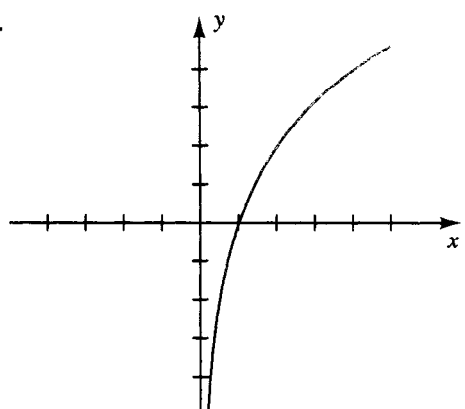
42.



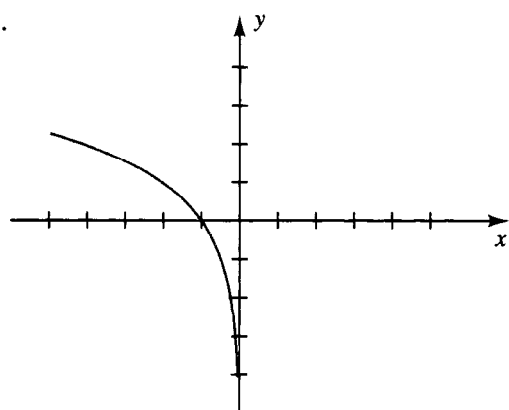
40.



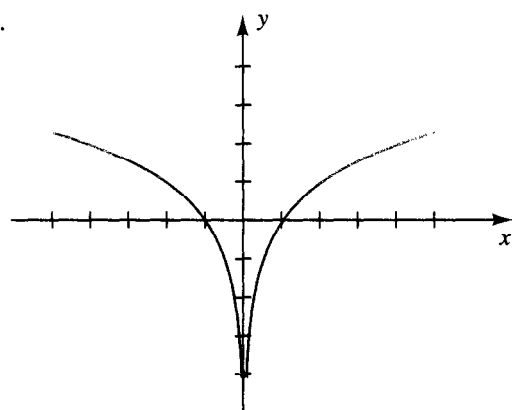
43.



41.



44.



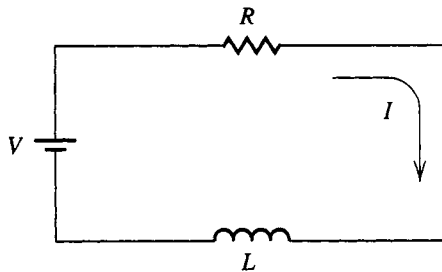
Ejercicios 45 y 46: calcula x a tres cifras significativas.

45. a) $\log x = 3.6274$ b) $\log x = 0.9469$
 c) $\log x = -1.6253$ d) $\ln x = 2.3$
 e) $\ln x = 0.05$ f) $\ln x = -1.6$
46. a) $\log x = 1.8965$ b) $\log x = 4.9680$
 c) $\log x = -2.2118$ d) $\ln x = 3.7$
 e) $\ln x = 0.95$ f) $\ln x = -5$

47. Desintegración del radio Si comenzamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad q restante después de t años está dada por $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Expresa t en términos de q y q_0 .

48. Desintegración del isótopo del bismuto El isótopo radiactivo de bismuto, ^{210}Bi , se desintegra según la fórmula $Q = k(2)^{-t/5}$, donde k es una constante y t es el tiempo en días. Expresa t en términos de Q y k .

49. Circuito eléctrico En la figura se muestra el diagrama de un circuito eléctrico sencillo que consta de un resistor y un inductor. La corriente I en el tiempo t está dada por $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L es la inductancia. Resuelve esta ecuación para t .



EJERCICIO 49

50. Condensador eléctrico Se deja descargar un condensador eléctrico con carga inicial Q_0 . Después de t segundos, la carga Q es $Q = Q_0 e^{-kt}$, donde k es una constante. Despeja esta ecuación para t .

51. Escala de Richter Utiliza la fórmula $R = \log(I/I_0)$ de la escala de Richter para hallar la magnitud de un temblor que tiene una intensidad.

- a) 100 veces la de I_0
 b) 10 000 veces la de I_0
 c) 100 000 veces la de I_0

52. Escala de Richter Consulta el ejercicio 51. Las magnitudes de los temblores más notables que se han registrado han sido entre 8 y 9 en la escala de Richter. Encuentra las intensidades correspondientes en términos de I_0 .

53. Intensidad del sonido El nivel de un sonido, como lo capta el oído humano, se basa en su nivel de intensidad.

Una fórmula para hallar el nivel de intensidad α (en decibels) que corresponde a una intensidad sonora I es $\alpha = 10 \log(I/I_0)$, donde I_0 es un valor especial de I acordado como el sonido más débil perceptible por el oído en ciertas condiciones. Encuentra α si

- a) I es 10 veces más grande que I_0
 b) I es 1000 veces más grande que I_0
 c) I es 10 000 veces más grande que I_0 (éste es el nivel de intensidad de una voz promedio).

54. Intensidad del sonido Consulta el ejercicio 53. Un nivel de intensidad de 140 decibels produce dolor en el oído humano promedio. ¿Aproximadamente cuántas veces más grande que I_0 debe ser I para que α llegue a este nivel?

55. Crecimiento poblacional en Estados Unidos La población $N(t)$ (en millones) de Estados Unidos, t años después de 1980, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 227e^{0.007t}$. ¿Cuándo llegará al doble?

56. Crecimiento poblacional en la India La población $N(t)$ (en millones) de la India, t años después de 1985, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 762e^{0.022t}$. ¿Cuándo llegará a 1000 millones?

57. Peso de niños La relación de Ehrenberg

$$\ln W = \ln 2.4 + (1.84)h$$

es una fórmula empírica que relaciona la estatura h (en m) con el peso promedio W (en kg) para niños de entre 5 y 13 años de edad.

- a) Expresa W como función de h que no contenga \ln .
 b) Calcula el peso promedio de un niño de 8 años de edad que mide 1.5 metros de estatura.

58. Interés compuesto continuamente Si el interés es compuesto continuamente a una tasa de 10% por año, calcula cuántos años se requieren para que un depósito inicial de \$6000 se convierta en \$25 000.

59. Presión del aire La fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$ permite calcular la presión del aire $p(h)$ (en lb/in^2), a una altitud de h pies sobre el nivel del mar. Indica a qué altitud h aproximada la presión del aire será:

- a) 10 lb/in^2
 b) La mitad de su valor al nivel del mar.

60. Presión de vapor La presión P de vapor de un líquido (en lb/in^2), que es una medida de su volatilidad, se relaciona con su temperatura T (en $^\circ\text{F}$) por la ecuación de Antoine

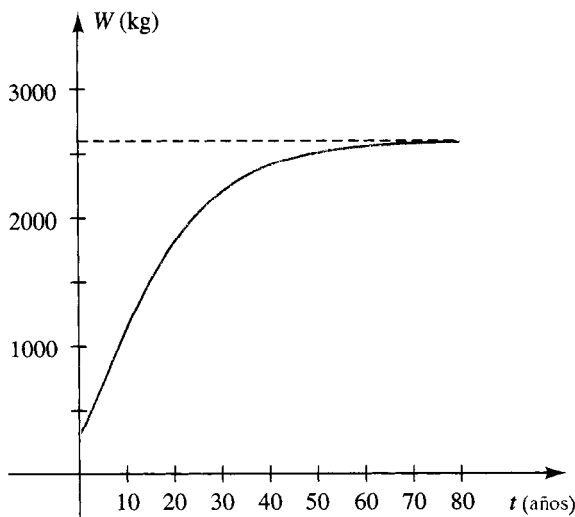
$$\log P = a + \frac{b}{c + T}$$

donde a , b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente con un incremento en temperatura. Expresa P como función de T .

- 61. Crecimiento de los elefantes** El peso W (en kg) de una elefanta africana, a la edad de t (en años), se calcula mediante

$$W = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3.$$

- a) Calcula el peso al nacer.
b) Calcula la edad de una elefanta africana de 1800 kg mediante (1) la gráfica siguiente y (2) la fórmula W de este ejercicio.



EJERCICIO 61

- 62. Consumo de carbón** Un país tiene en la actualidad reservas carboníferas de 50 millones de toneladas. El año pasado se consumieron 6.5 millones de toneladas. Los datos de años pasados y las proyecciones de población sugieren que la rapidez de consumo R (en millones de tons/año) aumentará según la fórmula $R = 6.5e^{0.02t}$ y la cantidad total T (en millones de tons) de carbón que se usará en t años, está dada por la fórmula $T = 325(e^{0.02t} - 1)$. Si el país usa sólo sus propios recursos, ¿cuándo se agotarán las reservas carboníferas?
- 63. Densidad de la población urbana** Un modelo de densidad urbana es una fórmula que relaciona la densidad D poblacional (en miles por mi^2) con la distancia x (en mi) desde el centro de una ciudad. Se ha encontrado que la fórmula $D = ae^{-bx}$, para la densidad central a y el coeficiente de decaimiento b , es apropiada para muchas grandes ciudades de Estados Unidos. ¿A qué distancia aproximada la densidad de la población era de 2000 por mi^2 ?
- 64. Brillantez de las estrellas** Las estrellas se clasifican en categorías de brillantez llamadas magnitudes. A las me-

nos brillantes, con flujo luminoso L_0 , se les asignó una magnitud de 6; a las más brillantes y de flujo luminoso L , una magnitud m por medio de la fórmula

$$m = 6 - (2.5) \log \frac{L}{L_0}.$$

- a) Encuentra m si $L = 10^{0.4} L_0$.
b) Resuelve la ecuación para L en términos de m y L_0 .

- 65. Desintegración del yodo radiactivo** El yodo radiactivo ^{131}I se usa con frecuencia en estudios de exploración o rastreo de la glándula tiroides. La sustancia se desintegra según la fórmula $A(t) = A_0 a^{-t}$, donde A_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días. Encuentra a , suponiendo que la vida media del ^{131}I es de ocho días.

- 66. Contaminación radiactiva** La lluvia ácida ha depositado estroncio radiactivo ^{90}Sr en un gran campo. Si pasa suficiente cantidad a la cadena alimenticia hasta los seres humanos, puede ocasionar cáncer óseo. Se ha determinado que el nivel de radiactividad del campo es 2.5 veces el nivel de seguridad S . El ^{90}Sr se desintegra según la fórmula

$$A(t) = A_0 e^{-0.0239t},$$

donde A_0 es la cantidad que por ahora está en el campo y t es el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminada el área?

- 67. Velocidad al caminar** En un estudio hecho en ciudades que van de una población P de 300 hasta 300 000 000, se encontró que la velocidad S promedio de una persona al caminar (en ft/s) se puede calcular con la ecuación $S = 0.05 + 0.86 \log P$.

- a) ¿Cómo afecta la población a la velocidad promedio al caminar?
b) ¿Para qué población será de 5 ft/s la velocidad promedio al caminar?

- 68. a)** Demuestra que $f(x) = x - 2 + \log x$ toma valores tanto positivos como negativos en el intervalo $[1, 2]$.

- b)** La ecuación $x - 2 + \log x = 0$ tiene una raíz cercana a 1.5. Para calcularla, reescribe la ecuación como $x = 2 - \log x$. Sea $x_1 = 1.5$ y encuentra las aproximaciones sucesivas x_2, x_3, \dots mediante las fórmulas

$$x_2 = 2 - \log x_1, x_3 = 2 - \log x_2, \dots$$

hasta obtener una precisión de dos lugares decimales.

- 69.** Trabaja el ejercicio 68 con $f(x) = \log x - 10^{-x}$. (Sugerencia: despeja x de $\log x$.)

5.4 Propiedades de los logaritmos

En la sección pasada vimos que $\log_a x$ se puede interpretar como un exponente; en consecuencia, parece razonable esperar que las leyes de los exponentes sirvan para obtener las correspondientes de los logaritmos. Esto se demuestra en las pruebas de las siguientes leyes, que son fundamentales para todo trabajo con logaritmos.

Leyes de los logaritmos

Si u y w denotan números reales positivos, entonces

$$(1) \log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$$

$$(2) \log_a \frac{u}{w} = \log_a u - \log_a w$$

$$(3) \log_a (w^c) = c \log_a w \text{ para todo número real } c$$

PRUEBA En todo el proceso de prueba, sea

$$r = \log_a u \quad \text{y} \quad s = \log_a w$$

Al aplicar la definición de logaritmo obtendremos

$$u = a^r \quad \text{y} \quad w = a^s.$$

Ahora procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} (1) \quad & uw = a^r a^s && u = a^r \text{ y } w = a^s \\ & uw = a^{r+s} && \text{ley de exponentes} \\ & \log_a uw = r + s && \text{definición de } \log_a \\ & \log_a uw = \log_a u + \log_a w && r = \log_a u, s = \log_a w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{u}{w} = \frac{a^r}{a^s} && u = a^r \text{ y } w = a^s \\ & \frac{u}{w} = a^{r-s} && \text{ley de exponentes} \\ & \log_a \frac{u}{w} = r - s && \text{definición de } \log_a \\ & \log_a \frac{u}{w} = \log_a u - \log_a w && r = \log_a u, s = \log_a w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & u^c = (a^r)^c && u = a^r \\ & u^c = a^{cr} && \text{ley de exponentes} \\ & \log_a u^c = cr && \text{definición de } \log_a \\ & \log_a u^c = c \log_a u && r = \log_a u \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Las leyes de los logaritmos para casos especiales $a = 10$ (comunes) y $a = e$ (naturales) se escriben como en la siguiente tabla.

Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
$\log(uw) = \log u + \log w$	$\ln(uw) = \ln u + \ln w$
$\log \frac{u}{w} = \log u - \log w$	$\ln \frac{u}{w} = \ln u - \ln w$
$\log(u^c) = c \log u$	$\ln(u^c) = c \ln u$

Según se indica en los próximos avisos de precaución, no hay leyes generales para expresar $\log_a(u + w)$ o $\log_a(u - w)$ en términos de logaritmos más sencillos. Las expresiones del lado derecho son iguales a $\log_a uw$ y $\log_a \frac{u}{w}$, respectivamente.

Precaución



$$\log_a(u + w) \neq \log_a u + \log_a w; \quad \log_a(u - w) \neq \log_a u - \log_a w$$

Los siguientes ejemplos ilustran los usos de las leyes de los logaritmos.

EJEMPLO 1 Uso de las leyes de los logaritmos

Expresa $\log_a \frac{x^3 \sqrt{y}}{z^2}$ en términos de logaritmos de x , y y z .

Solución Escribimos \sqrt{y} como $y^{1/2}$ y usamos las leyes de los logaritmos:

$$\log_a \frac{x^3 \sqrt{y}}{z^2} = \log_a (x^3 y^{1/2}) - \log_a z^2 \quad \text{ley (2)}$$

$$= \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a z^2 \quad \text{ley (1)}$$

$$= 3 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - 2 \log_a z \quad \text{ley (3)}$$

EJEMPLO 2 Uso de las leyes de los logaritmos

Expresa como un logaritmo:

$$\frac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z$$

Solución Aplicamos las leyes de los logaritmos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z \\ = \log_a (x^2 - 1)^{1/3} - \log_a y - \log_a z^4 \end{aligned} \quad \text{ley (3)}$$

$$= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - (\log_a y + \log_a z^4) \quad \text{álgebra}$$

$$= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - \log_a (yz^4) \quad \text{ley (1)}$$

$$= \log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4} \quad \text{ley (2)}$$

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación logarítmicaResuelve la ecuación $\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$ *Solución*

$\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$	datos
$\log_5 (2x + 3) = \log_5 (11 \cdot 3)$	ley (1)
$\log_5 (2x + 3) = \log_5 33$	multiplicar
$2x + 3 = 33$	estas funciones logarítmicas son biunívocas
$2x = 30$	restar 3
$x = 15$	dividir entre 2

Prueba $x = 15$ LI: $\log_5 (2 \cdot 15 + 3) = \log_5 33$ LD: $\log_5 11 + \log_5 3 = \log_5 (11 \cdot 3) = \log_5 33$ Como $\log_5 33 = \log_5 33$ es expresión cierta $x = 15$ es una solución.

Las leyes de los logaritmos se demostraron para logaritmos de números u y w reales *positivos*. Si las aplicamos a ecuaciones en que u y w sean expresiones con una variable, pueden resultar soluciones extrañas; por lo tanto, las respuestas deben sustituirse con la variable en lugar de u y w para determinar si estas expresiones están definidas.

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación logarítmicaResuelve la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.*Solución*

$\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$	datos
$\log_2 [x(x + 2)] = 3$	ley (1)
$x(x + 2) = 2^3$	definición de logaritmo
$x^2 + 2x - 8 = 0$	simplificar
$(x - 2)(x + 4) = 0$	factorizar
$x - 2 = 0, x + 4 = 0$	igualar a 0 cada factor
$x = 2, x = -4$	despejando x

PRUEBA $x = 2$ LI: $\log_2 2 + \log_2 (2 + 2) = 1 + \log_2 4$
 $= 1 + \log_2 2^2 = 1 + 2 = 3$
 LD: 3

Dado que $3 = 3$ es expresión cierta, $x = 2$ es una solución.

PRUEBA $x = -4$ LI: $\log_2 (-4) + \log_2 (-4 + 2)$

Puesto que los logaritmos de números negativos no están definidos, $x = -4$ no es una solución.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelve la ecuación $\ln (x + 6) - \ln 10 = \ln (x - 1) - \ln 2$.

Solución

$$\ln (x + 6) - \ln (x - 1) = \ln 10 - \ln 2 \quad \text{reacomodando términos}$$

$$\ln \left(\frac{x + 6}{x - 1} \right) = \ln \frac{10}{2} \quad \text{ley (2)}$$

$$\frac{x + 6}{x - 1} = 5 \quad \text{ln es biunívoco}$$

$$x + 6 = 5x - 5 \quad \text{multiplicar } x - 1$$

$$4x = 11 \quad \text{restar } x \text{ y sumar } 5$$

$$x = \frac{11}{4} \quad \text{dividir entre 4}$$

PRUEBA En función de que $\ln (x + 6)$ y $\ln (x - 1)$ están definidos en $x = \frac{11}{4}$ (son logaritmos de números reales positivos) y como nuestros pasos algebraicos son correctos, deducimos que $\frac{11}{4}$ es una solución de la ecuación dada.

EJEMPLO 6 Desplazar la gráfica de una ecuación logarítmica

Traza la gráfica de $y = \log_3 (81x)$.

Solución Se puede reescribir la ecuación como sigue:

$$y = \log_3 (81x) \quad \text{dados}$$

$$= \log_3 81 + \log_3 x \quad \text{ley (1)}$$

$$= \log_3 3^4 + \log_3 x \quad 81 = 3^4$$

$$= 4 + \log_3 x \quad \log_a a^x = x$$

Por lo tanto, la gráfica de $y = \log_3(81x)$ se obtiene corriendo la gráfica de $y = \log_3 x$ en la figura 19 cuatro unidades hacia arriba. Esto da el trazo de la figura 25.

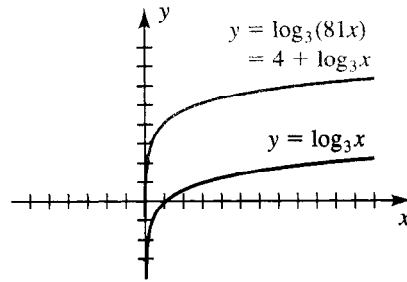


FIGURA 25

EJEMPLO 7 Trazar gráficas de ecuaciones logarítmicas

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = \log_3(x^2)$ **b)** $y = 2 \log_3 x$

Solución **a)** Dado que $x^2 = |x|^2$, la ecuación dada se reescribe

$$y = \log_3 |x|^2.$$

Se usa una ley de logaritmos y tenemos

$$y = 2 \log_3 |x|.$$

Podemos obtener la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ multiplicando por 2 las coordenadas y de puntos de la gráfica de $y = \log_3 |x|$ de la figura 20. Esto da la gráfica de la figura 26a).

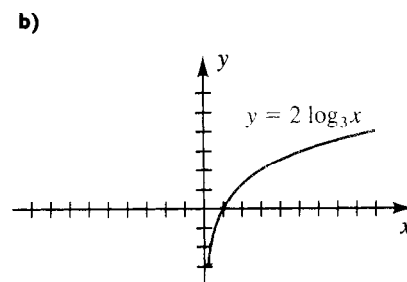
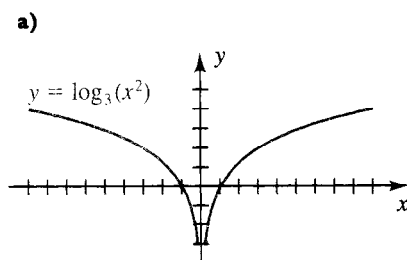


FIGURA 26

b) Si $y = 2 \log_3 x$ entonces x debe ser positiva; por lo tanto, la gráfica es idéntica a la parte de la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ de la figura 26a) que se encuentra a la derecha del eje y . Esto da la figura 26b).

EJEMPLO 8 Relación entre el precio de venta y la demanda

En el estudio de economía, a menudo la demanda D de un producto está relacionada con su precio de venta p por una ecuación de la forma

$$\log_a D = \log_a c - k \log_a p,$$

donde a , c y k son constantes positivas.

a) Resuelve la ecuación para D .

b) ¿Cómo es que el aumento o disminución del precio de venta afecta la demanda?

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad \log_a D &= \log_a c - k \log_a p && \text{dados} \\ \log_a D &= \log_a c - \log_a p^k && \text{ley (3)} \\ \log_a D &= \log_a \frac{c}{p^k} && \text{ley (2)} \\ D &= \frac{c}{p^k} && \log_a \text{ es biunívoco} \end{aligned}$$

b) Si el precio p aumenta, el denominador p^k en $D = c/p^k$ también lo hace y, por lo tanto, la demanda D disminuye. Si el precio baja, p^k disminuirá y la demanda D aumenta.

5.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: expresa en términos de logaritmos de x , y , z o w .

1. a) $\log_4 (xz)$ b) $\log_4 (y/z)$ c) $\log_4 \sqrt[3]{z}$
2. a) $\log_3 (xyz)$ b) $\log_3 (xz/y)$ c) $\log_3 \sqrt[5]{y}$
3. $\log_a \frac{x^3 w}{y^2 z^4}$ 4. $\log_a \frac{y^5 w^2}{x^4 z^3}$
5. $\log \frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$ 6. $\log \frac{\sqrt{y}}{x^4 \sqrt[3]{z}}$
7. $\ln \sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5 z}}$ 8. $\ln x \sqrt[3]{\frac{y^4}{z^5}}$

Ejercicios 9 al 16: escribe la expresión como un logaritmo.

9. a) $\log_3 x + \log_3 (5y)$ b) $\log_3 (2z) - \log_3 x$
- c) $5 \log_3 y$

10. a) $\log_4 (3z) + \log_4 x$ b) $\log_4 x - \log_4 (7y)$

$$\text{c) } \frac{1}{3} \log_4 w$$

11. $\log_a x + \frac{1}{3} \log_a (x-2) - 5 \log_a (2x+3)$
12. $5 \log_a x - \frac{1}{2} \log_a (3x-4) - 3 \log_a (5x+1)$
13. $\log (x^3 y^2) - 2 \log x \sqrt[3]{y} - 3 \log \left(\frac{x}{y} \right)$
14. $2 \log \frac{y^3}{x} - 3 \log y + \frac{1}{2} \log x^4 y^2$
15. $\ln y^3 + \frac{1}{3} \ln (x^3 y^6) - 5 \ln y$
16. $\ln x - 4 \ln (1/y) - 3 \ln (xy)$

Ejercicios 17 al 32: resuelve la ecuación.

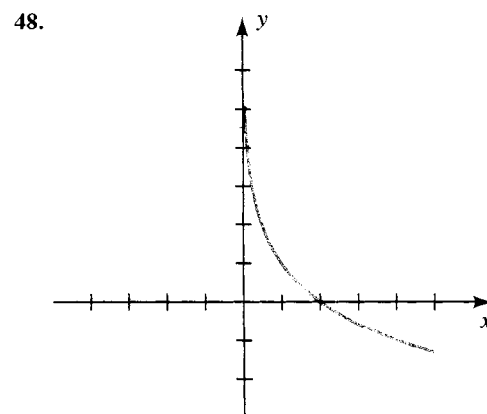
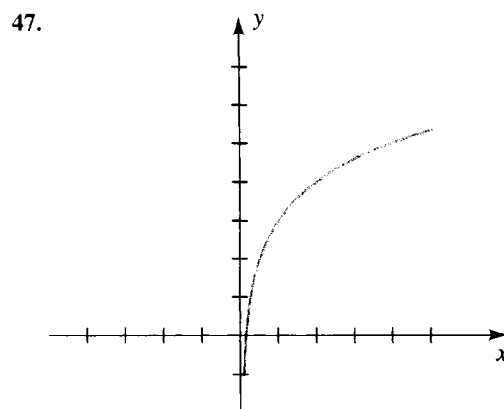
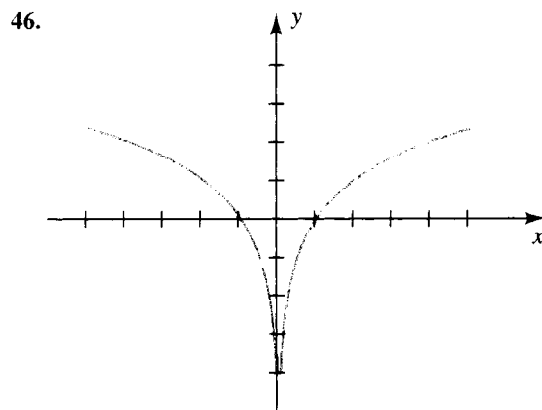
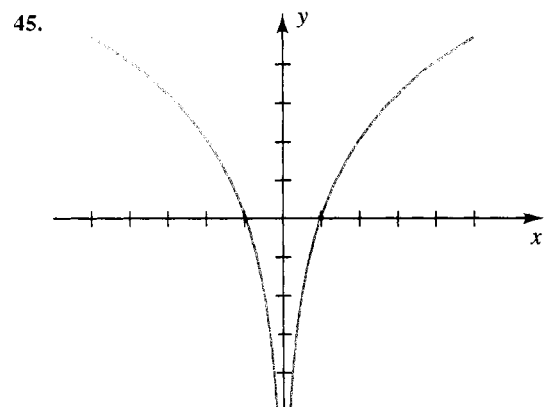
17. $\log_6 (2x-3) = \log_6 12 - \log_6 3$
18. $\log_4 (3x+2) = \log_4 5 + \log_4 3$
19. $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$

20. $3 \log_2 x = 2 \log_2 3$
 21. $\log x - \log(x+1) = 3 \log 4$
 22. $\log(x+2) - \log x = 2 \log 4$
 23. $\ln(-4-x) + \ln 3 = \ln(2-x)$
 24. $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2} \ln 9$
 25. $\log_2(x+7) + \log_2 x = 3$
 26. $\log_6(x+5) + \log_6 x = 2$
 27. $\log_3(x+3) + \log_3(x+5) = 1$
 28. $\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = 2$
 29. $\log(x+3) = 1 - \log(x-2)$
 30. $\log(57x) = 2 + \log(x-2)$
 31. $\ln x = 1 - \ln(x+2)$
 32. $\ln x = 1 + \ln(x+1)$

Ejercicios 33 al 44: traza la gráfica de f .

- | | |
|---|---|
| 33. $f(x) = \log_3(3x)$ | 34. $f(x) = \log_4(16x)$ |
| 35. $f(x) = 3 \log_3 x$ | 36. $f(x) = \frac{1}{3} \log_3 x$ |
| 37. $f(x) = \log_3(x^2)$ | 38. $f(x) = \log_2(x^2)$ |
| 39. $f(x) = \log_2(x^3)$ | 40. $f(x) = \log_3(x^3)$ |
| 41. $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$ | 42. $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$ |
| 43. $f(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$ | 44. $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ |

Ejercicios 45 al 48: en la figura se muestra la gráfica de una función f . Expresa $f(x)$ como un logaritmo con base 2.



- 49. Ley de Pareto** La ley de Pareto para países capitalistas expresa que la relación entre el ingreso anual x y el número y de individuos cuyos ingresos rebasan x es

$$\log y = \log b - k \log x,$$

donde b y k son constantes positivas. Resuelve esta ecuación para y .

- 50. Precio y demanda** Si p denota el precio de venta (en dólares) de un artículo y x es la demanda correspondiente (en número de piezas vendidas por día), la relación entre p y x estará dada a veces por $p = p_0 e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Expresa x como función de p .

- 51. Velocidad del viento** Si v denota la velocidad del viento (en m/s) a una altura de z metros sobre el suelo, entonces, en ciertas condiciones, $v = c \ln(z/z_0)$, donde c es una constante positiva y z_0 es la altura a la que la velocidad es cero. Traza la gráfica de esta ecuación en un plano zv para $c = 0.5$ y $z_0 = 0.1$ m.

- 52. Eliminación de la contaminación** Si la contaminación del lago Erie se detuviera de pronto, se ha calculado que el nivel de contaminantes disminuiría según la fórmula $y = y_0 e^{-0.3821t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 es el nivel de contaminantes en que dejó de haber más contaminación. ¿Cuántos años tardaría en limpiarse el 50% de los contaminantes?

- 53. Reacción a un estímulo** Denota con R la reacción de un sujeto a un estímulo de intensidad x . Hay muchas posibilidades para R y x . Si el estímulo x es la salinidad (en g de sal/l), R puede ser la estimación del sujeto de cuán salada está la solución, con base en una escala de 0 a 10. Una relación entre R y x está dada por la fórmula de Weber-Fechner $R(x) = a \log(x/x_0)$, donde a es una constante positiva y x_0 se denomina umbral del estímulo.

a) Encuentra $R(x_0)$.

b) Establece una relación entre $R(x)$ y $R(2x)$.

- 54. Energía de un electrón** La energía $E(x)$ de un electrón, tras de pasar por un material de espesor x , está dada por $E(x) = E_0 e^{-x/x_0}$, donde E_0 es la energía inicial y x_0 es la duración de la radiación.

a) Expresa, en términos de E_0 , la energía de un electrón luego de atravesar un material de espesor x_0 .

b) Indica, en términos de x_0 , el espesor en que el electrón pierde 99% de su energía inicial.

- 55. Capa de ozono** Un método para calcular el espesor de la capa de ozono consiste en usar la fórmula $\ln I_0 - \ln I = kx$, donde I_0 es la intensidad de una longitud de onda particular de luz del Sol antes de que llegue a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar por una capa de ozono de x centímetros de espesor y k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda. Supón que para una longitud de onda de 3176×10^{-8} cm con $k \approx 0.39$, I_0/I se mide como 1.12. Calcula el espesor de la capa de ozono al 0.01 de cm más cercano.

- 56. Capa de ozono** Consulta el ejercicio 55. Calcula el porcentaje de decremento de la intensidad de luz con una longitud de onda de 3176×10^{-8} cm si la capa de ozono mide 0.24 cm de grueso.

C Ejercicios 57 y 58: grafica f en el mismo plano coordenado y calcula la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

57. $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 3x$; $g(x) = \log 3x$

58. $f(x) = 3^{-0.5x}$; $g(x) = \log x$

C Ejercicios 59 y 60: usa una gráfica para calcular las raíces de la ecuación en el intervalo.

59. $e^{-x} - 2 \log(1 + x^2) + 0.5x = 0$; $[0, 8]$

60. $2 \log 2x - \log_3 x^2 = 0$; $(0, 3)$

E Ejercicios 61 y 62: grafica f en el intervalo $[0.2, 16]$.
a) Calcula los intervalos donde f sea creciente o decreciente b) calcula los valores máximo y mínimo de f en $[0.2, 16]$.

61. $f(x) = 2 \log 2x - 1.5x + 0.1x^2$

62. $f(x) = 1.1^{3x} + x - 1.35^x - \log x + 5$

5.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección consideraremos varios tipos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas con sus aplicaciones.

EJEMPLO 1

Solución de una ecuación exponencial

Resuelve la ecuación $3^x = 21$.



Solución

$$3^x = 21 \quad \text{datos}$$

$$\log(3^x) = \log 21 \quad \text{tomar log de ambos lados}$$

$$x \log 3 = \log 21 \quad \text{ley (3) de logaritmos}$$

$$x = \frac{\log 21}{\log 3} \quad \text{dividir entre log 3}$$

También pudimos usar logaritmos naturales para obtener

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}.$$

Obtendremos la solución aproximada $x \approx 2.77$ con una calculadora. Una verificación parcial consiste en observar que como $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$, el número x tal que $3^x = 21$ debe estar entre 2 y 3, más cerca de 3 que de 2.

También pudimos resolver la ecuación del ejemplo 1 cambiando la forma exponencial $3^x = 21$ en logarítmica, como en la sección 5.3, y obtener

$$x = \log_3 21.$$

Ésta es la solución de la ecuación; sin embargo, dado que las calculadoras por lo general sólo tienen teclas para \log y \ln , no se puede calcular $\log_3 21$ directamente. El siguiente teorema proporciona una sencilla *fórmula de cambio de base* para hallar $\log_b u$ si $u > 0$ y b es cualquier base logarítmica.

Teorema: fórmula de cambio de base

Si $u > 0$ y si a y b son números reales positivos diferentes de 1, entonces

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}.$$

PRUEBA Comenzamos con las ecuaciones equivalentes

$$w = \log_b u \quad \text{y} \quad b^w = u$$

y procedemos como sigue:

$$b^w = u \quad \text{dados}$$

$$\log_a b^w = \log_a u \quad \text{tomar } \log_a \text{ de ambos lados}$$

$$w \log_a b = \log_a u \quad \text{ley (3) de logaritmos}$$

$$w = \frac{\log_a u}{\log_a b} \quad \text{dividir entre } \log_a b$$

Como $w = \log_b u$, se obtiene la fórmula.

El siguiente caso especial de la fórmula del cambio de base se obtiene con $u = a$ y usar el hecho de que $\log_a a = 1$:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

La fórmula del cambio de base se confunde a veces con la ley (2) de logaritmos. El siguiente aviso puede recordarse por la frase “un cociente de logaritmos *no es* el logaritmo del cociente”

Precaución



$$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a \frac{u}{b}$$

Los casos especiales de fórmula del cambio de base más usados son para $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales), según se expresa en seguida.

Fórmulas especiales para cambio de base

$$(1) \log_b u = \frac{\log u}{\log b}$$

$$(2) \log_b u = \frac{\ln u}{\ln b}$$

A continuación re trabajamos el ejemplo 1 usando una fórmula para cambio de base.

EJEMPLO 2 Usar fórmula para cambio de base

Resuelve la ecuación $3^x = 21$.

Solución Se procede de esta manera:

$$\begin{array}{ll} 3^x = 21 & \text{dados} \\ x = \log_3 21 & \text{cambio a forma logarítmica} \\ = \frac{\log 21}{\log 3} & \text{fórmula especial de cambio de base 1} \end{array}$$

Otro método es usar una fórmula especial de cambio de base 2 y se obtiene

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}.$$

Los logaritmos con base 2 se utilizan en ciencias de la computación. El siguiente ejemplo indica cómo hallarlos usando fórmulas de cambio de base.

EJEMPLO 3 Calcular un logaritmo con base 2Calcula $\log_2 5$ usando

- a)** logaritmos comunes **b)** logaritmos naturales

Solución Con las fórmulas especiales de cambio de base 1 y 2, se obtiene:

$$\mathbf{a)} \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2.322$$

$$\mathbf{b)} \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322$$

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación exponencialResuelve la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$.*Solución* Se pueden usar logaritmos comunes o naturales. Con base 10 se obtiene:

$$5^{2x+1} = 6^{x-2} \quad \text{dados}$$

$$\log(5^{2x+1}) = \log(6^{x-2}) \quad \text{tomar log de ambos lados}$$

$$(2x+1) \log 5 = (x-2) \log 6 \quad \text{ley (3) de logaritmos}$$

$$2x \log 5 + \log 5 = x \log 6 - 2 \log 6 \quad \text{multiplicar}$$

$$2x \log 5 - x \log 6 = -\log 5 - 2 \log 6 \quad \text{restar log 5 y log 6}$$

$$x(\log 5^2 - \log 6) = -(\log 5 + \log 6^2) \quad \text{factorizar y usar ley (3) de logaritmos}$$

$$x = -\frac{\log(5 \cdot 36)}{\log \frac{25}{6}} \quad \text{despejar x y usar leyes de logaritmos}$$

Una aproximación es $x \approx -3.64$.**EJEMPLO 5** Resolver una ecuación exponencialResuelve la ecuación $\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.*Solución*

$$\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3 \quad \text{dados}$$

$$5^x - 5^{-x} = 6 \quad \text{multiplicar por 2}$$

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6 \quad \text{definición de exponente negativo}$$

$$5^x(5^x) - \frac{1}{5^x}(5^x) = 6(5^x) \quad \text{multiplicar por } \text{med } 5^x$$

$$5^{2x} - 6(5^x) - 1 = 0 \quad \text{simplificar y restar } 6(5^x)$$

Reconocemos esta forma de la ecuación como cuadrática en 5^x y procedemos de esta forma:

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \quad \text{ley de los exponentes}$$

$$u^2 - 6u - 1 = 0 \quad \text{sea } u = 5^x$$

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} \quad \text{fórmula cuadrática}$$

$$5^x = 3 \pm \sqrt{10} \quad u = 5^x$$

$$5^x = 3 + \sqrt{10} \quad 5^x > 0, \text{ pero } 3 - \sqrt{10} < 0$$

$$\log 5^x = \log(3 + \sqrt{10}) \quad \text{tomar log de ambos lados}$$

$$x \log 5 = \log(3 + \sqrt{10}) \quad \text{ley (3) de logaritmos}$$

$$x = \frac{\log(3 + \sqrt{10})}{\log 5} \quad \text{dividir entre } \log 5$$

También pudimos utilizar logaritmos naturales para obtener

$$x = \frac{\ln(3 + \sqrt{10})}{\ln 5}.$$

Una aproximación es $x \approx 1.13$.

EJEMPLO 6 Penetración de la luz en el mar

La ley de Beer-Lambert expresa que la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de x metros en el mar está dada por $I = I_0 c^x$, donde $0 < c < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

a) Despeja x mediante logaritmos comunes.

b) Despeja x usando logaritmos naturales.

c) Si $c = \frac{1}{4}$, calcula la profundidad a la que $I = 0.01 I^0$ (ésta determina la zona donde puede tener lugar la fotosíntesis).

Solución

a) $I = I_0 c^x$ datos

$$\frac{I}{I_0} = c^x \quad \text{aislar la expresión exponencial}$$

$$x = \log_c \frac{I}{I_0} \quad \text{cambiar en forma logarítmica}$$

$$= \frac{\log(I/I_0)}{\log c} \quad \text{fórmula especial de cambio de base}$$



b) Se sustituye \log por \ln en toda la parte a) y se obtiene

$$x = \frac{\ln(I/I_0)}{\ln c}.$$

c) Con $I = 0.01 I_0$ y $c = \frac{1}{4}$ en la fórmula para x obtenida en la parte a), tenemos

$$x = \frac{\log(0.01 I_0/I_0)}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log(0.01)}{\log 1 - \log 4} = \frac{\log 10^{-2}}{0 - \log 4} = \frac{-2}{-\log 4} = \frac{2}{\log 4}.$$

Una aproximación es $x \approx 3.32$ m.

EJEMPLO 7

Comparación de intensidades luminosas

Si un haz de luz con intensidad I_0 se proyecta verticalmente hacia abajo en el agua, su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = I_0 e^{-1.4x}$ (ve la Fig. 27). ¿A qué profundidad tendrá la mitad de su valor en la superficie?

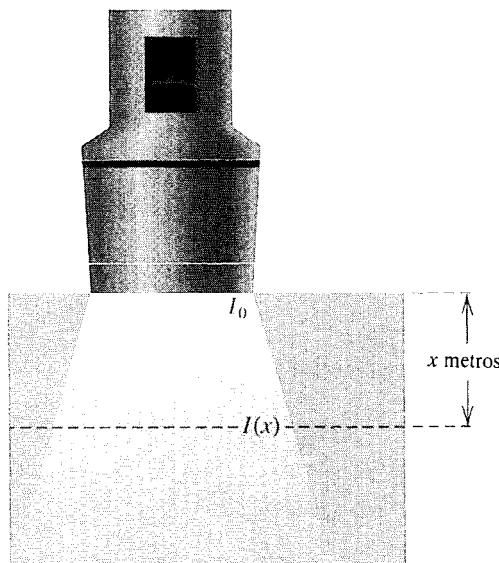


FIGURA 27

Solución En la superficie, $x = 0$ y la intensidad es

$$I(0) = I_0 e^0 = I_0.$$

Se desea hallar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{2}I_0$. Esto lleva a:

$$I(x) = \frac{1}{2}I_0 \quad \text{intensidad deseada}$$

$$I_0 e^{-1.4x} = \frac{1}{2}I_0 \quad \text{fórmula para } I(x)$$

$$e^{-1.4x} = \frac{1}{2} \quad \text{dividir entre } I_0$$

$$-1.4x = \ln \frac{1}{2} \quad \text{cambiar en forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1.4} \quad \text{dividir entre } -1.4$$

Una aproximación es $x \approx 0.495$ m.

EJEMPLO 8 Una curva logística

Una **curva logística** es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}},$$

donde k , b y c son constantes positivas. Dichas curvas son útiles para describir una población y que crece rápidamente al principio, pero cuya tasa de crecimiento decrece después que x alcanza cierto valor. En un famoso estudio del crecimiento de protozoarios hecho por Gause, se encontró que una población de *Paramecium caudata* se podía describir mediante una ecuación logística con $c = 1.1244$, $k = 105$ y x el tiempo en días.

- a)** Encuentra b si la población inicial era de tres protozoarios.
- b)** En el estudio, la tasa máxima de crecimiento tuvo lugar en $y = 52$. ¿En qué momento x ocurrió esto?
- c)** Demuestra que, tras un largo periodo, la población descrita por cualquier curva logística se aproxima a la constante k .

Solución **a)** Con $c = 1.1244$ y $k = 105$ en la ecuación logística, se obtiene

$$y = \frac{105}{1 + be^{-1.1244x}}.$$

Ahora procedemos como sigue:

$$3 = \frac{105}{1 + be^0} = \frac{105}{1 + b}$$

$y = 3$ cuando $x = 0$

$$1 + b = 35$$

multiplicar por $\frac{1+b}{3}$

$$b = 34$$

despejar b

b) Usa el hecho de que $b = 34$ lleva a:

$$52 = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

sea $y = 52$ en la parte a)

$$1 + 34e^{-1.1244x} = \frac{105}{52}$$

multiplicar por $\frac{1 + 34e^{-1.1244x}}{52}$

$$e^{-1.1244x} = \left(\frac{105}{52} - 1\right) \cdot \frac{1}{34} = \frac{53}{1768}$$

aislar $e^{-1.1244x}$

$$-1.1244x = \ln \frac{53}{1768}$$

cambiar a forma logarítmica

$$x = \frac{\ln \frac{53}{1768}}{-1.1244} \approx 3.12 \text{ días}$$

dividir entre -1.1244

c) Como $x \rightarrow \infty$, $e^{-ex} \rightarrow 0$. Por lo tanto,

$$y = \frac{k}{1 + be^{-ex}} \rightarrow \frac{k}{1 + b \cdot 0} = k.$$

En el ejemplo siguiente graficamos una ecuación obtenida en la parte a) del ejemplo anterior.

EJEMPLO 9

Trazar la gráfica de una curva logística



Grafica la curva logística dada por

$$y = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}},$$

y calcula el valor de x para $y = 52$.

Solución Comenzamos por asignar

$$\frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

a Y_1 . Como el tiempo x es no negativo, se escoge $X_{\min} = 0$. Seleccionamos $X_{\max} = 10$ para incluir el valor de x encontrado en la parte b) del ejemplo 8. Por la parte c), sabemos que el valor de y no puede rebasar 105; por lo tanto, escogemos $Y_{\min} = 0$ y $Y_{\max} = 105$ y obtenemos una imagen similar a la figura 28.

Con las funciones *trace* y *zoom*, vemos que para $y = 52$, el valor de x es de alrededor de 3.12, lo que concuerda con la aproximación encontrada en b) del ejemplo 8.

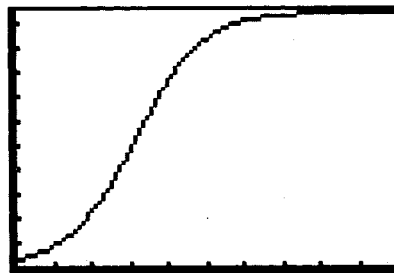


FIGURA 28 $[0, 10]$ por $[0, 105]$

El ejemplo que viene es una buena ilustración del poder de un graficador, ya que es imposible encontrar la solución exacta usando sólo métodos algebraicos.

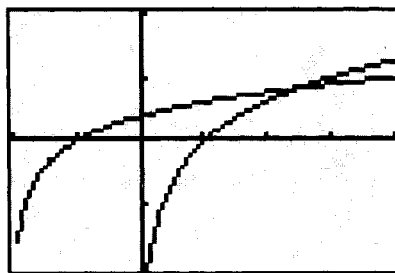
EJEMPLO 10

Calcular puntos de intersección de gráficas logarítmicas



Calcula el punto de intersección de las gráficas de

$$f(x) = \log_3 x \quad \text{y} \quad g(x) = \log_6 (x + 2).$$

FIGURA 29 $[-2, 4]$ por $[-2, 2]$

En su mayor parte, los graficadores están equipados para trabajar sólo con funciones logarítmicas comunes y naturales; por lo tanto, primero usamos una fórmula de cambio de base para reescribir f y g como

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln 3} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln 6}.$$

En seguida asignamos $(\ln x)/\ln 3$ y $(\ln(x+2))/\ln 6$ a Y_1 y Y_2 , respectivamente. Después de graficar Y_1 y Y_2 con una pantalla estándar, vemos que hay un punto de intersección en el primer cuadrante con $2 < x < 3$. Con las funciones de *trace* y *zoom*, encontramos que el punto de intersección es aproximadamente (2.52, 0.84).

La figura 29 se obtuvo con una pantalla de $[-2, 4]$ por $[-2, 2]$. No hay otros puntos de intersección, ya que f crece con más rapidez que g para $x > 3$.

5.5 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: encuentra la solución exacta y una aproximación a dos lugares decimales usando a) el método del ejemplo 1 y b) el método del ejemplo 2.

1. $5^x = 8$
2. $4^x = 3$
3. $3^{4-x} = 5$
4. $(\frac{1}{3})^x = 100$

Ejercicios 5 al 10: evalúa usando el cambio de fórmula de base.

5. $\log_5 6$
6. $\log_2 20$
7. $\log_9 0.2$
8. $\log_6 \frac{1}{2}$
9. $\frac{\log_5 16}{\log_5 4}$
10. $\frac{\log_7 243}{\log_7 3}$

Ejercicios 11 al 24: encuentra la solución exacta utilizando logaritmos comunes, y una aproximación de dos lugares decimales de cada solución cuando sea apropiado.

11. $3^{x+4} = 2^{1-3x}$
12. $4^{2x+3} = 5^{x-2}$
13. $2^{2x-3} = 5^{x-2}$
14. $3^{2-3x} = 4^{2x+1}$
15. $2^{-x} = 8$
16. $2^{-x^2} = 5$

$$17. \log x = 1 - \log(x-3)$$

$$18. \log(5x+1) = 2 + \log(2x-3)$$

$$19. \log(x^2+4) - \log(x+2) = 2 + \log(x-2)$$

$$20. \log(x-4) - \log(3x-10) = \log(1/x)$$

$$21. 5^x + 125(5^{-x}) = 30$$

$$22. 3(3^x) + 9(3^{-x}) = 28$$

$$23. 4^x - 3(4^{-x}) = 8$$

$$24. 2^x - 6(2^{-x}) = 6$$

Ejercicios del 25 al 30: resuelve la ecuación sin calculadora ni tabla.

$$25. \log(x^2) = (\log x)^2$$

$$26. \log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$$

$$27. \log(\log x) = 2$$

$$28. \log \sqrt{x^3-9} = 2$$

$$29. x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$$

$$30. \log(x^3) = (\log x)^3$$

Ejercicios 31 al 34: usa los logaritmos comunes para resolver x en términos de y .

$$31. y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2}$$

$$32. y = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}$$

$$33. y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$$

$$34. y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$$

Ejercicios del 35 al 38: usa los logaritmos naturales para resolver x en términos de y .

$$35. y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$36. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$37. y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$38. y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ejercicios 39 y 40: traza la gráfica de f y emplea el cambio de fórmula de base para calcular la intersección y .

$$39. f(x) = \log_2(x + 3)$$

$$40. f(x) = \log_3(x + 5)$$

Ejercicios 41 y 42: traza la gráfica de f y usa el cambio de fórmula de base a fin de calcular la intersección x .

$$41. f(x) = 4^x - 3$$

$$42. f(x) = 3^x - 6$$

Ejercicios 43 al 46: los químicos utilizan un número denotado por pH para describir cuantitativamente la acidez o basicidad de soluciones. Por definición, $pH = -\log [H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro.

43. Calcula el pH de cada sustancia:

a) Vinagre $[H^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$

b) Zanahorias $[H^+] \approx 1.0 \times 10^{-5}$

c) Agua de mar $[H^+] \approx 5.0 \times 10^{-9}$

44. Calcula la concentración de los iones hidrógeno $[H^+]$ de cada artículo:

a) Manzana $pH \approx 3.0$

b) Cerveza $pH \approx 4.2$

c) Leche $pH \approx 6.6$

45. Una solución se considera básica si $[H^+] < 10^{-7}$ o ácida si $[H^+] > 10^{-7}$. Encuentra las desigualdades correspondientes donde haya pH.

46. Muchas soluciones tienen un pH entre 1 y 14. Halla los límites correspondientes de $[H^+]$.

47. **Interés compuesto** Usa la fórmula de interés compuesto para determinar cuánto tardará una suma de dinero en duplicarse, si se invierte a una tasa de 6% por año compuesto mensualmente.

48. **Interés compuesto** Resuelve la fórmula de interés compuesto

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

para t usando logaritmos naturales.

49. **Zona fótica** Consulta el ejemplo 6. Desde el punto de vista de biología marina, la zona marina más importante es la zona fótica, ya que ahí ocurre la fotosíntesis. Dicha zona termina a una profundidad en donde penetra alrededor del 1% de la luz superficial. En aguas muy claras

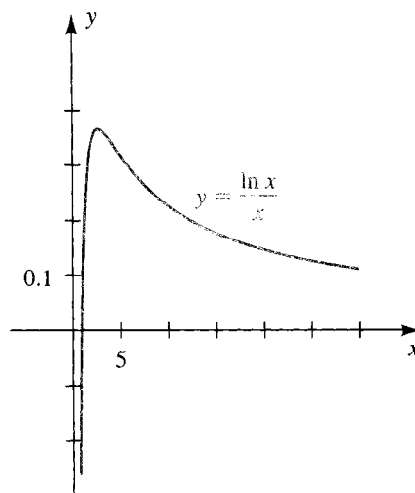
en el Caribe, el 50% de la luz de la superficie llega a profundidades de hasta 13 metros. Calcula la profundidad de la zona fótica.

50. **Zona fótica** En contraste con la situación descrita en el ejercicio anterior, en algunas partes del puerto de Nueva York el 50% de la luz superficial no llega a una profundidad de 10 centímetros. Calcula la profundidad de la zona fótica.

51. En la figura se muestra una gráfica de $f(x) = (\ln x)/x$ para $x > 0$. El valor máximo de $f(x)$ ocurre en $x = e$.

a) Los enteros 2 y 4 tienen la poca común propiedad de que $2^4 = 4^2$. Demuestra que si $x^y = y^x$ para los números reales positivos x y y , entonces $(\ln x)/x = (\ln y)/y$.

b) Usa la gráfica de f con objeto de explicar por qué muchos pares de números reales satisfacen la ecuación $x^y = y^x$.



EJERCICIO 51

52. **Historia de la lengua** Consulta el ejercicio 36 de la sección 5.1. Si una lengua tenía N_0 palabras básicas en un principio, de las que $N(t)$ todavía están en uso, entonces $N(t) = N_0(0.805)^t$, donde el tiempo t se mide en milenios. ¿Después de cuántos años la mitad de las palabras básicas continuará en uso?

53. **Absorción de un medicamento** Si se ingiere una pastilla de 100 mg contra el asma y no hay nada del medicamento en el cuerpo cuando se toma por primera vez, la cantidad total A en el torrente sanguíneo después de t minutos está pronosticada por

$$A \approx 100[1 - (0.9)^t] \text{ para } 0 \leq t \leq 10.$$

a) Traza la gráfica de la ecuación.

- b) Determina la cantidad de minutos necesarios para que 50 mg del fármaco entren en el torrente sanguíneo.

54. Dosis de un medicamento El cuerpo elimina un producto a través de la orina. Supón que para una dosis de 10 mg, la cantidad $A(t)$ restante en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$ y que para que sea efectiva, al menos 2 mg deben estar en el cuerpo.

- a) Determina cuándo quedarán 2 mg en el cuerpo.
b) ¿Cuál es la vida media del medicamento?

55. Mutación genética La fuente básica de la diversidad genética es la mutación (o cambios en la estructura química de los genes). Si un gene cambia con una rapidez constante m y si se desprecian otras fuerzas de evolución, la frecuencia F del gene original después de t generaciones está dada por $F = F_0(1 - m)^t$, donde F_0 es la frecuencia en $t = 0$.

- a) Resuelve la ecuación para t utilizando logaritmos comunes.
b) Si $m = 5 \times 10^{-5}$, ¿después de cuántas generaciones será $F = \frac{1}{2}F_0$?

56. Productividad de los empleados Ciertos procesos de aprendizaje se pueden ilustrar mediante la gráfica de $f(x) = a + b(1 - e^{-cx})$, donde a , b y c son constantes positivas. Supón que un fabricante calcula que un nuevo trabajador puede producir cinco piezas el primer día de trabajo. A medida que el obrero adquiere más experiencia, la producción diaria aumenta hasta alcanzar una máxima. Supón que el n -ésimo día de trabajo, el número $f(n)$ de piezas producidas se calcula mediante la fórmula

$$f(n) = 3 + 20(1 - e^{-0.1n}).$$

- a) Calcula el número de artículos producidos el quinto día, el noveno, el decimocuarto y el decimotercero.
b) Traza la gráfica de f de $n = 0$ a $n = 30$ (las gráficas de este tipo se llaman *curvas de aprendizaje* y se usan con frecuencia en educación y psicología).
c) ¿Qué ocurre cuando n aumenta en forma ilimitada?

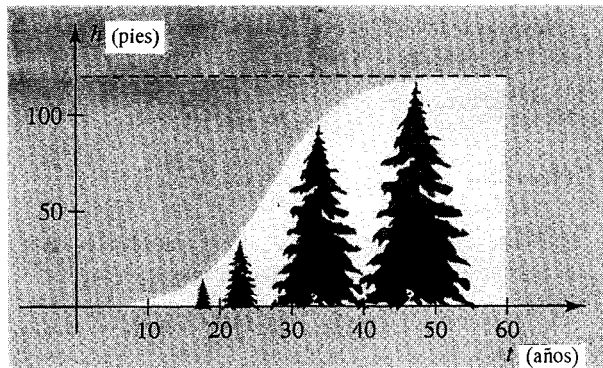
57. Altura de los árboles El aumento de la altura arbórea se describe con frecuencia mediante una ecuación logística. Supón que la altura h (en ft) de un árbol de t edad (en años) es

$$h = \frac{120}{1 + 200e^{-0.2t}},$$

como se ilustra en la gráfica de la figura.

- a) ¿Cuál será su altura a los 10 años?
b) ¿A qué edad medirá 50 pies?

58. Productividad de los empleados A veces, los fabricantes utilizan fórmulas basadas en conocimientos empíri-



EJERCICIO 57

cos para predecir el tiempo requerido a fin de producir el n -ésimo artículo en una línea de producción en serie para un entero n . Si $T(n)$ denota el tiempo requerido en el ensamblado el n -ésimo artículo y T_1 representa el lapso requerido para el primer artículo, o prototipo, entonces típicamente $T(n) = T_1 n^{-k}$ para alguna constante k positiva.

- a) Para muchos aviones, el tiempo requerido para ensamblar la segunda unidad, o sea $T(2)$, es igual a $(0.80) T_1$. Encuentra el valor de k .
b) Expresa, en términos de T_1 , el lapso requerido para ensamblar el cuarto avión.
c) Encuentra, en términos de $T(n)$, el tiempo $T(2n)$ que requiere el ensamblado del avión $(2n)$.

59. Viento transversal vertical El viento transversal vertical se presenta cuando la velocidad del viento varía a diferentes alturas sobre el nivel del suelo. Desviarse del viento es de gran importancia para los pilotos durante despegues y aterrizajes. Si v_0 es la velocidad del viento a una altura h_0 , y v_1 es la velocidad del mismo a una altura h_1 , el viento transversal vertical se puede describir con

$$\frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^P,$$

donde P es una constante. Durante un periodo de un año en Montreal, el viento transversal vertical se presentó cuando los vientos a 200 pies del suelo eran de 25 mph, en tanto que a 35 pies sobre el suelo eran de 6 mph. Encuentra P para estas condiciones.

60. Viento transversal vertical Consulta el ejercicio 59. El promedio de viento transversal vertical está dado por la ecuación

$$s = \frac{v_1 - v_0}{h_1 - h_0}.$$

Supón que la velocidad del viento se incrementa con el aumento de altitud, y que todos los valores de velocidad

del viento tomados a altitudes de 35 y 200 pies son de más de 1 mph. ¿Un valor creciente de P producirá valores de s mayores o menores?

Ejercicios 61 y 62: un economista sospecha que los siguientes puntos de datos se encuentran en la gráfica de $y = c2^{kx}$, donde c y k son constantes. Si los puntos de datos tienen una precisión de tres lugares decimales, ¿es correcta esta suposición?

61. (0, 4), (1, 3.249), (2, 2.639), (3, 2.144)
 62. (0, -0.3), (0.5, -0.345), (1, -0.397), (1.5, -0.551), (2, -0.727)

Ejercicios 63 y 64: se sospecha que los siguientes puntos de datos se localizan en la gráfica de $y = c \log(kx + 10)$, donde c y k son constantes. Si dichos puntos tienen una

precisión de tres lugares decimales, ¿es correcta la suposición?

63. (0, 1.5), (1, 1.619), (2, 1.720), (3, 1.997)
 64. (0, 0.7), (1, 0.782), (2, 0.847), (3, 0.900), (4, 0.945)

C Ejercicios 65 y 66: calcula la raíz real de la ecuación.

65. $x \ln x = 1$ 66. $\ln x + x = 0$

C Ejercicios 67 y 68: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

67. $f(x) = 3^{-x} - 4^{0.2x}$, $g(x) = \ln(1.2) - x$
 68. $f(x) = 3 \log_4 x - \log x$, $g(x) = e^x - 0.25x^4$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

Ejercicios 1 al 16: traza la gráfica de f .

1. $f(x) = 3^{x+2}$ 2. $f(x) = (\frac{3}{5})^x$
 3. $f(x) = (\frac{3}{2})^{-x}$ 4. $f(x) = 3^{-2x}$
 5. $f(x) = 3^{-x^2}$ 6. $f(x) = 1 - 3^{-x}$
 7. $f(x) = e^{x/2}$ 8. $f(x) = \frac{1}{2}e^x$
 9. $f(x) = e^{x-2}$ 10. $f(x) = e^{2-x}$
 11. $f(x) = \log_6 x$ 12. $f(x) = \log_6(36x)$
 13. $f(x) = \log_4(x^2)$ 14. $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$
 15. $f(x) = \log_2(x+4)$ 16. $f(x) = \log_2(4-x)$

Ejercicios 17 y 18: evalúa sin usar calculadora ni tabla.

17. a) $\log_2 \frac{1}{16}$ b) $\log_\pi 1$ c) $\ln e$
 d) $6^{\log_6 4}$ e) $\log 1\,000\,000$ f) $10^{\log 2}$
 g) $\log_4 2$
 18. a) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ b) $\log_5 1$ c) $\log 10$
 d) $e^{\ln 5}$ e) $\log \log 10^{10}$ f) $e^{2 \ln 5}$
 g) $\log_{27} 3$

Ejercicios 19 al 36: resuelve la ecuación sin utilizar calculadora ni tabla.

19. $2^{3x-1} = \frac{1}{2}$ 20. $\log \sqrt{x} = \log(x-6)$
 21. $\log_8(x-5) = \frac{2}{3}$
 22. $\log_4(x+1) = 2 + \log_4(3x-2)$
 23. $2 \ln(x+3) - \ln(x+1) = 3 \ln 2$
 24. $\log \frac{4}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$ 25. $2^{5-x} = 6$
 26. $3^{(x^2)} = 7$ 27. $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$
 28. $\log_3(3x) = \log_3 x + \log_3(4-x)$

29. $\log_4 x = \sqrt[3]{\log_4 x}$ 30. $e^{x+\ln 4} = 3e^x$
 31. $10^{2 \log x} = 5$ 32. $e^{\ln(x+1)} = 3$
 33. $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$
 34. $e^x + 2 = 8e^{-x}$
 35. a) $\log x^2 = \log(6-x)$ b) $2 \log x = \log(6-x)$
 36. $\ln(e^x)^2 = 16$ b) $\ln e^{(x^2)} = 16$
 37. Expresa $x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$ en términos de logaritmos de x , y y z .
 38. Expresa $\log(x^2/y^3) + 4 \log y - 6 \log \sqrt{xy}$ como un logaritmo.

Ejercicios 39 y 40: usa los logaritmos comunes a fin de resolver la ecuación para x en términos de y .

39. $y = \frac{1}{10^x + 10^{-x}}$ 40. $y = \frac{1}{10^x - 10^{-x}}$

Ejercicios 41 y 42: calcula x a tres cifras significativas.

41. a) $x = \ln 6.6$ b) $\log x = 1.8938$
 c) $\ln x = -0.75$
 42. a) $x = \log 8.4$ b) $\log x = -2.4260$
 c) $\ln x = 1.8$

43. Crecimiento de bacterias El número de bacterias de cierto cultivo en un tiempo t (en h) está dado por $Q(t) = 2(3^t)$, donde $Q(t)$ se mide en miles.

- a) ¿Cuántas bacterias hay en $t = 0$?
 b) Encuentra la cantidad después de 10 minutos, 30 minutos y una hora.

44. Interés compuesto Si se invierten \$1000 a una tasa de 12% compuesto trimestralmente, ¿cuál es el capital inicial después de un año?

45. Desintegración del yodo radiactivo El yodo radiactivo ^{131}I , que se usa con frecuencia en estudios de exploración de la glándula tiroides, se desintegra según la fórmula $N = N_0 (0.5)^{t/8}$, donde N_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días.

- Traza la gráfica de la ecuación si $N_0 = 64$.
- Encuentra la vida media de ^{131}I .

46. Población de truchas En un estanque se “siembran” 1000 especímenes; tres meses después se estima que quedan 600. Encuentra una fórmula de la forma $N = N_0 a^{ct}$ para calcular el número de ejemplares restantes después de t meses.

47. Interés compuesto continuamente Se invierten 10 000 dólares en una cuenta de ahorros en que el interés es compuesto continuamente a una tasa de 11% por año.

- ¿Cuándo tendrá \$35 000 la cuenta?
- ¿Cuánto tarda el dinero en duplicarse?

48. Corriente eléctrica La corriente $I(t)$ de cierto circuito eléctrico en un tiempo t está dada por $I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia, L es la inductancia e I_0 es la corriente inicial en $t = 0$. Encuentra el valor de t , en términos de L y R , para el que $I(t)$ es el 1% de I_0 .

49. Intensidad del sonido La fórmula para encontrar el nivel de intensidad del sonido es $\alpha = 10 \log(I/I_0)$.

- Despeja I en términos de α y de I_0 .
- Demuestra que el aumento de 1 dB (decibel) en el nivel de intensidad de sonido α corresponde a un incremento de 26% en la intensidad I .

50. Crecimiento de peces La longitud L de un pez se relaciona con su edad por medio de la fórmula de crecimiento de Bertalanffy

$$L = a(1 - be^{-kt}),$$

donde a , b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. Resuelve esta ecuación para t a fin de obtener una fórmula que permita calcular la edad de un ejemplar a partir de su longitud.

51. Zona sísmica en el oeste En la región occidental de Estados Unidos, el área A (en mi^2) afectada por un sismo se relaciona con la magnitud R del fenómeno mediante la fórmula

$$R = 2.3 \log(A + 3000) - 5.1.$$

Despeja A en términos de R .

52. Zona sísmica en el este Consulta el ejercicio 51. Para el este de la Unión Americana, la fórmula de área-magnitud tiene la forma

$$R = 2.3 \log(A + 34\,000) - 7.5.$$

Si A_1 es el área afectada por un sismo de magnitud R en el oeste y A_2 es la zona afectada por un temblor similar en el este, encuentra la fórmula para A_1/A_2 en términos de R .

53. Zona sísmica en los estados del centro Consulta el ejercicio 51. Para los estados del centro y de las Montañas Rocallosas, la fórmula de área-magnitud adopta la forma

$$R = 2.3 \log(A + 14\,000) - 6.6.$$

Si un temblor tiene magnitud 4 en la escala de Richter, calcula el área A de la región que lo sentirá.

54. Presión atmosférica En ciertas condiciones, la presión atmosférica p a una altitud h está dada por la fórmula $p = 29e^{-0.000034h}$. Expresa h como función de p .

55. Velocidad de los cohetes Un cohete de masa m_1 se llena con combustible de masa inicial m_2 . Si se desprecian las fuerzas de fricción, la masa total m del cohete en el tiempo t después de ignición se relaciona con su velocidad de ascenso v mediante $v = -a \ln m + b$, donde a y b son constantes. En el tiempo de ignición $t = 0$, $v = 0$ y $m = m_1 + m_2$. Cuando se apaga el cohete, $m = m_1$. Con esta información halla una fórmula, en términos de un logaritmo, para la velocidad del cohete al momento en que se apaga.

56. Frecuencia sísmica Sea n el número promedio de temblores por año con magnitudes entre R y $R + 1$ en la escala de Richter. Una fórmula que calcula la relación entre n y R es

$$\log n = 7.7 - (0.9)R.$$

- Resuelve la ecuación para n en términos de R .
- Encuentra n si $R = 4, 5$ y 6 .

57. Energía de un temblor La energía E (en ergs) liberada durante un temblor de magnitud R se puede calcular mediante la fórmula

$$\log E = 11.4 + (1.5)R.$$

- Despeja E en términos de R .
- Encuentra la energía liberada durante el famoso terremoto de Alaska de 1964, que tuvo una intensidad de 8.4 en la escala de Richter.

58. Desintegración radiactiva Cierta sustancia radiactiva se desintegra según la fórmula $q(t) = q_0 e^{-0.0063t}$, donde q_0 es la cantidad inicial de sustancia y t es el tiempo en días. Calcula la vida media de la sustancia.

59. Crecimiento infantil El modelo Count es una fórmula que sirve para pronosticar la estatura de los preescolares. Si h es la estatura (en cm) y t es la edad (en años), entonces



$$h = 70.228 + 5.104t + 9.222 \ln t$$

para $\frac{1}{4} \leq t \leq 6$. Según el cálculo integral, la rapidez de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 5.104 + (9.222/t)$. Pronostica la estatura y rapidez de crecimiento de un niño normal de dos años de edad.

- 60. Circuito eléctrico** La corriente I de cierto circuito eléctrico en el tiempo t está dada por

$$I = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}),$$

donde V es la fuerza electromotriz, R es la resistencia y L la inductancia. Despeja t de la ecuación.

- 61. Determinación de la edad mediante carbono 14** Con la técnica para el establecimiento de la edad mediante el carbono 14 (^{14}C) se calcula la edad de los especímenes

arqueológicos y geológicos. La fórmula $T = -8310 \ln x$ se usa a veces para estimar la edad T (en años) de un hueso fósil, donde x es el porcentaje (expresado como decimal) de ^{14}C todavía presente en el espécimen.

- Calcula la edad de un hueso fósil que contiene 4% del ^{14}C encontrado en una cantidad igual de carbono en un hueso de hoy día.
- Calcula el porcentaje de ^{14}C presente en un fósil de 10 000 años de edad.

- 62. Población de Kenia** Con base en las tasas demográficas actuales, se espera que la población de Kenia aumente según la fórmula $N = 20.2e^{0.041t}$, con N en millones y $t = 0$ correspondiente a 1985. ¿Cuántos años tardará la población en duplicarse?

■ ■ ■ ■ *Apéndices*

- I Uso de tablas logarítmicas y trigonométricas
- II Tablas
- III Tarjeta de referencia rápida
- IV Fórmulas de álgebra, geometría y trigonometría

I Uso de tablas logarítmicas y trigonométricas

En este apéndice estudiamos la forma de usar tablas logarítmicas y trigonométricas.

Tabla 1: logaritmos comunes

Si x es cualquier número real positivo y escribimos $x = c \cdot 10^k$ por $1 \leq c < 10$ y un entero k , entonces podemos aplicar las leyes de logaritmos y obtener

$$\log x = \log c + \log 10^k = \log c + k.$$

De la última ecuación vemos que para hallar $\log x$ de cualquier número real positivo x es suficiente saber los logaritmos de números entre 1 y 10. El número $\log c$, para $1 \leq c < 10$, es la **mantisa**, y el entero k es la **característica** de $\log x$.

Si $1 \leq c < 10$ entonces, como $\log x$ crece a medida que lo hace x , $\log 1 \leq \log c < \log 10$ o, lo que es equivalente, $0 \leq \log c < 1$; por lo tanto, la mantisa de un logaritmo es un número entre 0 y 1.

En problemas numéricos por lo general es necesario calcular logaritmos en forma aproximada por ejemplo, $\log 2 = 0.3010299957 \dots$, donde el decimal no es repetitivo ni finito. A menudo se redondean dichos logaritmos a cuatro lugares decimales y se anota $\log 2 \approx 0.3010$. Si un número entre 0 y 1 se escribe como decimal finito, a veces se le llama **fracción decimal**. Así pues, la ecuación $\log x = \log c + k$ implica que si x es cualquier número real positivo, $\log x$ puede calcularse por la suma de una fracción decimal positiva (la mantisa) y un entero k (la característica). Esta representación se llama **forma estándar** para $\log x$.

Se han calculado los logaritmos comunes de muchos números entre 1 y 10. La tabla 1 del apéndice II contiene aproximaciones a cuatro lugares decimales de los logaritmos de números entre 1.00 y 9.99 a intervalos de 0.01. Esta tabla sirve para encontrar el logaritmo común de cualquier número de tres dígitos con precisión de cuatro lugares decimales. El uso de la tabla 1 se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Calcula el logaritmo:

- a) $\log 43.6$ b) $\log 43\,600$ c) $\log 0.0436$

Solución a) En virtud de que $43.6 = (4.36)10^1$, la característica de $\log 43.6$ es 1. Con referencia a la tabla 1 vemos que la mantisa de $\log 4.36$ se puede calcular por la fracción decimal 0.6395; por lo tanto, como en el análisis precedente,

$$\log 43.6 \approx 0.6395 + 1$$

$$\log 43.6 \approx 1.6395.$$

b) Dado que $43\,600 = (4.36)10^4$, la mantisa es la misma parte que en a) pero la característica es 4. En consecuencia,

$$\log 43\,600 \approx 0.6395 + 4$$

$$\log 43\,600 \approx 4.6395.$$

c) Si se escribe $0.0436 = (4.36)10^{-2}$, entonces

$$\log 0.0436 = \log 4.36 + (-2).$$

Por lo tanto, la forma estándar es

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2).$$

Si restamos 2 de 0.6395 resulta

$$\log 0.0436 \approx -1.3605.$$

Observarás que ésta no es la forma estándar, ya que $-1.3605 = -0.3605 + (-1)$, número cuya parte decimal es *negativa*.

En el ejemplo 1, tras obtener $\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2)$, un error común es anotar la respuesta como -2.6395 . Esto es incorrecto porque

$$-2.6395 = -0.6395 + (-2),$$

que no es lo mismo que $0.6395 + (-2)$.

Si un logaritmo tiene característica negativa, por lo general se deja en forma estándar o se reescribe y se conserva positiva la parte decimal. Para ilustrar la segunda técnica, sumemos y restemos 8 del lado derecho de la ecuación como sigue:

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2)$$

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (8 - 8) + (-2)$$

$$\log 0.0436 \approx 8.6395 - 10$$

También se puede escribir

$$\log 0.0436 \approx 18.6395 - 20$$

$$\log 0.0436 \approx 28.6395 - 30$$

$$\log 0.0436 \approx 43.6395 - 45$$

y así sucesivamente, mientras la suma del entero positivo a la izquierda del decimal y el entero negativo a la derecha del decimal sea igual a la característica del logaritmo.

EJEMPLO 2

Calcula el logaritmo:

a) $\log (0.00652)^2$

b) $\log (0.00652)^{-2}$

c) $\log (0.00652)^{1/2}$

Solución **a)** Por (3) de las leyes de logaritmos (Sec. 5.4),

$$\log (0.00652)^2 = 2 \log 0.00652.$$

Como $0.00652 = (6.52)10^{-3}$,

$$\log 0.00652 = \log 6.52 + (-3).$$

Al consultar la tabla 1 vemos que $\log 6.52 \approx 0.8142$ y, por lo tanto,

$$\log 0.00652 \approx 0.8142 + (-3).$$

En consecuencia,

$$\log (0.00652)^2 = 2 \log 0.00652$$

$$\log (0.00652)^2 \approx 2[0.8142 + (-3)]$$

$$\log (0.00652)^2 \approx 1.6284 + (-6)$$

$$\log (0.00652)^2 \approx 0.6284 + (-5).$$

El último número es la forma estándar para el logaritmo.

b) Otra vez se usa la ley (3) y el valor para $\log 0.00652$ encontrado en la parte a):

$$\log (0.00652)^{-2} = -2 \log 0.00652$$

$$\log (0.00652)^{-2} \approx -2[0.8142 + (-3)]$$

$$\log (0.00652)^{-2} \approx -1.6284 + 6$$

Es importante observar que -1.6284 significa $-0.6284 + (-1)$ y por ello la parte decimal es negativa. Para obtener la forma estándar, se puede escribir

$$\begin{aligned} -1.6284 + 6 &= 6.0000 - 1.6284 \\ &= 4.3716 \end{aligned}$$

Esto demuestra que la mantisa es 0.3716 y la característica es 4.

c) Por la ley (3),

$$\log (0.00652)^{1/2} = \frac{1}{2} \log 0.00652$$

$$\log (0.00652)^{1/2} \approx \frac{1}{2}[0.8142 + (-3)].$$

Si multiplicamos por $\frac{1}{2}$ no se obtiene la forma estándar, puesto que ningún número de la suma resultante es la característica. Para evitar esto, la expresión sin corchetes se ajusta sumando y restando un número apropiado. Si usamos 1 de esta forma se obtiene

$$\log (0.00652)^{1/2} \approx \frac{1}{2}[1.8142 + (-4)]$$

$$\log (0.00652)^{1/2} \approx 0.9071 + (-2).$$

También pudimos sumar y restar cualquier número diferente de 1; por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[0.8142 + (-3)] &= \frac{1}{2}[17.8142 + (-20)] \\ &= 8.9071 + (-10). \end{aligned}$$

Si se da $\log x$, se puede usar la tabla 1 a fin de hallar una aproximación a x , como se ilustra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3 Encuentra una aproximación decimal a x :

a) $\log x = 1.7959$

b) $\log x = -3.5918$

Solución **a)** La mantisa 0.7959 determina la secuencia de dígitos en x , y la característica establece la posición del punto decimal. Con referencia al *cuerpo* de la tabla 1, vemos que la mantisa 0.7959 es el

logaritmo de 6.25. Como la característica es 1, sabemos que x está entre 10 y 100. En consecuencia, $x \approx 62.5$.

b) Para encontrar x de la tabla 1, se expresa $\log x$ en forma estándar. Con objeto de cambiar $\log x = -3.5918$ en forma estándar se suma y resta 4, y resulta

$$\begin{aligned}\log x &= (4 - 3.5918) - 4 \\ &= 0.4082 - 4.\end{aligned}$$

Con referencia a la tabla 1, vemos que la mantisa 0.4082 es el logaritmo de 2.56. Dado que la característica de $\log x$ es -4 , se deduce que $x \approx 0.000256$.

Si se usa una calculadora con tecla $\boxed{\text{LOG}}$ para determinar logaritmos comunes, se obtiene la forma estándar $\log x$ sólo si $x \geq 1$; por ejemplo, para hallar $\log 43.6$ en una calculadora típica, se teclea 43.6 y $\boxed{\text{LOG}}$ y se obtiene la forma estándar

$$1.6394865$$

Si se encuentra $\log 0.0436$ de un modo similar, aparece el siguiente número en la pantalla:

$$-1.3605135$$

Ésta no es la forma estándar para el logaritmo, puesto que la parte decimal es negativa [comparada con el ejemplo 1 c)]. Para hallar la forma estándar se suma 2 al logaritmo (con calculadora) y luego se resta 2 como sigue:

$$\begin{aligned}\log 0.0436 &\approx -1.3605135 \\ \log 0.0436 &\approx (-1.3605135 + 2) - 2 \\ \log 0.0436 &\approx 0.6394865 - 2 \\ \log 0.0436 &\approx 0.6394865 + (-2)\end{aligned}$$

Los únicos logaritmos comunes que se pueden hallar *directamente* de la tabla 1 son los de números que contienen a lo sumo tres dígitos diferentes de cero. Si hay *cuatro* dígitos diferentes de cero, es posible obtener una aproximación mediante el método de interpolación lineal descrito a continuación. Se usa el término **interpolación lineal** porque, como veremos, el método se basa en el cálculo de porciones de la gráfica de $y = \log x$ por segmentos de recta.

A fin de ilustrar el proceso de interpolación lineal y al mismo tiempo dar alguna justificación de ello, consideremos el ejemplo específico $\log 12.64$. Como la función logarítmica con base 10 es creciente, este número está entre $\log 12.60 \approx 1.1004$ y $\log 12.70 \approx 1.1038$. Al examinar la gráfica de $y = \log x$ tenemos la situación mostrada en la figura 1, donde se han deformado las

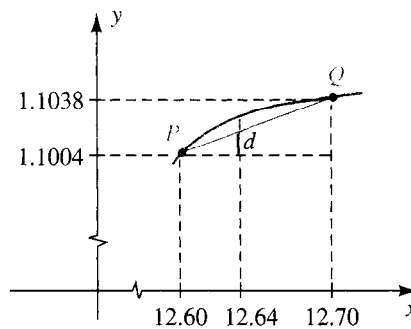


FIGURA 1

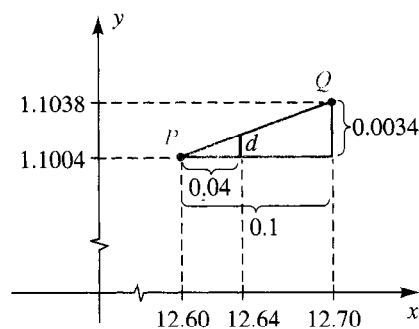


FIGURA 2

unidades en los ejes x y y y la porción de la gráfica mostrada. [Un dibujo más preciso indicaría que la gráfica de $y = \log x$ está más cerca al segmento de recta que une $P(12.60, 1.1004)$ a $Q(12.70, 1.1038)$ que se muestra en la figura.] Como $\log 12.64$ es la coordenada y del punto de la gráfica que tiene coordenada x 12.64, se puede calcular por la coordenada y del punto con coordenada x 12.64 en el segmento de recta PQ . Con referencia a la figura 1, vemos que la última coordenada y es $1.1004 + d$. El número d se calcula mediante el uso de triángulos semejantes. Con base en la figura 2, donde la gráfica de $y = \log x$ se ha borrado, se puede formar la siguiente proporción:

$$\frac{d}{0.0034} = \frac{0.04}{0.1}$$

Por lo tanto,

$$d = \frac{(0.04)(0.0034)}{0.1} = 0.00136.$$

Siempre que uses esta técnica, redondea los decimales al mismo número de lugares que aparecen en el cuerpo de la tabla. En consecuencia, $d \approx 0.0014$ y

$$\log 12.64 \approx 1.1004 + 0.0014$$

$$\log 12.64 \approx 1.1018.$$

En lo sucesivo no trazaremos una gráfica al interpolar, sino que usaremos el esquema ilustrado en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 4 Calcula $\log 572.6$.

Solución Es conveniente acomodar nuestro trabajo así:

$$1.0 \left\{ \begin{array}{l} 0.6 \left\{ \begin{array}{l} \log 572.0 \approx 2.7574 \\ \log 572.6 = ? \\ \log 573.0 \approx 2.7582 \end{array} \right\} d \end{array} \right\} 0.0008$$



Hemos indicado diferencias junto a las llaves, lo cual lleva a:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.6}{1.0} = \frac{6}{10}$$

$$d = \frac{6}{10}(0.0008) = 0.00048 \approx 0.0005$$

Por lo tanto,

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + 0.0005$$

$$\log 572.6 \approx 2.7579.$$

Otra forma de trabajar este tipo de problemas es razonar que ya que 572.6 está a $\frac{6}{10}$ entre 572.0 y 573.0, $\log 572.6$ está (aproximadamente) a $\frac{6}{10}$ entre 2.7574 y 2.7582; por lo tanto,

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + \frac{6}{10}(0.0008)$$

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + 0.0005$$

$$\log 572.6 \approx 2.7579.$$

EJEMPLO 5 Calcula $\log 0.003678$

Solución Comenzamos por acomodar nuestro trabajo como en la solución del ejemplo 1; así pues,

$$10 \left\{ \begin{array}{l} 8 \left\{ \begin{array}{l} \log 0.003670 \approx 0.5647 + (-3) \\ \log 0.003678 = ? \\ \log 0.003680 \approx 0.5658 + (-3) \end{array} \right\} d \end{array} \right\} 0.0011$$

Dado que estamos interesados sólo en razones, hemos usado los números 8 y 10 en el lado izquierdo porque su razón es la misma que la razón entre 0.000008 y 0.000010. Esto lleva a:

$$\frac{d}{0.0011} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$d = (0.0011)(0.8) = 0.00088 \approx 0.0009$$

Por lo tanto,

$$\log 0.003678 \approx [0.5647 + (-3)] + 0.0009$$

$$\log 0.003678 = 0.5656 + (-3).$$

Si un número x se escribe en la forma $x = c \cdot 10^k$ con $1 \leq c < 10$, antes de usar la tabla 1 para hallar $\log x$ por interpolación redondeamos c a tres lugares decimales. Otra forma de decir esto es que se debe redondear x a cuatro **cifras significativas**; algunos ejemplos ayudarán a aclarar el procedimiento. Si $x = 36.4635$, se redondea a 36.46 antes de calcular $\log x$. El número 684 279

debe redondearse a 684 300. Para un decimal como 0.096202, se usa 0.09620. La razón es que la tabla 1 no garantiza una precisión de más de cuatro dígitos, porque las mantisas que contiene son aproximaciones. Esto significa que resulta inútil si se requiere una precisión de *más* de cuatro dígitos en un problema. Si es factible encontrar directamente el logaritmo de un número que contenga n dígitos en tablas más extensas, la interpolación se permite para números con $n + 1$ dígitos, y los números se redondean de conformidad.

El método de interpolación también es útil para hallar x cuando nos dan $\log x$; si usamos la tabla 1, entonces x se puede encontrar a cuatro cifras significativas. En este caso nos proporcionan la *coordenada y* de un punto de la gráfica de $y = \log x$ y nos piden la *coordenada x*. Se puede usar un argumento geométrico similar al anterior a fin de justificar el procedimiento del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Halla x a cuatro cifras significativas si $\log x = 1.7949$.

Solución La mantisa 0.7949 no aparece en la tabla 1, pero se puede aislar entre números adyacentes para las mantisas correspondientes a 6.230 y 6.240. Acomodamos nuestro trabajo como sigue:

$$0.1 \left\{ \begin{array}{l} r \left\{ \begin{array}{l} \log 62.30 \approx 1.7945 \\ \log x \approx 1.7949 \end{array} \right\} 0.0004 \\ \log 62.40 \approx 1.7952 \end{array} \right\} 0.0007$$

Esto lleva a la proporción

$$\frac{r}{0.1} = \frac{0.0004}{0.0007} = \frac{4}{7}$$

$$r = (0.1)\left(\frac{4}{7}\right) \approx 0.06.$$

Por lo tanto,

$$x \approx 62.30 + 0.06$$

$$x \approx 62.36.$$

Tabla 4: valores de las funciones trigonométricas

Se pueden utilizar métodos de cálculo integral para aproximar, a cualquier grado de precisión, todos los valores de las funciones trigonométricas en el intervalo $t [0, \pi/2]$ o, lo que es equivalente, en el intervalo de grados $[0^\circ, 90^\circ]$. La tabla 4, parte de la cual reproducimos aquí, indica aproximaciones a cuatro lugares decimales a dichos valores.

En dicha tabla, $4, 0 \leq t \leq 1.5708$. El número 1.5708 es un cálculo a cuatro lugares decimales de $\pi/2$. La tabla está dispuesta de modo que permite hallar directamente los valores de función correspondientes a los ángulos en medida de grados. Las medidas angulares están en intervalos de $10'$ de 0° a 90° . La razón por la que t varía a intervalos de alrededor de 0.0029 es que $10' \approx 0.0029$ radianes.

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.4887	28°00'	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°00'	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	29°00'	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	61°00'	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	30°00'	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	60°00'	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

Para hallar valores de funciones trigonométricas si $0 \leq t \leq 0.7854 \approx \pi/4$ o $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$, usamos las leyendas de la parte *superior* de las columnas; por ejemplo, de la parte mostrada de la tabla,

$$\text{sen } 0.5003 \approx 0.4797 \quad \tan 28^\circ 30' \approx 0.5430$$

$$\cos 0.4945 \approx 0.8802 \quad \sec 29^\circ 00' \approx 1.143$$

$$\cot 0.5120 \approx 1.780 \quad \csc 29^\circ 40' \approx 2.020.$$

Si $0.7854 \leq t \leq 1.5708$ o si $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, usamos las leyendas de la parte *inferior* de las columnas. por ejemplo,

$$\text{sen } 1.0705 \approx 0.8774 \quad \csc 62^\circ 00' \approx 1.133$$

$$\cos 1.0530 \approx 0.4950 \quad \cot 61^\circ 10' \approx 0.5505$$

$$\tan 1.0821 \approx 1.881 \quad \sec 60^\circ 30' \approx 2.031.$$

La razón por la que se puede acomodar la tabla de esa forma se deduce de

$$\text{sen } t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right), \quad \cot t = \tan \left(\frac{\pi}{2} - t \right), \quad \csc t = \sec \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$$

o, lo que es equivalente,

$$\text{sen } \theta = \cos (90^\circ - \theta), \quad \cot \theta = \tan (90^\circ - \theta), \quad \csc \theta = \sec (90^\circ - \theta).$$

Por ejemplo, como se muestra en la tabla,

$$\text{sen } 29^\circ = \cos (90^\circ - 29^\circ) = \cos 61^\circ$$

$$\cot 28^\circ 20' = \tan (90^\circ - 28^\circ 20') = \tan 61^\circ 40'.$$

Para encontrar valores de funciones cuando t está *entre* números dados en la tabla, se emplea el método de interpolación lineal. Del mismo modo, dado un valor como $\sin t = 0.6371$, se consulta el cuerpo de la tabla 4 y se usa interpolación lineal, si necesario, a fin de obtener una aproximación a t . Si t se mide en grados, se redondea al minuto más cercano.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de interpolación en la tabla 4.

EJEMPLO 7 Calcula $\tan 24^\circ 16'$.

Solución Consulta la tabla 4 e interpola:

$$10' \left\{ \begin{array}{l} 6' \left\{ \begin{array}{l} \tan 24^\circ 10' \approx 0.4487 \\ \tan 24^\circ 16' = ? \\ \tan 24^\circ 20' \approx 0.4522 \end{array} \right\} d \end{array} \right\} 0.0035$$

$$\frac{d}{0.0035} = \frac{6}{10}$$

$$d = \frac{6}{10} (0.0035) \approx 0.0021$$

Por lo tanto,

$$\tan 24^\circ 16' \approx 0.4487 + 0.0021$$

$$\tan 24^\circ 16' \approx 0.4508.$$

EJEMPLO 8 Calcula $\cos (-117^\circ 47')$.

Solución El ángulo está en el tercer cuadrante; comprueba que el ángulo de referencia es $62^\circ 13'$. En consecuencia, $\cos (-117^\circ 47') = -\cos 62^\circ 13'$. Interpola en la tabla 4:

$$10' \left\{ \begin{array}{l} 3' \left\{ \begin{array}{l} \cos 62^\circ 10' \approx 0.4669 \\ \cos 62^\circ 13' = ? \\ \cos 62^\circ 20' \approx 0.4643 \end{array} \right\} d \end{array} \right\} 0.0026$$

$$\frac{d}{0.0026} = \frac{3}{10}$$

$$d = \frac{3}{10} (0.0026) \approx 0.0008$$

Como la función coseno es decreciente,

$$\cos 62^\circ 13' \approx 0.4669 - 0.0008$$

$$\cos 62^\circ 13' \approx 0.4661$$

$$\cos (-117^\circ 47') \approx -0.4661.$$

EJEMPLO 9 Calcula el número real positivo t mínimo tal que $\operatorname{sen} t = 0.6635$.

Solución Localiza 0.6635 entre números sucesivos en la columna del seno de la tabla 4 e interpola:

$$0.0029 \left\{ d \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 0.7243 \approx 0.6626 \\ \operatorname{sen} t = 0.6635 \\ \operatorname{sen} 0.7272 \approx 0.6648 \end{array} \right\} 0.0009 \right\} 0.0022$$

$$\frac{d}{0.0029} = \frac{0.0009}{0.0022}$$

$$d = \frac{9}{22} (0.0029) \approx 0.0012$$

En consecuencia,

$$t \approx 0.7243 + 0.0012$$

$$t \approx 0.7255.$$

EJEMPLO 10 En $\operatorname{sen} \theta = -0.7963$, calcula la medida en grados de todos los ángulos q que estén en el intervalo $[0, 360^\circ)$.

Solución Sea θ' el ángulo de referencia de modo que $\operatorname{sen} \theta' = 0.7963$. En la tabla 4 interpola:

$$10' \left\{ d \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 52^\circ 40' \approx 0.7951 \\ \operatorname{sen} \theta' = 0.7963 \\ \operatorname{sen} 52^\circ 50' \approx 0.7969 \end{array} \right\} 0.0012 \right\} 0.0018$$

$$\frac{d}{10} = \frac{0.0012}{0.0018}$$

$$d = 10 \left(\frac{12}{18} \right) \approx 7'$$

Por lo tanto,

$$\theta' \approx 52^\circ 47'.$$

Como $\operatorname{sen} \theta$ es negativo, θ está en el tercero o cuarto cuadrantes. Aplicamos el ángulo de referencia $52^\circ 47'$ y tenemos

$$\theta \approx 180^\circ + 52^\circ 47', \quad \text{o} \quad \theta \approx 232^\circ 47'$$

$$\theta \approx 360^\circ - 52^\circ 47', \quad \text{o} \quad \theta \approx 307^\circ 13'.$$

A.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 16: con la tabla 1 y las leyes de logaritmos calcula los logaritmos comunes de los números.

1. 347; 0.00347; 3.47
2. 86.2; 8620; 0.862
3. 0.54; 540; 540 000
4. 208; 2.08; 20 800
5. 60.2; 0.0000602; 602
6. 5; 0.5; 0.0005
7. $(44.9)^2$; $(44.9)^{1/2}$; $(44.9)^{-2}$
8. $(1810)^4$; $(1810)^{40}$; $(1810)^{1/4}$
9. $(0.943)^3$; $(0.943)^{-3}$; $(9.943)^{1/3}$
10. $(0.017)^{10}$; $10^{0.017}$; $10^{1.43}$
11. $(638)(17.3)$
12. $\frac{(2.73)(78.5)}{621}$
13. $\frac{(47.4)^3}{(29.5)^2}$
14. $\frac{(897)^4}{\sqrt{17.8}}$
15. $\sqrt[3]{20.6} (371)^3$
16. $\frac{(0.0048)^{10}}{\sqrt{0.29}}$

Ejercicios 17 al 30: usa la tabla 1 para hallar una aproximación decimal a x .

17. $\log x = 3.6274$
18. $\log x = 1.8965$
19. $\log x = 0.9469$
20. $\log x = 0.5729$
21. $\log x = 5.2095$
22. $\log x = 6.7300 - 10$
23. $\log x = 9.7348 - 10$
24. $\log x = 7.6739 - 10$
25. $\log x = 8.8306 - 10$
26. $\log x = 4.9680$
27. $\log x = 2.2765$
28. $\log x = 3.0043$
29. $\log x = -1.6253$
30. $\log x = -2.2118$

Ejercicios 31 al 50: utiliza interpolación en la tabla 1 a fin de calcular el logaritmo común del número.

31. 25.48
32. 421.6
33. 5363
34. 0.3817
35. 0.001259
36. 69 450
37. 123 400
38. 0.02129
39. 0.7786
40. 1.203
41. 384.7
42. 54.44
43. 0.9462
44. 7259
45. 66 590
46. 0.001428

47. 0.04321

48. 400 100

49. 3.003

50. 9.786

Ejercicios 51 al 70: usa interpolación en la tabla 1 para calcular x .

51. $\log x = 1.4437$
52. $\log x = 3.7455$
53. $\log x = 4.6931$
54. $\log x = 0.5883$
55. $\log x = 9.1664 - 10$
56. $\log x = 8.3902 - 10$
57. $\log x = 3.8153 - 6$
58. $\log x = 5.9306 - 9$
59. $\log x = 2.3705$
60. $\log x = 4.2867$
61. $\log x = 0.1358$
62. $\log x = 0.0194$
63. $\log x = 8.9752 - 10$
64. $\log x = 2.4979 - 5$
65. $\log x = 5.0409$
66. $\log x = 1.3796$
67. $\log x = -2.8712$
68. $\log x = -1.8164$
69. $\log x = -0.6123$
70. $\log x = -3.1426$

Ejercicios 71 al 82: emplea interpolación en la tabla 4 a fin de calcular el número.

71. $\sin 0.46$
72. $\cos 0.82$
73. $\tan 3$
74. $\cot 6$
75. $\sec \frac{1}{4}$
76. $\csc 1.54$
77. $\cos 37^\circ 43'$
78. $\sin 22^\circ 34'$
79. $\cot 62^\circ 27'$
80. $\tan 57^\circ 16'$
81. $\csc 16^\circ 55'$
82. $\sec 9^\circ 12'$

Ejercicios 83 al 88: usa interpolación en la tabla 4 con objeto de calcular el mínimo número positivo t para el que la igualdad se cumpla.

83. $\cos t = 0.8620$
84. $\sin t = 0.6612$
85. $\tan t = 4.501$
86. $\sec t = 3.641$
87. $\csc t = 1.436$
88. $\cot t = 1.165$

Ejercicios 89 al 96: usa interpolación en la tabla 4 para calcular, al minuto más cercano, la medida en grados de todos los ángulos q que se encuentren en el intervalo $[0, 360^\circ]$.

89. $\sin \theta = 0.3672$
90. $\cos \theta = 0.8426$
91. $\tan \theta = 0.5042$
92. $\cot \theta = 1.348$
93. $\cos \theta = 0.3465$
94. $\csc \theta = 1.219$
95. $\sec \theta = 1.385$
96. $\sin \theta = 0.7534$

II Tablas

Tabla 1. Logaritmos comunes

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7852	.7859	.7866	.7873	.7880	.7887	.7894	.7901	.7908	.7915
6.2	.7922	.7929	.7936	.7943	.7950	.7957	.7964	.7971	.7978	.7985
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9931	.9935	.9940	.9944	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3264	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396



Tabla 2. Valores de funciones exponenciales naturales

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	2.50	12.182	0.0821
0.05	1.0513	0.9512	2.60	13.464	0.0743
0.10	1.1052	0.9048	2.70	14.880	0.0672
0.15	1.1618	0.8607	2.80	16.445	0.0608
0.20	1.2214	0.8187	2.90	18.174	0.0550
0.25	1.2840	0.7788	3.00	20.086	0.0498
0.30	1.3499	0.7408	3.10	22.198	0.0450
0.35	1.4191	0.7047	3.20	24.533	0.0408
0.40	1.4918	0.6703	3.30	27.113	0.0369
0.45	1.5683	0.6376	3.40	29.964	0.0334
0.50	1.6487	0.6065	3.50	33.115	0.0302
0.55	1.7333	0.5769	3.60	36.598	0.0273
0.60	1.8221	0.5488	3.70	40.447	0.0247
0.65	1.9155	0.5220	3.80	44.701	0.0224
0.70	2.0138	0.4966	3.90	49.402	0.0202
0.75	2.1170	0.4724	4.00	54.598	0.0183
0.80	2.2255	0.4493	4.10	60.340	0.0166
0.85	2.3396	0.4274	4.20	66.686	0.0150
0.90	2.4596	0.4066	4.30	73.700	0.0136
0.95	2.5857	0.3867	4.40	81.451	0.0123
1.00	2.7183	0.3679	4.50	99.017	0.0111
1.10	3.0042	0.3329	4.60	99.484	0.0101
1.20	3.3201	0.3012	4.70	109.95	0.0091
1.30	3.6693	0.2725	4.80	121.51	0.0082
1.40	4.0552	0.2466	4.90	134.29	0.0074
1.50	4.4817	0.2231	5.00	148.41	0.0067
1.60	4.9530	0.2019	6.00	403.43	0.0025
1.70	5.4739	0.1827	7.00	1096.6	0.0009
1.80	6.0496	0.1653	8.00	2981.0	0.0003
1.90	6.6859	0.1496	9.00	8103.1	0.0001
2.00	7.3891	0.1353	10.00	22026.0	0.00005
2.10	8.1662	0.1225			
2.20	9.0250	0.1108			
2.30	9.9742	0.1003			
2.40	11.0232	0.0907			

Tabla 3. Logaritmos naturales

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0*		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895
1	0.000	0.095	0.182	0.262	0.336	0.405	0.470	0.531	0.588	0.642
2	0.693	0.742	0.788	0.833	0.875	0.916	0.956	0.993	1.030	1.065
3	1.099	1.131	1.163	1.194	1.224	1.253	1.281	1.308	1.335	1.361
4	1.386	1.411	1.435	1.459	1.482	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5	1.609	1.629	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.740	1.758	1.775
6	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7	1.946	1.960	1.974	1.988	2.001	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.282	2.293
10	2.303	2.313	2.322	2.332	2.342	2.351	2.361	2.370	2.380	2.389

* Restar 10 si $n < 1$; por ejemplo, $\ln 0.3 \approx 8.796 - 10 = -1.204$.

Tabla 4. Valores de las funciones trigonométricas

\angle	\angle grados	$\sin \angle$	$\cos \angle$	$\tan \angle$	$\cot \angle$	$\sec \angle$	$\csc \angle$	\angle grados	$\sin \angle$	$\cos \angle$	$\tan \angle$	$\cot \angle$	$\sec \angle$	$\csc \angle$	\angle grados
0°00'	0°00'	.0000	1.0000	.0000	—	1.000	—	90°00'	1.5708	.0000	—	—	1.000	343.8	50
0029	10	.0029	1.0000	.0029	343.8	1.000	343.8	50	1.5679	.0029	343.8	—	1.000	8.016	50
0058	20	.0058	1.0000	.0058	171.9	1.000	171.9	40	1.5650	.0058	171.9	—	1.000	7.834	40
0087	30	.0087	1.0000	.0087	114.6	1.000	114.6	30	1.5621	.0087	114.6	—	1.000	7.661	30
0116	40	.0116	.9999	.0116	85.94	1.000	85.95	20	1.5592	.0116	85.94	—	1.000	7.496	20
0145	50	.0145	.9999	.0145	68.75	1.000	68.76	10	1.5563	.0145	68.75	—	1.000	7.337	10
0175	1°00'	.0175	.9998	.0175	57.29	1.000	57.30	0°00'	1.5533	.0175	57.29	—	1.000	7.185	0°00'
0204	10	.0204	.9998	.0204	49.10	1.000	49.11	50	1.5504	.0204	49.10	—	1.000	7.040	50
0233	20	.0233	.9997	.0233	42.96	1.000	42.98	40	1.5475	.0233	42.96	—	1.000	6.900	40
0262	30	.0262	.9997	.0262	38.19	1.000	38.20	30	1.5446	.0262	38.19	—	1.000	6.765	30
0291	40	.0291	.9996	.0291	34.37	1.000	34.38	20	1.5417	.0291	34.37	—	1.000	6.636	20
0320	50	.0320	.9995	.0320	31.24	1.001	31.26	10	1.5388	.0320	31.24	—	1.001	6.512	10
0349	2°00'	.0349	.9994	.0349	28.64	1.001	28.65	0°00'	1.5359	.0349	28.64	—	1.001	6.392	0°00'
0378	10	.0378	.9993	.0378	26.43	1.001	26.45	50	1.5330	.0378	26.43	—	1.001	6.277	50
0407	20	.0407	.9992	.0407	24.54	1.001	24.56	40	1.5301	.0407	24.54	—	1.001	6.166	40
0436	30	.0436	.9990	.0436	22.90	1.001	22.93	30	1.5272	.0436	22.90	—	1.001	6.059	30
0465	40	.0465	.9989	.0465	21.47	1.001	21.49	20	1.5243	.0465	21.47	—	1.001	5.955	20
0495	50	.0494	.9988	.0495	20.21	1.001	20.23	10	1.5213	.0495	20.21	—	1.001	5.855	10
0524	3°00'	.0523	.9986	.0524	19.08	1.001	19.11	0°00'	1.5184	.0523	19.08	—	1.001	5.759	0°00'
0553	10	.0552	.9985	.0553	18.07	1.002	18.10	50	1.5155	.0552	18.07	—	1.002	5.665	50
0582	20	.0581	.9983	.0582	17.17	1.002	17.20	40	1.5126	.0581	17.17	—	1.002	5.575	40
0611	30	.0610	.9981	.0612	16.35	1.002	16.38	30	1.5097	.0610	16.35	—	1.002	5.487	30
0640	40	.0640	.9980	.0641	15.60	1.002	15.64	20	1.5068	.0640	15.60	—	1.002	5.403	20
0669	50	.0669	.9978	.0670	14.92	1.002	14.96	10	1.5039	.0669	14.92	—	1.002	5.320	10
0698	4°00'	.0698	.9976	.0699	14.30	1.002	14.34	0°00'	1.5010	.0698	14.30	—	1.002	5.241	0°00'
0727	10	.0727	.9974	.0729	13.73	1.003	13.76	50	1.4981	.0727	13.73	—	1.003	5.164	50
0756	20	.0756	.9971	.0758	13.20	1.003	13.23	40	1.4952	.0756	13.20	—	1.003	5.089	40
0785	30	.0785	.9969	.0787	12.71	1.003	12.75	30	1.4923	.0785	12.71	—	1.003	5.016	30
0814	40	.0814	.9967	.0816	12.25	1.003	12.29	20	1.4893	.0814	12.25	—	1.003	4.945	20
0844	50	.0843	.9964	.0846	11.83	1.004	11.87	10	1.4864	.0843	11.83	—	1.004	4.876	10
0873	5°00'	.0872	.9962	.0875	11.43	1.004	11.47	0°00'	1.4835	.0872	11.43	—	1.004	4.810	0°00'
0902	10	.0901	.9959	.0904	11.06	1.004	11.10	50	1.4806	.0901	11.06	—	1.004	4.745	50
0931	20	.0929	.9957	.0934	10.71	1.004	10.76	40	1.4777	.0929	10.71	—	1.004	4.682	40
0960	30	.0958	.9954	.0963	10.39	1.005	10.43	30	1.4748	.0958	10.39	—	1.005	4.620	30
0989	40	.0987	.9951	.0992	10.08	1.005	10.13	20	1.4719	.0987	10.08	—	1.005	4.560	20
1018	50	.1016	.9948	.1022	9.788	1.005	9.839	10	1.4690	.1016	9.788	—	1.005	4.502	10
1047	6°00'	.1045	.9945	.1051	9.514	1.006	9.567	0°00'	1.4661	.1045	9.514	—	1.006	4.445	0°00'
1076	10	.1074	.9942	.1080	9.255	1.006	9.309	50	1.4632	.1074	9.255	—	1.006	4.390	50
1105	20	.1103	.9939	.1110	9.010	1.006	9.065	40	1.4603	.1103	9.010	—	1.006	4.336	40
1134	30	.1132	.9936	.1139	8.777	1.006	8.834	30	1.4573	.1132	8.777	—	1.006	4.284	30
1164	40	.1161	.9932	.1169	8.556	1.007	8.614	20	1.4544	.1161	8.556	—	1.007	4.232	20
1193	50	.1190	.9929	.1198	8.345	1.007	8.405	10	1.4515	.1190	8.345	—	1.007	4.182	10
1222	7°00'	.1219	.9925	.1223	8.144	1.008	8.206	0°00'	1.4486	.1219	8.144	—	1.008	4.134	0°00'

Tabla 4. Valores de las funciones trigonométricas (cont.)

t	t grados	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$	t	t grados	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$	t	t grados
.2443	14°00'	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	.3665	21°00'	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°00'	1.2043
.2473	10	.2447	.9696	.2524	3.962	1.031	4.086	.3694	10	.3611	.9325	.3872	2.583	1.072	2.769	50	1.2014
.2502	20	.2476	.9689	.2555	3.914	1.032	4.039	.3723	20	.3638	.9315	.3906	2.560	1.074	2.749	40	1.1985
.2531	30	.2504	.9681	.2586	3.867	1.033	3.994	.3752	30	.3665	.9304	.3939	2.539	1.075	2.729	30	1.1956
.2560	40	.2532	.9674	.2617	3.821	1.034	3.950	.3782	40	.3692	.9293	.3973	2.517	1.076	2.709	20	1.1926
.2589	50	.2560	.9667	.2648	3.776	1.034	3.906	.3811	50	.3719	.9283	.4006	2.496	1.077	2.689	10	1.1897
.2618	15°00'	.2588	.9659	.2679	3.732	1.035	3.864	.3840	22°00'	.3746	.9272	.4040	2.475	1.079	2.669	68°00'	1.1868
.2647	10	.2616	.9652	.2711	3.689	1.036	3.822	.3869	10	.3773	.9261	.4074	2.455	1.080	2.650	50	1.1839
.2676	20	.2644	.9644	.2742	3.647	1.037	3.782	.3898	20	.3800	.9250	.4108	2.434	1.081	2.632	40	1.1810
.2705	30	.2672	.9632	.2773	3.606	1.038	3.742	.3927	30	.3827	.9239	.4142	2.414	1.082	2.613	30	1.1781
.2734	40	.2700	.9628	.2805	3.566	1.039	3.703	.3956	40	.3854	.9228	.4176	2.394	1.084	2.595	20	1.1752
.2763	50	.2728	.9621	.2836	3.526	1.039	3.665	.3985	50	.3881	.9216	.4210	2.375	1.085	2.577	10	1.1723
.2793	16°00'	.2756	.9613	.2867	3.487	1.040	3.628	.4014	23°00'	.3907	.9205	.4245	2.356	1.086	2.559	67°00'	1.1694
.2822	10	.2784	.9605	.2899	3.450	1.041	3.592	.4043	10	.3934	.9194	.4279	2.337	1.088	2.542	50	1.1665
.2851	20	.2812	.9596	.2931	3.412	1.042	3.556	.4072	20	.3961	.9182	.4314	2.318	1.089	2.525	40	1.1636
.2880	30	.2840	.9588	.2962	3.376	1.043	3.521	.4102	30	.3987	.9171	.4348	2.300	1.090	2.508	30	1.1606
.2909	40	.2868	.9580	.2994	3.340	1.044	3.487	.4131	40	.4014	.9159	.4383	2.282	1.092	2.491	20	1.1577
.2938	50	.2896	.9572	.3026	3.305	1.045	3.453	.4160	50	.4041	.9147	.4417	2.264	1.093	2.475	10	1.1548
.2967	17°00'	.2924	.9563	.3057	3.271	1.046	3.420	.4189	24°00'	.4067	.9135	.4452	2.246	1.095	2.459	66°00'	1.1519
.2996	10	.2952	.9555	.3089	3.237	1.047	3.388	.4218	10	.4094	.9124	.4487	2.229	1.096	2.443	50	1.1490
.3025	20	.2979	.9546	.3121	3.204	1.048	3.356	.4247	20	.4120	.9112	.4522	2.211	1.097	2.427	40	1.1461
.3054	30	.3007	.9537	.3153	3.172	1.049	3.326	.4276	30	.4147	.9100	.4557	2.194	1.099	2.411	30	1.1432
.3083	40	.3035	.9528	.3185	3.140	1.049	3.295	.4305	40	.4173	.9088	.4592	2.177	1.100	2.396	20	1.1403
.3113	50	.3062	.9520	.3217	3.108	1.050	3.265	.4334	50	.4200	.9075	.4628	2.161	1.102	2.381	10	1.1374
.3142	18°00'	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	.4363	25°00'	.4226	.9063	.4663	2.145	1.103	2.366	65°00'	1.1345
.3171	10	.3118	.9502	.3281	3.047	1.052	3.207	.4392	10	.4253	.9051	.4699	2.128	1.105	2.352	50	1.1316
.3200	20	.3145	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179	.4422	20	.4279	.9038	.4734	2.112	1.106	2.337	40	1.1286
.3229	30	.3173	.9483	.3346	2.989	1.054	3.152	.4451	30	.4305	.9026	.4770	2.097	1.108	2.323	30	1.1257
.3258	40	.3201	.9474	.3378	2.960	1.056	3.124	.4480	40	.4331	.9013	.4806	2.081	1.109	2.309	20	1.1228
.3287	50	.3228	.9465	.3411	2.932	1.057	3.098	.4509	50	.4358	.9001	.4841	2.066	1.111	2.295	10	1.1199
.3316	19°00'	.3256	.9455	.3443	2.904	1.058	3.072	.4538	26°00'	.4384	.8988	.4877	2.050	1.113	2.281	64°00'	1.1170
.3345	10	.3283	.9446	.3476	2.877	1.059	3.046	.4567	10	.4410	.8975	.4913	2.035	1.114	2.268	50	1.1141
.3374	20	.3311	.9436	.3508	2.850	1.060	3.021	.4596	20	.4436	.8962	.4950	2.020	1.116	2.254	40	1.1112
.3403	30	.3338	.9426	.3541	2.824	1.061	2.996	.4625	30	.4462	.8949	.4986	2.006	1.117	2.241	30	1.1083
.3432	40	.3365	.9417	.3574	2.798	1.062	2.971	.4654	40	.4488	.8936	.5022	1.991	1.119	2.228	20	1.1054
.3462	50	.3393	.9407	.3607	2.773	1.063	2.947	.4683	50	.4514	.8923	.5059	1.977	1.121	2.215	10	1.1025
.3491	20°00'	.3420	.9397	.3640	2.747	1.064	2.924	.4712	27°00'	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	63°00'	1.0996
.3520	10	.3448	.9387	.3673	2.723	1.065	2.901	.4741	10	.4566	.8897	.5132	1.949	1.124	2.190	50	1.0966
.3549	20	.3475	.9377	.3706	2.699	1.066	2.878	.4771	20	.4592	.8884	.5169	1.935	1.126	2.178	40	1.0937
.3578	30	.3502	.9367	.3739	2.675	1.068	2.855	.4800	30	.4617	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166	30	1.0908
.3607	40	.3529	.9356	.3772	2.651	1.069	2.833	.4829	40	.4643	.8857	.5243	1.907	1.129	2.154	20	1.0879
.3636	50	.3557	.9346	.3805	2.628	1.070	2.812	.4858	50	.4669	.8843	.5280	1.894	1.131	2.142	10	1.0850
.3665	21°00'	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	.4887	28°00'	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°00'	1.0821

Tabla 4. Valores de las funciones trigonométricas (cont.)

t	t grados	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$	t grados	t
.4887	28°00'	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°00'	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	29°00'	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	61°00'	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	30°00'	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	60°00'	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
.5411	31°00'	.5150	.8572	.6009	1.664	1.167	1.942	59°00'	1.0297
.5440	10	.5175	.8557	.6048	1.653	1.169	1.932	50	1.0268
.5469	20	.5200	.8542	.6088	1.643	1.171	1.923	40	1.0239
.5498	30	.5225	.8526	.6128	1.632	1.173	1.914	30	1.0210
.5527	40	.5250	.8511	.6168	1.621	1.175	1.905	20	1.0181
.5556	50	.5275	.8496	.6208	1.611	1.177	1.896	10	1.0152
.5585	32°00'	.5299	.8480	.6249	1.600	1.179	1.887	58°00'	1.0123
.5614	10	.5324	.8465	.6289	1.590	1.181	1.878	50	1.0094
.5643	20	.5348	.8450	.6330	1.580	1.184	1.870	40	1.0065
.5672	30	.5373	.8434	.6371	1.570	1.186	1.861	30	1.0036
.5701	40	.5398	.8418	.6412	1.560	1.188	1.853	20	1.0007
.5730	50	.5422	.8403	.6453	1.550	1.190	1.844	10	.9977
.5760	33°00'	.5446	.8387	.6494	1.540	1.192	1.836	57°00'	.9948
.5789	10	.5471	.8371	.6536	1.530	1.195	1.828	50	.9919
.5818	20	.5495	.8355	.6577	1.520	1.197	1.820	40	.9890
.5847	30	.5519	.8339	.6619	1.511	1.199	1.812	30	.9861
.5876	40	.5544	.8323	.6661	1.501	1.202	1.804	20	.9832
.5905	50	.5568	.8307	.6703	1.492	1.204	1.796	10	.9803
.5934	34°00'	.5592	.8290	.6745	1.483	1.206	1.788	56°00'	.9774
.5963	10	.5616	.8274	.6787	1.473	1.209	1.781	50	.9745
.5992	20	.5640	.8258	.6830	1.464	1.211	1.773	40	.9716
.6021	30	.5664	.8241	.6873	1.455	1.213	1.766	30	.9687
.6050	40	.5688	.8225	.6916	1.446	1.216	1.758	20	.9657
.6080	50	.5712	.8208	.6959	1.437	1.218	1.751	10	.9628
.6109	35°00'	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	55°00'	.9599

t	t grados	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$	t grados	t
.6109	35°00'	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	55°00'	.9599
.6138	10	.5760	.8175	.7046	1.419	1.223	1.736	50	.9570
.6167	20	.5783	.8158	.7089	1.411	1.226	1.729	40	.9541
.6196	30	.5807	.8141	.7133	1.402	1.228	1.722	30	.9512
.6225	40	.5831	.8124	.7177	1.393	1.231	1.715	20	.9483
.6254	50	.5854	.8107	.7221	1.385	1.233	1.708	10	.9454
.6283	36°00'	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	54°00'	.9425
.6312	10	.5901	.8073	.7310	1.368	1.239	1.695	50	.9396
.6341	20	.5925	.8056	.7355	1.360	1.241	1.688	40	.9367
.6370	30	.5948	.8039	.7400	1.351	1.244	1.681	30	.9338
.6400	40	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.675	20	.9308
.6429	50	.5995	.8004	.7490	1.335	1.249	1.668	10	.9279
.6458	37°00'	.6018	.7986	.7536	1.327	1.252	1.662	53°00'	.9250
.6487	10	.6041	.7969	.7581	1.319	1.255	1.655	50	.9221
.6516	20	.6065	.7951	.7627	1.311	1.258	1.649	40	.9192
.6545	30	.6088	.7934	.7673	1.303	1.260	1.643	30	.9163
.6574	40	.6111	.7916	.7719	1.295	1.263	1.636	20	.9134
.6603	50	.6134	.7898	.7766	1.288	1.266	1.630	10	.9105
.6632	38°00'	.6157	.7880	.7813	1.280	1.269	1.624	52°00'	.9076
.6661	10	.6180	.7862	.7860	1.272	1.272	1.618	50	.9047
.6690	20	.6202	.7844	.7907	1.265	1.275	1.612	40	.9018
.6720	30	.6225	.7826	.7954	1.257	1.278	1.606	30	.8988
.6749	40	.6248	.7808	.8002	1.250	1.281	1.601	20	.8959
.6778	50	.6271	.7790	.8050	1.242	1.284	1.595	10	.8930
.6807	39°00'	.6293	.7771	.8098	1.235	1.287	1.589	51°00'	.8901
.6836	10	.6316	.7753	.8146	1.228	1.290	1.583	50	.8872
.6865	20	.6338	.7735	.8195	1.220	1.293	1.578	40	.8843
.6894	30	.6361	.7716	.8243	1.213	1.296	1.572	30	.8814
.6923	40	.6383	.7698	.8292	1.206	1.299	1.567	20	.8785
.6952	50	.6406	.7679	.8342	1.199	1.302	1.561	10	.8756
.6981	40°00'	.6428	.7660	.8391	1.192	1.305	1.556	50°00'	.8727
.7010	10	.6450	.7642	.8441	1.185	1.309	1.550	50	.8698
.7039	20	.6472	.7623	.8491	1.178	1.312	1.545	40	.8668
.7069	30	.6494	.7604	.8541	1.171	1.315	1.540	30	.8639
.7098	40	.6517	.7585	.8591	1.164	1.318	1.535	20	.8610
.7127	50	.6539	.7566	.8642	1.157	1.322	1.529	10	.8581
.7156	41°00'	.6561	.7547	.8693	1.150	1.325	1.524	49°00'	.8552
.7185	10	.6583	.7528	.8744	1.144	1.328	1.519	50	.8523
.7214	20	.6604	.7509	.8796	1.137	1.332	1.514	40	.8494
.7243	30	.6626	.7490	.8847	1.130	1.335	1.509	30	.8465
.7272	40	.6648	.7470	.8899	1.124	1.339	1.504	20	.8436
.7301	50	.6670	.7451	.8952	1.117	1.342	1.499	10	.8407
.7330	42°00'	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	48°00'	.8378

Tabla 4. Valores de las funciones trigonométricas (cont.)

\angle	\angle grados	$\sin \angle$	$\cos \angle$	$\tan \angle$	$\cot \angle$	$\sec \angle$	$\csc \angle$	\angle grados
.7330	42°00'	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	48°00'
.7359	10	.6713	.7412	.9057	1.104	1.349	1.490	50
.7389	20	.6734	.7392	.9110	1.098	1.353	1.485	40
.7418	30	.6756	.7373	.9163	1.091	1.356	1.480	30
.7447	40	.6777	.7353	.9217	1.085	1.360	1.476	20
.7476	50	.6799	.7333	.9271	1.079	1.364	1.471	10
.7505	43°00'	.6820	.7314	.9325	1.072	1.367	1.466	47°00'
.7534	10	.6841	.7294	.9380	1.066	1.371	1.462	50
.7563	20	.6862	.7274	.9435	1.060	1.375	1.457	40
.7592	30	.6884	.7254	.9490	1.054	1.379	1.453	30
.7621	40	.6905	.7234	.9545	1.048	1.382	1.448	20
.7650	50	.6926	.7214	.9601	1.042	1.386	1.444	10
.7679	44°00'	.6947	.7193	.9657	1.036	1.390	1.440	46°00'
.7709	10	.6967	.7173	.9713	1.030	1.394	1.435	50
.7738	20	.6988	.7153	.9770	1.024	1.398	1.431	40
.7767	30	.7009	.7133	.9827	1.018	1.402	1.427	30
.7796	40	.7030	.7112	.9884	1.012	1.406	1.423	20
.7825	50	.7050	.7092	.9942	1.006	1.410	1.418	10
.7854	45°00'	.7071	.7071	1.0000	1.0000	1.414	1.414	45°00'
		$\cos \angle$	$\sin \angle$	$\cot \angle$	$\tan \angle$	$\csc \angle$	$\sec \angle$	\angle grados

Tabla 5. Funciones trigonométricas de los radianes o números reales

t	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
.00	.0000	1.0000	.0000	—	1.000	—
.01	.0100	1.0000	.0100	99.997	1.000	100.00
.02	.0200	.9998	.0200	49.993	1.000	50.00
.03	.0300	.9996	.0300	33.323	1.000	33.34
.04	.0400	.9992	.0400	24.987	1.001	25.01
.05	.0500	.9988	.0500	19.983	1.001	20.01
.06	.0600	.9982	.0601	16.647	1.002	16.68
.07	.0699	.9976	.0701	14.262	1.002	14.30
.08	.0799	.9968	.0802	12.473	1.003	12.51
.09	.0899	.9960	.0902	11.081	1.004	11.13
.10	.0998	.9950	.1003	9.967	1.005	10.02
.11	.1098	.9940	.1104	9.054	1.006	9.109
.12	.1197	.9928	.1206	8.293	1.007	8.353
.13	.1296	.9916	.1307	7.649	1.009	7.714
.14	.1395	.9902	.1409	7.096	1.010	7.166
.15	.1494	.9888	.1511	6.617	1.011	6.692
.16	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277
.17	.1692	.9856	.1717	5.826	1.015	5.911
.18	.1790	.9838	.1820	5.495	1.016	5.586
.19	.1889	.9820	.1923	5.200	1.018	5.295
.20	.1987	.9801	.2027	4.933	1.020	5.033
.21	.2085	.9780	.2131	4.692	1.022	4.797
.22	.2182	.9759	.2236	4.472	1.025	4.582
.23	.2280	.9737	.2341	4.271	1.027	4.386
.24	.2377	.9713	.2447	4.086	1.030	4.207
.25	.2474	.9689	.2553	3.916	1.032	4.042
.26	.2571	.9664	.2660	3.759	1.035	3.890
.27	.2667	.9638	.2768	3.613	1.038	3.749
.28	.2764	.9611	.2876	3.478	1.041	3.619
.29	.2860	.9582	.2984	3.351	1.044	3.497
.30	.2955	.9553	.3093	3.233	1.047	3.384
.31	.3051	.9523	.3203	3.122	1.050	3.278
.32	.3146	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179
.33	.3240	.9460	.3425	2.920	1.057	3.086
.34	.3335	.9428	.3537	2.827	1.061	2.999
.35	.3429	.9394	.3650	2.740	1.065	2.916
.36	.3523	.9359	.3764	2.657	1.068	2.839
.37	.3616	.9323	.3879	2.578	1.073	2.765
.38	.3709	.9287	.3994	2.504	1.077	2.696
.39	.3802	.9249	.4111	2.433	1.081	2.630

t	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
.40	.3894	.9211	.4228	2.365	1.086	2.568
.41	.3986	.9171	.4346	2.301	1.090	2.509
.42	.4078	.9131	.4466	2.239	1.095	2.452
.43	.4169	.9090	.4586	2.180	1.100	2.399
.44	.4259	.9048	.4708	2.124	1.105	2.348
.45	.4350	.9004	.4831	2.070	1.111	2.299
.46	.4439	.8961	.4954	2.018	1.116	2.253
.47	.4529	.8916	.5080	1.969	1.122	2.208
.48	.4618	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166
.49	.4706	.8823	.5334	1.875	1.133	2.125
.50	.4794	.8776	.5463	1.830	1.139	2.086
.51	.4882	.8727	.5594	1.788	1.146	2.048
.52	.4969	.8678	.5726	1.747	1.152	2.013
.53	.5055	.8628	.5859	1.707	1.159	1.978
.54	.5141	.8577	.5994	1.668	1.166	1.945
.55	.5227	.8525	.6131	1.631	1.173	1.913
.56	.5312	.8473	.6269	1.595	1.180	1.883
.57	.5396	.8419	.6410	1.560	1.188	1.853
.58	.5480	.8365	.6552	1.526	1.196	1.825
.59	.5564	.8309	.6696	1.494	1.203	1.797
.60	.5646	.8253	.6841	1.462	1.212	1.771
.61	.5729	.8196	.6989	1.431	1.220	1.746
.62	.5810	.8139	.7139	1.401	1.229	1.721
.63	.5891	.8080	.7291	1.372	1.238	1.697
.64	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.674
.65	.6052	.7961	.7602	1.315	1.256	1.652
.66	.6131	.7900	.7761	1.288	1.266	1.631
.67	.6210	.7838	.7923	1.262	1.276	1.610
.68	.6288	.7776	.8087	1.237	1.286	1.590
.69	.6365	.7712	.8253	1.212	1.297	1.571
.70	.6442	.7648	.8423	1.187	1.307	1.552
.71	.6518	.7584	.8595	1.163	1.319	1.534
.72	.6594	.7518	.8771	1.140	1.330	1.517
.73	.6669	.7452	.8949	1.117	1.342	1.500
.74	.6743	.7385	.9131	1.095	1.354	1.483
.75	.6816	.7317	.9316	1.073	1.367	1.467
.76	.6889	.7248	.9505	1.052	1.380	1.452
.77	.6961	.7179	.9697	1.031	1.393	1.437
.78	.7033	.7109	.9893	1.011	1.407	1.422
.79	.7104	.7038	1.009	.9908	1.421	1.408

5. Funciones trigonométricas de los radianes o números reales (cont.)

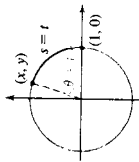
t	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
.80	.7174	.6967	1.030	.9712	1.435	1.394
.81	.7243	.6895	1.050	.9520	1.455	1.381
.82	.7311	.6822	1.072	.9331	1.466	1.368
.83	.7379	.6749	1.093	.9146	1.482	1.355
.84	.7446	.6675	1.116	.8964	1.498	1.343
.85	.7513	.6600	1.138	.8785	1.515	1.331
.86	.7578	.6524	1.162	.8609	1.533	1.320
.87	.7643	.6448	1.185	.8437	1.551	1.308
.88	.7707	.6372	1.210	.8267	1.569	1.297
.89	.7771	.6294	1.235	.8100	1.589	1.287
.90	.7833	.6216	1.260	.7936	1.609	1.277
.91	.7895	.6137	1.286	.7774	1.629	1.267
.92	.7956	.6058	1.313	.7615	1.651	1.257
.93	.8016	.5978	1.341	.7458	1.673	1.247
.94	.8076	.5898	1.369	.7303	1.696	1.238
.95	.8134	.5817	1.398	.7151	1.719	1.229
.96	.8192	.5735	1.428	.7001	1.744	1.221
.97	.8249	.5653	1.459	.6853	1.769	1.212
.98	.8305	.5570	1.491	.6707	1.795	1.204
.99	.8360	.5487	1.524	.6563	1.823	1.196
1.00	.8415	.5403	1.557	.6421	1.851	1.188
1.01	.8468	.5319	1.592	.6281	1.880	1.181
1.02	.8521	.5234	1.628	.6142	1.911	1.174
1.03	.8573	.5148	1.665	.6005	1.942	1.166
1.04	.8624	.5062	1.704	.5870	1.975	1.160
1.05	.8674	.4976	1.743	.5736	2.010	1.153
1.06	.8724	.4889	1.784	.5604	2.046	1.146
1.07	.8772	.4801	1.827	.5473	2.083	1.140
1.08	.8820	.4713	1.871	.5344	2.122	1.134
1.09	.8866	.4625	1.917	.5216	2.162	1.128
1.10	.8912	.4536	1.965	.5090	2.205	1.122
1.11	.8957	.4447	2.014	.4964	2.249	1.116
1.12	.9001	.4357	2.066	.4840	2.295	1.111
1.13	.9044	.4267	2.120	.4718	2.344	1.106
1.14	.9086	.4176	2.176	.4596	2.395	1.101
1.15	.9128	.4085	2.234	.4475	2.448	1.096
1.16	.9168	.3993	2.296	.4356	2.504	1.091
1.17	.9208	.3902	2.360	.4237	2.563	1.086
1.18	.9246	.3809	2.427	.4120	2.625	1.082
1.19	.9284	.3717	2.498	.4003	2.691	1.077

t	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
1.20	.9320	.3624	2.572	.3888	2.760	1.073
1.21	.9356	.3530	2.650	.3773	2.833	1.069
1.22	.9391	.3436	2.733	.3659	2.910	1.065
1.23	.9425	.3342	2.820	.3546	2.992	1.061
1.24	.9458	.3248	2.912	.3434	3.079	1.057
1.25	.9490	.3153	3.010	.3323	3.171	1.054
1.26	.9521	.3058	3.113	.3212	3.270	1.050
1.27	.9551	.2963	3.224	.3102	3.375	1.047
1.28	.9580	.2867	3.341	.2993	3.488	1.044
1.29	.9608	.2771	3.467	.2884	3.609	1.041
1.30	.9636	.2675	3.602	.2776	3.738	1.038
1.31	.9662	.2579	3.747	.2669	3.878	1.035
1.32	.9687	.2482	3.903	.2562	4.029	1.032
1.33	.9711	.2385	4.072	.2456	4.193	1.030
1.34	.9735	.2288	4.256	.2350	4.372	1.027
1.35	.9757	.2190	4.455	.2245	4.566	1.025
1.36	.9779	.2092	4.673	.2140	4.779	1.023
1.37	.9799	.1994	4.913	.2035	5.014	1.021
1.38	.9819	.1896	5.177	.1931	5.273	1.018
1.39	.9837	.1798	5.471	.1828	5.561	1.017
1.40	.9854	.1700	5.798	.1725	5.883	1.015
1.41	.9871	.1601	6.165	.1622	6.246	1.013
1.42	.9887	.1502	6.581	.1519	6.657	1.011
1.43	.9901	.1403	7.055	.1417	7.126	1.010
1.44	.9915	.1304	7.602	.1315	7.667	1.009
1.45	.9927	.1205	8.238	.1214	8.299	1.007
1.46	.9939	.1106	8.989	.1113	9.044	1.006
1.47	.9949	.1006	9.887	.1011	9.938	1.005
1.48	.9959	.0907	10.983	.0910	11.029	1.004
1.49	.9967	.0807	12.350	.0810	12.390	1.003
1.50	.9975	.0707	14.101	.0709	14.137	1.003
1.51	.9982	.0608	16.428	.0609	16.458	1.002
1.52	.9987	.0508	19.670	.0508	19.695	1.001
1.53	.9992	.0408	24.498	.0408	24.519	1.001
1.54	.9995	.0308	32.461	.0308	32.476	1.000
1.55	.9998	.0208	48.078	.0208	48.089	1.000
1.56	.9999	.0108	92.620	.0108	92.626	1.000
1.57	1.0000	.0008	1255.8	.0008	1255.8	1.000

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

De números reales



$$\sin t = y \quad \csc t = \frac{1}{y}$$

$$\cos t = x \quad \sec t = \frac{1}{x}$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \quad \cot t = \frac{x}{y}$$

De ángulos agudos



$$\sin \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \quad \csc \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \quad \sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \quad \cot \theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

LEY DE SENOS

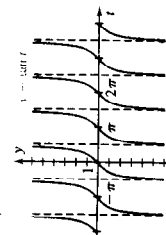
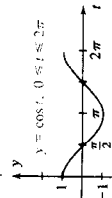
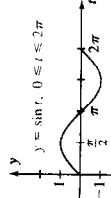
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

LEY DE COSEENOS

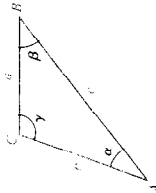
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



TRIÁNGULO OBLICUO



IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

FÓRMULAS PARA SUMA

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS PARA RESTA

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS PARA SEMIÁNGULOS

$$\sin \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS PARA ÁNGULO DOBLE

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$= 1 - 2 \sin^2 u$$

$$= 2 \cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

área A circunferencia (o perímetro) C
volumen V área de superficie curva S
altura h radio r

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Teorema de Pitágoras:

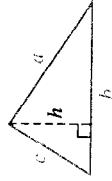
$$c^2 = a^2 + b^2$$



TRIÁNGULO

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$C = a + b + c$$



CÍRCULO

$$A = \pi r^2$$

$$C = 2\pi r$$



ESFERA

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

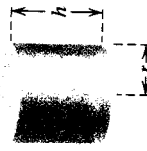
$$S = 4\pi r^2$$



CILINDRO CIRCULAR RECTO

$$V = \pi r^2 h$$

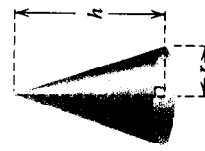
$$S = 2\pi r h$$



CONO CIRCULAR RECTO

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$



III Tarjeta de referencia rápida

FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FÓRMULAS PARA FACTORIZACIÓN CON PRODUCTOS NOTABLES

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

$$y = \log_a x \text{ significa } a^y = x$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$\log_a x = x$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

EXPONENTES Y RADICALES

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

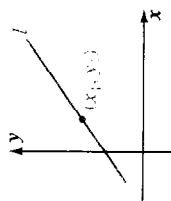
$$a^n = \sqrt[n]{a^n}$$

$$m \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m}$$

FORMA PUNTO PENDIENTE DE UNA RECTA

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

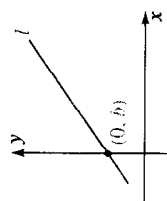
es la pendiente



FORMA PENDIENTE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

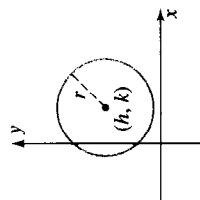
$$y = mx + b$$

m es la pendiente



CÍRCULO

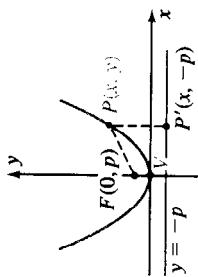
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



SECCIONES CÓNICAS

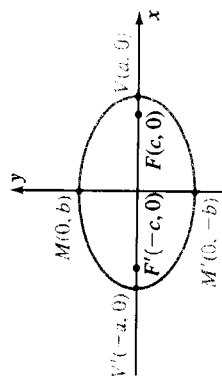
PARÁBOLA

$$x^2 = 4py$$



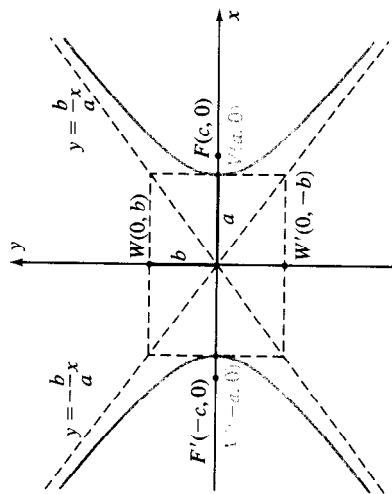
ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad a^2 = b^2 + c^2$$



HIPÉRBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad c^2 = a^2 + b^2$$



IV Fórmulas de álgebra, geometría y trigonometría

ÁLGEBRA

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Productos notables

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Cocientes notables

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Exponentes y radicales

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Teorema del binomio

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 +$$

$$\dots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \dots + y^n$$

$$\text{en donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Desigualdades

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

Valor absoluto ($d > 0$)

$|x| < d$ si y sólo si $-d < x < d$

$|x| > d$ si y sólo si

$$x > d \quad \text{o} \quad x < -d$$

La suma S_n de los primeros n términos de una secuencia aritmética, con primer término a_1 y diferencia común d , es

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad \text{o} \quad S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

La suma S_n de los primeros n términos de una secuencia geométrica, con primer término a_1 y razón común r , es

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

Media aritmética A de n números

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Media geométrica G de n números

$$G = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}, a_k > 0$$

Exponenciales y logaritmos

$y = \log_a x$ significa $a^y = x$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log x = \log_{10} x$$

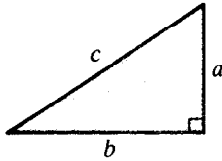
$$\ln x = \log_e x$$

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

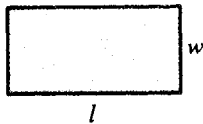
área A circunferencia (o perímetro) C volumen V área de superficie curva S altura h radio r

Triángulo rectángulo

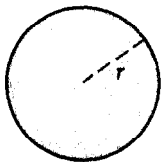


Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Rectángulo

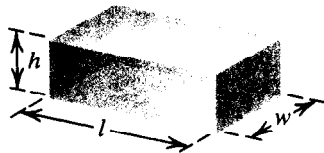


$$A = lw \quad C = 2l + 2w$$



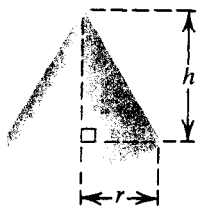
$$A = \pi r^2 \quad C = 2\pi r$$

Paralelepípedo



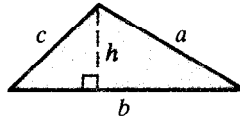
$$V = lwh \quad S = 2(hl + lw + hw)$$

Cono recto



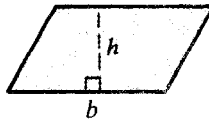
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

Triángulo



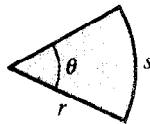
$$A = \frac{1}{2}bh \quad C = a + b + c$$

Paralelogramo



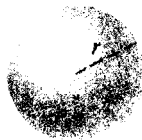
$$A = bh$$

Sector circular



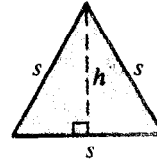
$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad s = r\theta$$

Esfera



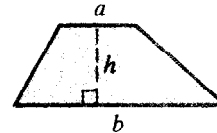
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad S = 4 \pi r^2$$

Triángulo equilátero



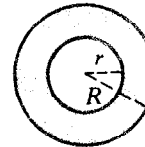
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} s \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

Trapezio



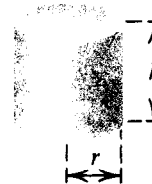
$$A = \frac{1}{2} (a + b)h$$

Corona



$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

Cilindro recto



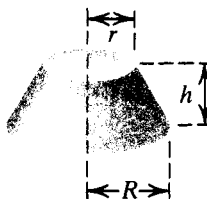
$$V = \pi r^2 h \quad S = 2\pi r h$$

Prisma

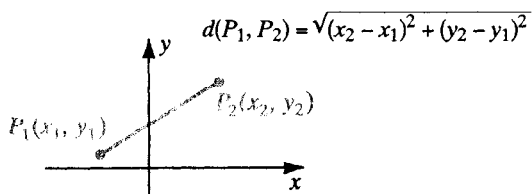
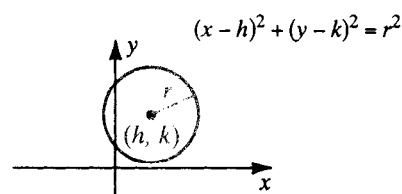
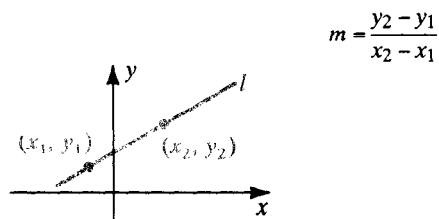
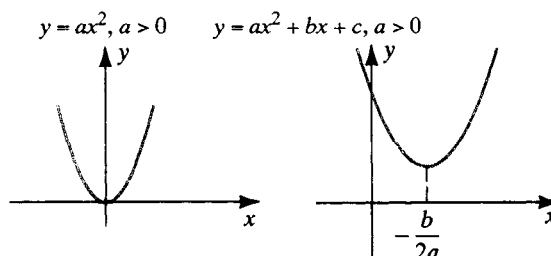
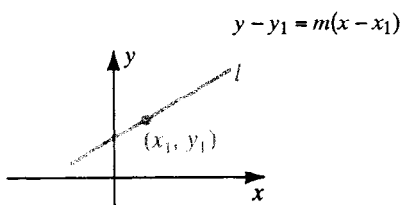


$$V = Bh \text{ con } B \text{ como área de la base}$$

Cono truncado



$$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rR + R^2)$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA**Distancia entre dos puntos****Ecuación de un círculo****Pendiente m de una línea****Gráfica de una función cuadrática****Forma punto-pendiente de una línea**

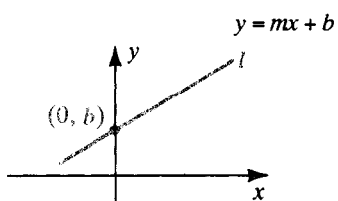
$$\pi \approx 3.14159$$

$$e \approx 2.71828$$

Conversiones

$$1 \text{ centímetro} \approx 0.3937 \text{ pulgadas}$$

$$1 \text{ metro} \approx 3.2808 \text{ pies}$$

Forma pendiente-intersección de una línea

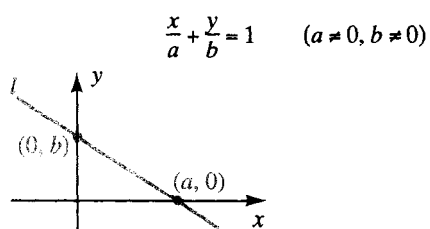
$$1 \text{ kilómetro} \approx 0.6214 \text{ milla}$$

$$1 \text{ gramo} \approx 0.0353 \text{ onza}$$

$$1 \text{ kilogramo} \approx 2.2046 \text{ libras}$$

$$1 \text{ litro} \approx 0.2642 \text{ galones}$$

$$1 \text{ mililitro} \approx 0.0381 \text{ onza fluida}$$

Forma de intersección de una línea

$$1 \text{ joule} \approx 0.7376 \text{ pie-libra}$$

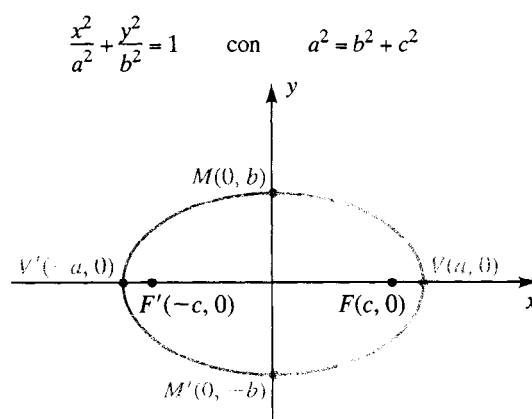
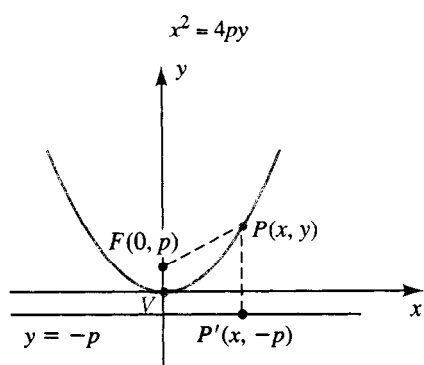
$$1 \text{ newton} \approx 0.2248 \text{ libra}$$

$$1 \text{ lumen} \approx 0.0015 \text{ watt}$$

$$1 \text{ acre} \approx 43\,560 \text{ pie cuadrado}$$

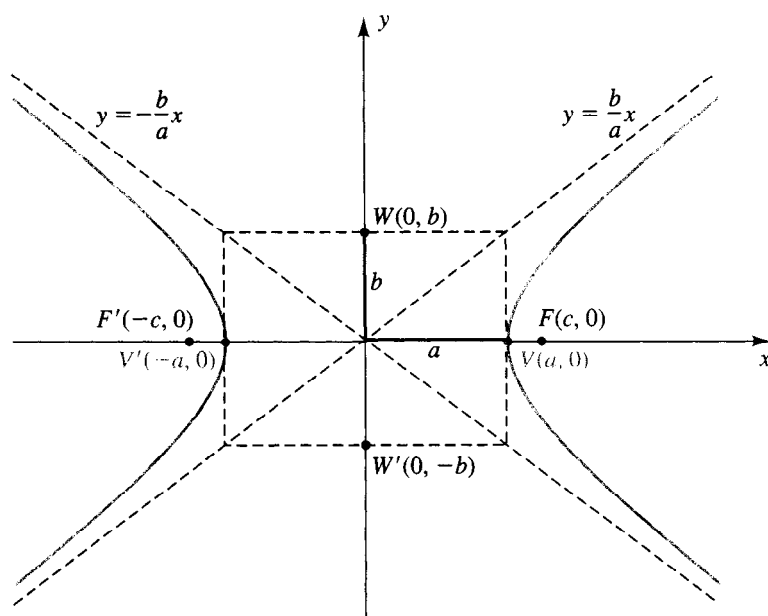
$$1 \text{ radián} \approx 57.296 \text{ grados}$$

$$1 \text{ grado} \approx 0.0175 \text{ radián}$$



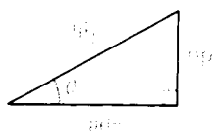
HIPÉRBOLA

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $c^2 = a^2 + b^2$



TRIGONOMETRÍA**FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

De ángulos agudos



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

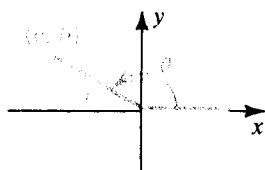
$$\cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

De ángulos arbitrarios



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{r}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{r}{b}$$

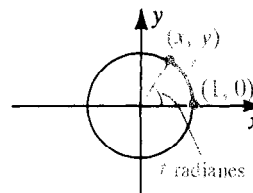
$$\cos \theta = \frac{a}{r}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\cot \theta = \frac{a}{b}$$

De números reales



$$\operatorname{sen} t = y$$

$$\operatorname{csc} t = \frac{1}{y}$$

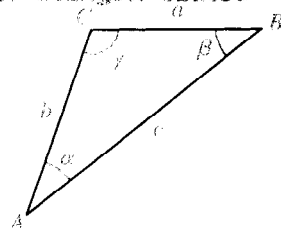
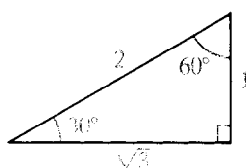
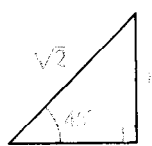
$$\cos t = x$$

$$\sec t = \frac{1}{x}$$

$$\tan t = \frac{y}{x}$$

$$\cot t = \frac{x}{y}$$

Triángulos rectángulos especiales Triángulo oblicuo



Ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ley de senos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Área

$$A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha$$

$$A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \beta$$

$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (Fórmula de Herón)**Alfabeto griego**

Valores especiales de funciones trigonométricas

θ (grados)	θ (radianes)	$\operatorname{sen} \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\operatorname{csc} \theta$
0°	0	0	1	0	—	1	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0	—	1

Letra	Nombre	Letra	Nombre
A α	alpha	N ν	ny
B β	beta	Ξ ξ	xi
Γ γ	gamma	O \omicron	ómicron
Δ δ	delta	Π π	pi
E ϵ	épsilon	P ρ	rho
Z ζ	zeta	Σ σ	sigma
H η	eta	T τ	tau
Θ θ	theta	Y υ	ípsilon
I ι	iota	Φ ϕ (φ)	fhi
K κ	kappa	X χ	jhi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	mu	Ω ω	omega

TRIGONOMETRÍA

Identidades fundamentales

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Fórmulas para negativos

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan(-t) = -\tan t$$

$$\cot(-t) = -\cot t$$

$$\sec(-t) = \sec t$$

$$\csc(-t) = -\csc t$$

Fórmulas para ángulo doble

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$= 1 - 2 \sin^2 u$$

$$= 2 \cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

Fórmulas para cofunciones

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Fórmulas para suma

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

Identidades para ángulos mitad

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) + \sin(u - v)]$$

$$\cos u \sin v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) - \sin(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

Fórmulas para resta

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Fórmulas para ángulos mitad

$$\sin \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \sin\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \sin\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

Fórmulas suma a producto

Respuestas a ejercicios seleccionados

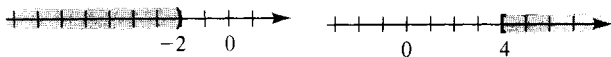
CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1

1. a) Negativo b) Positivo c) Negativo
d) Positivo
3. a) < b) > c) =
5. a) > b) > c) >
7. a) $x < 0$ b) $y \geq 0$ c) $q \leq \pi$ d) $2 < d < 4$
e) $t \geq 5$ f) $-z \leq 3$ g) $\frac{p}{q} \leq 7$ h) $\frac{1}{w} \geq 9$
i) $|x| > 7$

9. a) 5 b) 3 c) 11
11. a) -15 b) -3 c) 11
13. a) $4 - \pi$ b) $4 - \pi$ c) $1.5 - \sqrt{2}$
15. a) 4 b) 12 c) 12 d) 8
17. a) 10 b) 9 c) 9 d) 19
19. $|7 - x| < 5$ 21. $|-3 - x| \geq 8$ 23. $|x - 4| \leq 3$
25. $\frac{26}{7}$ 27. $\frac{4}{3}$ 29. $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ 31. $\frac{6}{5}, \frac{2}{3}$
33. $-2 \pm \sqrt{2}$ 35. $\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{41}$ 37. $\pm 3, \pm 4$

39. $(-\infty, -2)$ 41. $[4, \infty)$



43. $(-2, 4]$



45. $[3, 7]$



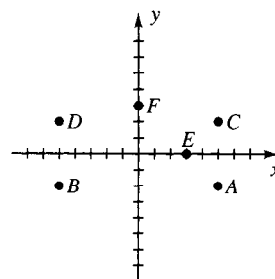
47. $(0, \pi)$



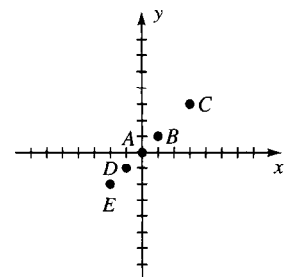
49. $-5 < x \leq 8$ 51. $-4 \leq x \leq -1$ 53. $x \geq 4$
55. $x < -5$ 57. $0 \leq x \leq 2\pi$

EJERCICIOS 1.2

1.



3. Recta que corta los cuadrantes primero y tercero



5. A(3, 3), B(-3, 3), C(-3, -3), D(3, -3), E(3, 0), F(0, 3)

7. a) Recta paralela al eje y que corta al eje x en $(-2, 0)$
b) Recta paralela al eje x que corta al eje y en $(0, 3)$

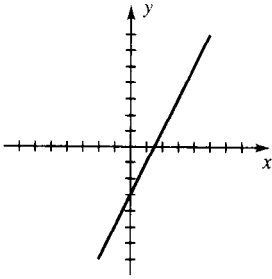
- c) Todos los puntos a la derecha y sobre el eje y
- d) Todos los puntos de los cuadrantes primero y segundo
- e) Todos los puntos abajo del eje x
- f) Todos los puntos sobre el eje y

9. a) $\sqrt{29}$ b) $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$

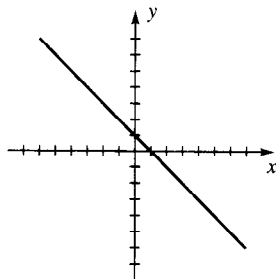
11. a) $\sqrt{13}$ b) $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$

13. a) 4 b) (5, -3)

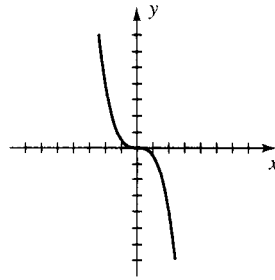
15.



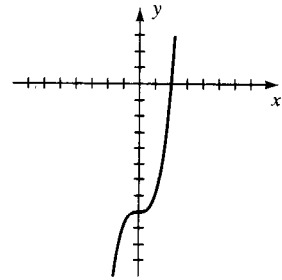
17.



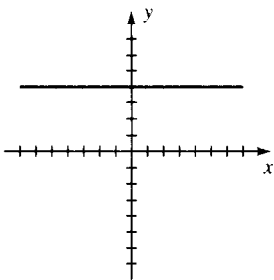
31.



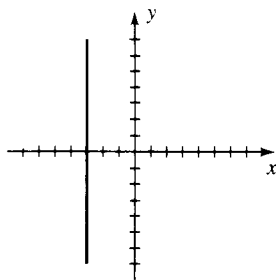
33.



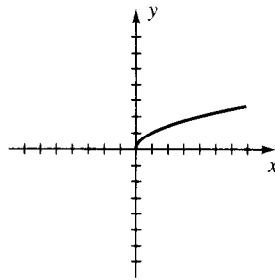
19.



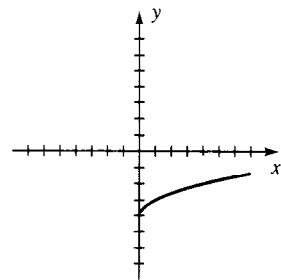
21.



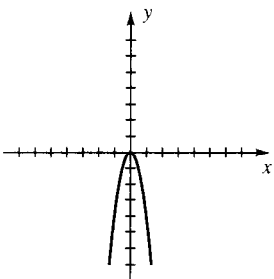
35.



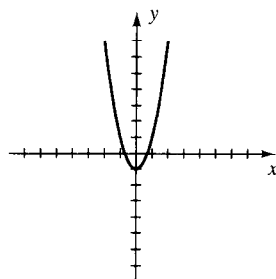
37.



23.



25.

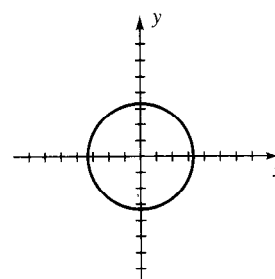


39. a) 19, 23, 25

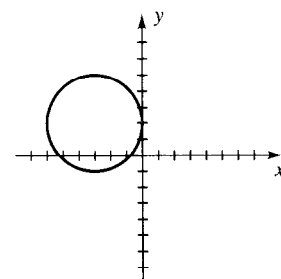
b) 21, 27, 29

c) 31

41.



43.



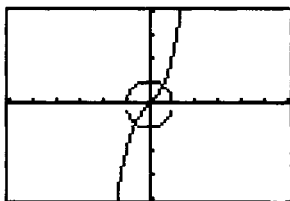
45. $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 41$

47. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 34$

49. $C(2, -3); r = 7$

51. $C(0, -2); r = 11$

53. $(0.6, 0.8), (-0.6, -0.8)$



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

EJERCICIOS 1.3

1. $-6, -4, -24$

3. $-12, -22, -36$

5. a) $5a - 2$

b) $-5a - 2$

c) $-5a + 2$

d) $5a + 5h - 2$

e) $5a + 5h - 4$

f) 5

7. a) $a^2 - a + 3$

b) $a^2 + a + 3$

c) $-a^2 + a - 3$

d) $a^2 + 2ah + h^2 - a - h + 3$

e) $a^2 + h^2 - a - h + 6$

f) $2a + h - 1$

9. a) $\frac{4}{a^2}$

b) $\frac{1}{4a^2}$

c) $4a$

d) $2a$

11. a) $\frac{2a}{a^2 + 1}$

b) $\frac{a^2 + 1}{2a}$

c) $\frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$

d) $\frac{\sqrt{2a^3 + 2a}}{a^2 + 1}$

13. a) $[-3, 4]$

b) $[-2, 2]$

c) 0

d) $-1, \frac{1}{2}, 2$

e) $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 4]$

15. Sí

17. No

19. Sí

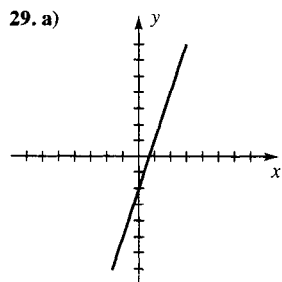
21. No

23. $\left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$

25. $[-3, 3]$

27. Todos los números reales excepto $-2, 0$ y 2

29. a)

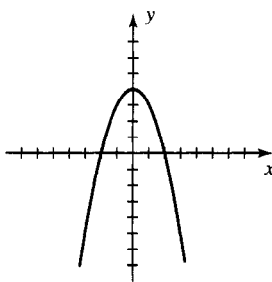


b) $D = (-\infty, \infty),$

$R = (-\infty, \infty)$

c) Creciente en $(-\infty, \infty)$

31. a)

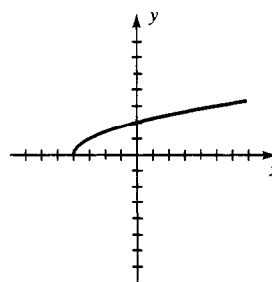


b) $D = (-\infty, \infty),$

$R = (-\infty, \infty]$

c) Creciente en $(-\infty, 0]$,
decreciente en $[0, \infty)$

33. a)

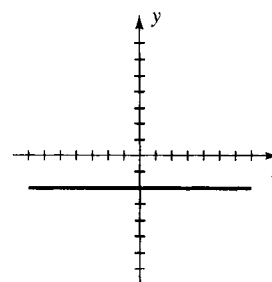


b) $D = [-4, \infty),$

$R = [0, \infty)$

c) Creciente en $[-4, \infty)$

35. a)



b) $D = (-\infty, \infty),$

$R = \{-2\}$

c) Constante en $(-\infty, \infty)$

37. $V = 4x(15 - x)(10 - x)$

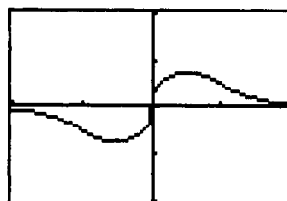
39. a) $y = \sqrt{h^2 + 2hr}$

b) 1280.6 millas

41. a)

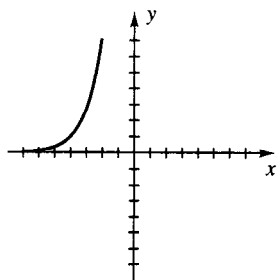
b) $[-0.75, 0.75]$

c) Decreciente en $[-2, -0.55]$ y
en $[0.55, 2]$,
creciente en $[-0.55, 0.55]$

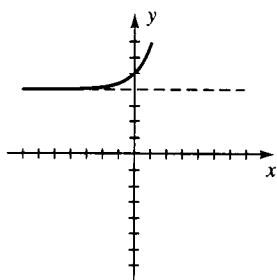


$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

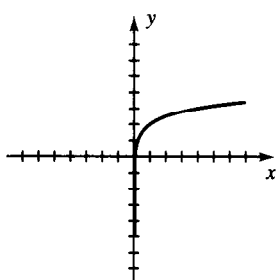
7. a)



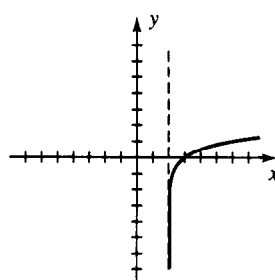
b)



e)



f)



9. a) $\log_4 64 = 3$

b) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

c) $\log_r s = r$

11. a) $2^5 = 32$

b) $3^{-5} = \frac{1}{243}$

c) $r^p = r$

13. a) $\log 100,000 = 5$

b) $\log 0.001 = -3$

c) $\log(y+1) = x$

15. a) $10^{50} = x$

b) $10^{20t} = x$

c) $e^{0.1} = x$

17. a) 0

b) 1

c) No posible

d) 2

e) 8

f) 3

g) -2

19. a) 3

b) 5

c) 2

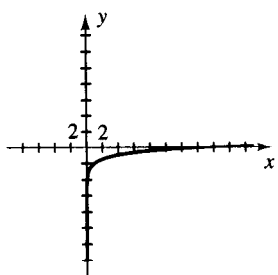
d) -4

e) 2

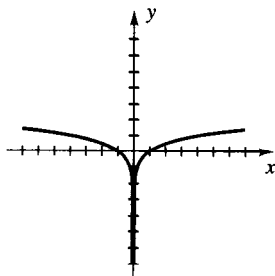
f) -3

g) $3e^2$

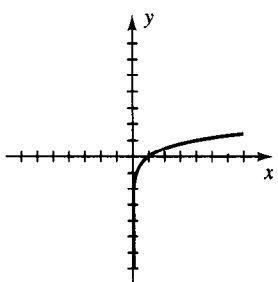
g)



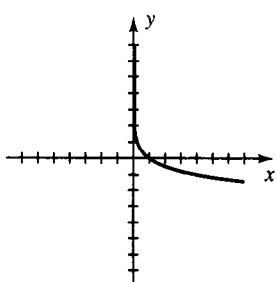
h)



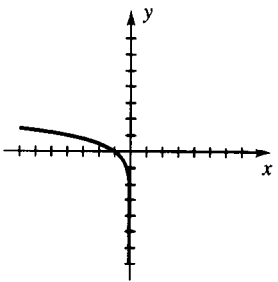
21. a)



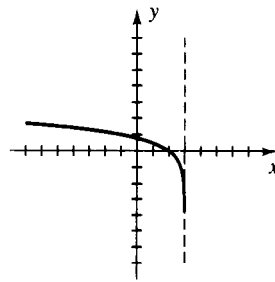
b)



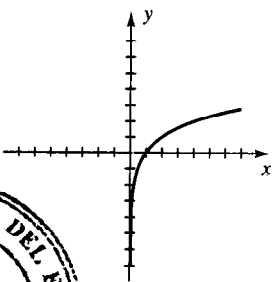
i)



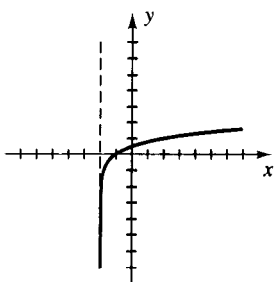
j)



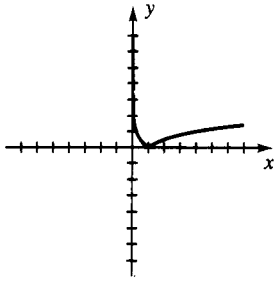
c)



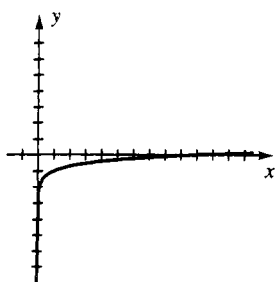
d)



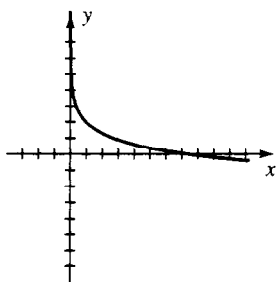
k)



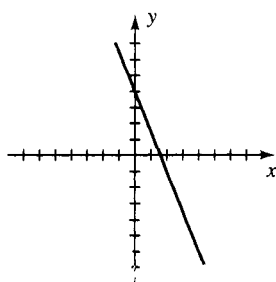
23.



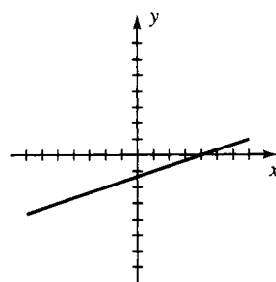
25.



15.



16.



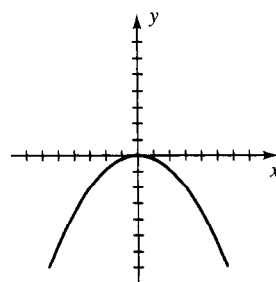
27. a) $\log_4 x + \log_4 z$

b) $\log_4 y - \log_4 x$

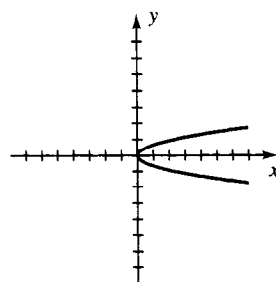
c) $\frac{1}{3} \log_4 z$

29. $3 \log_a x + \log_a w - 2 \log_a y - 4 \log_a z$

17.



18.



CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE REPASO

1. a) $<$ b) $>$ c) $>$

2. a) $x < 0$ b) $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ c) $|x| \leq 4$

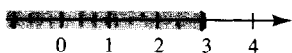
3. a) 7 b) -1 c) $\frac{1}{6}$

4. a) 5 b) 5 c) 7

5. $\frac{3}{7}$ 6. $-\frac{26}{3}$ 7. $-4, \frac{3}{2}$ 8. $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{21}$

9. a) $(-\infty, 3)$

b) $[-3, 3]$



c) $(0, \frac{\pi}{2})$

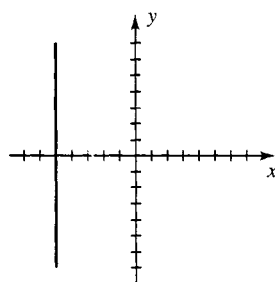


10. a) $x \geq -5$ b) $-2 < x \leq 2$ c) $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}$

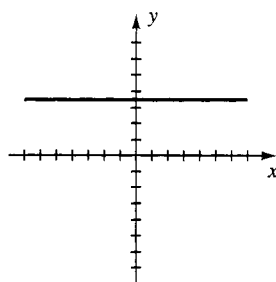
11. Los puntos de los cuadrantes segundo y cuarto

12. a) $\sqrt{265}$ b) $(-\frac{13}{2}, 1)$

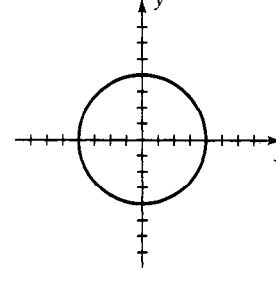
13.



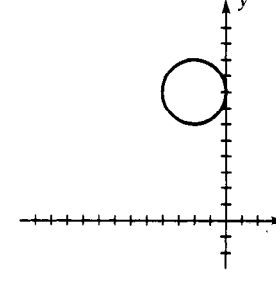
14.



21.



22.



23. $(x-7)^2 + (y+4)^2 = 149$

24. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 169$

25. $C(0, 6); r = \sqrt{5}$

26. $C(-3, 2); r = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

27. a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) 0

d) $-\frac{x}{\sqrt{3}-x}$

e) $-\frac{x}{\sqrt{x+3}}$

f) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$

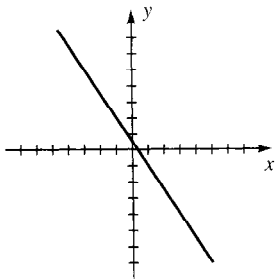
g) $\frac{x^2}{x+3}$

28. a) $\left[\frac{4}{3}, \infty\right); [0, \infty)$

(0, ∞)

29. $-2a - h + 1$

31. a)

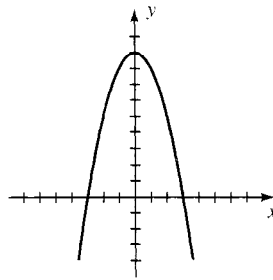


30. a) Sí b) No

b) $D = \mathbb{R}; R = \mathbb{R}$

c) Decreciente en $(-\infty, \infty)$

34. a)



b) $D = \mathbb{R}; R = (-\infty, 9]$

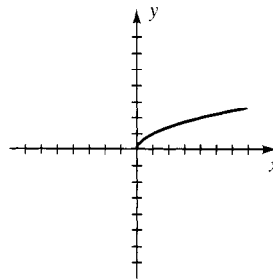
c) Creciente en $(-\infty, 0]$
decreciente en $[0, \infty)$

35. a) Non

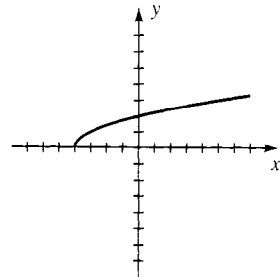
b) Ninguno

c) Par

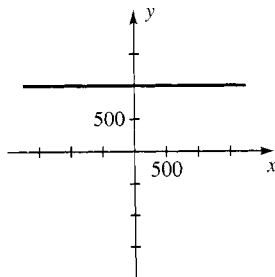
36. a)



b)



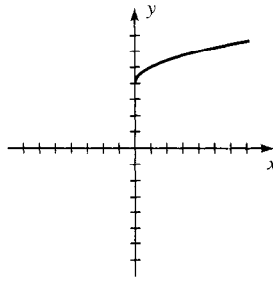
32. a)



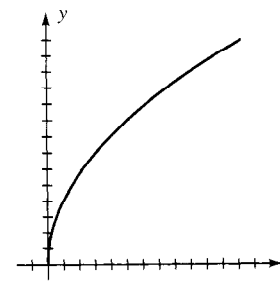
b) $D = \mathbb{R}; R = [1000]$

c) Constante en $(-\infty, \infty)$

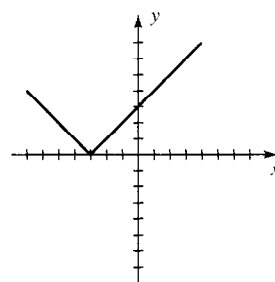
c)



d)



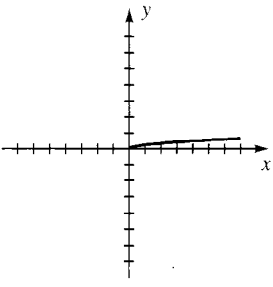
33. a)



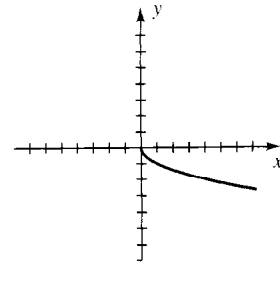
b) $D = \mathbb{R}; R = [0, \infty)$

c) Decreciente en $(-\infty, -3]$
creciente en $[-3, \infty)$

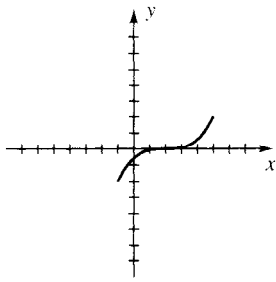
e)



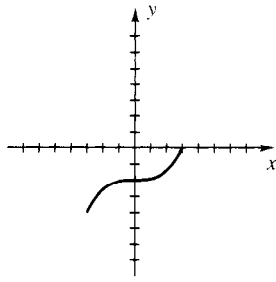
f)



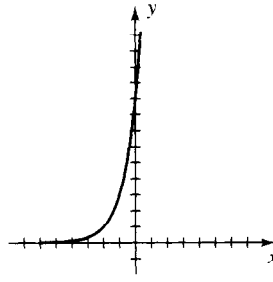
37. a)



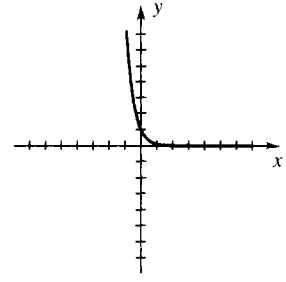
b)



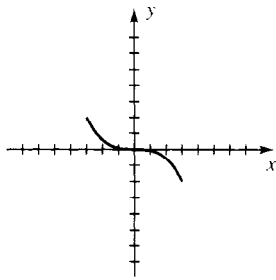
41.



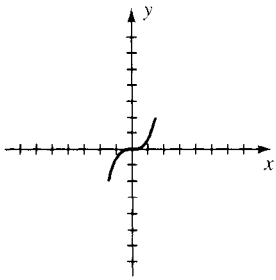
42.



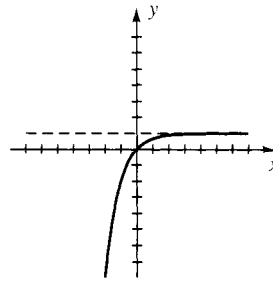
c)



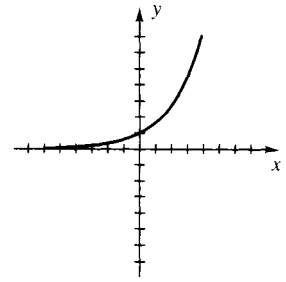
d)



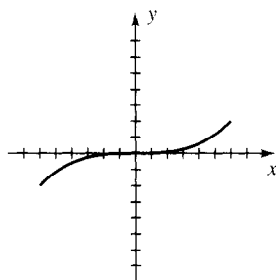
43.



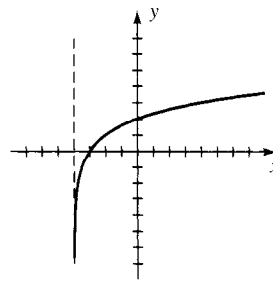
44.



e)



45.



38. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

39. $A = \sqrt{\frac{3}{4}} s^2$

40. a) $\sqrt{2500 + (-2)^2}$

b) $x = 25\sqrt{5} + 2 \approx 57.9 \text{ ft}$

46. a) -4 b) 0 c) 1 d) 4 e) 6 f) 8

g) $\frac{1}{2}$

47. a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 1 d) 5 e) 1 f) 25

g) $\frac{1}{3}$

48. $4\log x + \frac{2}{3}\log y - \frac{1}{3}\log z$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1

Ejercicios 1 al 4: las respuestas no son únicas.

1. a) $480^\circ, 840^\circ, -240^\circ, -600^\circ$
 b) $495^\circ, 855^\circ, -225^\circ, -585^\circ$
 c) $330^\circ, 690^\circ, -390^\circ, -750^\circ$
3. a) $260^\circ, 980^\circ, -100^\circ, -460^\circ$
 b) $\frac{17\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$ c) $\frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$
5. a) $84^\circ 4' 26''$ b) 57.5°
7. a) $131^\circ 8' 23''$ b) 43.58°
9. a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{4}$
11. a) $\frac{5\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{5}$ c) $\frac{5\pi}{9}$
13. a) 120° b) 330° c) 135°
15. a) -630° b) 1260° c) 20°
17. $114^\circ 35' 30''$ 19. $286^\circ 28' 44''$ 21. 37.6833°
23. 115.4408° 25. $63^\circ 10' 8''$ 27. $310^\circ 37' 17''$
29. 2.5 cm 31. a) $2\pi \approx 6.28$ cm b) $8\pi \approx 25.13$ cm²
33. a) 1.75; $\frac{315}{\pi} \approx 100.27^\circ$ b) 14 cm²
35. a) $\frac{20\pi}{9} \approx 6.98$ m b) $\frac{80\pi}{9} \approx 27.93$ m²
37. En millas: a) 4189 b) 3142 c) 2094
 d) 698 e) 70
39. $\frac{1}{8}$ radián $\approx 7^\circ 10'$ 41. 7.29×10^{-5}
43. a) 80π b) $\frac{100\pi}{3} \approx 104.72$
45. a) $\frac{200\pi}{3} 90\pi$ b) $\frac{100\pi}{3}, \frac{105\pi}{4}$
47. a) $\frac{21\pi}{3} \approx 8.25$ ft b) $\frac{2}{3}d$
49. Grande 51. 192.08

EJERCICIOS 2.2

Nota: las respuestas están en el orden *sen*, *cos*, *tan*, *cot*, *sec*, *csc* para todo ejercicio que requiera los valores de las seis funciones trigonométricas

1. $\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}, -\frac{8}{15}, -\frac{15}{8}, -\frac{17}{15}, \frac{17}{8}$
3. $-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, -\frac{7}{24}, -\frac{24}{7}, \frac{25}{24}, -\frac{25}{7}$

5. a) $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ b) $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ c) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
 d) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

7. a) $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ b) $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ c) $\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
 d) $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Nota: I denota *indefinido*

9. a) (1, 0); 0, 1, 0, I, 1, I
 b) (-1, 0); 0, -1, 0, I, -1, I
11. a) (0, -1); -1, 0, I, 0, I, -1
 b) (0, 1); 1, 0, I, 0, I, 1
13. a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$
 b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$
15. a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}$
 b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
17. a) IV b) III c) II d) III
19. $\cot t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$ 21. $\sec t = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$
23. $\sin t = \frac{\sqrt{\sin^2 t - 1}}{\sin t}$ 25. $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{3}$
27. $-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}, \frac{13}{12}, -\frac{13}{5}$
29. $-\sqrt{\frac{8}{3}}, -\frac{1}{3}, \sqrt{8}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -3, -\frac{3}{\sqrt{8}}$
31. $\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}, \sqrt{15}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, -4, \frac{4}{\sqrt{15}}$

Ejercicios 33 al 54: se dan verificaciones características.

33. $\cos t \sec t = \cos t (1/\cos t) = 1$
35. $\sin t \sec t = \sin t (1/\cos t) = \sin t / \cos t = \tan t$
37. $\frac{\csc t}{\sec t} = \frac{1/\sin t}{1/\cos t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$
39. $(1 + \cos t)(1 - \cos t) = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$
41. $\cos^2 t (\sec^2 t - 1) = \cos^2 t (\tan^2 t) = \cos^2 t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \sin^2 t$
43. $\frac{\sin t}{\csc t} + \frac{\cos t}{\sec t} = \frac{\sin t}{1/\sin t} + \frac{\cos t}{1/\cos t} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$
45. $(1 + \sin t)(1 - \sin t) = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t = \frac{1}{\sec^2 t}$

$$47. \sec t - \cos t = \frac{1}{\cos t} - \cos t = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$$

$$= \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \sin t = \tan t \sin t$$

$$49. (\cot t + \csc t)(\tan t - \sec t)$$

$$= \cot t \tan t - \cot t \sec t + \csc t \tan t - \csc t \sec t$$

$$= \frac{1}{\tan t} \tan t - \frac{\cos t}{\sin t} \sec t + \frac{1}{\sin t \cos t} - \frac{1}{\sin t} \sec t$$

$$= 1 - \cos t + \frac{1}{\cos t} - 1 = \cos t + \sec t$$

$$= \sec t - \cos t$$

$$51. \sec^2 t \csc^2 t = (1 + \tan^2 t)(1 + \cot^2 t)$$

$$= 1 + \tan^2 + \cot^2 t + 1$$

$$= \sec^2 t + \csc^2 t$$

$$53. \log \csc t = \log \left(\frac{1}{\sin t} \right) = \log 1 - \log \sin t$$

$$= 0 - \log \sin t = -\log \sin t$$

$$55. \text{a) } -0.8 \quad \text{b) } -0.9 \quad \text{c) } 0.5, 2.6$$

$$57. \text{a) } -0.7 \quad \text{b) } 0.4 \quad \text{c) } 2.2, 4.1$$

EJERCICIOS 2.3

$$1. \text{a) } -1 \quad \text{b) } -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{c) } -1$$

$$3. \text{a) } 1 \quad \text{b) } -1 \quad \text{c) } 1$$

Ejercicios 5 al 10: se proporcionan comprobaciones características.

$$5. \sin(-t) \sec(-t) = (-\sin t) \sec t = (-\sin t)(1/\cos t)$$

$$= -\tan t$$

$$7. \frac{\cot(-t)}{\csc(-t)} = \frac{-\cot t}{-\csc t} = \frac{\cos t/\sin t}{1/\sin t} = \cos t$$

$$9. \frac{1}{\cos(-t)} - \tan(-t) \sin(-t) = \frac{1}{\cos t} - (-\tan t)(-\sin t)$$

$$= \frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t} \sin t$$

$$= \frac{1 - \sin^2 t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t}{\cos t} = \cos t$$

$$11. \text{a) } 0 \quad \text{b) } -1 \quad 13. \text{a) } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } -1$$

$$15. \text{a) } 1 \quad \text{b) } -\infty \quad 17. \text{a) } -1 \quad \text{b) } \infty$$

$$19. \text{a) } \infty \quad \text{b) } \sqrt{2} \quad 21. \text{a) } -\infty \quad \text{b) } 1$$

$$23. \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \quad 25. \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \quad 27. 0, 2\pi, 4\pi$$

$$29. \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \quad 31. \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$33. \text{a) } -\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{b) } -\frac{7\pi}{4} < t < -\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$$

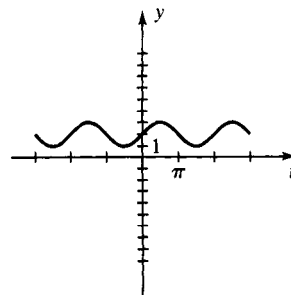
$$\text{c) } -2\pi \leq t < -\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}, \text{ y } \frac{3\pi}{4} < t \leq 2\pi$$

$$35. \text{a) } -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

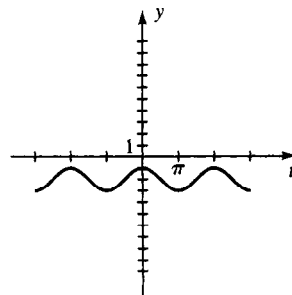
$$\text{b) } -2\pi \leq t < -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}, \text{ y } \frac{5\pi}{4} < t \leq 2\pi$$

$$\text{c) } -\frac{5\pi}{4} < t < -\frac{3\pi}{4}, \text{ y } \frac{3\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$$

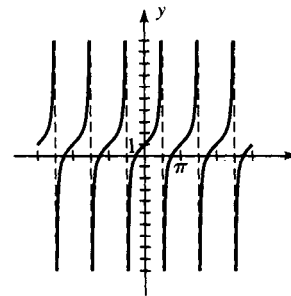
37.



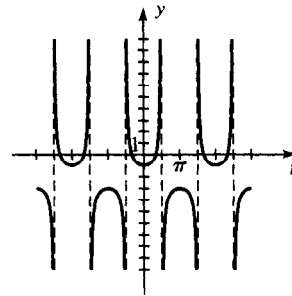
39.



41.



43.



$$45. \text{a) } \left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\text{b) } \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

47. a) La función tangente crece en *todos* los intervalos en que está definida. Entre -2π y 2π estos intervalos son:

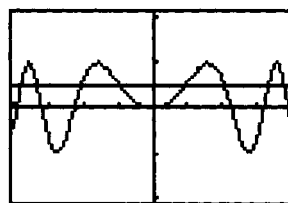
$$\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\text{y } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

b) La función tangente *nunca* es decreciente en los intervalos para los que esté definida.

$$51. \pm 0.72, \pm 1.62, \pm 2.61, \pm 2.98 \quad 53. (\pm 2.03, 1.82);$$

$$(\pm 4.91, -4.81)$$



$$[-3.14, 3.14] \text{ por } [-2.09, 2.09] \quad [-6.28, 6.28] \text{ por } [-5.19, 3.19]$$

$$55. 0$$

$$57. 1$$

$$59. 1$$

EJERCICIOS 2.4

1. $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{3}$
3. $-\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{\sqrt{29}}{5}$
5. $\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}, -4, -\frac{1}{4}, -\sqrt{17}, \frac{\sqrt{17}}{4}$
7. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$
9. $-\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, -\frac{\sqrt{53}}{2}, -\frac{\sqrt{53}}{7}$

Nota: I denota indefinido

11. a) 1, 0, 1, 0, 1, 1 b) 0, 1, 0, 1, 1, 1
c) -1, 0, 1, 0, 1, -1 d) 0, -1, 0, 1, -1, 1
13. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$ 15. $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}, \frac{13}{12}, \frac{13}{5}$
17. $\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{5}, \frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{6}{5}, \frac{6}{\sqrt{11}}$ 19. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$
21. $\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{21}}{5}, \frac{2}{21}, \frac{\sqrt{21}}{2}, \frac{5}{\sqrt{21}}, \frac{5}{2}$
23. $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}, \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
25. $\frac{b}{c}, \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}, \frac{b}{\sqrt{c^2-b^2}}, \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}, \frac{c}{\sqrt{c^2-b^2}}, \frac{c}{b}$
27. $x = 8; y = 4\sqrt{3}$ 29. $x = 7\sqrt{2}; y = 7$
31. $x = 4\sqrt{3}; y = 4$ 33. $200\sqrt{3} \approx 346.4 \text{ ft}$

EJERCICIOS 2.5

1. a) 60° b) 20° c) 22° d) 60°
3. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{4}$
5. a) $\pi - 3 \approx 8.1^\circ$ b) $\pi - 2 \approx 65.4^\circ$
c) $2\pi - 5.5 \approx 44.9^\circ$ d) $32\pi - 100 \approx 30.4^\circ$
7. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 9. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$
11. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\sqrt{3}$ 13. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\sqrt{3}$
15. a) -2 b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 17. a) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ b) 2
19. a) 0.958 b) 0.778 21. a) 0.387 b) 0.472
23. a) 2.650 b) 3.179 25. a) 30.46° b) $30^\circ 27'$
27. a) 74.88° b) $74^\circ 53'$
29. a) 24.94° b) $24^\circ 57'$
31. a) 76.38° b) $76^\circ 23'$
33. a) 0.9899 b) -0.1097 c) -0.1425
d) 0.7907 e) -11.2493 f) 1.3677

35. a) $214.3^\circ, 325.7^\circ$ b) $41.5^\circ, 318.5^\circ$
c) $70.3^\circ, 250.3^\circ$ d) $133.8^\circ, 313.8^\circ$
e) $153.6^\circ, 206.4^\circ$ f) $42.3^\circ, 137.7^\circ$
37. a) 0.43, 2.71 b) 1.69, 4.59 c) 1.87, 5.01
d) 0.36, 3.50 e) 0.96, 5.32 f) 3.35, 6.07
39. 0.28 cm

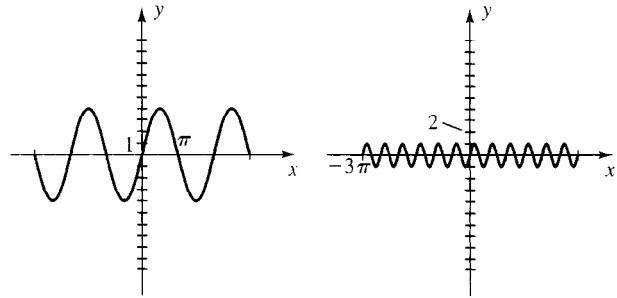
41. a) El máximo ocurre cuando el Sol sale por el este.

b) $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 35\%$

43. $(9, 9\sqrt{3})$

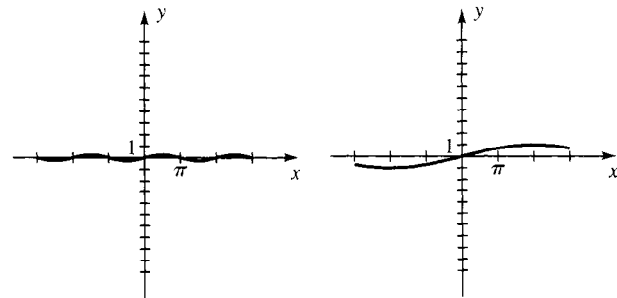
EJERCICIOS 2.6

1. a) 4, 2π b) 1, $\frac{\pi}{2}$



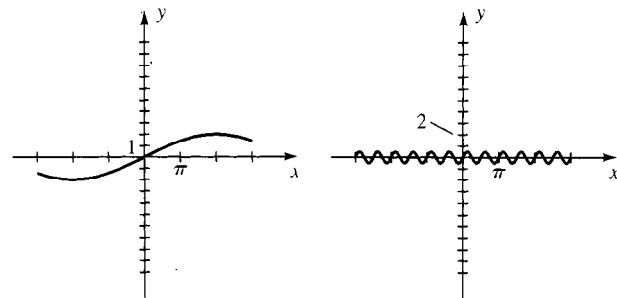
c) $\frac{1}{4}, 2\pi$

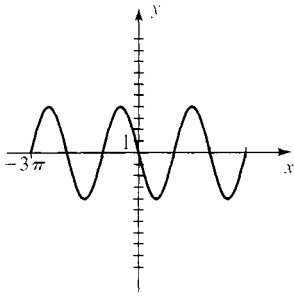
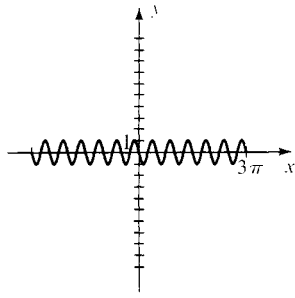
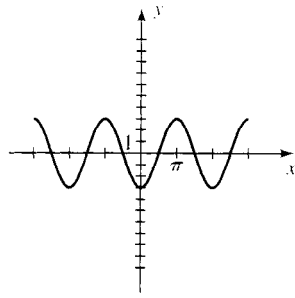
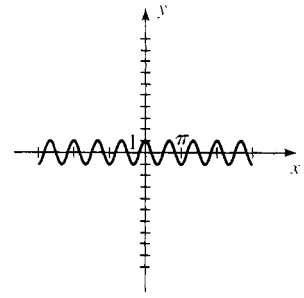
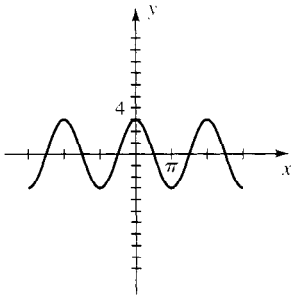
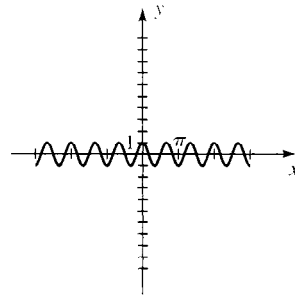
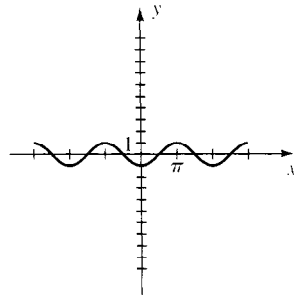
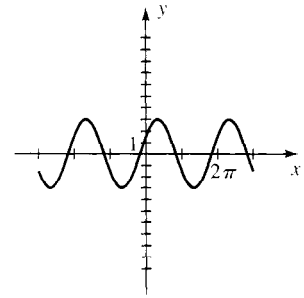
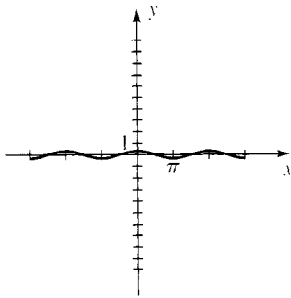
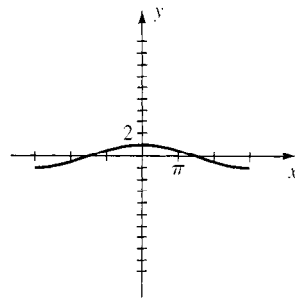
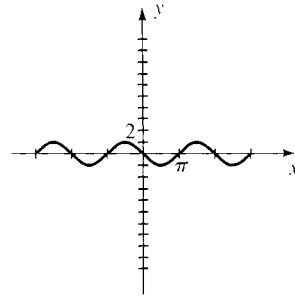
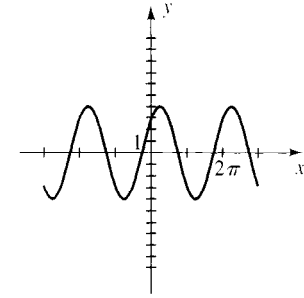
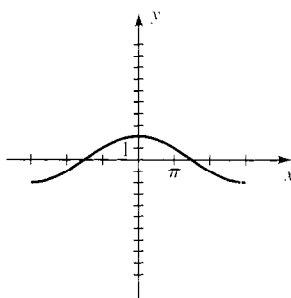
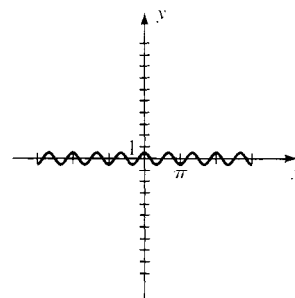
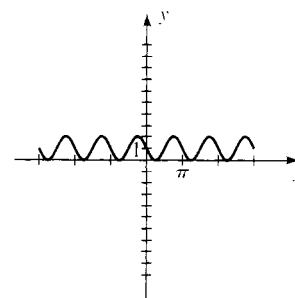
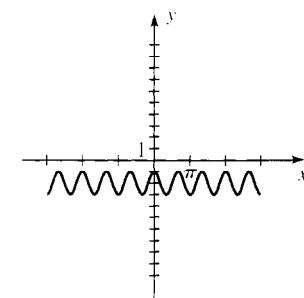
d) 1, 8π



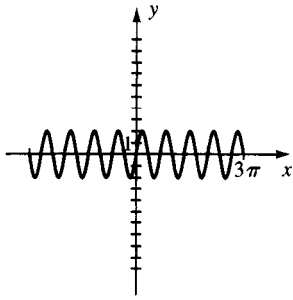
e) 2, 8π

f) $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$

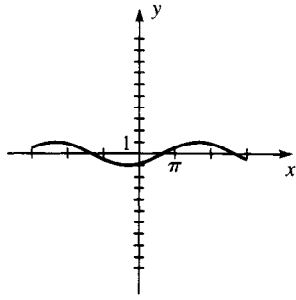


g) $4, 2\pi$

 h) $1, \frac{\pi}{2}$

 g) $3, 2\pi$

 h) $1, \frac{2\pi}{3}$

 3 a) $3, 2\pi$

 b) $1, \frac{2\pi}{3}$

 5. $1, 2\pi, \frac{\pi}{2}$

 7. $3, 2\pi, -\frac{\pi}{6}$

 c) $\frac{1}{3}, 2\pi$

 d) $1, 6\pi$

 9. $1, 2\pi, -\frac{\pi}{2}$

 11. $4, 2\pi, \frac{\pi}{4}$

 e) $2, 6\pi$

 f) $\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}$

 13. $1, \pi, \frac{\pi}{2}$

 15. $1, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$


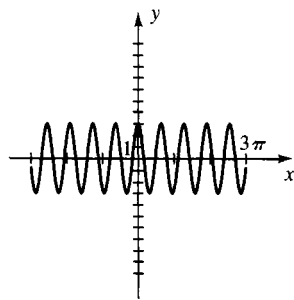
17. $2, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$



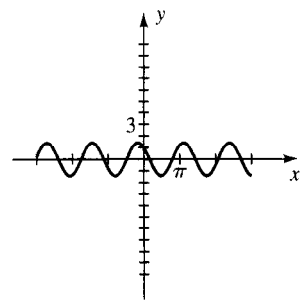
19. $1, 4\pi, \frac{2\pi}{3}$



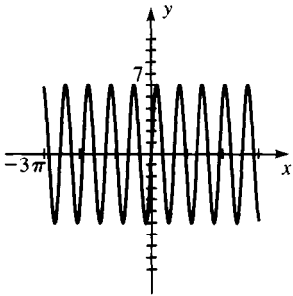
33. $3, 2, -4$



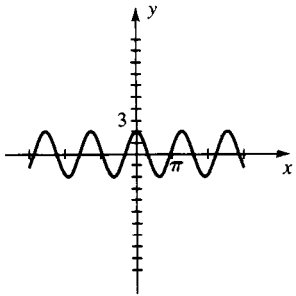
35. $\sqrt{2}, 4, \frac{1}{2}$



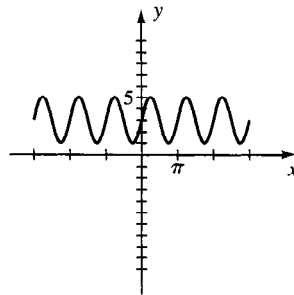
21. $6, 2, 0$



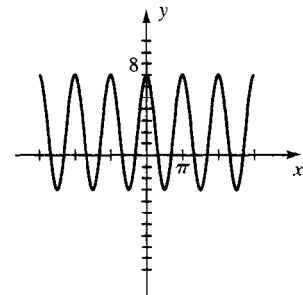
23. $2, 4, 0$



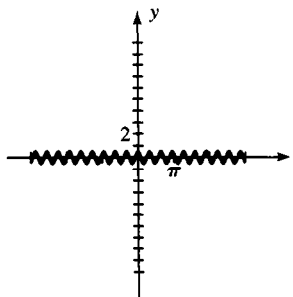
37. $2, \pi, \frac{\pi}{2}$



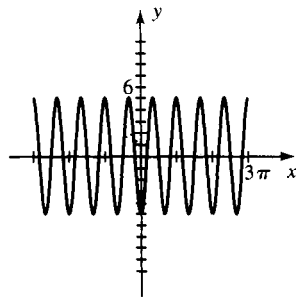
39. $5, \pi, -\pi$



25. $\frac{1}{2}, 1, 0$



27. $5, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$



41. a) $4, 2\pi, -\pi$

b) $y = 4 \sin(x + \pi)$

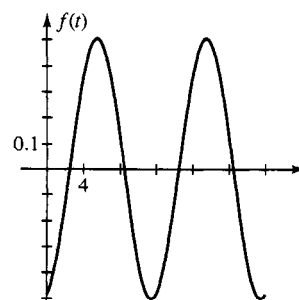
43. a) $2, 4, -3$

b) $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$

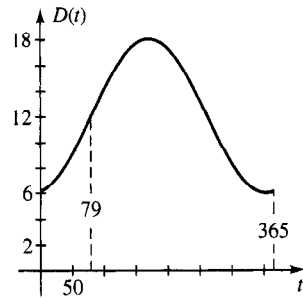
45. 4π

47. $a = 8, b = 4\pi$

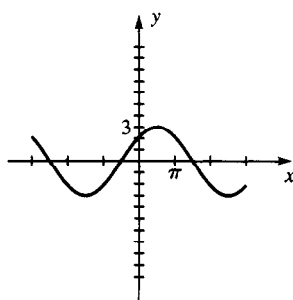
49.



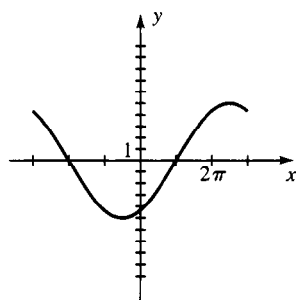
51.



29. $3, 4\pi, \frac{\pi}{2}$

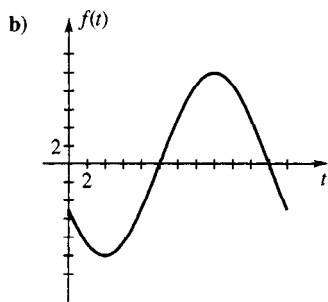


31. $5, 6\pi, -\frac{\pi}{2}$

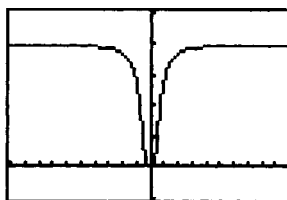


53 a) $f(t) = 10 \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 10)\right] + 0$ con $a = 10$

$b = \frac{\pi}{12}, c = -\frac{5\pi}{6}, d = 0$



61. $y = 4$

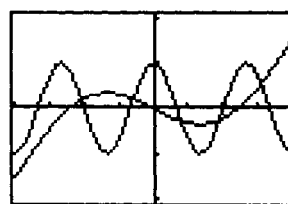


$[-20, 20] \text{ por } [-1, 5]$

63. $[-\pi, -1.63] \cup$

$[-0.45, 0.61] \cup$

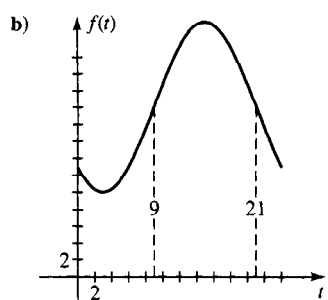
$[1.49, 2.42]$



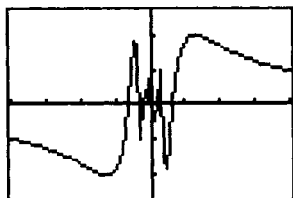
$[-3.14, 3.14] \text{ por } [-2.09, 2.09]$

55 a) $f(t) = 10 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right] + 20$ con $a = 10$,

$b = \frac{\pi}{12}, c = -\frac{3\pi}{4}, d = 20$

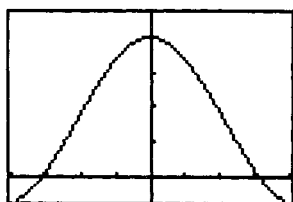


57. A medida que $x \rightarrow 0^-$ o $x \rightarrow 0^+$, y oscila entre -1 y 1 y no se acerca a un valor único.



$[-2, 2] \text{ por } [-1.33, 1.33]$

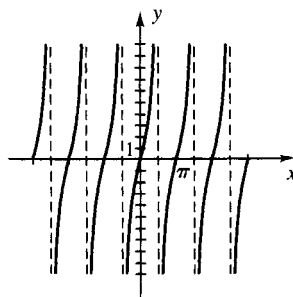
59. Conforme $x \rightarrow 0^-$ o $x \rightarrow 0^+$, es evidente que y se aproxima a 2.



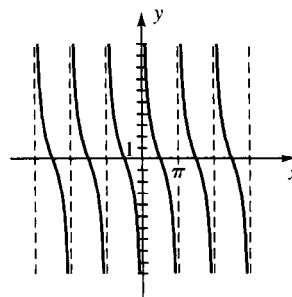
$[-2, 2] \text{ por } [-0.33, 2.33]$

EJERCICIOS 2.7

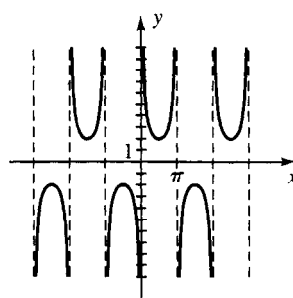
1. π



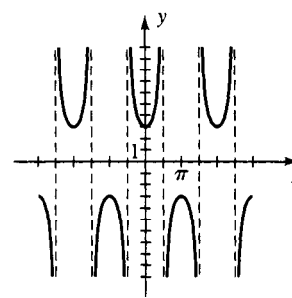
3. π



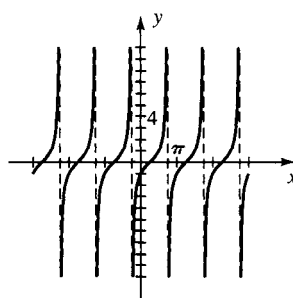
5. 2π



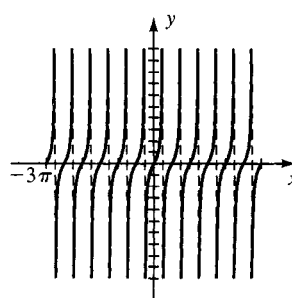
7. 2π



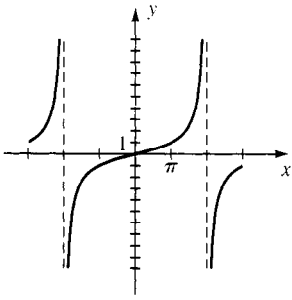
9. π



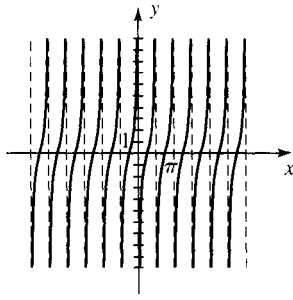
11. $\frac{\pi}{2}$



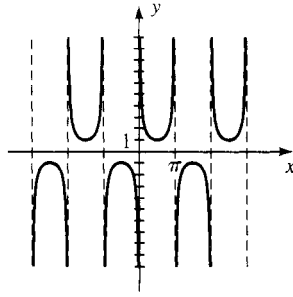
13. 4π



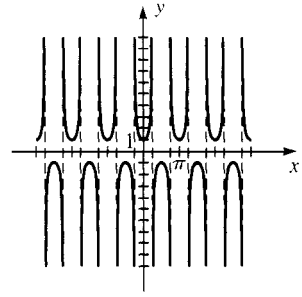
15. $\frac{\pi}{2}$



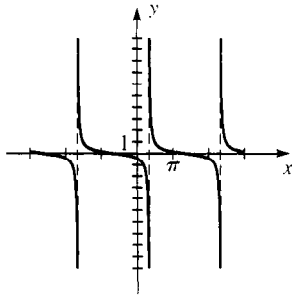
29. 2π



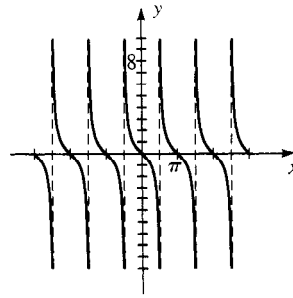
31. π



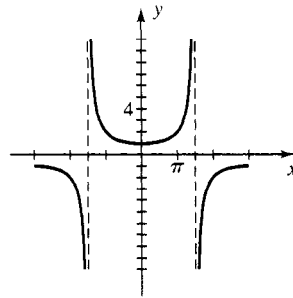
17. 2π



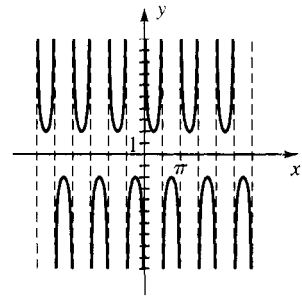
19. π



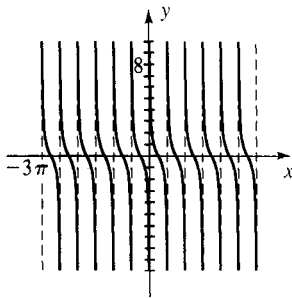
33. 6π



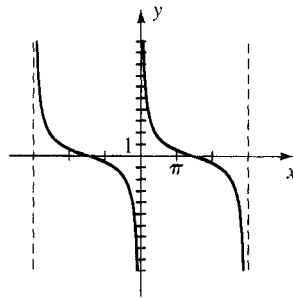
35. π



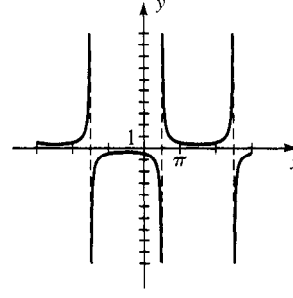
21. $\frac{\pi}{2}$



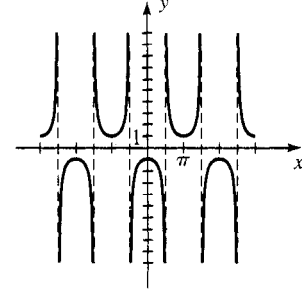
23. 3π



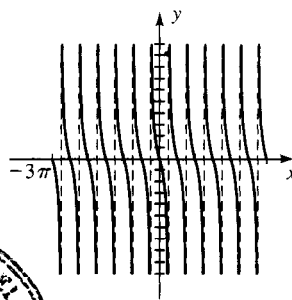
37. 4π



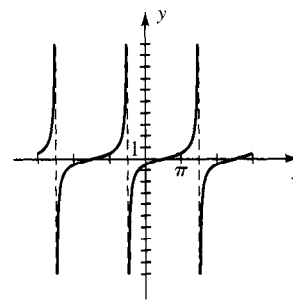
39. 2π



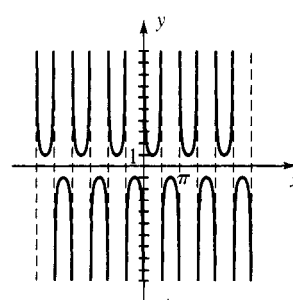
25. $\frac{\pi}{2}$



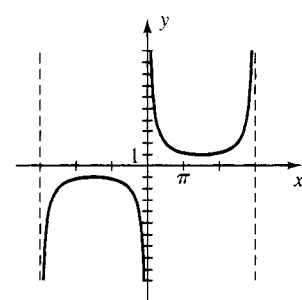
27. 2π

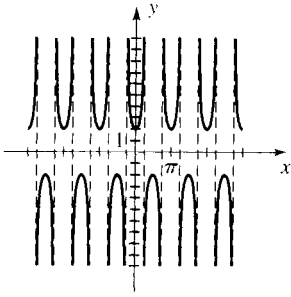
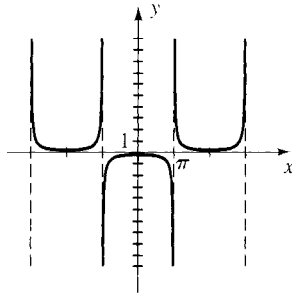


41. π

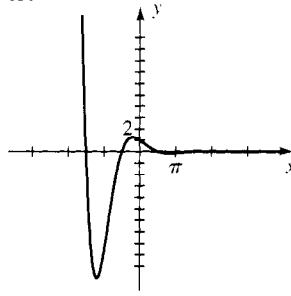


43. 6π

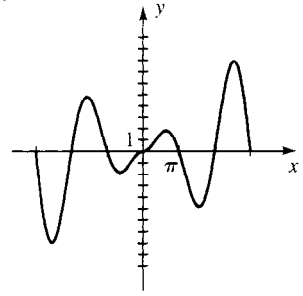


45. π

 47. 4π


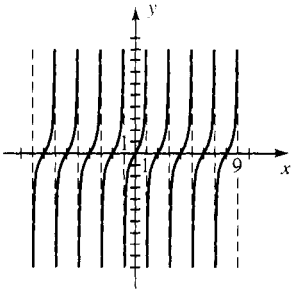
63.



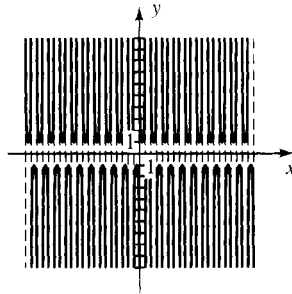
65.



49. 2

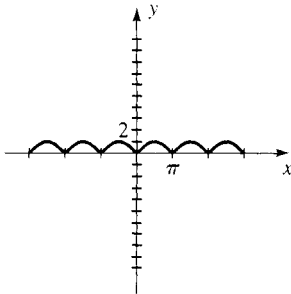


51. 1

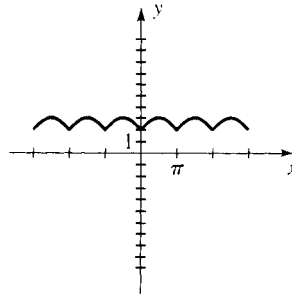


53. $y = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

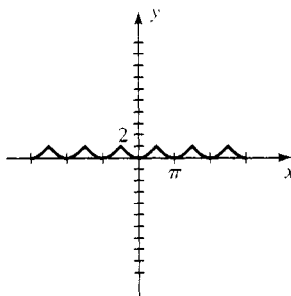
55.



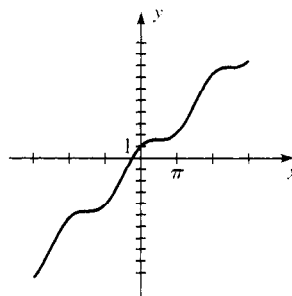
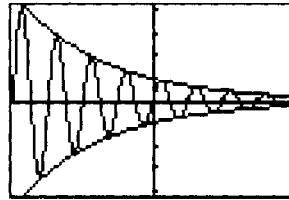
57.



59.



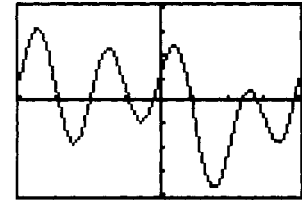
61.


 67. $e^{-x/4}$


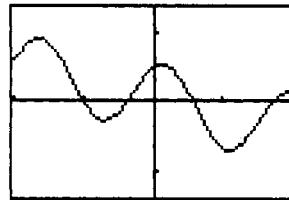
[-6.28, 6.28] por [-4.19, 4.19]

 69. $(-2.76, 3.09);$

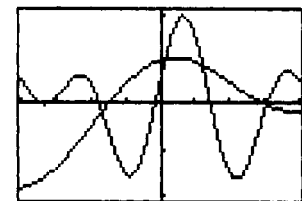
(1.23, -3.68)



[-3.14, 3.14] por [-4, 4]

 71. $[-0.70, 0.12]$


[-2, 2] por [-1.33, 1.33]

 73. $[-\pi, -1.31] \cup$
 $[0.11, 0.95] \cup [2.39, \pi]$


[-3.14, 3.14] por [-2.09, 2.09]

 75 a) $A_0 e^{-az}$

 b) $\frac{\alpha}{k} z_0$

 c) $\frac{\ln 2}{\alpha}$

EJERCICIOS 2.8

1. $\beta = 60^\circ, a = \frac{20}{3}\sqrt{3}, c = \frac{40}{3}\sqrt{3}$

3. $\alpha = 45^\circ, a = b = 15\sqrt{2}$

5. $\alpha = \beta = 45^\circ, c = 5\sqrt{2}$

7. $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, a = 15$

9. $\beta = 53^\circ, a \approx 18, c \approx 30$

11. $\alpha = 18^\circ 9', a \approx 78.7, c \approx 252.6$

13. $\alpha \approx 29^\circ, \beta \approx 61^\circ, c \approx 51$

15. $\alpha \approx 69^\circ, \beta \approx 21^\circ, a \approx 5.4$

17. $b = c \cos \alpha$

19. $a = b \cot \beta$

21. $c = a \csc \alpha$

23. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

25. $250\sqrt{3} + 4 \approx 437$ ft

27. 28 800 ft

29. 160 m

31. 9659 ft

33. a) 58 ft

b) 27 ft

35. $51^\circ 20'$

37. 16.3°

39. 1,459,379 ft²

41. 21.8°

43. 20.2 m

45. 29.7 km

47. 3944 mi

49. 126 mph

51. a) 45%

b) Cada satélite tiene un alcance de señal de más de 120°

53. $h = d \sin \alpha + c$

55. $h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$

57. $h = d(\tan \beta - \tan \alpha)$

59. N70°E; N40°W; S15°W; S25°E

61. a) 55 mi

b) S63°E

63. 324 mi

EJERCICIOS 2.9

1. a) $\omega = 200\pi$ rad/s

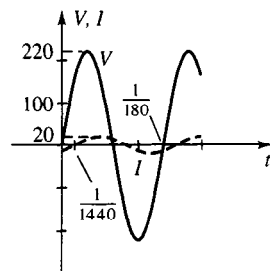
b) En cm: $x = 20 \cos 200\pi t$, $y = 20 \sin 200\pi t$

3. Amplitud, 10 cm; periodo $\frac{1}{3}$ s; frecuencia 3 osc/s. El punto está en el origen en $t = 0$. Se mueve hacia arriba con velocidad decreciente y llega al punto con coordenada 10 en $t = \frac{1}{12}$. Luego invierte su dirección, se desplaza hacia abajo y gana velocidad hasta que alcanza al origen en $t = \frac{1}{6}$; continúa descendiendo con velocidad decreciente y llega al punto con coordenada -10 en $t = \frac{1}{4}$. Luego invierte su dirección, asciende con velocidad creciente y regresa al origen en $t = \frac{1}{3}$.

5. Amplitud, 4 cm; periodo $\frac{4}{3}$ s; frecuencia $\frac{3}{4}$ osc/s. El movimiento es similar al del ejercicio 3, pero el punto comienza 4 unidades arriba del origen, baja y llega al origen en $t = \frac{1}{3}$ y el punto con coordenada -4 en $t = \frac{2}{3}$. Luego invierte su dirección, asciende y alcanza el origen en $t = 1$ y su punto inicial en $t = \frac{4}{3}$.

7. $d = 5 \cos \frac{2\pi}{3} t$

9. La corriente se atrasa a la fem en $\frac{1}{1440}$ de segundo.



11. a) $\frac{\pi}{15}$ rad/s

b) $h(t) = 60 - 50 \cos \frac{\pi}{15} t = 60 + 50 \sin \left(\frac{\pi}{15} t - \frac{\pi}{2} \right)$

13. a) 8 ft; 12 min

b) 105 km/h

15. $y = (4.5) \sin \left[\frac{\pi}{6} (t - 11) \right] + 7.5$

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE REPASO

1. $\frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ 2. $810^\circ, -120^\circ, 315^\circ, 900^\circ, 36^\circ$

3. a) 0.1 b) $0.2 m^2$ 4. a) $\frac{35\pi}{12}$ cm b) $\frac{175\pi}{16}$ cm²

5. $(-1, 0); (0, -1); (0, 1); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); (1, 0); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

6. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right); \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right); \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right); \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

7. a) $-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$

b) $\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}$

8. a) II

b) III

(c) IV

9. $\tan t = \sqrt{\sec^2 t - 1}$

10. $\cot t = \sqrt{\csc^2 t - 1}$

Ejercicios del 11 al 20: se dan verificaciones características.

11. $\sin t (\csc t - \sin t) = \sin t \csc t - \sin^2 t$

$= 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

12. $\cos t (\tan t + \cot t) = \cos t \cdot \frac{\sin t}{\cos t} + \cos t \cdot \frac{\cos t}{\sin t}$

$= \sin t + \frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t}$

$= \frac{1}{\sin t} = \csc t$

13. $(\cos^2 t - 1)(\tan^2 t + 1) = (\cos^2 t - 1)(\sec^2 t)$

$= \cos^2 t \sec^2 t - \sec^2 t$

$= 1 - \sec^2 t$

14. $\frac{\sec t - \cos t}{\tan t} = \frac{\frac{1}{\cos t} - \cos t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{\sin^2 t}{\sin t} = \sin t$

$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\tan t}{\sec t}$

15. $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} = \frac{1}{\tan^2 t} + \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t} = \cot^2 t + 1 = \csc^2 t$

16. $\frac{\sec t + \csc t}{\sec t - \csc t} = \frac{\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t}}{\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\sin t}} = \frac{\frac{\sin t + \cos t}{\cos t \sin t}}{\frac{\sin t - \cos t}{\cos t \sin t}}$

$= \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$

$$17. \frac{\cot t}{1 - \tan t} = \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{1 - \frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{\cos t - \sin t}{\cos t}} = \frac{(\cos t - \sin t) \cos t}{(\cos t - \sin t) \sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$$

$$18. \frac{1 + \sec t}{\tan t + \sec t} = \frac{1 + \frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t}} = \frac{\frac{\cos t + 1}{\cos t}}{\frac{\sin t(1 + \cos t)}{\cos t}} = \frac{1}{\sin t} = \csc t$$

$$19. \frac{\tan(-t) + \cot(-t)}{\tan t} = \frac{-\tan t - \cot t}{\tan t} = -\frac{\tan t}{\tan t} - \frac{\cot t}{\tan t} = -1 - \cot^2 t = -(1 + \cot^2 t) = -\csc^2 t$$

$$20. -\frac{1}{\csc(-t)} - \frac{\cot(-t)}{\sec(-t)} = -\frac{1}{-\csc t} - \frac{-\cot t}{\sec t} = \sin t + \frac{\cos t/\sin t}{1/\cos t} = \sin t + \frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} = \csc t$$

$$21. a) -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$c) -1, 0, 1, 0, 1, -1$$

$$22. \frac{\sqrt{33}}{7}, \frac{4}{7}, \frac{\sqrt{33}}{4}, \frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{7}{4}, \frac{7}{\sqrt{33}}$$

$$23. x = 6\sqrt{3}; y = 3\sqrt{3}$$

$$24. x = \frac{7}{2}\sqrt{2}; y = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$25. a) \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}$$

$$b) 65^\circ, 43^\circ, 8^\circ$$

$$26. a) 1, 0, 1, 0, 1, 1$$

$$b) \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$$

$$c) 0, 1, 0, 1, 1, 1$$

$$d) -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -2$$

$$27. a) -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

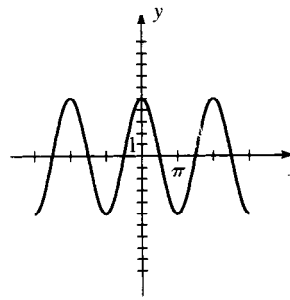
$$c) -\frac{1}{2}$$

$$d) -2$$

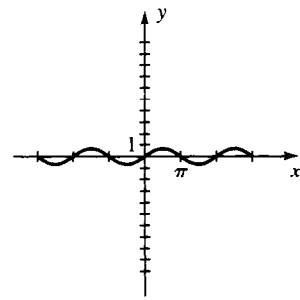
$$e) -1 \quad f) -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$28. 310.5^\circ$$

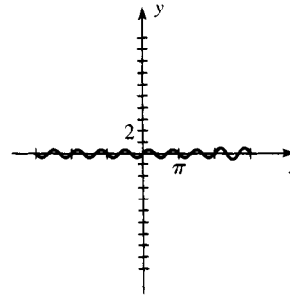
$$29. 5, 2\pi$$



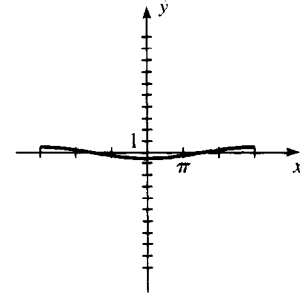
$$30. \frac{2}{3}, 2\pi$$



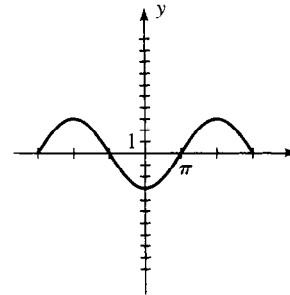
$$31. \frac{1}{3}, \frac{2\pi}{3}$$



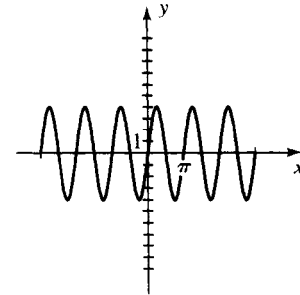
$$32. \frac{1}{1}, 6\pi$$



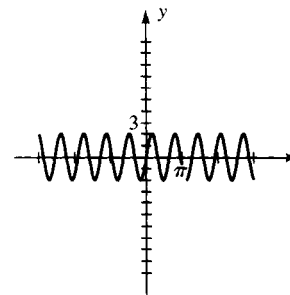
$$33. 3, 4\pi$$



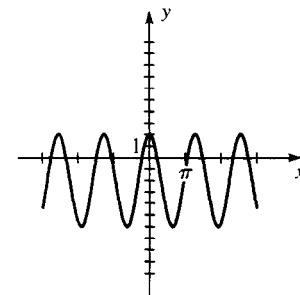
$$34. 4, \pi$$



$$35. 2, 2$$



$$36. 4, 4$$



37. a) 1.43, 2

b) $y = 1.43 \sin \pi x$

38. a) $3.27, 3\pi$

b) $y = -3.27 \sin \frac{2}{3}x$

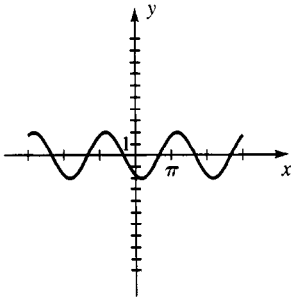
39. a) $3, \frac{4\pi}{3}$

b) $y = -3 \cos \frac{3}{2}x$

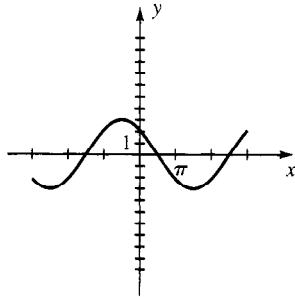
40. a) $2, \frac{\pi}{2}$

b) $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$

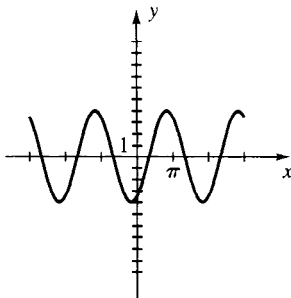
41.



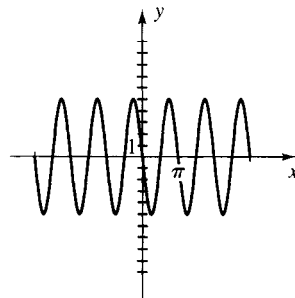
42.



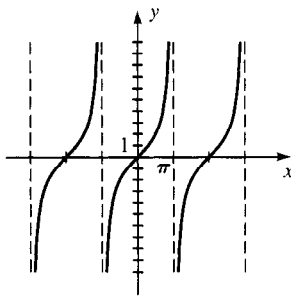
43.



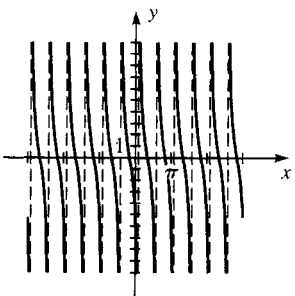
44.



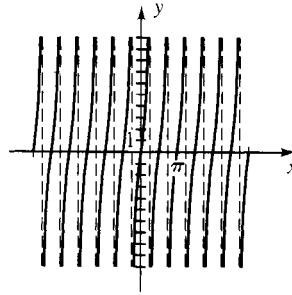
45.



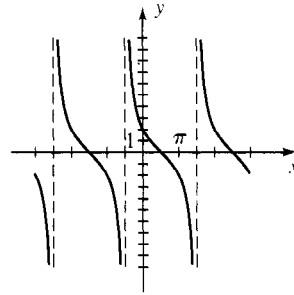
46.



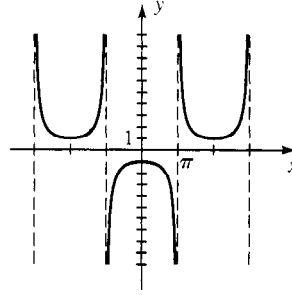
47.



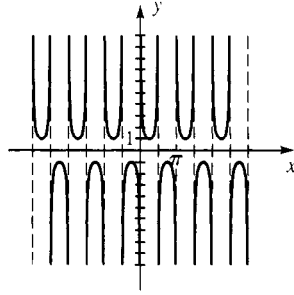
48.



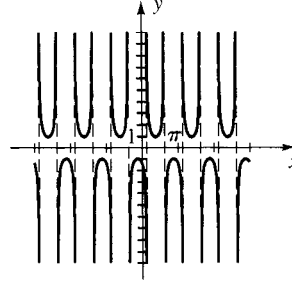
49.



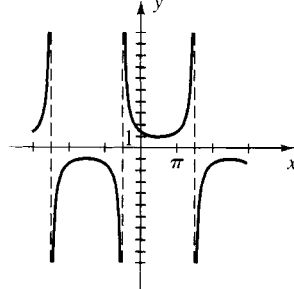
50.



51.



52.



53. $\alpha = 30^\circ, a \approx 23, c \approx 46$

54. $\beta = 35^\circ 20', a \approx 310, c \approx 380$

55. $\alpha \approx 68^\circ, \beta \approx 22^\circ, c \approx 67$

56. $\alpha \approx 13^\circ, \beta \approx 77^\circ, b = 40$

57. a) $\frac{109\pi}{6}$ b) 440.2 58. 1048 ft 59. 52°

60. Alrededor de 67 900 000 mi 61. $\frac{6\pi}{5}$ radianes = 216°

62. 250 ft 63. a) 231.0 ft b) 434.5 64. b) 2 mi

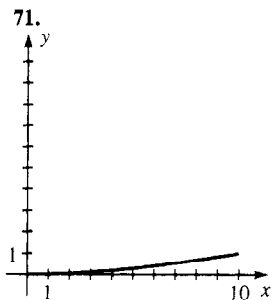
65. a) $T = h + d(\cos \alpha \tan \theta - \sin \alpha)$ b) 22.54 pies

66. a) $\frac{25}{3}\sqrt{3} \approx 14.43$ ft/candelas b) 37.47°

67. b) 4.69 68. a) 74.05 in b) 24.75 in

69. a) $S = 4a^2 \sec \theta$ b) $V = \frac{4}{3}a^3 \sec^2 \theta \cos \theta$

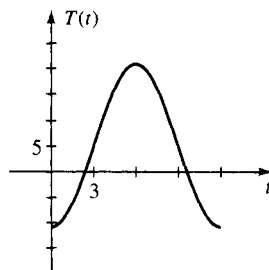
70. a) $h = R \sec \frac{S}{R} - R$ b) $h \approx 1650$ ft



72. $y = 98.6 + (0.3) \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12}\right)$

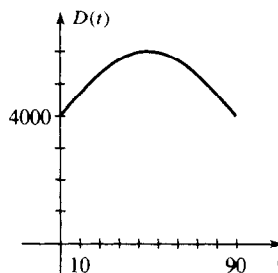
73 a)

b) 20.8°C el 1 de julio



74. a)

b) 45 días en el verano



75. a) El corcho tiene un movimiento armónico simple

b) $1 \leq t \leq 2$

76. a) $P = (\cos \omega t \sin \omega t)$

b) $x = 2 + \cos \alpha x$

c) Q es un movimiento armónico simple en el intervalo [1, 3]

CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1

Ejercicios 1 al 50: se proporcionan revisiones características para ejercicios 1, 5, 9, ..., 49

1. $\csc \theta - \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \cot \theta \csc \theta$

5. $\frac{\csc^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\csc^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1/\sin^2 \theta}{1/\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = \cot^2 \theta$

9. $\frac{1}{1 - \cos \gamma} + \frac{1}{1 + \cos \gamma} = \frac{1 + \cos \gamma + 1 - \cos \gamma}{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{2}{\sin^2 \gamma} = 2 \csc^2 \gamma$

13. $\csc^4 t - \cot^4 t = (\csc^2 t + \cot^2 t)(\csc^2 t - \cot^2 t) = (\csc^2 t + \cot^2 t)(1) = \csc^2 t + \cot^2 t$

17. $\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\sec x + 1} = \sec x - 1 = \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$

21. $\sin^4 r - \cos^4 r = (\sin^2 r - \cos^2 r)(\sin^2 r + \cos^2 r) = (\sin^2 r - \cos^2 r)(1) = \sin^2 r - \cos^2 r$

25. $(\sec t + \tan t)^2 = \left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)^2 = \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t} = \frac{(1 + \sin t)^2}{1 - \sin^2 t} = \frac{(1 + \sin t)^2}{(1 + \sin t)(1 - \sin t)} = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} = \frac{1 + \frac{1}{\sec \beta}}{1 - \frac{1}{\sec \beta}} = \frac{\sec \beta + 1}{\sec \beta - 1}$

29. $\frac{1 + \csc \beta}{\cot \beta + \cos \beta} = \frac{\cos \beta + 1}{\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \cos \beta} = \frac{\cos \beta + 1}{\frac{\cos \beta + \cos \beta \sin \beta}{\sin \beta}} = \frac{(\cos \beta + 1) \sin \beta}{\cos \beta (1 + \sin \beta)} = \frac{1}{\cos \beta} = \sec \beta$

33. $RS = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = LI$

37. $\frac{1}{\tan \beta + \cot \beta} = \frac{1}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\sin \beta \cos \beta}} = \sin \beta \cos \beta$

41. $LD = \sec^4 \phi - 4 \tan^2 \phi = (\sec^2 \phi)^2 - 4 \tan^2 \phi = (1 + \tan^2 \phi)^2 - 4 \tan^2 \phi = 1 + 2 \tan^2 \phi + \tan^4 \phi - 4 \tan^2 \phi = 1 - 2 \tan^2 \phi + \tan^4 \phi = (1 - \tan^2 \phi)^2 = LS$

45. $\log 10^{\tan t} = \log_{10} 10^{\tan t} = \tan t$, ya que $\log_a a^x = x$.

49. $\ln |\sec \theta + \tan \theta| = \ln \left| \frac{(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}{\sec \theta - \tan \theta} \right| = \ln \left| \frac{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}{\sec \theta - \tan \theta} \right| = \ln \left| \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \right| = \ln |1| - \ln |\sec \theta - \tan \theta| = -\ln |\sec \theta - \tan \theta|$

Ejercicios 51 al 62: se da un valor habitual de t o θ y de la desigualdad resultante.

51. $\pi, -1 \neq 1$ 53. $\frac{3\pi}{2}, 1 \neq -1$ 55. $\frac{\pi}{4}, 2 \neq 1$

57. $\pi, -1 \neq 1$ 59. $\frac{\pi}{4}, \cos \sqrt{2} \neq 1$ 61. $\pi, -5 \neq 0$

63. $a^3 \cos^3 \theta$ 65. $a \tan \theta \sin \theta$ 67. $a \sec \theta$

69. $\frac{1}{a^2} \cos^2 \theta$ 71. $a \tan \theta$ 73. $a^4 \sec^2 \theta \tan \theta$

75. La gráfica de f es la de $y = g(x) = -1$.

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2 x - \sec^4 x}{(1 - \sec^2 x) \cos^4 x} &= \frac{\sec^2 x (1 - \sec^2 x)}{-\tan^2 x \cos^4 x} \\ &= \frac{\sec^2 x \cos^2 x}{-(\sec^2 x / \cos^2 x) \cos^4 x} = \frac{\sec^2 x \cos^2 x}{-\sec^2 x \cos^2 x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

77. La gráfica de f es la de $y = g(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} \sec x (\sin x \cos x + \cos^2 x) - \sin x \\ = \sec x \cos x (\sin x + \cos x) - \sin x \\ = (\sin x + \cos x) - \sin x = \cos x \end{aligned}$$

EJERCICIOS 3.2

Ejercicios 1 al 34: n denota cualquier entero.

1. $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ 3. $\frac{\pi}{3} + \pi n$

5. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ 7. No hay solución porque $\frac{\pi}{2} > 1$

9. Toda θ , excepto $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n$ 11. $\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{11\pi}{12} + \pi n$

13. $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$ 15. $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$

17. $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{7\pi}{12} + \pi n$ 19. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$

21. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$ 23. $2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ 25. $\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n$

27. $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ 29. $\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + \pi n$

31. $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$ 33. $\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{5\pi}{12} + \pi n$

35. $\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ 37. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 39. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

41. $0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 43. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

45. No hay solución 47. $\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ 49. $0, \frac{\pi}{2}$ 51. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

53. Toda α en $[0, 2\pi)$, excepto $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$

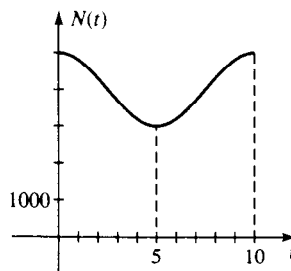
55. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ 57. $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 59. $15^\circ 30', 164^\circ 30'$

61. $135^\circ, 315^\circ, 116^\circ 30', 296^\circ 30'$

63. $41^\circ 50', 138^\circ 10', 194^\circ 30', 345^\circ 30'$ 65. 10

67. $t \approx 3.50$ y $t \approx 8.50$ 69. a) 3.29 b) 4

71. a) b) $0 \leq t < \frac{5}{3}$ y $\frac{25}{3} < t \leq 10$



73. $A\left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), B\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$

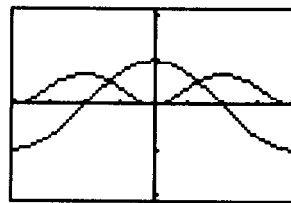
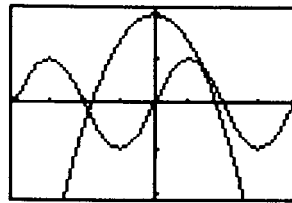
$C\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), D\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

75. $\frac{7}{360}$ 77. $[0, 1.27] \cup [5.02, 2\pi]$

79. $(0.39, 1.96) \cup (2.36, 3.53) \cup (5.11, 5.50)$

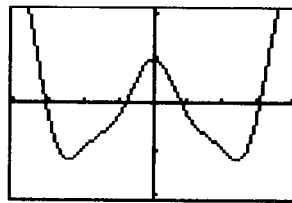
81. $-1.48, 1.08$

83. ± 1.00



$[-3.14, 3.14]$ por $[-2.09, 2.09]$ $[-3.14, 3.14]$ por $[-2.09, 2.09]$

85. $\pm 0.64, \pm 2.4287$. a) 37.6° b) 52.5°



$[-3.14, 3.14]$ por $[-2.09, 2.09]$

EJERCICIOS 3.3

1 a) $\cos 43^\circ 23'$ b) $\sin 16^\circ 48'$ c) $\cot \frac{\pi}{3}$

d) $\csc 72.72^\circ$

3 a) $\sin \frac{3\pi}{20}$ b) $\cos \left(\frac{2\pi-1}{4}\right)$ c) $\cot \left(\frac{\pi-2}{2}\right) 3\pi$

d) $\sec \left(\frac{\pi}{2} - 0.53\right)$

5. a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

7. a) $\sqrt{3} + 1$

b) $-2 - \sqrt{3}$

9. a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

11. $\cos 25^\circ$ $13 \sin(-5^\circ)$ $15 \sin(-5^\circ)$

17. a) $\frac{77}{85}$ b) $\frac{36}{85}$ c) 1

19. a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{24}{7}$ c) IV

21. a) $\frac{3\sqrt{21} - 8}{25} \approx 0.23$ b) $\frac{4\sqrt{21} + 6}{25} \approx 0.97$ c) 1

23. $\sin(\theta + \pi) = \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi$
 $= \sin \theta(-1) + \cos \theta(0) = -\sin \theta$

25. $\sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{5\pi}{2} - \cos x \sin \frac{5\pi}{2} = -\cos x$

27. $\cos(\theta - \pi) = \cos \theta \cos \pi + \sin \theta \sin \pi = -\cos \theta$

29. $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{3\pi}{2} - \sin x \sin \frac{3\pi}{2} = \sin x$

31. $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2}}{\cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}}$
 $= \frac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$

33. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cot(-\theta) = -\cot \theta$

35. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta + \cos \theta)$

37. $\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan u + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan u \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

39. $\cos(u + v) + \cos(u - v)$
 $= (\cos u \cos v - \sin u \sin v) + (\cos u \cos v + \sin u \sin v)$
 $= 2 \cos u \cos v$

41. $\sin(u + v) \cdot \sin(u - v)$
 $= (\sin u \cos v + \cos u \sin v) \cdot (\sin u \cos v - \cos u \sin v)$
 $= \sin^2 u \cos^2 v - \cos^2 u \sin^2 v$
 $= \sin^2 u(1 - \sin^2 v) - (1 - \sin^2 u) \sin^2 v$
 $= \sin^2 u - \sin^2 u \sin^2 v - \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v$
 $= \sin^2 u - \sin^2 v$

43. $\frac{1}{\cot \alpha - \cot \beta} = \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{1}{\frac{\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta}}$
 $= \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

45. $\sin(u + v + w) = \sin[(u + v) + w]$
 $= \sin(u + v) \cos w +$
 $\cos(u + v) \sin w$
 $= (\sin u \cos v + \cos u \sin v) \cos w +$
 $(\cos u \cos v - \sin u \sin v) \sin w$
 $= \sin u \cos v \cos w + \cos u \sin v \cos w +$
 $\cos u \cos v \sin w - \sin u \sin v \sin w$

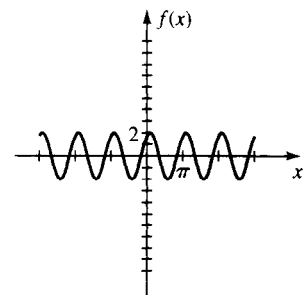
47. $\cot(u + v) = \frac{\cos(u + v)}{\sin(u + v)}$
 $= \frac{(\cos u \cos v - \sin u \sin v)(1/\sin u \sin v)}{(\sin u \cos v + \cos u \sin v)(1/\sin u \sin v)}$
 $= \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot v + \cot u}$

49. $\sin(u - v) = \sin[u + (-v)]$
 $= \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v)$
 $= \sin u \cos v - \cos u \sin v$

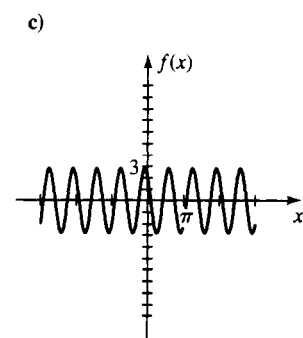
51. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$
 $= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$
 $= \frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h}$
 $= \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h}\right)$

53. $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 55. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ 57. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$ es

59. a) $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ c)
 b) $2, \pi, \frac{\pi}{12}$



61. a) $f(x) =$
 $2\sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$
 b) $2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{12}$



$$63. y = 10\sqrt{41} \cos\left(60\pi t - \tan^{-1} \frac{5}{4}\right) \\ \approx 10\sqrt{41} \cos(60\pi t - 0.8961)$$

$$65. a) y = \sqrt{13} \cos(t - C) \text{ con } \tan C = \frac{3}{2}; \sqrt{13}, 2\pi$$

$$b) t = C + \frac{\pi}{2} + \pi n \approx 2.55 + \pi n \text{ para todo entero } n \text{ no negativo}$$

$$67. a) p(t) = A \sin \omega t + B \sin(\omega t + \tau)$$

$$= A \sin \omega t + B(\sin \omega t \cos \tau + \cos \omega t \sin \tau)$$

$$= (B \sin \tau) \cos \omega t + (A + B \cos \tau) \sin \omega t$$

$$= a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$\text{con } a = B \sin \tau \text{ y } b = A + B \cos \tau$$

$$b) C^2 = (B \sin \tau)^2 + (A + B \cos \tau)^2$$

$$= B^2 \sin^2 \tau + A^2 + 2AB \cos \tau + B^2 \cos^2 \tau$$

$$= A^2 + B^2(\sin^2 \tau + \cos^2 \tau) + 2AB \cos \tau$$

$$= A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau$$

$$69. a) C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau \leq A^2 + B^2 + 2AB, \\ \text{porque } \cos \tau \leq 1 \text{ y } A > 0, B > 0. \text{ Por lo tanto} \\ C^2 \leq (A + B)^2, \text{ de aqu\u00ed que } C \leq A + B.$$

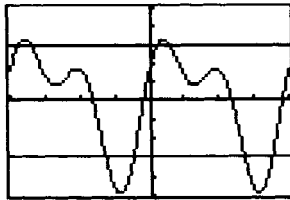
$$b) 0, 2\pi \quad c) \cos \tau > -B/(2A)$$

$$71. (-2.97, -2.69)$$

$$(-1.00, -0.37),$$

$$(0.17, 0.46),$$

$$(2.14, 2.77)$$



$[-3.14, 3.14]$ por $[-5, 5]$

EJERCICIOS 3.4

$$1. \frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, -\frac{24}{7} \quad 3. -\frac{4}{9}\sqrt{2}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{7}\sqrt{2}$$

$$5. \frac{1}{10}\sqrt{10}, \frac{3}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{3}$$

$$7. -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 1$$

$$9. a) \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} \quad b) \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3} \quad c) \sqrt{2} + 1$$

$$11. \sin 10\theta = \sin(2 \cdot 5\theta) = 2 \sin 5\theta \cos 5\theta$$

$$13. 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) \\ = 2 \sin x$$

$$15. (\sin t + \cos t)^2 = \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t \\ = 1 + \sin 2t$$

$$17. \sin 3u = \sin(2u + u) = \sin 2u \cos u + \cos 2u \sin u \\ = (2 \sin u \cos u) \cos u + (1 - 2 \sin^2 u) \sin u \\ = 2 \sin u \cos^2 u + \sin u - 2 \sin^3 u \\ = 2 \sin u(1 - \sin^2 u) + \sin u - 2 \sin^3 u \\ = 2 \sin u - 2 \sin^3 u + \sin u - 2 \sin^3 u \\ = 3 \sin u - 4 \sin^3 u = \sin u(3 - 4 \sin^2 u)$$

$$19. \cos 4\theta = \cos(2 \cdot 2\theta) = 2 \cos^2 2\theta - 1 \\ = 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\ = 2(4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1) - 1 \\ = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$$

$$21. \sec^4 t = (\sec^2 t)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 \\ = \frac{1}{4}(1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) \\ = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4t}{2}\right) \\ = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4t \\ = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$$

$$23. \sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sec^2 \theta}\right) - 1} \\ = \frac{1}{2 - \sec^2 \theta} = \frac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta} \\ = \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} = 1$$

$$25. 2 \sin^2 2t + \cos 4t = 2 \sin^2 2t + \cos(2 \cdot 2t) \\ = 2 \sin^2 2t + (1 - \sin^2 2t) = 1$$

$$27. \tan 3u = \tan(2u + u) = \frac{\tan 2u + \tan u}{1 - \tan 2u \tan u} \\ = \frac{\frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} + \tan u}{1 - \frac{2 \tan^2 u}{1 - \tan^2 u} \cdot \tan^2 u} = \frac{\frac{2 \tan u + \tan u - \tan^3 u}{1 - \tan^2 u}}{\frac{1 - \tan^2 u - 2 \tan^2 u}{1 - \tan^2 u}} \\ = \frac{3 \tan u - \tan^3 u}{1 - 3 \tan^2 u} = \frac{\tan u(3 - \tan^2 u)}{1 - 3 \tan^2 u}$$

$$29. \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{8} \cos 2\theta$$

$$31. \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 8x \quad 33. 0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$35. \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi \quad 37. 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad 39. 0, \frac{\theta}{3}, \frac{5\theta}{3}$$

$$43. a) 1.20, 5.09$$

$$b) P\left(\frac{2\pi}{3}, -1.5\right), Q(\pi, -1), R\left(\frac{4\pi}{3}, -1.5\right)$$

$$45. a) -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$b) 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}$$

$$47. b) \text{ S\u00ed, el punto } B \text{ est\u00e1 a 25 millas de } A.$$

49. a) $V = \frac{5}{2} \sin \theta$ b) 53.13° 51 b) 12.43 mm

 53. La gráfica de f es la de $y = g(x) = \tan x$.

$$\frac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x + \cos x + 1} = \frac{2 \sin x \cos x + \sin x}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x + 1}$$

$$= \frac{\sin x(2 \cos x + 1)}{\cos x(2 \cos x + 1)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

EJERCICIOS 3.5

1. $\frac{1}{2} \cos 4t - \frac{1}{2} \cos 10t$ 3. $\frac{1}{2} \cos 2u + \frac{1}{2} \cos 10u$

5. $\sin 12\theta + \sin 6\theta$ 7. $\frac{3}{2} \sin 3x + \frac{3}{2} \sin x$

9. $2 \sin 4\theta \cos 2\theta$ 11. $-2 \sin 4x \sin x$

13. $-2 \cos 5t \sin 2t$ 15. $2 \cos \frac{3}{2}x \cos \frac{1}{2}x$

17. $\frac{\sin 4t + \sin 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \frac{2 \sin 5t \cos t}{2 \sin 5t \sin t} = \cot t$

19. $\frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(u+v) \cos \frac{1}{2}(u-v)}{2 \cos \frac{1}{2}(u+v) \cos \frac{1}{2}(u-v)} = \tan \frac{1}{2}(u+v)$

21. $\frac{\sin u - \sin v}{\sin u + \sin v} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(u+v) \sin \frac{1}{2}(u-v)}{2 \sin \frac{1}{2}(u+v) \cos \frac{1}{2}(u-v)}$

$$= \cot \frac{1}{2}(u+v) \tan \frac{1}{2}(u-v)$$

$$= \frac{\tan \frac{1}{2}(u-v)}{\tan \frac{1}{2}(u+v)}$$

23. $4 \cos x \cos 2x \sin 3x = 2 \cos 2x (2 \sin 3x \cos x)$

$$= 2 \cos 2x (\sin 4x + \sin 2x)$$

$$= (2 \cos 2x \sin 4x) + (2 \cos 2x \sin 2x)$$

$$= [\sin 6x - \sin(-2x)] + (\sin 4x - \sin 0)$$

$$= \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$$

25. $\frac{1}{2} \sin [(a+b)x] + \frac{1}{2} \sin [(a-b)x]$ 27. $\frac{\pi}{4}n$

29. $\frac{\pi}{2}n$ 31. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$

33. $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}n, \frac{2\pi}{3}n$ 35. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

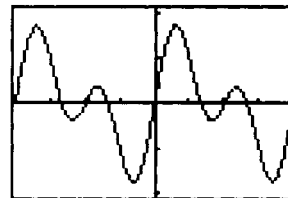
37. $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}$

39. $f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{l}(x+kt) + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{l}(x-kt)$

41. a) $0, \pm 1.05, \pm 1.57,$

$$\pm 2.09, \pm 3.14$$

b) $0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \pi$


 $[-3.14, 3.14]$ por $[-2.09, 2.09]$

 43. La gráfica de f es la de $y = g(x) = \tan 2x$.

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{\sin 2x + (\sin 3x + \sin x)}{\cos 2x + (\cos 3x + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin 2x + 2 \sin 2x \cos x}{\cos 2x + 2 \cos 2x \cos x}$$

$$= \frac{\sin 2x(1 + 2 \cos x)}{\cos 2x(1 + 2 \cos x)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

EJERCICIOS 3.6

1. a) $-\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{3}$

3. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$

5. a) No definido b) No definido c) $\frac{\pi}{4}$

7. a) $-\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 14

9. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{6}$

11. a) $-\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4}$

13. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) No definido

15. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{34}}{5}$ c) $\frac{4}{\sqrt{15}}$

17. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) 0 c) $-\frac{77}{36}$

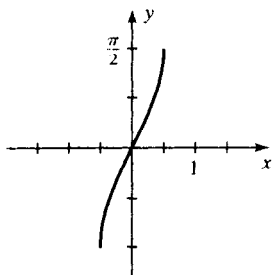
19 a) $-\frac{24}{25}$ b) $-\frac{161}{289}$ c) $\frac{24}{7}$

21. a) $-\frac{1}{10}\sqrt{2}$ b) $\frac{4}{17}\sqrt{17}$ c) $\frac{1}{2}$

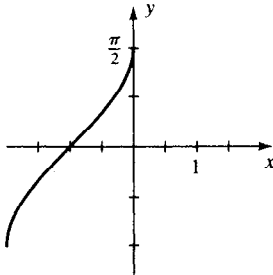
23. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 25. $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$ 27. $2x\sqrt{1-x^2}$

29. $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ 31. a) $-\frac{\pi}{2}$ b) 0 b) $\frac{\pi}{2}$

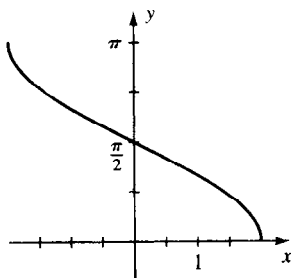
33.



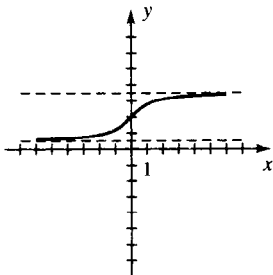
35.



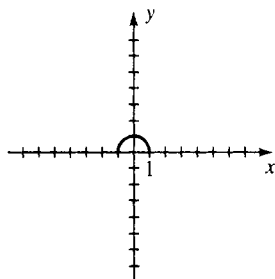
37.



39.



41.



43. a) $2 \leq x \leq 4$

b) $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

c) $x = \sin 2y + 3$

45. a) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ b) $0 \leq y \leq 4\pi$

c) $x = \frac{3}{2} \cos \frac{1}{4}y$

47. $x = \sin^{-1}(-y - 3)$

49. $x = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2}(15 - y)\right]$

51. $x = x_R \circ x = \pi - x_R$ donde $x_R = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4} \sin y\right)$

53. $\cos^{-1}(-1 + \sqrt{2}) \approx 1.1437$,

$2\pi - \cos^{-1}(-1 + \sqrt{2}) \approx 5.1395$

55. $\tan^{-1} \frac{1}{4}(-9 + \sqrt{57}) \approx -0.3478$,

$\tan^{-1} \frac{1}{4}(-9 - \sqrt{57}) \approx -1.3337$

57. $\cos^{-1} \frac{1}{5} \sqrt{15} \approx 0.6847$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5} \sqrt{15}\right) \approx 2.4569$,

$\cos^{-1} \frac{1}{3} \sqrt{3} \approx 0.9553$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3} \sqrt{3}\right) \approx 2.1863$

59. $\sin^{-1}\left(\pm \frac{1}{6} \sqrt{30}\right) \approx \pm 1.1503$

61. a) 1.65 m b) 0.92 m c) 0.43 m

63. a) $\alpha = \theta - \sin^{-1} \frac{d}{k}$ b) 40°

65. Sea $\alpha = \sin^{-1} x$ y $\beta = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$; por lo tanto, $\sin \alpha = x$ y

$\sin \beta = x$. Como la función \sin o es biunívoca en

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos $\alpha = \beta$

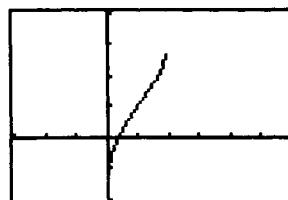
67. Sea $\alpha = \arcsen(-x)$ y $\beta = \arcsen x$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$; por lo tanto, $\sin \alpha = -x$ y $\sin \beta = x$. Consecuentemente, $\sin \alpha = -\sin \beta = \sin(-\beta)$. Dado que la función \sin o es biunívoca en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos $\alpha = -\beta$.

69. Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan(1/x)$. Dado que $x > 0$, tenemos $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, y $0 < \alpha + \beta < \pi$; por lo tanto,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{x + (1/x)}{1 - x \cdot (1/x)} = \frac{x + (1/x)}{0}.$$

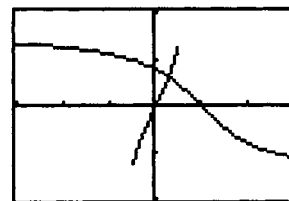
Como el denominador es 0, $\tan(\alpha + \beta)$ es indefinido y por lo tanto $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

71. Dominio: $[0, 2]$;
intervalo: $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



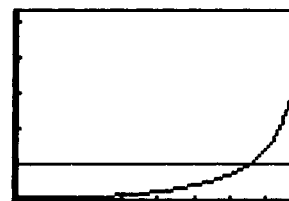
$[-3, 6]$ por $[-2, 4]$

73. 0.29



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

75. $\theta \approx 1.25 \approx 72^\circ$



$[0, 1.57]$ por $[0, 1.05]$

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE REPASO

1. $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = (\csc^2 x)(\sin^2 x) = 1$
2. $\cos \theta + \sin \theta \tan \theta = \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 $= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$
3. $\frac{(\sec^2 \theta - 1) \cot \theta}{\tan \theta \sin \theta + \cos \theta} = \frac{(\tan^2 \theta) \cot \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin \theta + \cos \theta}$
 $= \frac{\tan \theta}{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta / \cos \theta}{1/\cos \theta} = \sin \theta$
4. $(\tan x + \cot x)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \right)^2$
 $= \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \sec^2 x \csc^2 x$
5. $\frac{1}{1 + \sin t} \cdot \frac{1 - \sin t}{1 - \sin t} = \frac{1 - \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t}$
 $= \frac{1 - \sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos t}$
 $= \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t} \right) \cdot \sec t$
 $= (\sec t - \tan t) \sec t$
6. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)/\cos \alpha \cos \beta}{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)/\cos \alpha \cos \beta}$
 $= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
7. $\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\cot u}}{1 - \frac{1}{\cot^2 u}} = \frac{\frac{2}{\cot u}}{\frac{\cot^2 u - 1}{\cot^2 u}}$
 $= \frac{2 \cot u}{\cot^2 u - 1} = \frac{2 \cot u}{(\csc^2 u - 1) - 1} = \frac{2 \cot u}{\csc^2 u - 2}$
8. $\cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \cos v}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\sec v}}{2} = \frac{\sec v + 1}{2 \sec v}$
 $= \frac{1 + \sec v}{2 \sec v}$
9. $\frac{\tan^3 \phi - \cot^3 \phi}{\tan^2 \phi + \csc^2 \phi} = \frac{(\tan \phi - \cot \phi)[(\tan^2 \phi + \tan \phi + \tan \phi \cot \phi + \cot^2 \phi)]}{[\tan^2 \phi + (1 + \cot^2 \phi)]}$
 $= \tan \phi - \cot \phi$
10. LI $= \frac{\sin u + \sin v}{\csc u + \csc v} = \frac{\sin u + \sin v}{\frac{1}{\sin u} + \frac{1}{\sin v}} = \frac{\sin u + \sin v}{\frac{\sin v + \sin u}{\sin u \sin v}}$
 $= \sin u \sin v$
 LD $= \frac{1 - \sin u \sin v}{-1 + \csc u \csc v} = \frac{1 - \sin u \sin v}{-1 + \frac{1}{\sin u \sin v}}$
 $= \frac{1 - \sin u \sin v}{\frac{1 - \sin u \sin v}{\sin u \sin v}} = \sin u \sin v$

En virtud de que los lados son iguales a la misma expresión y los pasos son reversibles, se comprueba la identidad.

11. $\left(\frac{\sin^2 x}{\tan^4 x} \right) \left(\frac{\csc^3 x}{\cot^6 c} \right)^2 = \left(\frac{\sin^6 x}{\tan^{12} x} \right) \left(\frac{\csc^6 x}{\cot^{12} x} \right) = \frac{(\sin x \csc x)^6}{(\tan x \cot x)^{12}} = \frac{(1)^6}{(1)^{12}} = 1$
12. $\frac{\cos \gamma}{1 - \tan \gamma} + \frac{\sin \gamma}{1 - \cot \gamma} = \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma - \sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma - \cos \gamma}$
 $= \frac{\cos^2 \gamma}{\cos \gamma - \sin \gamma} + \frac{\sin^2 \gamma}{\sin \gamma - \cos \gamma}$
 $= \frac{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma}{\cos \gamma - \sin \gamma}$
 $= \frac{(\cos \gamma + \sin \gamma)(\cos \gamma - \sin \gamma)}{\cos \gamma - \sin \gamma}$
 $= \cos \gamma + \sin \gamma$
13. $\frac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = \frac{\cos t}{\sec t - \tan t} = \frac{\cos t}{\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t}}$
 $= \frac{\cos t}{\frac{1 - \sin t}{\cos t}} = \frac{\cos^2 t}{1 - \sin t} = \frac{1 - \sin^2 t}{1 - \sin t}$
 $= \frac{(1 - \sin t)(1 + \sin t)}{1 - \sin t} = 1 + \sin t$
14. $\frac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\sin(-t)} = \frac{-\cot t - \csc t}{-\sin t} = \frac{\cot t + \frac{1}{\sin t}}{\sin t}$
 $= \frac{\cos t + 1}{\sin^2 t} = \frac{\cos t + 1}{\cos^2 t + 1 - \cos^2 t}$
 $= \frac{\cos t + 1}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \frac{1}{1 - \cos t}$
15. $\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{1 + \cos t} = \frac{\sqrt{(1 - \cos t)(1 - \cos t)}}{(1 + \cos t)(1 - \cos t)} = \frac{\sqrt{(1 - \cos t)^2}}{1 - \cos^2 t}$
 $= \frac{\sqrt{(1 - \cos t)^2}}{\sin^2 t} = \frac{|1 - \cos t|}{|\sin t|} = \frac{1 - \cos t}{|\sin t|}$
 porque $(1 - \cos t) \geq 0$.
16. $\frac{\sqrt{1 - \sin \theta}}{1 + \sin \theta} = \frac{\sqrt{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}}{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{(1 + \sin \theta)^2}$
 $= \frac{\sqrt{\cos^2 \theta}}{(1 + \sin \theta)^2} = \frac{|\cos \theta|}{|1 + \sin \theta|} = \frac{|\cos \theta|}{1 + \sin \theta}$
 porque $(1 + \sin \theta) \geq 0$.
17. $\cos \left(x - \frac{5\pi}{2} \right) = \cos x \cos \frac{5\pi}{2} + \sin x \sin \frac{5\pi}{2} = \sin x$
18. $\tan \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\tan x + \tan \frac{3\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{3\pi}{4}} = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$
19. $\frac{1}{4} \sin 4\beta = \frac{1}{4} \sin (2 \cdot 2\beta) = \frac{1}{4} (2 \sin 2\beta \cos 2\beta)$
 $= \frac{1}{2} (2 \sin \beta \cos \beta)(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$
 $= \sin \beta \cos^3 \beta - \cos \beta \sin^3 \beta$

20. $\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \csc \theta - \cot \theta$

21. $\sin 8\theta = 2 \sin 4\theta \cos 4\theta$

$$\begin{aligned} &= 2(2 \sin 2\theta \cos 2\theta)(1 - 2 \sin^2 2\theta) \\ &= 8 \sin \theta \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) [1 - 2(2 \sin \theta \cos \theta)^2] \\ &= 8 \sin \theta \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) (1 - 8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

22. Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$. Como

$-1 < x < 1$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Así $\tan \alpha = x$ y

$\tan \beta = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan 2\alpha$. Dado que la

función tangente es biunívoca $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tenemos $\beta = 2\alpha$

o, lo que es equivalente $\alpha = \frac{1}{2} \beta$.

23. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 24. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ 25. $0, \pi$

26. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 27. $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

28. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 29. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ 30. $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$

31. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 32. Toda x en $[0, 2\pi)$ excepto $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

33. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 34. $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

35. $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}, \frac{19}{4}, \frac{23}{4}$ 36. $0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 37. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

38. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

39. $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

40. $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$ 41. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 42. $-2-\sqrt{3}$

43. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 44. $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$ 45. $\frac{84}{85}$

46. $-\frac{13}{85}$ 47. $-\frac{84}{13}$ 48. $-\frac{36}{77}$ 49. $\frac{36}{85}$

50. $-\frac{36}{85}$ 51. $\frac{240}{289}$ 52. $-\frac{161}{289}$ 53. $\frac{24}{7}$

54. $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ 55. $\frac{1}{3}$ 56. $\frac{5}{34}\sqrt{34}$

57. a) $\frac{1}{2} \cos 3t - \frac{1}{2} \cos 11t$ b) $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{12} u + \frac{1}{2} \cos \frac{5}{12} u$
c) $3 \sin 8x - 3 \sin 2x$ d) $2 \sin 10\theta - 2 \sin 4\theta$

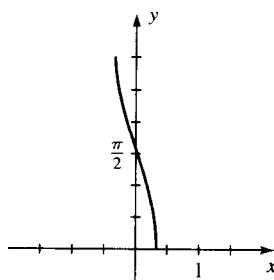
58. a) $2 \sin 5u \cos 3u$ b) $2 \sin \frac{11}{2} \theta \sin \frac{5}{2} \theta$
c) $2 \cos \frac{9}{40} t \sin \frac{1}{40} t$ d) $6 \cos 4x \cos 2x$

59. $\frac{\pi}{6}$ 60. $\frac{\pi}{4}$ 61. $\frac{\pi}{3}$ 62. π 63. $-\frac{\pi}{4}$

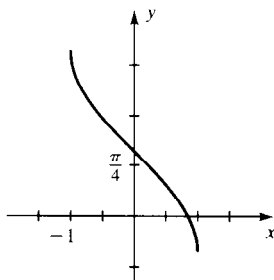
64. $\frac{3\pi}{4}$ 65. $\frac{1}{2}$ 66. 2 67. No definida 68. $\frac{\pi}{2}$

69. $\frac{240}{289}$ 70. $-\frac{7}{25}$

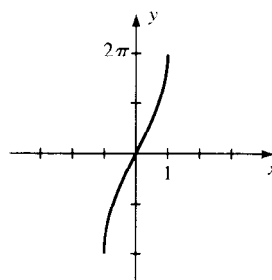
71.



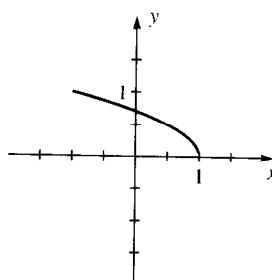
73.



72.



74.



75. $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos[(\alpha + \beta) + \gamma]$
 $= \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma$
 $= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cos \gamma -$
 $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma$
 $= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma -$
 $\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$

76. a) $t = 0, \pm \frac{\pi}{4b}$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{2} A$

77. $\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}$

78. a) $x = 2d \tan \frac{1}{2} \theta$ b) $d \leq 1000$ ft

79. a) $d = r \left(\sec \frac{1}{2} \theta - 1 \right)$ b) 43°

80. a) 78.7° b) 61.4°

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1

1. $\beta = 62^\circ, b \approx 14.1, c \approx 15.6$

3. $\gamma = 100^\circ 10', b \approx 55.1, c \approx 68.7$

5. $\beta = 76^\circ 30', a \approx 13.6, c \approx 17.8$

7. No existe triángulo

9. $\alpha \approx 77^\circ 30'$, $\beta \approx 49^\circ 10'$, $b \approx 108$; $\alpha \approx 102^\circ 30'$,
 $\beta \approx 24^\circ 10'$, $b \approx 59$
 11. $\alpha \approx 82.54^\circ$, $\beta \approx 49.72^\circ$, $b \approx 100.85$; $\alpha \approx 97.46^\circ$,
 $\beta \approx 34.80^\circ$, $b \approx 75.45$
 13. $\beta \approx 53^\circ 40'$, $\gamma \approx 61^\circ 10'$, $c \approx 20.6$
 15. $\alpha \approx 25.993^\circ$, $\gamma \approx 32.383^\circ$, $a \approx 0.146$ 17. 219 yd
 19. a) 1.6 mi b) 0.6 mi 21. 2.7 mi 23. 628 m
 25. 3.7 mi de A y 5.4 mi de B 27. 350 ft
 29. a) 18.7 b) 814 31. (3949.9, 2994.2)

EJERCICIOS 4.2

1. $\alpha \approx 26$, $\beta \approx 41^\circ$, $\gamma \approx 79^\circ$
 3. $b \approx 180$, $\alpha \approx 25^\circ$, $\gamma \approx 5^\circ$
 5. $c \approx 2.75$, $\alpha \approx 21^\circ 10'$, $\beta \approx 43^\circ 40'$
 7. $\alpha \approx 29^\circ$, $\beta \approx 47^\circ$, $\gamma \approx 104^\circ$
 9. $\alpha \approx 12^\circ 30'$, $\beta \approx 136^\circ 30'$, $\gamma \approx 31^\circ 00'$ 11. 196 ft
 13. 24 mi 15. 39 mi 17. 2.3 mi
 19. N55°31'E
 21. 63.7 ft de bases primera y tercera; 66.8 ft de segunda base
 23. 37 039 ft \approx 7 mi
 25. (Sugerencia: usa la fórmula $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$)
 27. a) 72° , 108° , 36° b) 0.62 c) 0.59, 0.36
 Ejercicios 29 al 36: la respuesta está en unidades cuadradas.
 29. 260 31. 11.21 33. 13.1 35. 517.0
 37. 1.62 acres 39. 123.4 ft

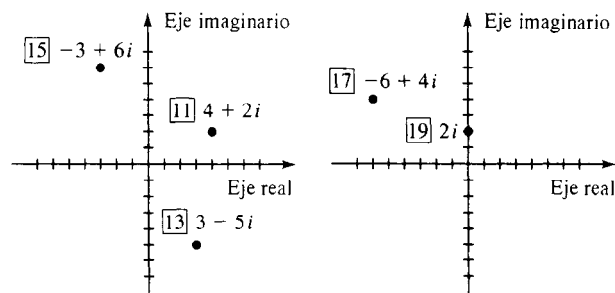
EJERCICIOS 4.3

1. $2 + 4i$ 3. $18 - 3i$ 5. $4i - 11i$ 7. $17 - i$
 9. $21 - 20i$ 11. $-24 - 7i$ 13. 25 15. $-i$
 17. i 19. $\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$ 21. $\frac{1}{2} - i$ 23. $\frac{34}{53} + \frac{40}{53}i$
 25. $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ 27. $-142 - 65i$ 29. $-2 - 14i$
 31. $-\frac{44}{113} + \frac{95}{113}i$ 33. $\frac{21}{2}i$ 35. $x = 4, y = -16$
 37. $x = 1, y = 3$ 39. $3 \pm 2i$ 41. $-2 \pm 3i$
 43. $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{55}i$ 45. $-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{47}i$ 47. $-5, \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{3}i$
 49. $\pm 4, \pm 4i$ 51. $\pm 2i, \pm \frac{3}{2}i$ 53. $0, -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}i$
 55. Si $w = c + di$, entonces $\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)}$
 $= \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$
 $= (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$
 57. $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$
 $= (ac - bd) - (ad + bc)i = ac - adi - bd - bci$
 $= a(c - di) - bi(c - di) = (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

59. Si $\overline{z} = z$, entonces $a - bi = a + bi$ y de aquí que $-bi = bi$, o
 $2bi = 0$. Así, $b = 0$ y $z = a$ es real. Por el contrario, si z es real,
 entonces $b = 0$ y por lo tanto $\overline{z} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a + 0i = z$.

EJERCICIOS 4.4

1. 5 3. $\sqrt{85}$ 5. 8 7. 1 9. 0
 Nota: el punto P corresponde a la representación geométrica.
 11. $P(4, 2)$ 13. $P(3, -5)$ 15. $P(-3, 6)$
 17. $P(-6, 4)$ 19. $P(0, 2)$



21. $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$ 23. $8 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$ 25. $4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$
 27. $4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$ 29. $20 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ 31. $12 \operatorname{cis} 0$
 33. $7 \operatorname{cis} \pi$ 35. $6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ 37. $10 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$
 39. $\sqrt{5} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{1}{2} \right)$ 41. $\sqrt{10} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) + \pi \right]$
 43. $\sqrt{34} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{3}{5} + \pi \right)$ 45. $5 \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{3}{4} \right) + 2\pi \right]$
 47. $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ 49. $-3 + \sqrt{3}i$ 51. -5
 53. $5 + 3i$ 55. $2 - i$ 57. $-2, i$
 59. $10\sqrt{3} - 10i, -\frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5}i$ 61. $40, \frac{5}{2}$
 63. $8 - 4i, \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$

EJERCICIOS 4.5

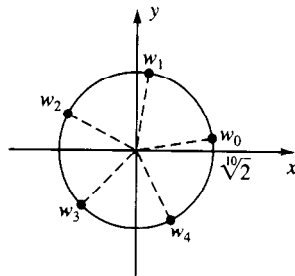
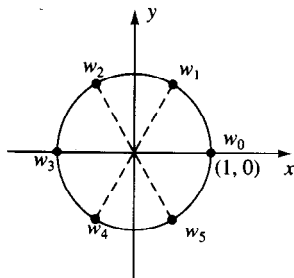
1. $-972 - 972i$ 3. $-32i$ 5. -8
 7. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ 9. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$
 11. $-64\sqrt{3} - 64i$ 13. $\pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right)$

$$15. \pm \left(\sqrt[4]{\frac{2}{2}} + \frac{\sqrt[4]{18}}{2} i \right) + \left(\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2} i \right)$$

$$17. 3i, \pm \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$$

$$19. \pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$21. \sqrt[10]{2} \text{ cis } \theta \text{ con } \theta = 9^\circ, 81^\circ, 153^\circ, 225^\circ, 296^\circ$$



$$23. \pm 2, \pm 2i$$

$$25. \pm 2i, \sqrt{3} \pm \sqrt{2} \pm i$$

$$27. 2i, \pm \sqrt{3} - i$$

$$29. 3 \text{ cis } \theta \text{ con } \theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$$

EJERCICIOS 4.6

$$1. \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, -7 \rangle, \langle 13, 8 \rangle, \langle 3, -32 \rangle$$

$$3. \langle -15, 6 \rangle, \langle 1, -2 \rangle, \langle -68, 28 \rangle, \langle 12, 12 \rangle$$

$$5. 4i - 3j, -2i + 7j, 19i - 17j, -11i + 33j$$

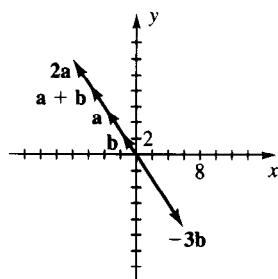
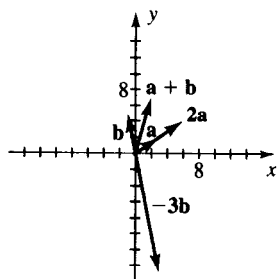
7. Los puntos terminales son 9. Los puntos terminales son:

$$(3, 2), (-1, 5), (2, 7),$$

$$(-4, 6), (-2, 3), (-6, 9),$$

$$(6, 4), (3, -15).$$

$$(-8, 12), (6, -9).$$



$$11. -b$$

$$13. f$$

$$15. \frac{1}{2}e$$

$$17. a + (b + c) = \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle + \langle c_1, c_2 \rangle$$

$$= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2 \rangle$$

$$= \langle a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2 \rangle$$

$$= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle + \langle c_1, c_2 \rangle$$

$$= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle + \langle c_1, c_2 \rangle$$

$$= (a + b) + c$$

$$19. a + (-a) = \langle a_1, a_2 \rangle + \langle -a_1, -a_2 \rangle$$

$$= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle -a_1, -a_2 \rangle$$

$$= \langle a_1 - a_1, a_2 - a_2 \rangle$$

$$= \langle 0, 0 \rangle = 0$$

$$21. (mn)a = (mn) \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$= \langle (mn)a_1, (mn)a_2 \rangle$$

$$= \langle mna_1, mna_2 \rangle$$

$$= m \langle na_1, na_2 \rangle \text{ o } n \langle ma_1, ma_2 \rangle$$

$$= m \langle n \langle a_1, a_2 \rangle \rangle \text{ o } n \langle m \langle a_1, a_2 \rangle \rangle$$

$$= m(na) \text{ o } n(ma)$$

$$23. 0a = 0 \langle a_1, a_2 \rangle = \langle 0a_1, 0a_2 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0.$$

$$\text{También } m0 = m \langle 0, 0 \rangle = \langle m0, m0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0.$$

$$25. -(a + b) = -\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle$$

$$= -\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

$$= \langle -(a_1 + b_1), -(a_2 + b_2) \rangle$$

$$= \langle -a_1 - b_1, -a_2 - b_2 \rangle$$

$$= \langle -a_1, -a_2 \rangle + \langle -b_1, -b_2 \rangle$$

$$= -a + (-b) = -a - b$$

$$27. \|2v\| = \|2\langle a, b \rangle\| = \|\langle 2a, 2b \rangle\| = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\|\langle a, b \rangle\|$$

$$= 2\|v\|$$

$$29. 3\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}$$

$$31. 5; \pi$$

$$33. \sqrt{41}; \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) + \pi$$

$$35. 18; \frac{3\pi}{2}$$

$$37. 102 \text{ lb}$$

$$39. 7.2 \text{ kg}$$

$$41. 89 \text{ kg}; S66^\circ W$$

$$43. 5.8 \text{ lb}; 129^\circ$$

$$45. 40.96; 28.68$$

$$47. -6.18; 19.02$$

$$49. a) F = \langle 7, 2 \rangle$$

$$b) G = -F = \langle -7, -2 \rangle$$

$$51. a) F \approx \langle -5.86, 1.13 \rangle$$

$$b) G = -F \approx \langle 5.86, -1.13 \rangle$$

$$53. 0.4 \approx 23.6^\circ$$

$$55. 56^\circ; 232 \text{ mph}$$

$$57. 420 \text{ mph}; 244^\circ$$

$$59. N22^\circ W$$

$$61. v_1 \approx 4.1i - 7.10j; v_2 \approx 0.98i - 3.67j$$

$$63. a) (24.51, 20.57)$$

$$b) (-24.57, 18.10)$$

EJERCICIOS 4.7

$$1. a) 24$$

$$b) \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right) \approx 48^\circ 22'$$

$$3. a) -14$$

$$b) \cos^{-1}\left(\frac{-14}{\sqrt{17}\sqrt{13}}\right) \approx 160^\circ 21'$$

$$5. a) 45$$

$$b) \cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{81}\sqrt{41}}\right) \approx 38^\circ 40'$$

$$7. a) \frac{-149}{5}$$

$$b) \cos^{-1}\left(\frac{-149/5}{\sqrt{149}\sqrt{149/25}}\right) = 180^\circ$$

$$9. \langle 4, -1 \rangle \cdot \langle 2, 8 \rangle = 0$$

$$11. (-4j) \cdot (-7i) = 0$$

$$13. \text{Opuesto}$$

$$15. \text{Mismo}$$

$$17. \frac{6}{5}$$

$$19. \pm \frac{3}{8}$$

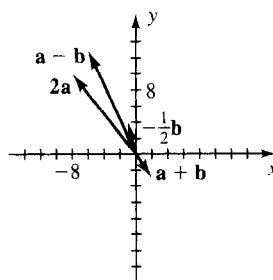
21. a) -23 b) -23 23. -51 25. $17\sqrt{26} \approx 3.33$
 27. 2.2 29. 7 31. 28 33. 12
 35. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = a_1^2 + a_2^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = \|\mathbf{a}\|^2$
 37. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \langle ca_1, ca_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle$
 $= \langle ca_1, ca_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle$
 $= ca_1b_1 + ca_2b_2$
 $= c(a_1b_1 + a_2b_2) = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
 39. $0 \cdot \mathbf{a} = \langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0(a_1) + 0(a_2) = 0 + 0 = 0$
 41. $1000\sqrt{3} \approx 1732$ ft/lb
 43. a) $\mathbf{v} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} + (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$;
 $\mathbf{w} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} - (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$
 b) 0.53°
 45. $16\sqrt{3} \approx 27.7$ caballos de fuerza

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE REPASO

1. $\alpha = \sqrt{43}$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{43}\sqrt{43}\right)$, $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{86}\sqrt{43}\right)$
 2. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $b = 4$; $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $b = 2$
 3. $\gamma = 75^\circ$, $a = 50\sqrt{6}$, $c = 50(1 + \sqrt{3})$
 4. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)$, $\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$
 5. $\alpha = 38^\circ$, $a \approx 8.0$, $c \approx 13$
 6. $\gamma \approx 19^\circ 10'$, $\beta \approx 137^\circ 20'$, $b \approx 258$
 7. $\alpha \approx 24^\circ$, $\gamma \approx 41^\circ$, $b \approx 10.1$
 8. $\alpha \approx 42^\circ$, $\beta \approx 87^\circ$, $\gamma \approx 51^\circ$ 9. 290 10. 10.9
 11. $15 + 2i$ 12. $-28 + 6i$ 13. $-55 + 48i$
 14. $\frac{9}{85} + \frac{2}{85}i$ 15. $-\frac{9}{53} - \frac{48}{53}i$ 16. $-2 - 5i$
 17. $\frac{1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{14}i$ 18. $-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{71}i$
 19. $\pm \frac{1}{2}\sqrt{14}i \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}i$ 20. $-5 \pm \sqrt{13}i$
 21. $10\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ 22. $4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$ 23. $17 \operatorname{cis} \pi$
 24. $12 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{6}$ 25. $10 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{3}$
 26. $\sqrt{41} \operatorname{cis}\left(\tan^{-1}\frac{5}{4}\right)$ 27. $10\sqrt{3} - 10i$ 28. $12 + 5i$
 29. $-12 - 12\sqrt{3}i, -\frac{3}{2}$ 30. $-4\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}$
 31. $-512i$ 32. i 33. $-972 + 972i$
 34. $-2^{19} - 2^{19}\sqrt{3}i$ 35. $-3, \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}i$
 36. a) 2^{24} b) $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 100^\circ, 220^\circ, 340^\circ$
 37. $2 \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$

38. Los puntos terminales son

$(-2, -3), (-6, 13),$
 $(-8, 10), (-1, 4).$



39. a) $12i + 19j$ b) $-8i + 13j$ c) $\sqrt{40} \approx 6.32$
 d) $\sqrt{29} - \sqrt{17} \approx 1.26$

40. Círculo con centro (a_1, a_2) y radio c

41. Los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ forman un triángulo con el vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ opuesto al ángulo θ . La conclusión es una aplicación directa de la ley de los cosenos con lados $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, y $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

42. $\langle 14 \cos 40^\circ, -14 \sin 40^\circ \rangle$ 43. 109; $S78^\circ E$

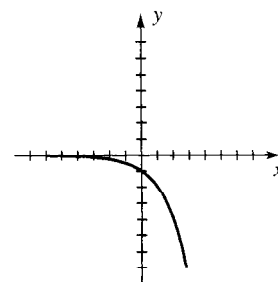
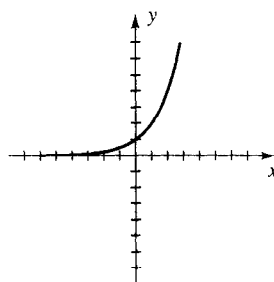
44. $183^\circ, 70$ mi/h

45. a) 10 b) $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\right) \approx 47^\circ 44'$ c) $\frac{10}{\sqrt{13}}$
 46. a) 80 b) $\cos^{-1}\left(\frac{40}{\sqrt{40}\sqrt{50}}\right) \approx 26^\circ 34'$ c) $\sqrt{40}$
 47. 56 48. 47.6° 49. a) 449 ft b) 434 ft
 50. a) 33 mi, 41 mi b) 30 mi 51. 204
 52. 1 hora y 16 minutos 53. c) 158°
 54. a) 47° b) 20
 55. a) 72° b) 181.6 ft^2 c) 37.6 ft

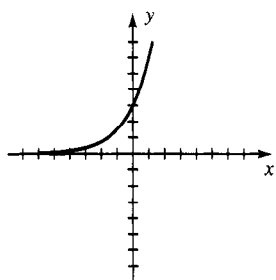
CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1

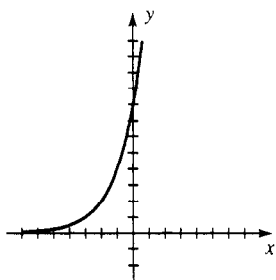
1. 5 3. -1, 3 5. $-\frac{4}{99}$ 7. $\frac{18}{5}$
 9. a) b)



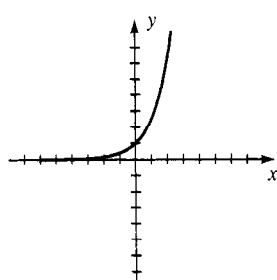
c)



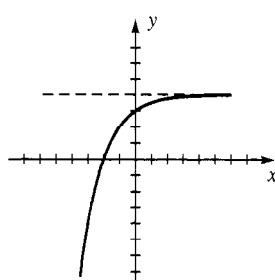
d)



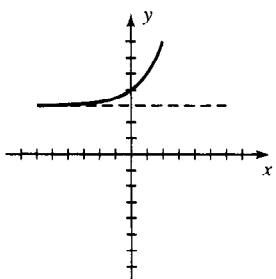
11.



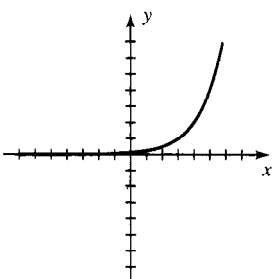
13.



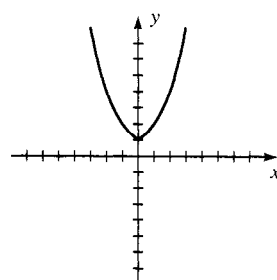
e)



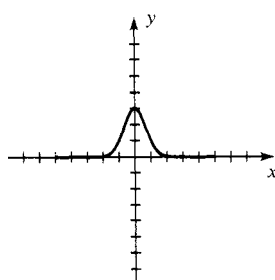
f)



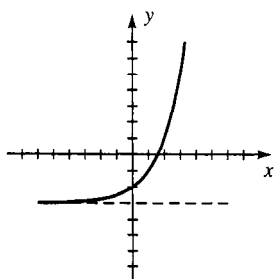
15.



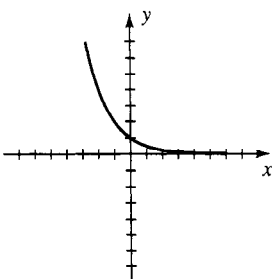
17.



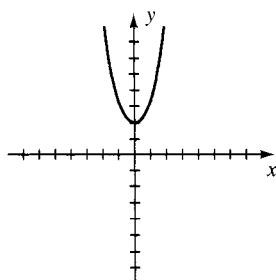
g)



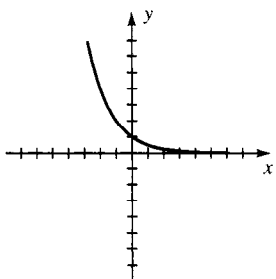
h)



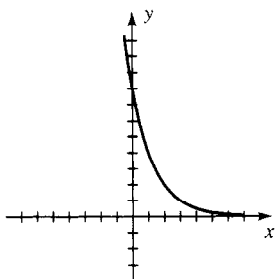
19.



i)



j)



21. a) 90

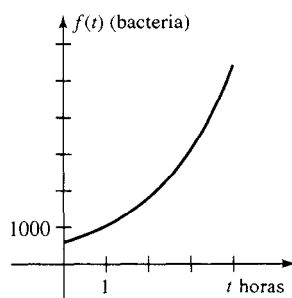
b) 59

c) 35

23. a) 1039; 3118; 5400

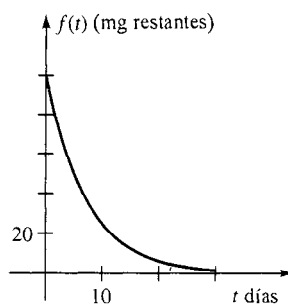
25. a) 50 mg; 25 mg;

b)



$$\frac{25}{2}\sqrt{2} \approx 17.7 \text{ mg}$$

b)



27. $-\frac{1}{1600}$

29. a) \$1010.00 b) \$1020.10 c) \$1061.52
-
- d) \$1126.83

31. a) \$7800 b) \$4790 c) \$2942

33. a) \$1061.36 b) \$1126.49 c) \$1346.86
-
- d) \$1814.02

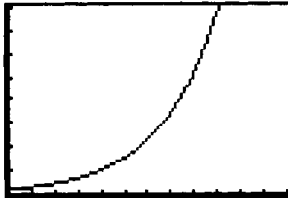
35. a) Examina la curva formada por el valor
- y
- en el año
- n
- .

- b) Despeja
- a
- de la ecuación
- $s = (1 - a)^T y_0$

37. a) \$925.75 b) \$243 270 39. \$6346.40

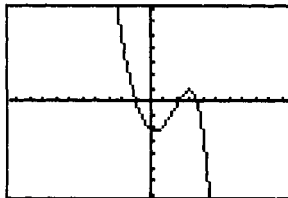
41. 6.58 año

43. a) 26.13 b) 8.50



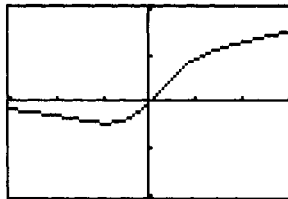
[0, 60] por [0, 40]

45. -1.02, 2.14, 3.62

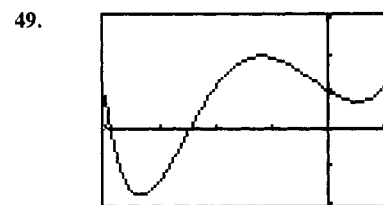


[-10.5, 10.5] por [-7, 7]

47. a) No biunívoca
-
- b) 0



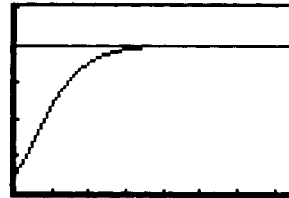
[-3, 3] por [-2, 2]



[-4, 1] por [-2, 3]

- a) Creciente:
- $[-3.37, -1.19] \cup [0.52, 1]$
- ;
-
- decreciente:
- $[-4, -3.37] \cup [-1.19, 0.52]$
-
- b)
- $[-1.79, 1.94]$

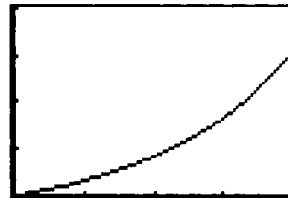
51.



[0, 7.5] por [0, 5]

 El número máximo de
 ventas se aproxima a k .

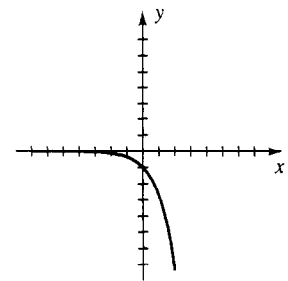
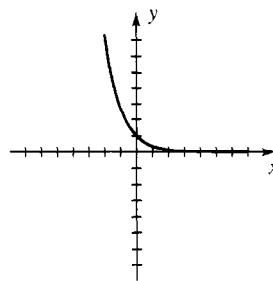
53.

 Después de aproximadamente
 32.8 años


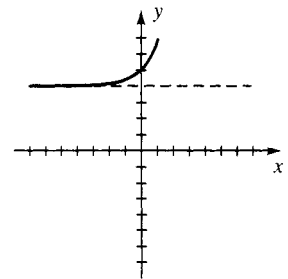
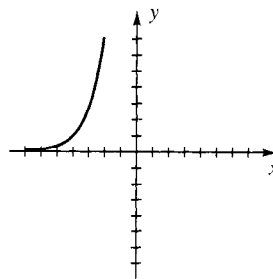
[0, 40] por [0, 200,000]

EJERCICIOS 5.2

1. a) b)



3. a) b)



5. \$1510.59 7. \$13 806.92 9. 13% 11. 3, 4

13. -1 15.
- $\frac{3}{4}, 0$
- 17.
- $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$
19. 27.43 g

21. 261.1 millones 23. 13.5% 25. 5412 27. 7.44 in

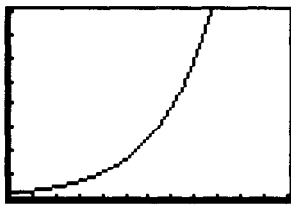
29. 75.77 cm; 15.98 cm/año 31 \$6.82 por hora

33. a) 7.19% b) 7.25%

35.

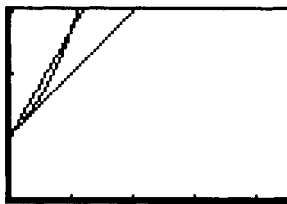
a) 29.96

b) 8.15



[0, 60] por [0, 40]

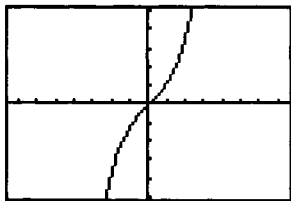
43.



[0, 4.5] por [0, 3]

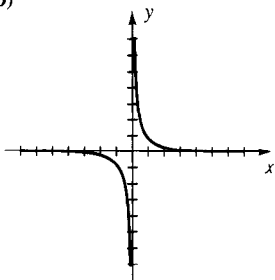
$f(x)$ esta más próxima a e^x si $x \approx 0$; $g(x)$ es más cercana a e^x si $x \approx 1$.

37. a)



[-7.5, 7.5] por [-5, 5]

b)



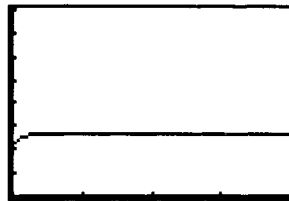
45.



[-2, 2.5] por [-1, 2]

0.11, 0.79, 1.13

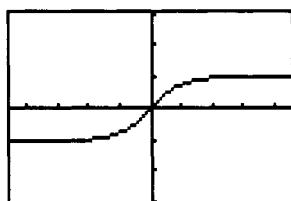
47.



[0, 200] por [0, 8]

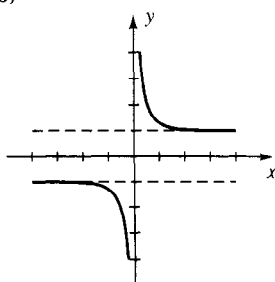
$y \approx 2.71 \approx e$

39. a)



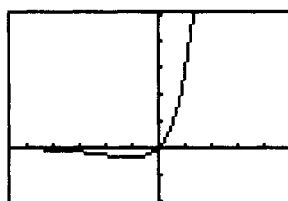
[-4.5, 4.5] por [-3, 3]

b)



49. 0.567

51.



[-5.5, 5] por [-2, 5]

Creciente en $[-1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -1]$

41.

-1.04, 2.11



[-3, 11] por [-10, 80]

53. a) A medida que h crece, C decrece.

b) Conforme y crece, C decrece.

55. a) Los valores mayores para C indican un circuito menos confiable.

b) Alrededor de 3.45 años.

EJERCICIOS 5.3

1. a) $\log_4 64 = 3$ b) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ c) $\log_r s = r$

d) $\log_3 (4-t) = x$ e) $\log_5 \frac{a+b}{a} = 7t$

f) $\log_{0.7} (5.3) = t$

3. a) $2^5 = 32$ b) $3^{-5} = \frac{1}{243}$ c) $t^p = r$

d) $3^5 = (x+2)$ e) $2^{3x+4} = m$ f) $b^{3/2} = 512$

5. $t = 3 \log_a \frac{5}{2}$ 7. $t = \frac{1}{C} \log_a \left(\frac{A-D}{B} \right)$

9. a) $\log 100\,000 = 5$ b) $\log 0.001 = -3$

c) $\log (y+1) = x$ d) $\ln p = 7$

e) $\ln (3-x) = 2t$

11. a) $10^{50} = x$ b) $10^{20t} = x$ c) $e^{0.1} = x$

d) $e^{4+3x} = w$ e) $e^{1/6} = z-2$

13. a) 0 b) 1 c) No posible d) 2 e) 8

f) 3 g) -2

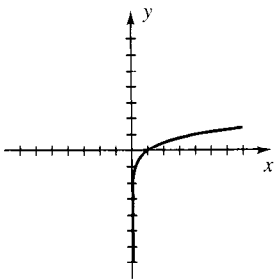
15. a) 3 b) 5 c) 2 d) -4 e) 2

f) -3 g) $3e^2$

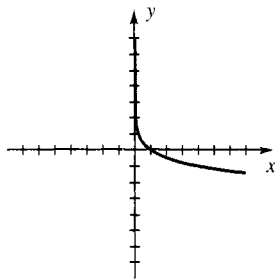
17. 4 19. No hay solución 21. -1, -2 23. 13

25. 27 27. $\pm \frac{1}{e}$ 29. 3

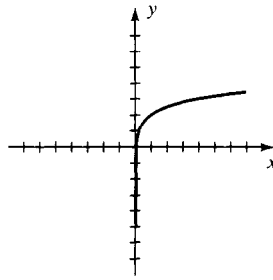
31. a)



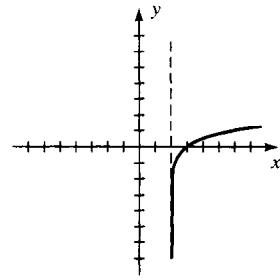
b)



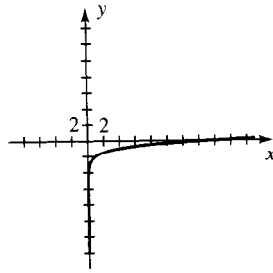
e)



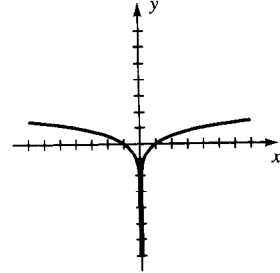
f)



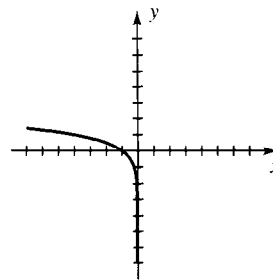
g)



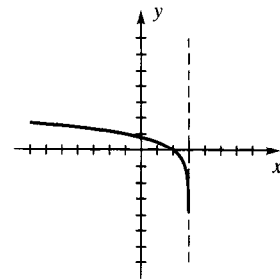
h)



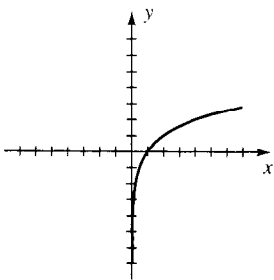
i)



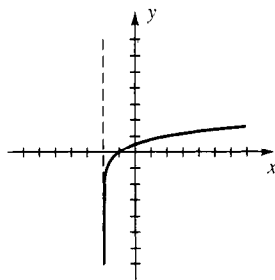
j)



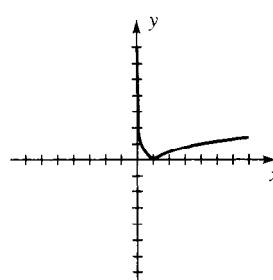
c)



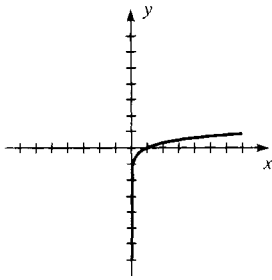
d)



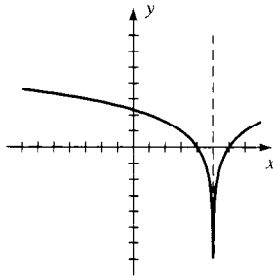
k)



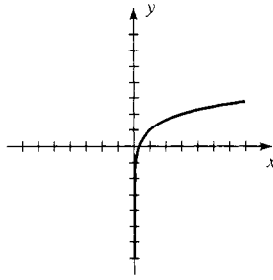
33.



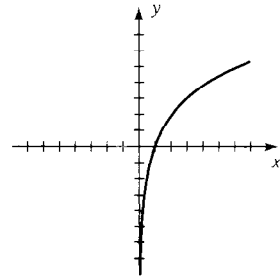
35.



33.



35.



37. $f(x) = \log_2 x$

39. $f(x) = \log_2 x - 1$

41. $f(x) = \log_2 (-x)$

43. $f(x) = 2 \log_2 x$

45. a) 4240 b) 8.85 c) 0.0237 d) 9.97
e) 1.05 f) 0.202

47. $t = -1600 \log_2 \left(\frac{q}{q_0} \right)$ 49. $t = -\frac{L}{R} \ln \left(\frac{I}{20} \right)$

51. a) 2 b) 4 c) 5

53. a) 10 b) 30 c) 40 55. En el año 2079

57. a) $W = 2.4e^{1.84h}$ b) 37.92 kg

59. a) 10 007 ft b) 18 004 ft

61. a) 305.9 kg b) (1) 20 años (2) 19.8 años

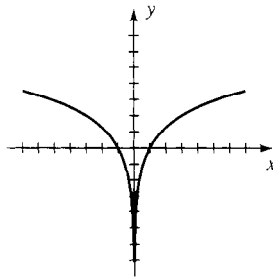
63. 10.1 mi 65. $2^{1/8} \approx 1.09$

67. a) Los peatones tienen un promedio de velocidad más rápido al caminar en grandes ciudades.

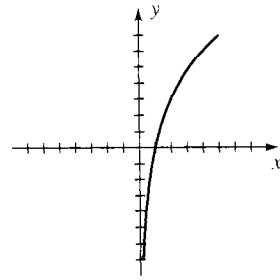
- b) 570 000

69. a) $f(1) = -0.1 < 0, f(2) \approx 0.29 > 0$ b) 1.17

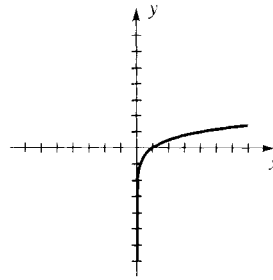
37.



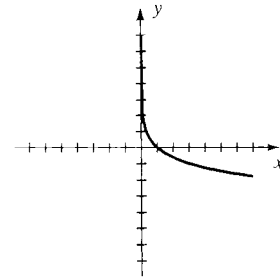
39.



41.



43.



EJERCICIOS 5.4

1. a) $\log_4 x + \log_4 z$ b) $\log_4 y - \log_4 x$

c) $\frac{1}{3} \log_4 z$

3. $3 \log_a x + \log_a w - 2 \log_a y - 4 \log_a z$

5. $\frac{1}{3} \log z - \log x - \frac{1}{2} \log y$ 7. $\frac{7}{4} \ln x - \frac{5}{4} \ln y - \frac{1}{4} \ln z$

9. a) $\log_3 (5xy)$ b) $\log_3 \frac{2z}{x}$ c) $\log_3 y^5$

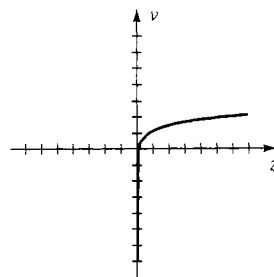
11. a) $\log_a \frac{x^2 \sqrt[3]{x-2}}{(2x+3)^5}$ 13. $\log \frac{y^{13/3}}{x^2}$ 15. $\ln x$ 17. $\frac{7}{2}$

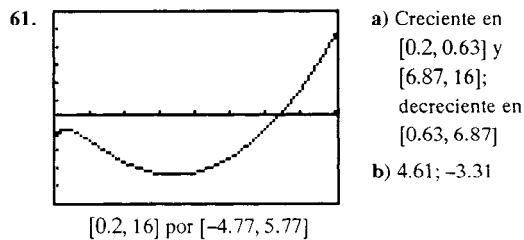
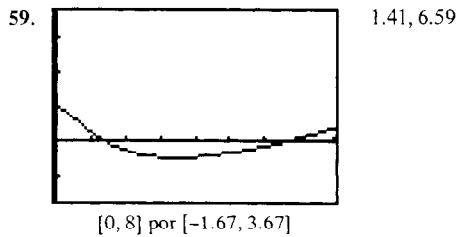
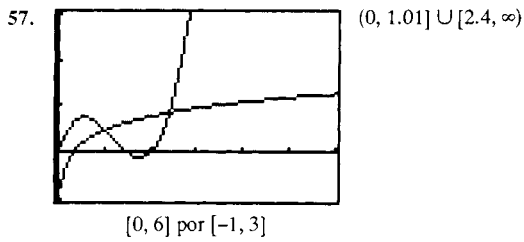
19. $5\sqrt{5}$ 21. No hay solución 23. -7 25. 1

27. -2 29. $\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}$ 31. $-1 + \sqrt{1+e}$

45. $f(x) = \log_2 x^2$ 47. $f(x) = \log_2 (8x)$ 49. $y = \frac{b}{x^k}$

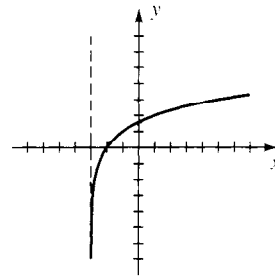
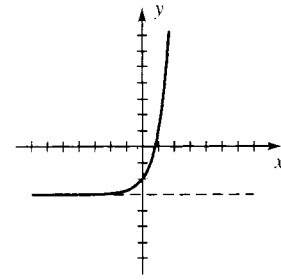
51.



53. a) 0 b) $R(2x) = R(x) + a \log 2$ 55. 0.29 cm


EJERCICIOS 5.5

1. $\frac{\log 8}{\log 5} \approx 1.29$ 3. $4 - \frac{\log 5}{\log 3} \approx 2.54$ 5. 1.1133
7. -0.7325 9. 2 11. $\frac{\log(2/81)}{\log 24} \approx -1.16$
13. $\frac{\log(8/25)}{\log(4/5)} \approx 5.11$ 15. -3 17. 5
19. $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{101}{11}} \approx 2.02$ 21. 1, 2 23. $\frac{\log(4 + \sqrt{19})}{\log 4} \approx 1.53$
25. 1 o 100 27. 10^{100} 29. 10 000
31. $x = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$ 33. $x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$
35. $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ 37. $x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

 39. intersección $y = \log_2 3$
 ≈ 1.5850

 41. intersección $x = \log_4 3$
 ≈ 0.7925


43. a) 2.2 b) 5 c) 8.3

45. Básico si el pH > 7, ácido si el pH < 7

 47. 11.58 año \approx 11 años 7 meses 49. 86.4 m

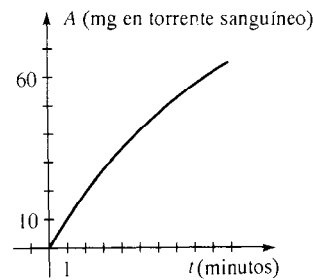
51. a) Sugerencia: primero toma el logaritmo natural de ambos lados.

 b) Observa que $f(e) = \frac{1}{e}$. Cualquier recta horizontal $y = k$ con $0 < k < \frac{1}{e}$ cortará la gráfica en los puntos

 $\left(x_1, \frac{\ln x_1}{x_1}\right)$ y $\left(x_2, \frac{\ln x_2}{x_2}\right)$, donde $1 < x_1 < e$ y

 $x_2 > e$

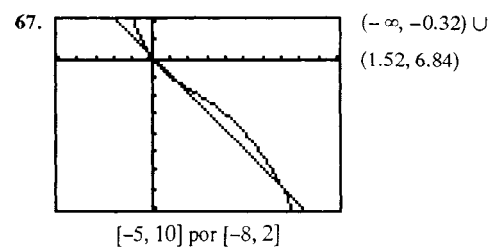
53. a) b) 6.58 min


 55. a) $t = \frac{\log(F/F_0)}{\log(1-m)}$ b) Después de 13 863 generaciones

 57. a) 4.28 ft b) 24.8 años 59. $\frac{\ln(25/6)}{\ln(200/35)} \approx 0.82$

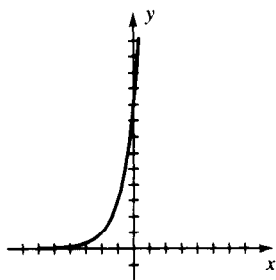
61. La sospecha es correcta

63. La sospecha es incorrecta 65. 1.763

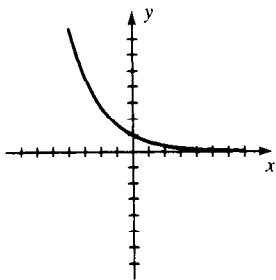


CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE PRÁCTICA

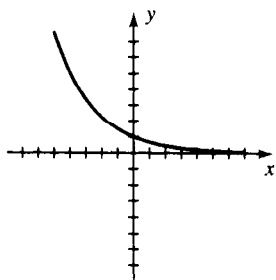
1.



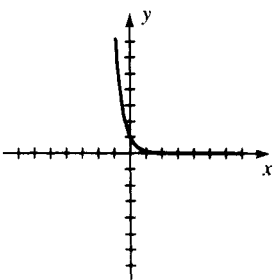
2.



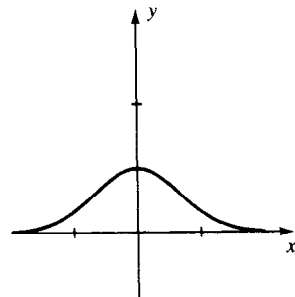
3.



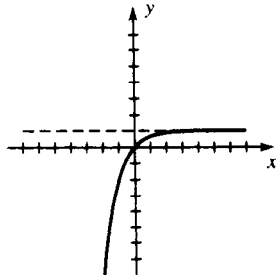
4.



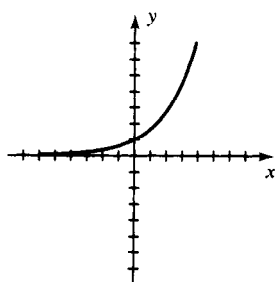
5.



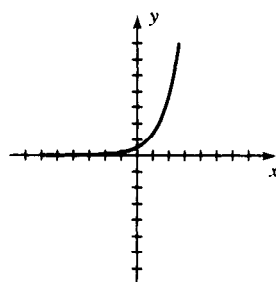
6.



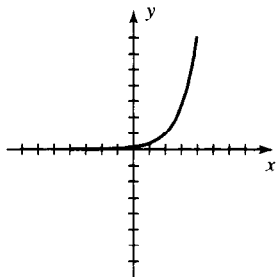
7.



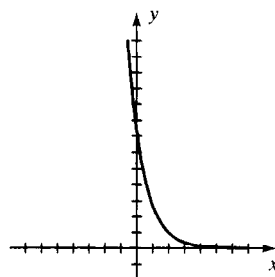
8.



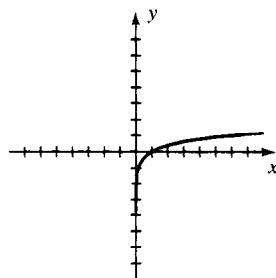
9.



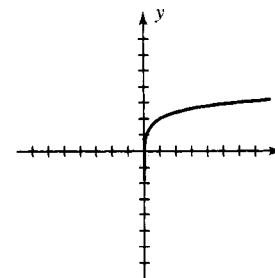
10.



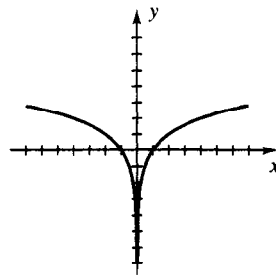
11.



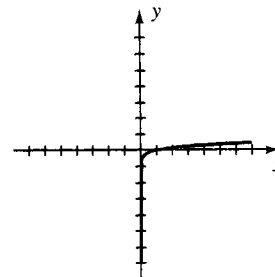
12.



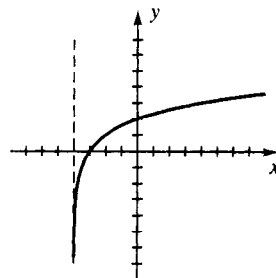
13.



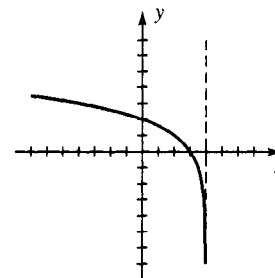
14.



15.



16.



17. a) -4 b) 0 c) 1 d) 4 e) 6 f) 8
g) $\frac{1}{2}$

18. a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 1 d) 5 e) 1 f) 25

g) $\frac{1}{3}$

19. 0 20. 9 21. 9 22. $\frac{33}{47}$ 23. 1 24. 99

25. $5 - \frac{\log 6}{\log 2}$ 26. $\pm \sqrt{\frac{\log 7}{\log 3}}$ 27. $\frac{\log(3/8)}{\log(32/9)}$ 28. 1

29. $\frac{1}{4}$, 1, 4 30. No hay solución 31. $\sqrt{5}$ 32. 2

33. 0, ± 1 34. $\ln 2$ 35. a) -3, 2 b) 2

36. a) 8 b) ± 4 37. $4 \log x + \frac{2}{3} \log y - \frac{1}{3} \log z$

38. $-\log(xy^2)$ 39. $x = \log\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}\right)$

40. Si $y < 0$, entonces $x = \log\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$. Si $y > 0$,

entonces $x = \log\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$

41. a) 1.89 b) 78.3 c) 0.472

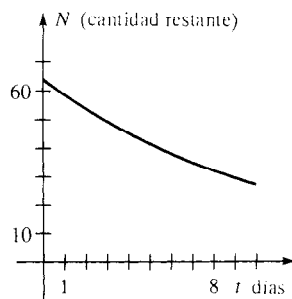
42. a) 0.924 b) 0.00375 c) 6.05

43. a) 2000

b) $2000(3^{1/6}) \approx 2401$; $2000(3^{1/2}) \approx 3464$; 6000

44. \$ 1125.51

45. a) b) 8 días



46. $N = 1000 \left(\frac{3}{5}\right)^{1/3}$

47. a) Después de 11.39 años b) 6.30 años

48. $t = (\ln 100) \frac{L}{R} \approx 4.6 \frac{L}{R}$

49. a) $I = I_0 10^{\alpha/10}$

b) Examina $I(\alpha + 1)$, donde $I(\alpha)$ es la intensidad correspondiente a α decibeles.

50. $t = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{a-L}{ab}\right)$

51. $A = 10^{(R+5.1)/2.3} - 3000$

52. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{10^{(R+5.1)/2.3} - 3000}{10^{(R+7.5)/2.3} - 34000}$

53. 26 615.9 m²

54. $h = \frac{\ln(29/p)}{0.000034}$

55. $v = a \ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$

56. a) $n = 10^{7.7 - 0.9R}$

b) 12 589; 1585; 200

57. a) $E = 10^{11.4 + 1.5R}$

b) 10^{24} ergs 58. 110 días

59. 86.8 cm; 9.715 cm/año

60. $t = -\frac{L}{R} \ln\left(\frac{V - RI}{V}\right)$

61. a) 26 749 años

b) 30%

62. 16.91 años

■ ■ ■ ■ Índice

A

Abscisa, 11
 Alargamiento de gráficas, 39-41
 Alargamientos horizontales de gráficas, 41
 Alargamientos verticales de gráficas, 39
 Amplitud
 de un número complejo, 247
 de una función trigonométrica, 109
 del movimiento armónico, 145
 Ángulo(s)
 agudo, 58
 central, 58
 complementario, 58
 coterminal, 58
 de asíntota vertical, 36
 de depresión, 135
 de cuadrante, 56
 de elevación, 135
 de referencia, 58
 de trabajo, 275
 de vector cero, 260
 definición de, 56
 en términos de un círculo unitario, 67
 entre vectores, 270
 funciones trigonométricas de un, 93, 95
 lado inicial de un, 56
 medida de,
 en grados, 56
 en radianes, 58
 lado terminal de un, 56
 negativo, 56
 obtuso, 58
 posición estándar de un, 56
 positivo, 56
 recto, 57
 subtendido, 58
 suplementario, 58

vértice de un, 56

x, 11

Área

de un sector circular, 61

de un triángulo, 234

Arco circular, 61

Argumento de un número complejo, 247

Asíntota(s)

horizontal, 37

vertical, 36

B

Base

de una función exponencial, 284

logarítmica, 303

Biunívoca, 4

C

Cambio de fórmula base, 325

Caracol, 399

Característica de un logaritmo, A2

Caso ambiguo, 223

Catenaria, 299

Centro

de un círculo, 19

Cero, de una función, 27

Ciclo, 81

Cifras significativas (dígitos), 134

Círculo

ecuación estándar de un, 19

unitario, 19

Cociente, de números complejos, 249

Cofunción, 176

Combinación lineal, 263

Completar el cuadrado, 20

Componente

- de **a** a lo largo de **b**, 272
- fórmula para, 273
- horizontal, 262
- vertical, 262

Componentes de un vector, 258

Compresiones

- de gráficas, 39-41
- horizontales de gráficas, 41
- vertical de gráficas, 39

Conjugado de un número complejo, 241

Conjuntos, correspondencia entre, 23

Continuamente, 296

- periodo de, 295

Coordenada, 4

- x*, 11
- y*, 11

Correspondencia

- biunívoca, 4, 26, 285, 306
- entre conjuntos, 23

Coseno inverso, 205

Cosenoidal amortiguada, 131

Crecimiento de bacterias, 288

Cuadrantes, 11

Curva

- de crecimiento Gompertz, 300
- normal de probabilidad, 287

D

Decaimiento exponencial, 44, 285

Definición

- de ángulo de referencia, 100
- de componente de **a** a lo largo de **b**, 272
- de distancia entre puntos de una recta coordenada, 6
- de función, 24
- de función de coseno inversa, 205
- de función de seno inverso, 202
- de función de tangente inversa, 207
- de función exponencial natural, 46, 297
- de función inversa, 200
- de función periódica, 80
- de funciones trigonométricas, 91
- de gráfica de una función, 27
- de *i* y *j*, 262
- de logaritmo, 46, 304
- de logaritmo común, 49, 309
- de logaritmo natural, 49, 310
- de magnitud de un vector, 258
- de medida en radianes, 58
- de movimiento armónico simple, 144
- de múltiplo escalar de un vector, 259
- de producto punto, 269
- de resta de vectores, 261
- de suma de vectores, 259
- de un número complejo, 246
- de una función biunívoca, 26
- de valor absoluto, 6
- de vectores paralelos y ortogonales, 270

del conjugado de un número complejo, 242

del negativo de un vector, 260

Desigualdades, 5

- equivalentes, 9
- gráficas de, 9
- soluciones de, 8

Desintegración radiactiva, 288

Desplazamiento(s), 257

- de fase, 113
- de gráficas, 37-39
- horizontales, 38
- verticales, 37

Diferencia

- de fase, 147
- de números complejos, 241

Dina, 274

Dirección, 137

- negativa, 4
- positiva, 4

Distancia en una recta coordenada, 6

Dominio

- de una función, 24
- implicado, 25

E*e*, número, 45, 296

Ecuación(es), 7

- condicional, 8
- de líneas, 345
- en *x*, 7
- equivalente(s), 8
- estándar de un círculo, 19
- exponencial, 286
- gráfica de, 14
- identidad, 7
- lineal, 15, 346
- logarítmica, 306
- raíz de, 7
- solución de, 7
- trigonométrica, 162

Eje(s)

- coordenados, 11
- de una parábola, 16
- imaginario, 246
- real, 246
- y*, 11

Enteros, 4

- negativos, 4
- positivos, 4

Entre números reales, 5

Equipo graficador, 21

Erg, 274

Escalar, 256

- múltiplo, de un vector, 257, 259
- producto, 269

Exponencial, 46, 297

- natural, 46, 297

Exponente irracional, 284
 Expresión trigonométrica, 158

F

Factor de amortiguamiento, 131

Forma

exponencial, 46, 304
 logarítmica, 46, 304
 trigonométrica de un número complejo, 247

Fórmula(s)

cuadrática, 8
 de ángulo doble, 185
 de ángulos mitad, 187, 189
 de ángulos múltiples, 184
 de cofunciones, 177
 de Herón, 235
 de la distancia, 11
 de producto a suma, 194
 de reducción, 180
 de suma a producto, 195
 de suma, 176, 178
 del punto medio, 13
 para negativos, 82

Fracción decimal, A2

Frecuencia en movimiento armónico, 145

Fuerza, 274

constante, 274
 resultante, 257

Función(es)

arcocoseno, 205
 arcoseno, 202
 arcotangente, 207
 circular, 67
 constante, 28, 29
 cosecante, 67
 gráfica de, 86
 coseno, 67
 gráfica de, 81
 coseno hiperbólico, 299
 cotangente, 67
 gráfica de, 87
 creciente, 28
 crecimiento, 44, 285
 crecimiento de Gompertz, 300
 decreciente, 28
 definición de, 24
 definida en un conjunto, 25
 dominio de, 24
 dominio implicado de, 25
 existencia de, en un número, 25
 exponencial, 44, 285
 Gompertz, 294
 gráfica de, 27
 igualdad, 24
 inversa, 200
 logarítmica, 46, 303
 natural
 par, 33

periódica, 80
 secante, 67
 gráfica de, 86
 seno, 67
 gráfica de, 81
 tangente, 67
 gráfica de, 85
 trigonométrica(s), 67
 amplitud de, 109
 como razones, 93
 de ángulos, 93
 de números reales, 91
 dominios de, 69
 en términos de un círculo unitario, 67
 en términos de un triángulo rectángulo, 95
 fórmulas de ángulo doble para, 185
 fórmulas de ángulo múltiple para, 184
 fórmulas de cofunción para, 177
 fórmulas de la resta para, 174, 178
 fórmulas de producto a suma para, 194
 fórmulas de semiángulo para, 187, 189
 fórmulas de suma a producto para, 195
 fórmulas para suma de, 176, 178
 gráficas de, 80-87
 identidades de semiángulo para, 186
 inversa, 202
 periodo de, 80
 signos de, 71
 valores especiales de, 97
 valor absoluto, 34

G

Grado

como medida angular, 56
 relación con un radián, 59

Gráfica(s)

alargamientos horizontales de, 41
 alargamientos verticales de, 39
 compresiones horizontales de, 41
 compresiones verticales de, 39
 de funciones trigonométricas, 80-87
 de un intervalo, 9
 de una desigualdad, 9
 de una ecuación lineal, 15
 de una ecuación, 14
 de una función, 27
 desplazamientos horizontales de, 38
 desplazamientos verticales de, 37
 reflexión de, 18, 40

H

Hipotenusa, 95

I

i, número complejo, 240
i, vector, 262

Identidad(es)

- cotangente, 72
- ecuación como, 7
- de Pitágoras, 72
- de semiángulos, 186
- fundamentales, 72
- recíprocas, 68, 72
- tangente, 72
- trigonométricas, 72, 158

Igualdad

- de funciones, 24
- de números complejos, 240
- de vectores, 256

Infinito (∞), 9, 36

Interés

- compuesto, 289
- fórmula para, 290
- compuesto continuamente, 296
- fórmula para, 297
- periodo, 295

Interpolación lineal, A6

Intersección

- de una gráfica, 14
- x , 14
- y , 14

Intervalo(s)

- abierto, 9
- cerrado, 9
- de una función, 24
- infinito, 9
- semiabierto, 9

Inverso multiplicativo de un número complejo, 243

J j , vector, 262

Joule, 274

L

Lado

- adyacente, 95
- inicial de un ángulo, 56
- opuesto, 95
- terminal de un ángulo, 56

Ley(es)

- de cosenos, 230, 231
- de crecimiento exponencial, 44, 285
- del enfriamiento, 312
- de logaritmos, 49, 317
- de senos, 220, 221

Localización de puntos, 11

Logarítmica, 49, 310

- biunívoca, 26
- cero de, 27
- forma, 406, 504
- función, 46, 303
- indefinida, 25
- intervalo de, 24
- natural, 49, 310

- non, 33
- periódica, 80
- periodo de, 80
- trigonométrica, 67
- valor de, 24

Logaritmo(s)

- base de, 303
- cambio de base de, 325
- cambio especial de base de, 326
- característica de, A2
- común, 48, 309
- definición de, 46, 304
- forma estándar de, A2
- leyes de, 49, 317
- mantisa de, A2
- natural, 49, 310
- propiedades de, 305
- uso de tablas de, A2

Logística, función, 294

Longitud

- de un arco circular, 61
- de un segmento de recta, 7

M

Magnitud de un vector, 256, 258

Mantisa, A2

Mayor o igual que (\geq), 5Mayor que ($>$), 5Menor o igual que (\leq), 5Menor que ($<$), 5Menos infinito ($-\infty$), 36

Minuto, 58

Módulo de un número complejo, 247

Movimiento armónico, 144

simple, 144

N

Newton, 274

Non

Número(s)

- complejos, 240
 - amplitud de, 247
 - argumento de, 247
 - cociente de, 243, 249
 - conjugado de, 241
 - diferencia de, 241
 - forma trigonométrica para, 247
 - igualdad de, 240
 - inverso multiplicativo de, 243
 - módulo de, 247
 - multiplicación de, 240
 - multiplicación de, por un número real, 241
 - n -ésima raíz de, 253
 - parte imaginaria de, 241
 - y unidad imaginaria i , 240
 - parte real de, 241
 - producto de, 240, 249
 - representación geométrica de, 246

- resta de, 241
 - suma de, 240
 - valor absoluto de, 246
 - irracional, 4
 - racional, 4
 - real, 4
 - negativo, 5
 - positivo, 5
- O**
- Onda(s)
 - cosenoidal, 81
 - senoidal, 81
 - Ordenada, 11
 - Origen, 11, 397
- P**
- Pantalla, 21
 - Par ordenado, 11
 - Parábola, 16
 - eje de, 16
 - vértice de, 16
 - Parte imaginaria de un número complejo, 241
 - Parte real de un número complejo, 241
 - Periodo, 80
 - de movimiento armónico, 145
 - Plano
 - complejo, 246
 - coordenado, 11
 - xy , 11
 - Posición estándar de un ángulo, 56
 - Principal, 289
 - Producto
 - de números complejos, 240, 249
 - interior, 269
 - punto, 269
 - Propiedades
 - de arcocoseno, 206
 - de arcoseno, 204
 - de arcotangente, 207
 - de funciones inversas, 200
 - de i , 240
 - de logaritmos, 305
 - de producto punto, 269
 - de suma y múltiplos escalares de vectores, 261
 - Proyección
 - de \mathbf{a} a \mathbf{b} , 273
 - de un punto, 144
 - prueba de la, 26
 - Punto
 - extremo de un intervalo, 9
 - inicial de un vector, 256
 - terminal de un vector, 256
- R**
- Radián, 58
 - relación de radián a grado, 59
 - Radioterapia, 299
 - Raíces cúbicas de la unidad, 245, 254
 - Raíces n -ésimas, 251
 - de la unidad, 254
 - Raíz cuadrada principal, 243
 - Raíz(raíces)
 - cuadrada, 243
 - de la unidad, 245
 - de una ecuación, 7
 - Recta(s)
 - coordenada, 4
 - horizontal, 15
 - real, 4
 - vertical, 15
 - Reflexión de una gráfica, 18, 40
 - Resta
 - de números complejos, 241
 - de vectores, 261
 - Rumbo, 137
- S**
- Sección cónica, 356
 - Sector circular, 61
 - Segmento de recta dirigido, 256
 - Segundo, 58
 - Seno inverso, 202
 - Senoidal amortiguada, 131
 - Signo(s)
 - de un número real, 5
 - de desigualdad, 5
 - de las funciones trigonométricas, 71
 - Simetría, 17, 202, 405
 - Sistema
 - coordenado, 4, 11
 - de coordenadas rectangulares, 11
 - Solución(es)
 - de una desigualdad, 8
 - de una ecuación en x y y , 14
 - de una ecuación en x , 7
 - límites para, 255
 - Suma
 - de coordenadas y , 130
 - de vectores, 259
 - Suma(s)
 - de números complejos, 240
 - de vectores, 257
 - Sustitución trigonométrica, 160
- T**
- Tangente inversa, 207
 - Teorema
 - cambio de base, 325
 - de amplitudes y periodos, 110
 - de n -ésimas raíces, 253
 - del área de un sector circular, 61
 - de De Moivre, 252
 - para la longitud de un arco circular, 61
 - sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, 113

- sobre ángulos de referencia, 102
- sobre el coseno del ángulo entre vectores, 271
- sobre funciones trigonométricas como razones, 93
- sobre funciones trigonométricas de un ángulo
 - agudo de un triángulo rectángulo, 95
- sobre funciones trigonométricas pares y nones, 83
- sobre la gráfica de la función tangente, 124
- sobre la naturaleza biunívoca de funciones
 - crecientes o decrecientes, 29
- sobre la naturaleza biunívoca de funciones
 - logarítmicas, 306
- sobre producto punto, 270
- sobre productos y cocientes de números complejos, 249
- sobre valores repetidos de funciones para seno
 - y coseno, 80
- sobre vectores ortogonales, 272
- Trabajo, 274-75
- Traslaciones, 39
- Trazo de una gráfica, 9, 14
- Triángulo
 - área de un, 234
 - oblicuo, 220
 - rectángulo, 95
- U**
- Unidad
 - imaginaria, 240
 - raíces de, 245
- V**
- Valor(es)
 - absoluto
 - de un número complejo, 246
 - de un número real, 6
 - de una función, 24
 - de una función trigonométrica a un número real, 91
 - permisibles, 7
- Variable(s), 7
 - de entrada, 30
 - de salida, 30
- dependiente, 30
- independiente, 30
- linealmente relacionada, 349
- valor permisible para, 7
- Vector(es), 256
 - ángulo entre, 270
 - cero, 260
 - combinación lineal de, 263
 - componente a lo largo de, 272
 - componente vertical de, 262
 - componentes de, 258
 - equivalentes, 256
 - fuerza, 256
 - i, 262
 - horizontal de
 - igual, 256
 - j, 262
 - magnitud de, 256
 - múltiplo escalar de, 257, 259
 - negativo de, 260
 - ortogonales, 270
 - paralelo, 270
 - posición, 258
 - producto escalar de, 269
 - producto interior de, 269
 - producto punto de, 269
 - proyección de, 273
 - punto inicial de, 256
 - punto terminal de, 256
 - resta de, 261
 - suma de, 257
 - unitario, 262
 - velocidad, 256
- Velocidad
 - angular, 62
 - lineal, 62
- Vértice(s)
 - de un ángulo, 56
 - de una parábola, 16
- Vida media, 288



Este libro se imprimió en los talleres de
Grupo Empresarial Odacce, S.A. de C.V.

35421M

987654321

9VIII6

