

السنة: الأولى  
تخصص: حواسيب

مقرر: تحليل ( 2 )  
مدة الامتحان: ساعتان  
تاريخ الامتحان: 2014/6/16  
امتحان الفصل الثاني للعام الدراسي 2014 - 2015

جامعة دمشق  
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية  
قسم العلوم الأساسية

السؤال الأول: أجب على السؤالين التاليين: ( 7 درجات للأول - 8 درجات للثاني )  
(1) أوجد القيم القصوى للدالة الآتية وبين نوعها:

(2) عين قيمة الثوابت: ( a , b , c ) كي يكون الحقل التالي كموني، ثم أوجد كمونه السلمي:  
$$\vec{F} = (2x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

السؤال الثاني: أجب على الأسئلة التالية: ( 7 درجات للأول - 10 درجات للثاني والثالث )

(1) احسب قيمة التكامل الثنائي التالي:  
$$I = \int_{x=0}^8 \int_{y=\sqrt[3]{x}}^2 \left( \frac{dx dy}{y^4 + 1} \right)$$
  
(2) باستخدام نظرية غاوص في التفرق ( Divergence theorem of Gauss ) احسب التكامل السطحي التالي:  
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dA$$
 حيث أن:  $\vec{F} = [4x, 3z, 5y]$  و S هو عبارة عن السطح الكروي:  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(3) باستخدام نظرية ستوكس ( Stokes's theorem ) احسب التكامل الخطي:  
$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{r}'(s) \cdot ds$$
 حيث:  $\vec{F} = [-3y, 3x, z]$  و S هو الجسم المكافئ:  $z = 1 - (x^2 + y^2), z \geq 0$

السؤال الثالث: أجب على الأسئلة التالية: ( 9 درجات للأول - 12 درجة للثاني - 7 درجات للثالث )

(1) أثبت أن المعادلة التفاضلية التالية غير تامة، وأن عامل التكميل  $F = \frac{1}{x^3}$  ثم أوجد الحل العام لها:

$$(x^4 + y^2) dx - xy dy = 0$$

(2) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = x e^{-3x}$$

(3) أوجد بطريقة الحذف الحل العام للجملة التفاضلية التالية:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 3y - 3z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 2z \end{array} \right.$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. وديع خياشاهين

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق





بنت: الذكاء هو بسبب  
 الفصل الثاني من العام الدراسي ٢٠١٤ - ٢٠١٥  
 المقرر: تحليل / ١٢

السؤال الأول:

17/4 درجات:

$$f(x, y) = y^3 - x^3 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 - 4x + 4y = 0 \\ f'(y) &= 3y^2 + 4x - 4y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -3x^2 + 3y^2 &= 0 \\ y^2 &= x^2 \Rightarrow y = \pm x \end{aligned}$$

نوضح في الذكاء:

(2)

1)  $y = -x \Rightarrow$

$$-3x^2 - 4x - 4x = 0$$

$$-x(3x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{8}{3}$$

$$y_2 = \frac{8}{3}$$

$$P_1(0, 0), P_2(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$$

2)  $y = x \Rightarrow -3x^2 - 4x + 4x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, P(0, 0)$$

(2)

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -6x - 4 \\ f''_{yy} &= 6y - 4 \\ f''_{xy} &= 4 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = -36xy + 24x - 24y$$

$$P_1(0, 0)$$

من أجل

نبدأ إلى نقطة بخوار  $P_0$  و  $P_1(0, 1)$

$$\Delta_2(P_1) = 0$$

(1)

for  $(0, 1) \Rightarrow f(0, 1) = 1 - 2 = -1 < 0$

فإن  $P_1$  نقطة قيمة مقصوى عظمى موضعية.

من أجل  $P_2(+\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$  نجد:  $\Delta_2(P_2) = -36(-\frac{64}{9}) + 24(+\frac{8}{3}) - 24(\frac{8}{3})$

$$= 256 + 64 + 64 = 384 > 0$$

(2)

$P_2$  نقطة قيمة مقصوى عظمى.  $\Delta_1(P_2) = -16 - 4 = -20 < 0$

$$f(P_2) = -(\frac{8}{3})^3 = f_{max}$$

181 درجہ

$$F_3 = 4x + cy + 2z$$

$$F_1 = 2x + 2y + az, \quad F_2 = bx - 3y - z, \quad F_3 = 4x + cy + 2z$$

(2)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (C+1)\vec{i} - (4-a)\vec{j} + (b-2)\vec{k} = \vec{0} \\ & \Rightarrow C+1=0 \Rightarrow \boxed{C=-1} \\ & 4-a=0 \Rightarrow \boxed{a=4} \\ & b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=2} \end{aligned}$$

اس لیے

$$F_3 = 4x - y + 2z$$

ہو گا

$$F_1 = 2x + 2y + 4z, \quad F_2 = 2x - 3y - z,$$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int F_1 dx + g(y,z) = \int (2x + 2y + 4z) dx + g(y,z) \\ &= x^2 + 2yx + 4xz + g(y,z) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int F_2 dy + g(x,z) = \int (2x - 3y - z) dy + g(x,z) \\ &= 2xy - \frac{3}{2}y^2 - zy + g(x,z) \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int F_3 dz + g(x,y) = \int (4x - y + 2z) dz + g(x,y) \\ &= 4xz - yz + z^2 + g(x,y) \end{aligned}$$

بالکلے ثبات اس صورت اس لیے

(1)

$$f(x,y,z) = x^2 - \frac{3}{2}y^2 + z^2 + 2xy + 4xz - yz = C$$



سؤال الثاني:

(1) 17/ درجہ

$$I = \int_{x=0}^8 \int_{y=\sqrt[3]{x}}^2 \left( \frac{dx dy}{y^4 + 1} \right)$$

$$0 \leq x \leq 8, \quad \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2$$

لنقوم بتبسيط التكامل لأننا نستطيع التكامل بالنسبة لـ  $y$  أولاً.

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = y^3$$

$$0 \leq x \leq y^3$$

$$0 \leq y \leq 2$$

$$I = \int_{y=0}^2 \left( \int_{x=0}^{y^3} \frac{dx}{y^4 + 1} \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^2 \frac{dy}{y^4 + 1} [x]_0^{y^3} = \int_{y=0}^2 \frac{y^3 dy}{y^4 + 1} \quad (2)$$

$$I = \frac{1}{4} \int_{y=0}^2 \frac{4y^3 dy}{y^4 + 1} = \frac{1}{4} [\ln(y^4 + 1)]_0^2 \quad (2)$$

$$I = \frac{1}{4} (\ln(17) - \ln(1))$$

$$I = \frac{1}{4} \ln(17) \quad (1)$$

(ج) / درجات :

إن نظرية غاوس في التفرد تنص على الربط بين التكامل السطحي والتكامل الثلاثي :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dA = \iiint_T \text{div } \vec{F} \cdot dV \quad (2)$$

$$\iiint_T \text{div } \vec{F} \cdot dV = \iiint_T \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$= \iiint_T (4 + 0 + 0) dx dy dz \quad (2)$$

$$= 4 \iiint_T dx dy dz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

في صورة معادلة على سطح كروي  
نلقا إلى الإحداثيات الكروية :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow 0 \leq r \leq 3, \quad |J| = r^2 \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (2)$$

عندئذ :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dA = 4 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \quad (2)$$

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{r=0}^3 r^2 \, dr$$

$$= 4 \left[ -\cos \theta \right]_0^{\pi} \left[ \phi \right]_0^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^3 \quad (2)$$

$$= 4(1+1)(2\pi)(9) = 144\pi$$



101 / درجات .  
 استوى متوازي على الربط بين التكامل الخطي والتكامل السطحي:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}(s) = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{n} \cdot dA \quad (2)$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ -3y & 3x & z \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 6\vec{k} = [0, 0, 6] \quad (2)$$

$$z = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 1 = 0$$

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{N} = [2x, 2y, 1] \quad (2)$$

$$\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{N} = [0, 0, 6] \cdot [2x, 2y, 1] = 6$$

$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dA = \iint_D \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{N} \cdot dxdy \quad (2)$$

$$= \iint_D 6 \, dxdy$$

بالإسقاط على المستوى  $oxy$ :

$$D = \{x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0\}$$

باستخدام الإحداثيات القطبية:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad |\vec{J}| = \rho \quad (2)$$

$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 6 \rho \, d\rho \, d\theta = 6 \left[ \theta \right]_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = 6\pi$$

$$(x^4 + y^2) dx - xy dy = 0$$

$$M(x, y) = x^4 + y^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N(x, y) = -xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -y$$

(2)

المعادلة التفاضلية غير كاملة.  
لنوجد عامل التكامل :

$$R(x) = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{1}{-xy} (2y + y) = -\frac{3}{x} \quad (2)$$

$$F = e^{\int R(x) dx} = e^{\int -\frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln x} = e^{\ln x^{-3}} \Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{x^3}}$$

لنضرب المعادلة التفاضلية بعامل التكامل :  
المعادلة الباقية كاملة .

$$\left( x + \frac{y^2}{x^3} \right) dx - \frac{y}{x^2} dy = 0 \quad (1)$$

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + K(y)$$

$$= \int \left( x + \frac{y^2}{x^3} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2x^2} + K(y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2} + K'(y) = N = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow K'(y) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{K(y) = C_1} \quad (1)$$

فالكل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\boxed{u(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2x^2} = C_1}$$

(1)



$$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = x e^{-3x}$$

$$1) y_h(x) = ?$$

$$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) - 3(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

(3)

$$2) y_p(x) = ?$$

$$r(x) = x e^{-3x}$$

نستخدم هنا طريقة لاغرانج

$$y_p(x) = y_1 \int \frac{W_1}{W} r(x) dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} r(x) dx + y_3 \int \frac{W_3}{W} r(x) dx$$

$$y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{-2x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} \\ 4e^{-2x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 18e^{3x} + 12e^{3x} - 8e^{3x} - 8e^{3x} - 12e^{3x} + 18e^{3x} = 20e^{3x}$$

(2)

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 1 & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 7e^{5x} - 2e^{5x} = 5e^{5x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 0 & 3e^{3x} \\ 4e^{-2x} & 1 & 9e^{3x} \end{vmatrix} = -3e^{2x} - 2e^{2x} = -5e^{2x}$$

(2)

$$W_3 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} & 0 \\ 4e^{-2x} & 4e^{2x} & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$y_p(x) = e^{-2x} \int \frac{5e^{5x}}{20e^{3x}} (x e^{-3x}) dx + e^{2x} \int \frac{-5e^{2x}}{20e^{3x}} (x e^{-3x}) dx + e^{3x} \int \frac{4}{20e^{3x}} (x e^{-3x}) dx$$

$$= \frac{e^{-2x}}{20} \int x e^{5x} dx + \frac{e^{2x}}{4} \int x e^{-x} dx + \frac{e^{3x}}{5} \int x dx$$

$$= \frac{e^{-2x}}{20} \left[ \frac{x}{5} e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} \right] - \frac{e^{2x}}{4} \left[ x e^{-x} - e^{-x} \right] + \frac{e^{3x}}{5} \left( \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= \frac{x}{100} e^{3x} - \frac{1}{500} e^{3x} - \frac{x}{4} e^{3x} + \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{x^2}{10} e^{3x}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + \frac{x^2}{10} e^{3x} - \frac{6}{25} x e^{3x} + \frac{124}{500} e^{3x}$$

- 7 -



الدرجة 1

$$y' = 3y - 3z, \quad z' = 2y - 2z$$

$$y'' = 3y' - 3z'$$

$$y'' = 3y' - 3(2y - 2z) = 3y' - 6y + 6z$$

$$3z = 3y - y' \quad * \quad \text{من المعادلة الأولى}$$

$$y'' = 3y' - 6y + 6y - 2y'$$

$$y'' - y' = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 e^x}$$

نوضي \* :

$$3z = 3y - y'$$

$$3z = 3C_1 + 3C_2 e^x - C_2 e^x = 3C_1 + 2C_2 e^x$$

$$\boxed{z = C_1 + \frac{2}{3}C_2 e^x}$$

انتهى الحل الجواب