

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HCM**



VÕ VĂN VINH QUANG

**ĐỀ TÀI: TÍNH LIÊN THÔNG CỦA NHỮNG
NHÓM MA TRẬN**

CHUYÊN NGÀNH: HÌNH HỌC

GVHD: TS. NGUYỄN HÀ THANH

TP.HCM, 2012

Lời cảm ơn

Trước hết tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Tiến sĩ Nguyễn Hà Thanh; người Thầy đã dẫn dắt tôi bước vào con đường nghiên cứu khoa học. Sự tận tình hướng dẫn cùng những lời động viên, chỉ bảo của Thầy đã giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn những người bạn đã cùng tôi chia sẻ những khó khăn cũng như kinh nghiệm có được trong thời gian làm luận văn.

TPHCM, Ngày 15 tháng 05 năm 2012

Võ Văn Vinh Quang

Lời mở đầu

Trong hình học nói riêng và Toán học nói chung thì lý thuyết về nhóm Lie đóng một vai trò khá quan trọng vì nhóm Lie là một đa tạp khả vi nên nó có thể được nghiên cứu bằng cách sử dụng giải tích vi phân, mà điều này thì không thể làm được với các nhóm tôpô tổng quát. Một trong những ý tưởng chính trong lý thuyết về nhóm Lie, được đề xuất bởi Sophus Lie (nhà toán học người Na Uy) là thay thế cấu trúc toàn cục-cấu trúc nhóm bằng một cấu trúc khác mang tính chất địa phương mà Lie gọi là “nhóm cực nhỏ”, và bây giờ nó được biết đến như là đại số Lie. Trong luận văn này ta sẽ khảo sát đại số Lie của một nhóm tương đối quen thuộc đó là nhóm ma trận, từ đó ta sẽ tạo bước đệm để nghiên cứu đại số Lie của một vài nhóm tương đối phức tạp hơn. Như ta đã biết đại số Lie được ứng dụng trong hình học hiện đại vì thế nó luôn thu hút sự nghiên cứu của các nhà toán học trên thế giới. Bên cạnh đó nhóm Lie cũng đã cung cấp một phương tiện tự nhiên để phân tích tính đối xứng liên tục của các phương trình vi phân (lý thuyết Picard – Vessiot), và nó cũng đóng vai trò như là một nhóm hoán vị được sử dụng trong lý thuyết Galois để phân tích tính đối xứng rời rạc của phương trình đại số. Điều đó cho thấy rằng nhóm Lie cũng xuất hiện trong cả lĩnh vực đại số. Vậy thì về phương diện giải tích thì sao? Nhóm Lie được xem như là một không gian tôpô với chuẩn sup, và trên không gian tôpô ta thường khảo sát một vài tính chất quan trọng như: tính đóng, mở, tính compact, tính đầy đủ, tính liên thông,... Vì điều kiện có hạn nên ta không thể nghiên cứu tất cả các tính chất đó được nên luận văn này dành phần chính để khảo sát tính liên thông của một vài nhóm ma trận đặc biệt được ứng dụng khá phổ biến trong hình học. Và vì thế:

Luận văn với đề tài: “Tính liên thông của những nhóm ma trận” được chia làm bốn chương.

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ sở về đại số cũng như giải tích để người học có thể hiểu rõ hơn về những nội dung cốt lõi được trình bày trong những chương sau.

Chương 2: Đưa ra định nghĩa về nhóm các ma trận, nhóm con các ma trận và qua đó giới thiệu những nhóm ma trận đặc biệt mà ta thường khảo sát trong hình học. Qua đó ta tìm hiểu về mối quan hệ giữa nhóm ma trận thực và nhóm ma trận phức.

Chương 3: Giới thiệu khái niệm đường cong, không gian tiếp xúc, đại số Lie để từ đó đưa ra một vài đại số Lie của những nhóm ma trận đặc biệt được đề cập ở chương 2. Bên cạnh đó ta cũng tiến hành khảo sát mối quan hệ đặc biệt giữa 2 nhóm $SO(3)$ và $SU(2)$.

Chương 4: Khảo sát tính liên thông, liên thông đường của những nhóm ma trận đặc biệt.

Mục Lục

Trang bìa	1
Lời cảm ơn	2
Lời mở đầu	3
Mục lục	4
Chương 1: Kiến thức cơ bản	5
1. Kiến thức đại số	5
2. Kiến thức giải tích	11
Chương 2: Những nhóm ma trận thực và phức	16
1. Nhóm của các ma trận	16
2. Nhóm của những ma trận là các không gian metric	16
3. Nhóm ma trận	20
4. Một số ví dụ về những nhóm ma trận	21
5. Những nhóm ma trận phức là những nhóm ma trận thực	25
6. Những đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận	25
7. Những tác động của nhóm liên tục	27
8. Hàm lũy thừa và logarit của ma trận	27
Chương 3: Đại số Lie của những nhóm ma trận	32
1. Phương trình vi phân trong ma trận	32
2. Nhóm con một tham số	33
3. Đường cong, không gian tiếp xúc và đại số Lie	34
4. Một vài đại số Lie của những nhóm ma trận	37
5. Nhóm $SO(3)$ và $SU(2)$	42
Chương 4: Sự liên thông của những nhóm ma trận	47
1. Sự liên thông của các đa tạp	47
2. Ví dụ của những nhóm ma trận liên thông đường	48
3. Những thành phần liên thông đường của một nhóm Lie	50
Kết luận	53
1. Nội dung của luận văn	53
2. Hướng nghiên cứu mới	54
Tài liệu tham khảo	55

Chương I:

Kiến thức cơ bản

Để giúp người đọc dễ theo dõi nội dung của luận văn thì trong chương này chủ yếu đưa ra những kiến thức cơ bản về đại số và giải tích. Trước hết là một vài định nghĩa, kết quả cơ bản trong Đại số.

1. Kiến thức Đại số

Định nghĩa 1.1: Ta gọi là phép toán hai ngôi (hay còn gọi tắt là phép toán) trong một tập hợp X một ánh xạ f từ $X \times X$ đến X . Giá trị $f(x, y)$ của f tại (x, y) gọi là cái hợp thành của x và y .

Định nghĩa 1.2: Một bộ phận A của X gọi là ổn định (đối với phép toán hai ngôi trong X) nếu và chỉ nếu $xy \in A$ với mọi $x, y \in A$.

Định nghĩa 1.3: Một phép toán hai ngôi trong một tập hợp X gọi là kết hợp nếu và chỉ nếu ta có

$$(xy)z = x(yz)$$

với mọi $x, y, z \in X$; là giao hoán nếu và chỉ nếu ta có

$$xy = yx$$

với mọi $x, y \in X$.

Định nghĩa 1.4: Giả sử đã cho một phép toán hai ngôi trong một tập hợp X . Một phần tử e của X gọi là một đơn vị trái của phép toán hai ngôi nếu và chỉ nếu

$$ex = x$$

với mọi $x \in X$. Tương tự, một phần tử e của X gọi là một đơn vị phải của phép toán hai ngôi nếu và chỉ nếu

$$xe = x$$

với mọi $x \in X$. Trong trường hợp một phần tử e của X vừa là một đơn vị trái vừa là một đơn vị phải, thì e gọi là một đơn vị, hoặc một phần tử trung lập của phép toán hai ngôi.

Định nghĩa 1.5: Ta gọi là nửa nhóm một tập hợp X cùng với một phép toán hai ngôi kết hợp đã cho trong X . Một nửa nhóm có phần tử trung lập gọi là một vị nhóm. Một nửa nhóm là giao hoán nếu phép toán của nó giao hoán.

Định nghĩa 1.6: Ta gọi là nhóm một nửa nhóm X có các tính chất sau:

a) Có phần tử trung lập.

b) Với mọi $x \in X$, có một $x' \in X$ sao cho $x'x = xx' = e$ (phần tử x' gọi là một phần tử đối xứng hay nghịch đảo của x)

Như vậy, một nhóm là một vị nhóm mà mỗi phần tử đều có nghịch đảo.

Nếu tập hợp X là hữu hạn thì ta bảo ta có một nhóm hữu hạn và số phần tử của X gọi là cấp của nhóm.

Nếu phép toán hai ngôi trong X là giao hoán thì ta bảo ta có một nhóm giao hoán hay nhóm aben.

Định lý 1.7: Mỗi phần tử của một nhóm chỉ có một phần tử đối xứng.

Trong trường hợp phép toán hai ngôi của nhóm kí hiệu bằng dấu \cdot (dấu cộng $+$), thì phần tử đối xứng duy nhất của x kí hiệu là x^{-1} ($-x$) và còn gọi là nghịch đảo của x (đối của x). Từ định nghĩa của phần tử nghịch đảo (phần tử đối) ta có nghịch $(x^{-1})^{-1} = x$, $(-(-x)) = x$. Nếu nhóm là aben và phép toán của nhóm kí hiệu bằng dấu $+$ (dấu $+$) thì phần tử $xy^{-1} = y^{-1}x$ ($x + (-y) = (-y) + x$) kí hiệu là x / y ($x - y$) và gọi là thương của x trên y (hiệu của x và y).

Định lý 1.8: Một nửa nhóm X là một nhóm nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

a) X có một đơn vị trái e .

b) Với mọi $x \in X$, có một $x' \in X$ sao cho $x'x = e$.

Định lý 1.9: Một nửa nhóm khác rỗng X là một nhóm nếu và chỉ nếu các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm trong X với mọi $a, b \in X$.

Định nghĩa 1.10: Một bộ phận ổn định A của một nhóm X là một nhóm con của X nếu A cùng với phép toán cảm sinh là một nhóm, kí hiệu là $A \leq X$.

Định lý 1.11: Một bộ phận A của một nhóm X là một nhóm con của X nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây thỏa mãn:

a) Với mọi $x, y \in A, xy \in A$.

b) $e \in A$, với e là phần tử trung lập của X .

c) Với mọi $x \in A, x^{-1} \in A$.

Hệ quả 1.12: Giả sử A là một bộ phận khác rỗng của một nhóm X . Các điều kiện sau đây là tương đương:

a) A là một nhóm con của X .

b) Với mọi $x, y \in A, xy \in A$ và $x^{-1} \in A$.

c) Với mọi $x, y \in A, xy^{-1} \in A$.

Định nghĩa 1.13: Giả sử U là một bộ phận của một nhóm X . Nhóm con A bé nhất của X chứa U gọi là nhóm con sinh ra bởi U . Trong trường hợp $A = X$, ta nói rằng U là một hệ sinh của X và X được sinh ra bởi U . Kí hiệu nhóm con sinh bởi tập hợp U là $\langle U \rangle$.

Định nghĩa 1.14: Một nhóm X gọi là xyclic nếu và chỉ nếu X được sinh ra bởi một phần tử $a \in X$. Phần tử a gọi là một phần tử sinh của X .

Như vậy một nhóm X là xyclic nếu và chỉ nếu các phần tử của nó là các lũy thừa $a^\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$, của một phần tử $a \in X$, kí hiệu là $\langle a \rangle = \{a^\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$.

Định nghĩa 1.15: Giả sử a là một phần tử bất kì của một nhóm X và A là nhóm con sinh ra bởi a . Phần tử a gọi là có cấp vô hạn nếu A vô hạn; trong trường hợp này không có một số nguyên dương n nào sao cho $a^n = e$. Phần tử a gọi là có cấp m nếu A có cấp m ; trong trường hợp này m là số nguyên dương bé nhất sao cho $a^m = e$.

Một phần tử $a \in X$ có cấp 1 khi và chỉ khi $a = e$.

Định nghĩa 1.16: Giả sử A là nhóm con của một nhóm X , ta định nghĩa quan hệ \sim trong tập hợp X như sau: với mọi $x, y \in A, x \sim y$ nếu và chỉ nếu $x^{-1}y \in A$.

Bổ đề 1.17: Quan hệ \sim trong X là một quan hệ tương đương.

Với mỗi phần tử $x \in X$, ta kí hiệu lớp tương đương chứa x là \bar{x} và kí hiệu bộ phận của X gồm các phần tử có dạng xa với a chạy khắp A là xA , tức là $xA = \{xa \mid a \in A\}$.

Bổ đề 1.18: $\bar{x} = xA$.

Định nghĩa 1.19: Các bộ phận xA gọi là các lớp trái của nhóm con A trong X . Tương tự các lớp phải Ax của A trong X là các bộ phận mà các phần tử có dạng là ax với $a \in A$.

Cũng như đối với các lớp trái, ta có thể chứng minh các lớp phải của A là các lớp tương đương theo quan hệ tương đương: $x \sim y$ nếu và chỉ nếu $xy^{-1} \in A$.

Định nghĩa 1.20: Tập hợp thương của X trên quan hệ tương đương \sim gọi là tập hợp thương của nhóm X trên nhóm con A , kí hiệu là X/A . Các phần tử của X/A là các lớp trái xA .

Số l các lớp trái xA (hay lớp phải Ax) gọi là chỉ số của nhóm con A trong X .

Định nghĩa 1.21 (chuẩn hóa): Chuẩn hóa của S trong nhóm (nhỏ nhóm) G được định bởi

$N_G(S) = \{g \in G \mid Sg = gS\}$. Khi đó $N_G(S) \leq G$.

Định nghĩa 1.22: Một nhóm con A của một nhóm X gọi là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu $x^{-1}ax \in A$ với mọi $a \in A$ và $x \in X$. Kí hiệu là $A \triangleleft X$.

Định lý 1.23: Nếu A là một nhóm con chuẩn tắc của một nhóm X , thì:

a) Quy tắc cho tương ứng với cặp (xA, yA) lớp trái xyA là một ánh xạ từ $X/A \times X/A$ đến X/A

b) X/A cùng với phép toán hai ngôi

$$(xA, yA) \mapsto xyA$$

là một nhóm, gọi là nhóm thương của X trên A

Định lý 1.24: Giả sử A là một nhóm con của một nhóm X . Các điều kiện sau đây là tương đương:

a) A là chuẩn tắc.

b) $xA = Ax$ với mọi $x \in X$.

Do định lý trên, từ giờ nếu A là chuẩn tắc thì ta không phân biệt lớp trái, lớp phải của A và gọi một lớp trái (hay một lớp phải) của A là một lớp của A .

Định nghĩa 1.25: Một đồng cấu (nhóm) là một ánh xạ f từ một nhóm X đến một nhóm Y sao cho

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

với mọi $a, b \in X$. Nếu $X = Y$ thì đồng cấu f gọi là một tự đồng cấu của X .

Một đồng cấu mà là một đơn ánh thì gọi là một đơn cấu, một đồng cấu toàn ánh gọi là một toàn cấu, một đồng cấu song ánh gọi là một đẳng cấu, một tự đồng cấu song ánh gọi là một tự đẳng cấu. Nếu

$f : X \rightarrow Y$ là một đẳng cấu từ nhóm X đến nhóm Y thì người ta viết $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ (Trong trường hợp X và Y là những nửa nhóm, ta cũng định nghĩa đồng cấu (nửa nhóm) như trên và cũng có các khái niệm tương tự).

Mệnh đề 1.26: Nếu $f : X \rightarrow Y$ là một đẳng cấu từ nhóm X đến nhóm Y thì ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \rightarrow X$ cũng là một đẳng cấu.

Định nghĩa 1.27: Nếu có một đẳng cấu từ nhóm X đến nhóm Y thì ta bảo hai nhóm X và Y là đẳng cấu với nhau, và ta viết $X \cong Y$.

Định nghĩa 1.28: Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Y , các phần tử trung lập của X và Y được kí hiệu theo thứ tự là e_X và e_Y . Ta kí hiệu

$$\text{Im } f = f(X)$$

$$\text{Ker } f = \{x \in X \mid f(x) = e_Y\} = f^{-1}(e_Y)$$

và gọi $\text{Im } f$ là ảnh của đồng cấu f , $\text{Ker } f$ là hạt nhân của đồng cấu f .

Định lý 1.29: Giả sử X, Y, Z là những nhóm và $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ là những đồng cấu. Thế thì ánh xạ tích

$$gf : X \rightarrow Z$$

cũng là một đồng cấu. Đặc biệt tích của hai đẳng cấu là một đẳng cấu.

Định lý 1.30: Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một đồng cấu từ một nhóm X đến một nhóm Y . Thế thì:

- a) $f(e_X) = e_Y$
- b) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ với mọi $x \in X$.

Định lý 1.31: Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một đồng cấu từ một nhóm X đến một nhóm Y , A là một nhóm con của X và B là một nhóm con chuẩn tắc của Y . Thế thì:

- a) $f(A)$ là một nhóm con của Y .
- b) $f^{-1}(B)$ là một nhóm con chuẩn tắc của X .

Hệ quả 1.32: Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một đồng cấu từ một nhóm X đến một nhóm Y . Thế thì $\text{Im } f$ là một nhóm con của Y và $\text{Ker } f$ là một nhóm con chuẩn tắc của X .

Định lý 1.33: Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Y . Thế thì:

- a) f là một toàn ánh nếu và chỉ nếu $\text{Im } f = Y$.
- b) f là một đơn ánh nếu và chỉ nếu $\text{Ker } f = \{e_X\}$

Định nghĩa 1.34: Giả sử X là một nhóm, ta gọi là tâm của X bộ phận

$$C(X) = \{a \in X \mid ax = xa, \forall x \in X\}$$

Mệnh đề 1.35: $C(X)$ là một nhóm con giao hoán của X và mọi nhóm con của $C(X)$ là một nhóm con chuẩn tắc của X .

Định nghĩa 1.36: Giả sử X là một nhóm, x và y là hai phần tử của X . Ta gọi là hoán tử của x và y phần tử $xyx^{-1}y^{-1}$

Định nghĩa 1.37: Ta gọi là vành một tập hợp X cùng với hai phép toán hai ngôi đã cho trong X kí hiệu theo thứ tự bằng dấu $+$ và \cdot (người ta thường kí hiệu như vậy) và gọi là phép cộng và phép nhân sao cho các điều kiện sau thỏa mãn:

- a) X cùng với phép cộng là một nhóm aben.
- b) X cùng với phép nhân là một nửa nhóm.
- c) Phép nhân phân phối đối với phép cộng, nghĩa là:

$$\forall x, y, z \in X : \begin{cases} x(y + z) = xy + xz \\ (y + z)x = yx + zx \end{cases}$$

Phần tử trung lập của phép cộng thì kí hiệu là 0 và gọi là phần tử không. Phần tử đối xứng (đối với phép cộng) của một phần tử x thì kí hiệu là $-x$ và gọi là đối của x . Nếu phép nhân là giao hoán thì ta bảo vành X là giao hoán. Nếu phép nhân có phần tử trung lập thì phần tử đó gọi là phần tử đơn vị của X và thường được kí hiệu là e hay 1 (nếu không có sự nhầm lẫn).

Định nghĩa 1.38: Trường là X -vành giao hoán, $e \neq 0$ và mỗi phần tử $x \neq 0$ đều có nghịch đảo x^{-1} .

Định nghĩa 1.39: Cho tập hợp V mà các phần tử được kí hiệu $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \dots$ và trường \mathbb{k} mà các phần tử được kí hiệu $x, y, z \dots$. Giả sử trên V có hai phép toán:

- Phép toán trong, kí hiệu

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) &\mapsto \vec{\alpha} + \vec{\beta} \end{aligned}$$

- Phép toán ngoài, kí hiệu

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{k} \times V &\rightarrow V \\ (x, \vec{\alpha}) &\mapsto x\vec{\alpha} \end{aligned}$$

thỏa mãn các tiên đề sau với mọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$ và với mọi $x, y \in \mathbb{k}$.

- 1) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$
- 2) Có $\vec{0} \in V$ sao cho $\vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$
- 3) Với mọi $\vec{\alpha} \in V$ tồn tại $\vec{\alpha}' \in V$ sao cho $\vec{\alpha}' + \vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{\alpha}' = \vec{0}$
- 4) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$
- 5) $(x + y)\vec{\alpha} = x\vec{\alpha} + y\vec{\alpha}$
- 6) $x(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = x\vec{\alpha} + x\vec{\beta}$
- 7) $x(y\vec{\alpha}) = (xy)\vec{\alpha}$
- 8) $1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ (1 là phần tử đơn vị của \mathbb{k})

Khi đó V cùng với hai phép toán nói trên gọi là một không gian vector trên trường \mathbb{k} hay \mathbb{k} -không gian vector.

Định nghĩa 1.40: Hệ vector $(\vec{\alpha}_i, i \in I)$ của V gọi là hệ vector độc lập tuyến tính nếu

$$\sum_{i \in I} x_i \vec{\alpha}_i = \vec{0} \Rightarrow x_i = 0, \forall i \in I$$

Một hệ vector gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu nó không độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1.41: Hệ vector $(\vec{\alpha}_i, i \in I)$ gọi là độc lập tuyến tính tối đại trong hệ vector $B = \{\vec{\alpha}_i \in V, i \in I\}$ nếu B chứa hệ đó, hệ đó độc lập tuyến tính và mọi vector của B đều biểu thị tuyến tính qua các vector của hệ.

Hệ vector $(\vec{\alpha}_i, i \in I)$ gọi là một hệ sinh của hệ vector B nếu mọi vector của B đều biểu thị tuyến tính qua các vector của hệ.

Nếu B hữu hạn sinh (nghĩa là có hệ sinh gồm hữu hạn phần tử) thì B có hệ độc lập tuyến tính tối đại gồm hữu hạn phần tử và số phần tử của các hệ vector độc lập tuyến tính tối đại trong B là bằng nhau. Số đó gọi là hạng của hệ vector B . Nếu $B = V$ thì số đó gọi là số chiều của không gian vector V và kí hiệu là $\dim V$. Mỗi hệ vector độc lập tuyến tính tối đại của V gọi là một cơ sở của V .

Định nghĩa 1.42: Giả sử $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ là một cơ sở của V , khi đó mỗi vector $\vec{x} \in V$ đều có thể viết được một cách duy nhất

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

Bộ n số (x_1, \dots, x_n) gọi là các tọa độ của \vec{x} trong cơ sở $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Định nghĩa 1.43: Một tập con khác rỗng W của V được gọi là một không gian vector con của V nếu nó ổn định đối với hai phép toán của V , nghĩa là:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in W \text{ thì } \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in W \text{ với } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}.$$

Định nghĩa 1.44: Cho $X \subseteq V$ thì giao của mọi không gian vector con của V chứa X gọi là bao tuyến tính của X trong V và kí hiệu là $\langle X \rangle$. Nếu $X \neq \emptyset$ thì $\langle X \rangle$ là tập các tổ hợp tuyến tính của các hệ (hữu hạn)

vector trong X . $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$

Định nghĩa 1.45: Tổng của một họ các không gian vector con của V : $\{W_i\}, i \in I$, kí hiệu: $\sum_{i \in I} W_i$ xác định

$$\text{bởi: } \sum_{i \in I} W_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} W_i \right\rangle$$

Khi đó $\forall \vec{\alpha} \in \sum_{i \in I} W_i$, đều có thể viết được dưới dạng

$$\vec{\alpha} = \sum_{i \in I} \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_i \in W_i, i \in I$$

Nếu cách viết đó là duy nhất thì tổng trên được gọi là tổng trực tiếp của họ $\{W_i\}, i \in I$ và được kí hiệu:

$\bigoplus_{i \in I} W_i$. Nếu $I = \{1, \dots, n\}$ thì tổng đó được viết là: $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. Đặc biệt $W_1 + W_2$ là tổng trực tiếp khi và chỉ khi $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Nếu $V = W \oplus Z$ thì Z gọi là bù tuyến tính của W trong V .

Giả sử W và Z là hai không gian vector con của không gian vector hữu hạn chiều V thì $\dim W + \dim Z = \dim(W + Z) + \dim(W \cap Z)$

Định nghĩa 1.46: Giả sử V, W là những \mathbb{K} -không gian vector. Ánh xạ $f: V \rightarrow W$ bảo toàn hai phép toán của \mathbb{K} -không gian vector, tức là:

$$\begin{aligned} f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &= f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}), \\ f(k\vec{\alpha}) &= kf(\vec{\alpha}), \end{aligned} \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V, k \in \mathbb{K}$$

được gọi là ánh xạ tuyến tính từ V đến W .

Định nghĩa 1.47: Một ma trận A loại (cấp) $m \times n$ trên trường \mathbb{K} là một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ phần tử trong \mathbb{K} được viết thành m dòng và n cột như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$ là phần tử ở vị trí dòng i , cột j của A . Đôi khi A được viết ngắn gọn là $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay $(A)_{m \times n}$

Các ma trận thường được kí hiệu bởi A, B, C và tập hợp các ma trận loại $m \times n$ trên trường \mathbb{K} được kí hiệu bởi $M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Ma trận không cấp $m \times n$ (ma trận zero), kí hiệu $0_{m \times n}$ là ma trận mà mọi phần tử đều bằng 0.

Nếu $m = n$ thì A được gọi là ma trận vuông cấp n trên \mathbb{K} . Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên \mathbb{K} kí hiệu là $M_n(\mathbb{K})$.

Ma trận cấp $1 \times n$ được gọi là ma trận hàng; ma trận cấp $m \times 1$ được gọi là ma trận cột.

Nếu $A \in M_n(\mathbb{K})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính của A .

Định nghĩa 1.48: Nếu $A \in M_n(\mathbb{K})$ thì vết của A (kí hiệu là $\text{tr}(A)$) được cho bởi

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Định nghĩa 1.49: Ma trận chéo là ma trận vuông trong đó các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0. Ta thường dùng kí hiệu $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ để chỉ một ma trận đường chéo cấp n có các phần tử nằm trên đường chéo lần lượt là a_1, a_2, \dots, a_n .

Định nghĩa 1.50: Ma trận đơn vị I_n là ma trận có dạng $I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa 1.51: Cho $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Ta nói $A = B$ khi và chỉ khi $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$

Định nghĩa 1.52: Cho $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Ta nói $B = (b_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ là chuyển vị của A (kí hiệu $B = A^T$) nếu $a_{ij} = b_{ji}, \forall i, j$.

Định nghĩa 1.53: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ thì $A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)} \in M_n(\mathbb{C})$ được gọi là ma trận liên hợp Hecmit với A, nghĩa là

$$(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Định nghĩa 1.54: Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$. Khi đó nếu $A^T = A$ thì ta nói A là ma trận đối xứng, nếu $A^T = -A$ thì ta nói A là ma trận phản xứng.

Định nghĩa 1.55 (phép nhân một số với một ma trận): Cho $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), a \in \mathbb{K}$. Ta gọi tích a và A (kí hiệu aA) là một ma trận $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ được xác định bởi $c_{ij} = aa_{ij}$.

Nếu $a = -1$ thì ta kí hiệu $(-1)A$ bởi $-A$ và gọi là ma trận đối của A.

Định nghĩa 1.56 (phép cộng hai ma trận): Cho $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Ta gọi tổng của A và B (kí hiệu là $A + B$) là một ma trận $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ được xác định bởi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Tổng của $A + (-B)$ được kí hiệu bởi $A - B$ và gọi là hiệu của ma trận A và B.

Tính chất 1.57: Cho $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K}); \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Khi đó:

- a) $(ab)A = a(bA)$
- b) $(aA)^T = aA^T$
- c) Tổng hai ma trận có tính chất giao hoán: $A + B = B + A$
- d) Tổng hai ma trận có tính kết hợp: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- e) Tồn tại ma trận $0_{m \times n}$ sao cho: $A + 0 = 0 + A = A$
- f) Tồn tại ma trận đối của A sao cho: $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- g) Phép nhân vô hướng có tính chất phân phối: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- h) Chuyển vị của tổng bằng tổng các chuyển vị: $(A + B)^T = A^T + B^T$

Định nghĩa 1.58 (phép nhân hai ma trận): Cho ma trận $A = (a_{ik}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ và $B = (b_{kj}) \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$.

Tích của hai ma trận A và B là ma trận $C = (c_{ij}) \in M_{m \times p}(\mathbb{K})$ (kí hiệu $C = A.B$), được xác định bởi

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ và $AB = BA$ thì A và B được gọi là giao hoán nhau.

Định nghĩa 1.59: Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ và $AB = BA = I_n$ thì B được gọi là ma trận khả nghịch của A và kí hiệu $B = A^{-1}$. Lúc đó ta cũng nói ma trận A khả nghịch hay A không suy biến.

Tính chất 1.60: Nếu $A \in M_n(\mathbb{K})$ thì $AI_n = I_n A = A$

Tính chất 1.61: Cho $A, A' \in M_{m \times n}(\mathbb{K}); B, B' \in M_{n \times p}(\mathbb{K}); B \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$. Ta có:

- a) Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp: $(AB)C = A(BC)$
- b) $A.0_{n \times p} = 0_{m \times p}; 0_{r \times m}.A = 0_{r \times n}$
- c) Phép nhân ma trận có tính chất phân phối: $A(B \pm B') = AB \pm AB'; (A \pm A')B = AB \pm A'B$
- d) $(AB)^T = B^T A^T$
- e) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Định nghĩa 1.62 (định thức): Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Định thức ma trận A (kí hiệu là $\det A$ hay $|A|$) là một giá trị được tính bởi công thức:

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

trong đó: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$. M_{ij} là ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ ma trận A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j. Đại lượng A_{ij} được gọi là phần bù đại số của a_{ij} .

Định lý 1.63: Với ma trận vuông cấp n ($n \geq 2$) ta có thể khai triển định thức của nó theo một dòng bất kì hoặc một cột bất kì theo các công thức sau:

- Theo dòng i: $\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$
- Theo cột j: $\det A = |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

với A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} được xác định như trên.

Định lý 1.64 (Công thức tính ma trận nghịch đảo): Nếu $\det A \neq 0$ thì ma trận nghịch đảo của A được tính bằng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.65: Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$. Số $\lambda \in \mathbb{K}$ được gọi là giá trị riêng của ma trận A , nếu tồn tại một

vector $0 \neq u \in \mathbb{K}^n$ sao cho $Au = \lambda u$, trong đó $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K} \right\}$.

Khi đó vector u được gọi là vector riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ .

Tính chất 1.66:

- Giá trị riêng λ chính là nghiệm của phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$, được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A .
- Một giá trị riêng có thể có nhiều vector riêng.
- Mỗi vector riêng chỉ ứng với một giá trị riêng duy nhất.
- Ma trận A là nghiệm của đa thức đặc trưng của chính nó.
- Nếu $\lambda = 0$ là giá trị riêng của ma trận A thì A không khả nghịch. Ngược lại, nếu mọi giá trị riêng của A đều khác không thì A khả nghịch.
- Nếu λ là giá trị riêng của ma trận A thì λ^k là giá trị riêng của ma trận A^k .

Định nghĩa 1.67 (ma trận đồng dạng): Hai ma trận A, B vuông cấp n được gọi là đồng dạng nhau nếu tồn tại một ma trận không suy biến S sao cho $B = S^{-1}AS$. Kí hiệu $A \sim B$.

Định nghĩa 1.68 (ma trận chéo hóa được): Ma trận A được gọi là ma trận chéo hóa được nếu nó đồng dạng với ma trận chéo.

Định lý 1.69: Điều kiện cần và đủ để ma trận A chéo hóa được là nó có n vector riêng độc lập tuyến tính.

Sau khi tìm hiểu một vài kiến thức cơ bản về đại số, thì phần kiến thức về giải tích cũng đóng vai trò khá quan trọng trong việc chứng minh các định lý, tính chất trong luận văn này. Nên phần tiếp theo của chương này dành cho việc đưa ra những kiến thức cơ bản về giải tích.

2. Kiến thức Giải tích.

Định nghĩa 1.70: Cho X là một tập. Một metric trên X là một hàm $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất

1) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

với mọi $x, y, z \in X$.

Không gian metric $X = (X, d)$ là một tập X cùng với một metric d trên nó.

Trường \mathbb{K} là không gian metric với metric $d(x, y) = |x - y|$, gọi là metric thông thường.

Tổng quát hơn, \mathbb{K}^n là không gian metric với metric

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

với mọi $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$, gọi là metric Eulide hay metric thông thường.

Định nghĩa 1.71: Cho X là một không gian metric. Với mọi $a \in X$ và số $\varepsilon > 0$ ta gọi

$B(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$ là ε -lân cận của điểm a . Tập con $M \subset X$ gọi là mở nếu mọi $a \in M$, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(a, \varepsilon) \subset M$.

Với mọi $a \in X$ và $\varepsilon > 0$, tập $B(a, \varepsilon)$ là mở. Họ \mathcal{T} tất cả các tập mở của X có các tính chất

1) $\emptyset \in \mathcal{T}; X \in \mathcal{T}$

$$2) U_i \in T, i \in I \text{ thì } \bigcup_{i \in I} U_i \in T$$

$$3) U, V \in T \text{ thì } U \cap V \in T$$

Định nghĩa 1.72: Cho X là một tập. Một họ T các tập con của X gọi là tôpô trên X nếu họ T có các tính chất (1), (2) và (3) như trên.

Không gian tôpô $X = (X, T)$ là một tập X cùng với một tôpô T trên nó.

Nếu X là một không gian tôpô thì các tập $U \in T$ gọi là các tập mở, các phần tử của X gọi là các điểm.

Cho X là một tập và T_1, T_2 là hai tôpô trên X . Ta nói T_1 yếu hơn T_2 (T_2 mạnh hơn T_1) nếu $T_1 \subset T_2$.

Các không gian mêtric là các không gian tôpô, tôpô T trên nó gọi là tôpô sinh bởi mêtric.

Định nghĩa 1.73: Không gian tôpô X gọi là Hausdorff nếu mọi cặp điểm khác nhau $x, y \in X$, tồn tại hai tập mở không giao nhau U và V sao cho $x \in U, y \in V$.

Không gian mêtric là không gian tôpô Hausdorff.

Định nghĩa 1.74: Cho X là một không gian tôpô. Tập con $U \subset X$ gọi là một lân cận của điểm $a \in X$ nếu tồn tại một tập mở G sao cho $a \in G \subset U$

Họ \mathcal{A} các lân cận của điểm a gọi là một cơ sở lân cận của điểm a nếu mọi lân cận của a đều tồn tại $V \in \mathcal{A}$ sao cho $V \subset U$.

Cho tập $M \subset X$. Điểm $a \in X$ gọi là điểm trong của M nếu tồn tại lân cận của a sao cho $U \subset M$. Tập tất cả các điểm trong của M kí hiệu là $\overset{\circ}{M}$ và gọi là phần trong của M .

Tập M mở nếu và chỉ nếu $M = \overset{\circ}{M}$.

Định nghĩa 1.75: Cho X là một không gian tôpô. Tập con $A \subset X$ gọi là đóng nếu $X \setminus A$ là tập mở.

Với mọi tập con $M \subset X$, ta gọi bao đóng của M là tập $\overline{M} = X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{M})$. Dễ thấy rằng

$$\overline{M} = \{x \in X : U \cap M \neq \emptyset \text{ với mọi lân cận } U \text{ của } x\}$$

Tập M đóng nếu và chỉ nếu $M = \overline{M}$.

Ta gọi biên của M là tập $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$. Dễ thấy rằng

$$\partial M = \{x \in X : U \cap M \neq \emptyset, U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset \text{ với mọi lân cận } U \text{ của } x\}$$

Cho các tập con $M, N \subset X$. Tập M gọi là trùm mật trong tập N nếu $\overline{M} \supset N$.

Định nghĩa 1.76: Một ánh xạ $\alpha \mapsto x_\alpha$ từ \mathbb{N} vào tập X gọi là một dãy trong X , kí hiệu là $\{x_n\}$

Trường hợp $X = (X, d)$ là không gian mêtric thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x (kí hiệu là $\lim x_n = x$ hoặc $x_n \rightarrow x$) tương đương với $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$.

Mệnh đề 1.77: Cho X là không gian mêtric, thì:

a) Giới hạn của một dãy trong X nếu có là duy nhất.

b) Tập $A \subset X$ đóng nếu và chỉ nếu $\forall \{x_n\} \subset A, x_n \rightarrow x \in X \Rightarrow x \in A$

Định nghĩa 1.78: Cho X và Y là hai không gian tôpô và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$. Ánh xạ f gọi là liên tục tại $a \in X$ nếu mọi lân cận V của $f(a)$ trong Y tồn tại một lân cận U của a trong X sao cho $f(U) \subset V$.

Ánh xạ f gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi $a \in X$.

Ánh xạ f gọi là đồng phôi nếu f song ánh và cả hai ánh xạ f và f^{-1} liên tục.

Mệnh đề 1.79: Nếu X và Y là các không gian mêtric và $f : X \rightarrow Y$ thì f liên tục tại $x \in X$ nếu và chỉ nếu mọi dãy $x_n \rightarrow x$ đều có $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Mệnh đề 1.80: Nếu X và Y là các không gian tôpô và $f : X \rightarrow Y$ thì f liên tục nếu và chỉ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau

a) $f^{-1}(B)$ mở trong X với mọi B mở trong Y

b) $f^{-1}(B)$ đóng trong X với mọi B đóng trong Y

Định nghĩa 1.81: Cho (X, T) là không gian tôpô và $Y \subset X$. Khi đó tôpô trên Y xác định bởi

$$\tilde{T} = \{G \cap Y : G \in T\}$$

gọi là tôpô cảm sinh trên Y . Không gian tôpô (Y, \tilde{T}) gọi là không gian tôpô con của X .

Nếu (X, d) là không gian mêtric và $Y \subset X$ thì $d(x, y)$ với $x, y \in Y$ cũng là một mêtric trên Y , gọi là mêtric cảm sinh. Tôpô sinh bởi mêtric này cũng chính là tôpô cảm sinh.

Định nghĩa 1.82: Cho họ tập $\{E_i\}_{i \in I}$. Ta gọi tập có các phần tử là các ánh xạ

$$x: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i; \quad x(i) \in E_i, \forall i \in I$$

là tích Descartes của họ tập đã cho, kí hiệu là $\prod_{i \in I} E_i$.

Định nghĩa 1.83: Với mọi $x \in \prod_{i \in I} E_i$, đặt $x(i) = x_i$. Khi đó có thể viết $x = (x_i)_{i \in I}, x_i \in E_i$. Ta gọi x_i là tọa độ thứ i của x và ánh xạ

$$\pi_i: \prod_{j \in I} E_j \rightarrow E_i, \quad \pi_i(x) = x_i$$

là ánh xạ tọa độ (hay phép chiếu chính tắc) thứ i .

Nếu $I = \{1, \dots, n\}$ thì $\prod_{i \in I} E_i$ được kí hiệu là

$$\prod_{i=1}^n E_i \text{ hoặc } E_1 \times \dots \times E_n$$

Nếu $E_i = E$ với mọi $i \in I$ thì $\prod_{i \in I} E_i$ được kí hiệu là E^I . Nếu thêm nữa $I = \{1, \dots, n\}$ thì ta kí hiệu là E^n , gọi là lũy thừa Descartes bậc n của E .

Định nghĩa 1.84: Cho $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ là một họ các không gian tôpô. Kí hiệu tích Descartes của họ $\{X_i\}$ là

$$X = \prod_{i \in I} X_i.$$

Tôpô T yếu nhất trên X để tất cả các ánh xạ tọa độ liên tục gọi là tôpô tích. Không gian tôpô (X, T) gọi là tích (hay tích Tikhonov) của họ các không gian $\{X_i\}_{i \in I}$.

Nếu kí hiệu

$$B = \left\{ \prod_{i \in I} G_i : G_i \in T_i, G_i \neq X_i \text{ chỉ một số hữu hạn } i \in I \right\}$$

thì

$$T = \{G \subset X : G \text{ là hợp của các tập trong } B\}$$

Cho $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ là một họ hữu hạn các không gian metric. Khi đó metric

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

với $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X = \prod_{i=1}^n X_i$ là metric sinh ra tôpô tích trên X .

Định nghĩa 1.85: Cho X là một không gian metric. Một dãy $\{x_n\}$ trong X gọi là dãy Cauchy nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Các dãy hội tụ là dãy Cauchy.

Không gian metric X được gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ.

Tập $A \subset X$ gọi là tập đầy đủ nếu nó đầy đủ với metric cảm sinh.

Mọi tập con đầy đủ của một không gian metric là tập đóng; mọi tập con đóng của một không gian metric đầy đủ là tập đầy đủ.

Định nghĩa 1.86: Cho X là một không gian tôpô. Một họ $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ các tập mở của X gọi là phủ mở của X nếu $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha = X$.

Không gian X gọi là compact nếu mọi phủ mở $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tồn tại tập con hữu hạn $J \subset I$ sao cho $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ cũng là một phủ mở của X .

Tập $A \subset X$ gọi là compact nếu nó compact đối với tôpô cảm sinh. Tập $A \subset X$ gọi là compact tương đối nếu \bar{A} compact.

Không gian X gọi là compact địa phương nếu mọi $x \in X$ đều có một lân cận compact và đóng.

Nếu không gian X compact thì mọi tập con đóng của X đều là tập compact.

Nếu không gian X Hausdorff thì mọi tập con compact của X đều là tập đóng.

Cho X, Y là các không gian tôpô và ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow Y$. Khi đó nếu tập $A \subset X$ compact thì $f(A) \subset Y$ compact.

Cho X compact, Y Hausdorff và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ là đơn ánh liên tục thì $f : X \rightarrow f(X)$ là phép đồng phôi.

Định lý 1.87 (định lý Tikhonov): Không gian tôpô tích $\prod_{i \in I} X_i$ compact nếu và chỉ nếu mọi không gian X_i compact.

Cho X là một không gian metric. Tập $A \subset X$ gọi là bị chặn nếu tồn tại số thực $r > 0$ và điểm $a \in X$ sao cho $A \subset B(a, r)$.

Tập A gọi là hoàn toàn bị chặn (hay tiền compact) nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \dots, x_n \in X : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Nếu tập A

hoàn toàn bị chặn thì $\forall \varepsilon > 0$ có thể chọn $x_1, \dots, x_n \in A$ để $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Các tập hoàn toàn bị chặn là bị chặn. Tập bị chặn \mathbb{R}^n với metric thông thường là hoàn toàn bị chặn.

Không gian metric X gọi là hoàn toàn bị chặn nếu bản thân X là một tập hoàn toàn bị chặn.

Cho X là không gian metric và tập con A của X . Ta có các khẳng định sau:

- 1) Tập con A compact nếu và chỉ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau
 - a) Mọi dãy trong A đều có một dãy con hội tụ (trong A)
 - b) A đầy đủ và hoàn toàn bị chặn.
- 2) Tập con A hoàn toàn bị chặn nếu và chỉ nếu mọi dãy trong A đều có một dãy con là dãy Cauchy.
- 3) Tập con A compact tương đương nếu mỗi dãy trong A đều có một dãy con hội tụ trong X .

Cho (X, d) và (Y, p) là các không gian metric. Khi đó: f liên tục tại $a \in X$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, d(x, a) < \delta \Rightarrow p(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Định nghĩa 1.88: Cho E là một \mathbb{K} -không gian vector. Một chuẩn trên E là một hàm $x \mapsto \|x\|$ từ E vào \mathbb{R} thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y \in E$, mọi $\lambda \in \mathbb{K}$

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0$ nếu và chỉ nếu $x = 0$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Định lý 1.89: Nếu $x \mapsto \|x\|$ là một chuẩn trên E thì $d(x, y) = \|x - y\|$ là một metric trên E . Metric này thỏa mãn $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ và $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ với mọi $x, y, z \in E; \lambda \in \mathbb{K}$.

Ta gọi không gian định chuẩn là không gian vector cùng với một chuẩn trên nó. Không gian định chuẩn là không gian metric với metric sinh bởi chuẩn (metric nói trong định lý 0.89)

Tập con A của không gian định chuẩn E gọi là bị chặn nếu tồn tại số thực M sao cho $\|x\| \leq M$ với mọi $x \in A$. Ta cũng nói A bị chặn bởi M .

Định nghĩa 1.90: Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian định chuẩn E . Khi đó tổng hình thức

$x_1 + x_2 + \dots$ hay $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là một chuỗi trong E . Phần tử $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ được gọi là tổng riêng

thứ n của chuỗi. Chuỗi được gọi là hội tụ nếu dãy các tổng riêng của nó hội tụ. Giới hạn s của dãy tổng

riêng được gọi là tổng của chuỗi và ta cũng viết $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$.

Định nghĩa 1.91: Cho E là một \mathbb{K} -không gian vector. Một dạng Hermite trên E là một hàm $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ thỏa mãn

- 1) $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$
- 2) $\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$
- 3) $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$
- 4) $\varphi(x, \lambda y) = \overline{\lambda} \varphi(x, y)$
- 5) $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

Với mọi $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E; \lambda \in \mathbb{K}$.

Định nghĩa 1.92: Một dạng Hermite φ được gọi là xác định dương nếu $\varphi(x, x) > 0$ với $0 \neq x \in E$. Một dạng Hermite xác định dương còn được gọi là một tích vô hướng. Kí hiệu tích vô hướng của x và y là $(x | y)$.

Tích vô hướng là một hàm liên tục từ $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$.

Chương II:

Những nhóm ma trận thực và phức

Ở chương I ta đã được trang bị một vài kiến thức cơ bản để ta có thể hiểu rõ hơn về những tính chất, định lý... được đề cập trong luận văn này. Để đi sâu vào việc khảo sát tính liên thông của những nhóm ma trận thì trước hết ta phải biết thế nào là nhóm ma trận, nhóm ma trận thực là gì? Nhóm ma trận phức là gì? Và trong hình học thì có những nhóm ma trận đặc biệt nào? Trong chương này ta sẽ lần lượt tìm hiểu về những vấn đề đó.

1. Nhóm của các ma trận

Trong luận văn này chúng ta thường xét các trường hợp trường $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ hay $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Cho $M_{m,n}(\mathbb{k})$ là tập hợp của những ma trận $m \times n$ với các phần tử lấy trong \mathbb{k} . Chúng ta ký hiệu phần tử (i, j) của một ma trận A có kích thước $m \times n$ là A_{ij} hoặc a_{ij} ,

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ta đặt $M_n(\mathbb{k}) = M_{n,n}(\mathbb{k})$. Khi đó $M_n(\mathbb{k})$ là một (không chắc giao hoán) vành dưới phép cộng và nhân thông thường các ma trận, có phần tử đơn vị là I_n . Nhớ lại hàm định thức $\det : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$.

Mệnh đề 2.1: $\det : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$ có những tính chất sau:

- a) Cho $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- b) $\det I_n = 1$
- c) $A \in M_n(\mathbb{k})$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $\det A \neq 0$

Chúng ta sử dụng ký hiệu:

- Tập hợp các ma trận $n \times n$ khả nghịch:

$$GL_n(\mathbb{k}) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) : \det A \neq 0\}$$

- Tập hợp các ma trận $n \times n$ đơn môđun:

$$SL_n(\mathbb{k}) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) : \det A = 1\} \subseteq GL_n(\mathbb{k})$$

Định lý 2.2: Các tập hợp $GL_n(\mathbb{k})$, $SL_n(\mathbb{k})$ là những nhóm dưới phép nhân ma trận. Hơn nữa $SL_n(\mathbb{k})$ là nhóm con của $GL_n(\mathbb{k})$, tức là $SL_n(\mathbb{k}) \leq GL_n(\mathbb{k})$.

$GL_n(\mathbb{k})$ được gọi là nhóm tuyến tính tổng quát $n \times n$, trong khi $SL_n(\mathbb{k})$ được gọi là nhóm tuyến tính đặc biệt $n \times n$ hay nhóm đơn môđun $n \times n$. Khi $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ chúng ta sẽ xem $GL_n(\mathbb{R})$ và $GL_n(\mathbb{C})$ như những nhóm tuyến tính tổng quát thực và phức. Đương nhiên, chúng ta cũng xét những nhóm con của những nhóm này, nhưng trước khi làm điều đó chúng ta hãy xét tôpô của $M_n(\mathbb{R})$ và $M_n(\mathbb{C})$.

2. Nhóm của những ma trận là các không gian mêtric

Cho $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Chúng ta xem $M_n(\mathbb{k})$ như một không gian vectơ trên \mathbb{k} với số chiều là n^2 . Chúng ta sẽ định nghĩa một chuẩn trên $M_n(\mathbb{k})$ như sau. Cho \mathbb{k}^n là tập hợp của những ma trận $n \times 1$ trên \mathbb{k} , và với $x \in \mathbb{k}^n$ đặt

$$|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}, \quad \text{trong đó } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Với $A \in M_n(\mathbb{k})$, xét tập hợp:

$$S_A = \left\{ \frac{|Ax|}{|x|} : 0 \neq x \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Điều đó cho thấy S_A bị chặn và vì thế chúng ta có thể định nghĩa số thực

$$\|A\| = \sup S_A$$

Đặt

$$S_A^1 = \left\{ \frac{|Ax|}{|x|} : x \in \mathbb{K}^n, |x| = 1 \right\},$$

ta có:

$$\|A\| = \sup S_A^1 = \max S_A^1,$$

khi $\{x \in \mathbb{K}^n : |x| = 1\}$ là compact.

Chú ý 2.3: Những điều sau đây cho chúng ta một thủ thuật để tính toán $\|A\|$

Tất cả những giá trị riêng của ma trận dạng hermit dương A^*A là những số thực không âm, vì vậy nó có một giá trị riêng thực không âm lớn nhất là λ . Khi đó:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda}.$$

Thực ra, với bất kỳ đơn vị vectơ riêng v của A^*A với giá trị riêng λ , $\|A\| = |Av|$.

Khi A là thực, $A^*A = A^T A$ là đối xứng thực dương và có những đơn vị vectơ riêng $w \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ của A^*A với giá trị riêng λ làm cho $\|A\| = |Aw|$. Đặc biệt, điều này cho thấy $\|A\|$ thì độc lập dù cho A được xét dưới dạng một ma trận thực hay phức.

Mệnh đề 2.4: $\|\cdot\|$ là một \mathbb{K} -chuẩn trên $M_n(\mathbb{K})$, nghĩa là:

- a) $\|tA\| = |t|\|A\|$ với $t \in \mathbb{K}, A \in M_n(\mathbb{K})$
- b) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ với $A, B \in M_n(\mathbb{K})$
- c) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ với $A, B \in M_n(\mathbb{K})$
- d) $\|A\| = 0$ nếu và chỉ nếu $A = 0$

Chuẩn $\|\cdot\|$ được gọi là toán tử hay chuẩn sup. Chúng ta định nghĩa một metric ρ trên $M_n(\mathbb{K})$ bởi:

$$\rho(A, B) = \|A - B\|$$

Liên quan đến metric này là một tôpô tự nhiên trên $M_n(\mathbb{K})$, mà nó cho phép chúng ta định nghĩa những hàm liên tục $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow X$ vào trong một không gian tôpô X .

Với $A \in M_n(\mathbb{K})$ và $r > 0$, đặt:

$$N_{M_n(\mathbb{K})}(A; r) = \{B \in M_n(\mathbb{K}) : \|B - A\| < r\}$$

thì $N_{M_n(\mathbb{K})}(A; r)$ là đĩa mở bán kính r trong $M_n(\mathbb{K})$. Tương tự nếu $Y \subseteq M_n(\mathbb{K})$ và $A \in Y$, đặt:

$$N_Y(A; r) = \{B \in Y : \|B - A\| < r\} = N_{M_n(\mathbb{K})}(A; r) \cap Y$$

Thì một tập con $V \subseteq Y$ là mở trong Y nếu và chỉ nếu với mỗi $A \in V$, có một $\delta > 0$ sao cho $N_Y(A; \delta) \subseteq V$.

Định nghĩa 2.5: Cho $Y \subseteq M_n(\mathbb{K})$ và (X, T) là một không gian tôpô. Thì một hàm $f: Y \rightarrow X$ là liên tục hoặc là một ánh xạ liên tục nếu với mỗi $A \in Y$ và $U \in T$ sao cho $f(A) \in U$, có một $\delta > 0$ để:

$$B \in N_Y(A; \delta) \Rightarrow f(B) \in U.$$

Tương đương, f liên tục nếu và chỉ nếu với $U \in T$, $f^{-1}(U) \subseteq Y$ là mở trong Y .

Nhớ rằng với một không gian tôpô (X, T) , một tập con $W \subseteq X$ là đóng nếu $X - W \subseteq X$ là mở. Nhưng có cách thay thế khác để thiết lập công thức định nghĩa sự liên tục là f liên tục nếu và chỉ nếu với mỗi tập con đóng $W \subseteq X$, $f^{-1}(W) \subseteq Y$ là đóng trong Y .

Đặc biệt chúng ta có thể cho $X = \mathbb{K}$ và T là không gian tôpô với metric tự nhiên liên kết với “chuẩn” tiêu chuẩn trên \mathbb{K} và xét những hàm liên tục $Y \rightarrow \mathbb{K}$.

Mệnh đề 2.6: Với $1 \leq r, s \leq n$, hàm tọa độ

$$\begin{aligned} coord_{rs} : M_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto coord_{rs}(A) = A_{rs} \end{aligned}$$

là liên tục.

Chứng minh:

Với những vector đơn vị cơ sở tiêu chuẩn $e_i (1 \leq i \leq n)$ của \mathbb{K}^n , ta có:

$$\begin{aligned} |A_{rs}| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |A_{is}|^2} \\ &= \left| \sum_{i=1}^n A_{is} e_i \right| \\ &= |A e_s| \\ &\leq \|A\| \end{aligned}$$

Vì vậy với $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$

$$|A'_{rs} - A_{rs}| \leq \|A' - A\|$$

Bây giờ cho $A \in M_n(\mathbb{K})$ và $\varepsilon > 0, \|A' - A\| < \varepsilon \Rightarrow |A'_{rs} - A_{rs}| < \varepsilon$. Điều này cho thấy hàm $coord_{rs}$ thì liên tục tại mỗi $A \in M_n(\mathbb{K})$. □

Hệ quả 2.7: Nếu $f : \mathbb{K}^{n^2} \rightarrow \mathbb{K}$ là liên tục, thì hàm liên đới

$$\begin{aligned} F : M_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto F(A) = f((A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}) \end{aligned}$$

là liên tục.

Hệ quả 2.8: Định thức $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ và vết $tr : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ là những hàm liên tục.

Chứng minh:

Định thức là sự hợp phần của hàm liên tục $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{n^2}$ (khi đồng nhất $M_n(\mathbb{K})$ với \mathbb{K}^{n^2}) và một hàm đa thức $\mathbb{K}^{n^2} \rightarrow \mathbb{K}$ (cũng liên tục). Tương tự cho vết,

$$trA = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

Mệnh đề 2.9: Với $A \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\| \leq \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|$$

Chứng minh:

Cho $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ với $|x| = 1$. Sau đó từ mỗi $|x_k| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |Ax| &= |x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n| \\ &\leq |x_1 A e_1| + \dots + |x_n A e_n| \\ &\leq |A e_1| + \dots + |A e_n| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n A_{i1}^2} + \dots + \sqrt{\sum_{i=1}^n A_{in}^2} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}| \end{aligned}$$

Từ việc điều trên là đúng cho tất cả các vector x với $|x| = 1$, theo định nghĩa của $\|A\|$,

$$\|A\| \leq \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|$$

□

Thực ra, $M_n(\mathbb{K})$ là đầy đủ theo chuẩn $\| \cdot \|$.

Định nghĩa 2.10: Một dãy $\{A_r\}_{r \geq 0}$ mà có điều sau đây là dãy Cauchy

- Với mỗi $\varepsilon > 0$, có một N sao cho $r, s > N$ thì suy ra $\|A_r - A_s\| < \varepsilon$

Định lý 2.11: Với $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, mỗi dãy Cauchy $\{A_r\}_{r \geq 0}$ trong $M_n(\mathbb{K})$ có một giới hạn $\lim_{r \rightarrow \infty} A_r$. Hơn nữa,

$$\left(\lim_{r \rightarrow \infty} A_r \right)_{ij} = \lim_{r \rightarrow \infty} (A_r)_{ij}$$

Chứng minh:

Theo mệnh đề 2.6, giới hạn bên phải tồn tại, vì vậy nó đủ để thấy rằng ma trận giới hạn cần tìm chính là ma trận A với

$$A_{ij} = \lim_{r \rightarrow \infty} (A_r)_{ij}$$

Dãy $\{A_r - A\}_{r \geq 0}$ thỏa mãn

$$\|A_r - A\| \leq \sum_{i,j=1}^n |(A_r)_{ij} - A_{ij}| \rightarrow 0$$

khi $r \rightarrow \infty$, vì vậy mệnh đề 2.9, $A_r \rightarrow A$

□

Mệnh đề 2.12: Một hàm $F : M_m(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ liên tục theo chuẩn $\| \cdot \|$ nếu và chỉ nếu mỗi hàm thành phần $F_{rs} : M_m(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ liên tục.

Một hàm $f : M_m(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ liên tục theo chuẩn $\| \cdot \|$ và metric thông thường trên \mathbb{K} nếu và chỉ nếu nó liên tục khi được xem xét như là một hàm từ $\mathbb{K}^{m^2} \rightarrow \mathbb{K}$.

Bây giờ ta xét tính chất topo của một số nhóm con của $M_n(\mathbb{K})$, đặc biệt là một vài nhóm ma trận sau đây.

Mệnh đề 2.13: Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

- $GL_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{K})$ là một tập con mở.
- $SL_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{K})$ là một tập con đóng.

Chứng minh:

Chúng ta đã thấy rằng hàm $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ liên tục. Khi đó:

$GL_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}) - \det^{-1}\{0\}$ là mở vì $\{0\}$ là đóng, từ đó chứng minh được a)

Tương tự:

$SL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}\{1\} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ là tập đóng trong $M_n(\mathbb{K})$ và $GL_n(\mathbb{K})$ vì $\{1\}$ đóng trong \mathbb{K} . Do đó b) đúng.

□

Ánh xạ cộng và nhân $add, mult : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ cũng liên tục khi chúng ta đưa tích metric vào không gian tôpô trên miền xác định.

Cuối cùng, ánh xạ ngược $inv : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_n(\mathbb{K}) ; A \mapsto inv(A) = A^{-1}$ cũng liên tục vì mỗi phần tử của A^{-1} có dạng $\frac{\text{phần bù đại số của } a_{ij}}{\det A}$ là một hàm liên tục của các phần tử của A và vì vậy là một hàm liên tục của chính bản thân A .

Định nghĩa 2.14: Cho G là một không gian tôpô và xem $G \times G$ như không gian tích (nghĩa là trang bị cho nó tích tôpô). Giả sử rằng G cũng là một nhóm với ánh xạ nhân $mult : G \times G \rightarrow G$ và ánh xạ ngược $inv : G \rightarrow G$. Khi đó G là một nhóm tôpô nếu $mult, inv$ liên tục.

Những ví dụ quen thuộc nhất được tìm thấy từ các nhóm G tùy ý có những tôpô rời rạc. Đặc biệt tất cả các nhóm hữu hạn đều có thể được xem xét như vậy.

Định lý 2.15: Với $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, mỗi một nhóm $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K})$ rõ ràng là một nhóm tôpô với các ánh xạ nhân, ánh xạ ngược và tính chất không gian tôpô con thừa hưởng từ $M_n(\mathbb{K})$.

3. Nhóm ma trận

Một nhóm muốn trở thành một nhóm ma trận trên \mathbb{k} thì cần phải có những điều kiện gì? Và tương tự như thế, tiêu chuẩn để thành một nhóm con ma trận là gì? Để trả lời câu hỏi đó ta sẽ tìm hiểu phần sau đây.

Định nghĩa 2.16: Một nhóm con $G \leq GL_n(\mathbb{k})$ đồng thời là một không gian con đóng thì được gọi là một nhóm ma trận trên \mathbb{k} hay một \mathbb{k} -nhóm ma trận. Nếu chúng ta muốn nhấn mạnh đến giá trị của n thì chúng ta nói G là một nhóm ma trận con của $GL_n(\mathbb{k})$.

Mệnh đề 2.17: Cho $G \leq GL_n(\mathbb{k})$ là một nhóm con ma trận và $H \leq G$ là một nhóm con đóng của G . Khi đó $H \leq GL_n(\mathbb{k})$ là một nhóm con ma trận.

Chứng minh:

Mỗi dãy $\{A_n\}_{n \geq 0}$ trong H với một giới hạn trong $GL_n(\mathbb{k})$ thực chất có giới hạn của nó trong G vì mỗi $A_n \in H \subseteq G$ và G là đóng trong $GL_n(\mathbb{k})$. Từ H là đóng trong G , điều này có nghĩa là $\{A_n\}_{n \geq 0}$ có một giới hạn trong H . Vì vậy H là đóng trong $GL_n(\mathbb{k})$, từ đó cho thấy nó là một nhóm con ma trận. □

Ví dụ 2.18: $SL_n(\mathbb{k}) \leq GL_n(\mathbb{k})$ là một nhóm ma trận trên \mathbb{k} .

Chứng minh: Theo mệnh đề 2.13, $SL_n(\mathbb{k})$ là đóng trong $M_n(\mathbb{k})$ và $SL_n(\mathbb{k}) \subseteq GL_n(\mathbb{k})$. □

Định nghĩa 2.19: Một nhóm con đóng $H \leq G$ của nhóm ma trận G thì được gọi là nhóm con ma trận của G .

Mệnh đề 2.20: Một nhóm con ma trận $H \leq G$ của một nhóm ma trận G là một nhóm ma trận.

Chứng minh: Đây là hệ quả trực tiếp của mệnh đề 2.17. □

Ví dụ 2.21: Chúng ta có thể xét $GL_n(\mathbb{k})$ như một nhóm con của $GL_{n+1}(\mathbb{k})$ bằng cách đồng nhất ma trận cấp $n \times n$ $A = [a_{ij}]$ với

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

và dễ dàng xác minh được $GL_n(\mathbb{k})$ là đóng trong $GL_{n+1}(\mathbb{k})$, vì vậy $GL_n(\mathbb{k})$ là một nhóm con ma trận của $GL_{n+1}(\mathbb{k})$.

Hạn chế việc nhúng này cho $SL_n(\mathbb{k})$ chúng ta thấy là nó nhúng như một nhóm con đóng của $SL_{n+1}(\mathbb{k}) \leq GL_{n+1}(\mathbb{k})$. Vì vậy $SL_n(\mathbb{k})$ là một nhóm con ma trận của $SL_{n+1}(\mathbb{k})$.

Tổng quát hơn, bất kỳ nhóm con ma trận nào của $GL_n(\mathbb{k})$ cũng có thể được xem như là một nhóm con ma trận của $GL_{n+1}(\mathbb{k})$ với sự thêm vào việc nhúng.

Cho một nhóm con ma trận $G \leq GL_n(\mathbb{k})$, nó sẽ thường được dùng để hạn chế định thức cho một hàm $\det_G : G \rightarrow \mathbb{k}^\times$, $\det_G A = \det A$; chúng ta thường viết nó là \det khi không phát sinh sự nhầm lẫn. Đây là một đồng cấu nhóm liên tục.

Khi $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, ta đặt:

$$\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}, \mathbb{R}^- = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\}, \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$$

Lưu ý rằng \mathbb{R}^+ là một nhóm con của $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$ mà vừa đóng vừa mở như một tập con, trong khi \mathbb{R}^- là một tập con mở; vì vậy \mathbb{R}^+ và \mathbb{R}^- là những tập con vừa đóng vừa mở, nghĩa là vừa là tập đóng và vừa là tập mở. Với $G \leq GL_n(\mathbb{R})$,

$$\det_G^{-1} \mathbb{R}^+ = G \cap \det^{-1} GL_n(\mathbb{R})$$

và

$$G = \det_G^{-1} \mathbb{R}^+ \cup \det_G^{-1} \mathbb{R}^-$$

Vì vậy G là một hợp rời nhau của những tập con vừa đóng vừa mở

$$G^+ = \det_G^{-1} \mathbb{R}^+, G^- = \det_G^{-1} \mathbb{R}^-$$

Do $I_n \in G^+ = \det_G^{-1} \mathbb{R}^+$ nên G^+ luôn không rỗng. Thực vậy, G^+ là một nhóm con đóng của G , vì vậy nó là một nhóm con ma trận của $GL_n(\mathbb{R})$. Khi $G^- \neq \emptyset$, không gian G sẽ không liên thông vì nó là hợp của hai tập con mở rời nhau. Khi $G^- = \emptyset$ thì $G = G^+$ sẽ có thể liên thông hoặc không liên thông.

Nếu $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, nhớ lại là một tập con $X \subseteq \mathbb{k}^m$ là compact nếu và chỉ nếu nó đóng và bị chặn. Đồng nhất những tập con của $M_n(\mathbb{k})$ với những tập con của \mathbb{k}^{n^2} , ta có thể chi tiết hóa những tập con compact của $M_n(\mathbb{k})$. Một nhóm ma trận $G \leq GL_n(\mathbb{k})$ là compact nếu nó là compact như một tập con của $M_n(\mathbb{k}) \supseteq GL_n(\mathbb{k})$. Kết quả sau đây là tiêu chuẩn cho những không gian mêtric.

Mệnh đề 2.22: $X \subseteq M_n(\mathbb{k})$ là compact nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau đây thỏa mãn:

- Có một giá trị $b \in \mathbb{R}^+$ sao cho với mọi $A \in X$ thì $\|A\| \leq b$.
- Mọi dãy Cauchy $\{C_n\}_{n \geq 0}$ trong X có một giới hạn trong X .

Cuối cùng, ta có đặc điểm sau của những tập compact, mà nó thường được dùng như là định nghĩa của một không gian tôpô compact.

Định lý 2.23 (Định lý Heine-Borel): $X \subseteq M_n(\mathbb{k})$ là compact nếu và chỉ nếu mọi phủ mở $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ của X đều chứa một phủ con hữu hạn $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$

4. Một số ví dụ về những nhóm ma trận

Sau khi ta biết được tiêu chuẩn để một nhóm trở thành một nhóm ma trận, cũng như là nhóm con ma trận thì phần này chủ yếu đưa ra một vài ví dụ điển hình và quan trọng của những nhóm ma trận mà ta sẽ khảo sát nó ở những chương sau

Với $n \geq 1$, một ma trận $A = [a_{ij}]$ cấp $n \times n$ là tam giác trên nếu nó có dạng

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2n-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nghĩa là $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$.

Một ma trận là đơn lũy nếu nó tam giác trên và tất cả các phần tử trên đường chéo đều có giá trị bằng 1, nghĩa là $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$ và $a_{ii} = 1$.

Nhóm con tam giác trên hay nhóm con Borel của $GL_n(\mathbb{k})$ là

$$UT_n(\mathbb{k}) = \{A \in GL_n(\mathbb{k}) : A \text{ là tam giác trên}\}$$

Trong khi đó nhóm con đơn lũy của $GL_n(\mathbb{k})$ là

$$SUT_n(\mathbb{k}) = \{A \in GL_n(\mathbb{k}) : A \text{ là đơn lũy}\}$$

Dễ thấy $UT_n(\mathbb{k})$ và $SUT_n(\mathbb{k})$ là những nhóm con đóng của $GL_n(\mathbb{k})$. Lưu ý $SUT_n(\mathbb{k}) \leq UT_n(\mathbb{k})$ cũng là một nhóm con đóng của $UT_n(\mathbb{k})$.

Với trường hợp

$$SUT_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{K}) : t \in \mathbb{K} \right\} \leq GL_2(\mathbb{K})$$

Hàm

$$\theta : \mathbb{K} \rightarrow SUT_2(\mathbb{K})$$

$$t \mapsto \theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Là một đồng cấu nhóm liên tục là một đẳng cấu với nghịch đảo liên tục. Điều này cho phép chúng ta xem \mathbb{K} như một nhóm ma trận.

Nhóm affine n -chiều trên \mathbb{K} là

$$Aff_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : A \in GL_n(\mathbb{K}), t \in \mathbb{K}^n \right\} \leq GL_{n+1}(\mathbb{K})$$

Điều này rõ ràng cho thấy $Aff_n(\mathbb{K})$ là một nhóm con đóng của $GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Nếu ta đồng nhất phần tử $x \in \mathbb{K}^n$ với $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$, thì do $\begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + t \\ 1 \end{bmatrix}$ ta thu được một tác động của $Aff_n(\mathbb{K})$ trên \mathbb{K}^n . Phép biến đổi của \mathbb{K}^n có dạng $x \mapsto Ax + t$ với A khả nghịch được gọi là những phép biến đổi affine và chúng bảo toàn những đường thẳng (nghĩa là tịnh tiến những không gian con 1-chiều của \mathbb{K} - không gian vector \mathbb{K}^n). Hình học liên kết là hình học affine có $Aff_n(\mathbb{K})$ như là nhóm đối xứng của nó.

Lưu ý rằng ta có thể xem bản thân không gian vector \mathbb{K}^n như là một nhóm con tịnh tiến của $Aff_n(\mathbb{K})$

$$Trans_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{K}^n \right\} \leq Aff_n(\mathbb{K})$$

và đây là một nhóm con đóng.

Với $n \geq 1$, $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$ là một nhóm trực giao thực $n \times n$ với A^T là chuyển vị của $A = [a_{ij}]$, $(A^T)_{ij} = a_{ji}$

Để thấy rằng mọi ma trận trực giao $A \in O(n)$ đều có một nghịch đảo là A^T . Hơn nữa, tích của hai ma trận trực giao là trực giao với $(AB)^T = B^T A^T$. Vì vậy $O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$. Nếu $A, B \in O(n)$ thì

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T I_n B = B^T B = I_n$$

Vì vậy $O(n)$ đóng dưới phép nhân. Lưu ý là $I_n \in O(n)$. Từ những dữ kiện này suy ra $O(n) \leq GL_n(\mathbb{R})$, nghĩa là $O(n)$ là một nhóm con của $GL_n(\mathbb{R})$.

Một phương trình ma trận $A^T A = I_n$ thì tương đương với n^2 phương trình cho n^2 số thực a_{ij} ,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \quad (2.1)$$

Trong đó ký hiệu Kronecker δ_{ij} được định bởi

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = j \\ 0 & \text{khi } i \neq j \end{cases}$$

Điều này có nghĩa là $O(n)$ là một tập con đóng của $M_n(\mathbb{R})$ và vì thế là tập con đóng của $GL_n(\mathbb{R})$.

Ta xét hàm định thức hạn chế lên $O(n)$, $\det : O(n) \rightarrow \mathbb{R}^\times$. Thì với $A \in O(n)$,

$$\det I_n = \det(A^T A) = \det A^T \cdot \det A = (\det A)^2$$

Vì vậy $\det A = \pm 1$. Nên ta có:

$$O(n) = O(n)^+ \cup O(n)^-$$

Với

$$O(n)^+ = \{A \in O(n) : \det A = 1\}, O(n)^- = \{A \in O(n) : \det A = -1\}$$

Nhóm con $SO(n) = O(n)^+$ được gọi là nhóm trực giao đặc biệt $n \times n$.

Một trong những lý do chính để nghiên cứu những nhóm $SO(n), O(n)$ là mối liên hệ của chúng với những phép đẳng cự nơi mà một phép đẳng cự của \mathbb{R}^n là một hàm bảo toàn khoảng cách $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nếu một phép đẳng cự cố định tại gốc O thì nó thực sự là một phép biến đổi tuyến tính và theo đó là cơ sở tiêu chuẩn tương ứng với một ma trận A. Điều kiện đẳng cự thì tương đương với việc $Ax \cdot Ay = x \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$), hay nói cách khác là tương đương với điều kiện $A^T A = I_n$, nghĩa là A trực giao. Những phần tử của $SO(n)$ được gọi là những phép đẳng cự trực tiếp hay phép quay; những phần tử của $O(n)^-$ thì thỉnh thoảng được gọi là những phép đẳng cự không trực tiếp.

Một trường hợp tổng quát hơn liên quan đến một ma trận đối xứng thực Q cấp $n \times n$. Khi đó có một sự tương tự như nhóm trực giao,

$$O_Q = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T Q A = Q\}$$

Dễ thấy đây là một nhóm con đóng của $GL_n(\mathbb{R})$ và vì thế là nhóm ma trận. Hơn nữa, nếu $\det Q \neq 0$, với $A \in O_Q$ ta có $\det A = \pm 1$. Ta cũng có thể định nghĩa

$$O_Q^+ = \det^{-1} \mathbb{R}^+, O_Q^- = \det^{-1} \mathbb{R}^-$$

Và có thể viết O_Q như một hợp rời nhau của những tập con vừa đóng vừa mở $O_Q = O_Q^+ \cup O_Q^-$ trong đó O_Q^+ là một nhóm con.

Một ví dụ quan trọng có được một cách tương đối khi $n = 4$ và

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhóm Lorentz Lor là một nhóm con đóng của $O_Q^+ \cap SL_2(\mathbb{R})$ mà bảo toàn mỗi hai thành phần liên thông của hyperboloid

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -1$$

Một cấu trúc tương tự có thể được bắt đầu xây dựng với một ma trận đối xứng lệch thực S cấp $n \times n$, nghĩa là $S^T = -S$. Nếu $\det S \neq 0$ thì suy ra n phải chẵn hay $n = 2m$. Ví dụ điển hình có được từ ma trận cấp 2×2

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Và ta có

$$J_{2m} = \begin{bmatrix} J & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J & \cdots & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & J \end{bmatrix}$$

Nhóm ma trận $Symp_{2m}(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{2m}(\mathbb{R}) : A^T J_{2m} A = J_{2m}\} \leq GL_{2m}(\mathbb{R})$ được gọi là nhóm đối ngẫu thực $2m \times 2m$. Kiểm tra dễ dàng được $Symp_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})$, nhưng tổng quát thì $Symp_{2m}(\mathbb{R}) \neq SL_{2m}(\mathbb{R})$.

Hình học đối ngẫu trở nên cực kỳ quan trọng và là hình học tự nhiên liên quan đến cơ học Hamilton, đến cơ học lượng tử; nó cũng quan trọng như là một lĩnh vực của hình vi phân và trong nghiên cứu đa tạp 4-chiều. Những nhóm đối ngẫu là những nhóm đối xứng tự nhiên của những hình học đó.

Với $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$ là liên hợp Hecmit của A, nghĩa là $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Nhóm unita $n \times n$ là nhóm con

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^* A = I\} \leq GL_n(\mathbb{C})$$

Một lần nữa điều kiện unita có số lượng là n^2 phương trình cho n^2 số phức a_{ij} (so sánh với phương trình (2.1))

$$\sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} a_{kj} = \delta_{ij}$$

Bằng cách tách riêng phần thực và phần ảo, những phương trình này thực chất có $2n^2$ phương trình song tuyến tính trong $2n^2$ phần thực và ảo của a_{ij} , mặc dù có một vài độ dôi.

Nhóm unita đặc biệt $n \times n$ là

$$SU(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^* A = I \text{ và } \det A = 1\} \leq U(n)$$

Một lần nữa ta có thể định rõ một ma trận là unita đặc biệt bằng cách yêu cầu những phần tử của nó thỏa mãn $(n^2 + 1)$ phương trình.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} a_{kj} = \delta_{ij} & (1 \leq i, j \leq n) \\ \det A = 1 \end{cases}$$

Đương nhiên, $\det A$ là một đa thức chứa a_{ij} . Lưu ý rằng $SU(n)$ là một nhóm con chuẩn tắc của $U(n)$, $SU(n) \triangleleft U(n)$.

Tích vô hướng trên \mathbb{R}^n có thể thác triển cho \mathbb{C}^n bằng cách đặt

$$x \cdot y = x^* y = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$$

Trong đó

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Chú ý đây không phải là \mathbb{C} -tuyến tính nhưng thỏa

$$(ux) \cdot (vy) = \overline{uv} (x \cdot y)$$

Tích vô hướng này cho phép ta định nghĩa độ dài của một vectơ phức bởi $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ với $x \cdot x$ là một số thực không âm và chỉ bằng 0 khi $x = 0$. Do đó một ma trận $A \in M_n(\mathbb{C})$ là unita khi và chỉ khi

$$Ax \cdot Ay = x \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

5. Những nhóm ma trận phức là những nhóm ma trận thực

Nhớ lại rằng những số phức có thể được xem như một không gian vectơ thực 2-chiều, với cơ sở là $1, i$ chẳng hạn. Tương tự, mọi ma trận phức $Z = [z_{ij}]$ cấp $n \times n$ cũng có thể xem như một ma trận thực cấp $2n \times 2n$ như sau.

Ta đồng nhất mỗi số phức $z = x + iy$ với một ma trận thực 2×2 bằng cách định nghĩa một hàm

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$z \mapsto \rho(z) = \rho(x + iy) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Đây là một đồng cấu vành nội xạ, vì vậy ta có thể xem \mathbb{C} như một vành con của $M_2(\mathbb{R})$, nghĩa là

$$\text{im } \rho = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : d = a, c = -b \right\}$$

Lưu ý là tính liên hợp phức tương ứng với sự chuyển vị, nghĩa là:

$$\rho(\overline{z}) = \rho(z)^T$$

Tổng quát hơn, cho $Z = [z_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ với $z_{rs} = x_{rs} + iy_{rs}$, ta có thể viết

$$Z = [x_{ij}] + i[y_{ij}]$$

Trong đó 2 ma trận $n \times n$ $X = [x_{ij}], Y = [y_{ij}]$ là đối xứng thực.

Định nghĩa một hàm

$$\rho_n : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$$

$$Z \mapsto \rho_n(Z) = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix}$$

là một đồng cấu vành nội xạ.

Ký hiệu J_{2n} là ma trận thực $2n \times 2n$ có dạng

$$J_{2n} = \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix}$$

Chú ý là $J_{2n}^2 = -I_{2n}$ và $J_{2n}^T = -J_{2n}$. Ta có:

$$\rho_n(Z) = \begin{bmatrix} X & 0_n \\ 0_n & X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y & 0_n \\ 0_n & Y \end{bmatrix} J_{2n}$$

$$\rho_n(\bar{Z}) = \rho_n(Z)^T$$

Lưu ý $\rho_n(GL_n(\mathbb{C})) \leq GL_{2n}(\mathbb{R})$, vì vậy bất kỳ nhóm con ma trận $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ đều có thể được xem như một nhóm con ma trận của $GL_{2n}(\mathbb{R})$ bằng cách đồng nhất nó với ảnh của nó $\rho_n G$ dưới ρ_n (điều này sử dụng giả thiết ρ_n liên tục)

6. Những đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận

Tính chất đồng cấu là một tính chất khá quan trọng mà ta thường khảo sát trong toán học, đặc biệt là trong giải tích học. Chính vì vậy phần này của chương sẽ đi khảo sát tính chất liên tục của những đồng cấu nhóm ma trận.

Định nghĩa 2.24: Cho G, H là hai nhóm ma trận. Một đồng cấu nhóm $\varphi : G \rightarrow H$ là một đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận nếu nó liên tục và ảnh của nó $\text{im} \varphi = \varphi G \leq H$ là một không gian con đóng của H .

Ví dụ 2.25: Xét hàm

$$\varphi : SUT_2(\mathbb{R}) \rightarrow U(1); \quad \varphi \left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = [e^{2\pi i n}]$$

Là một đồng cấu nhóm toàn ánh liên tục, vì vậy nó là một đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận. Để thấy tại sao định nghĩa trên là cần thiết, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.26: Cho

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SUT_2(\mathbb{R}) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Thì G là một nhóm con đóng của $SUT_2(\mathbb{R})$, vì vậy nó là một nhóm ma trận.

Với bất kỳ số vô tỷ $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, hàm

$$\varphi : G \rightarrow U(1); \quad \varphi \left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = [e^{2\pi i r n}]$$

Là một đồng cấu nhóm liên tục. Nhưng ảnh của nó là một tập con trù mật thực sự của $U(1)$. Vì vậy φ không là một đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận.

Tâm điểm của ví dụ này là φG có những điểm giới hạn trong $U(1)$ mà không nằm trong φG , trong khi G thì rời rạc như một không gian con của $SUT_2(\mathbb{R})$.

Bất cứ lúc nào ta có một đồng cấu của những nhóm ma trận $\varphi : G \rightarrow H$ là một đồng phối (nghĩa là một song ánh với nghịch đảo liên tục) ta nói φ là một đẳng cấu liên tục của những nhóm ma trận và coi như G và H được đồng nhất về bản chất như những nhóm ma trận.

Mệnh đề 2.27: Cho $\varphi : G \rightarrow H$ là một đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận. Khi đó $\ker \varphi \leq G$ là một nhóm con đóng, vì vậy $\ker \varphi$ là một nhóm ma trận.

Nhóm thương $G / \ker \varphi$ có thể đồng nhất với nhóm ma trận φG bởi đẳng cấu thương thông thường $\bar{\varphi}: G / \ker \varphi \rightarrow \varphi G$.

Chứng minh:

Khi φ liên tục, có nghĩa trong G ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

Từ đó suy ra một giới hạn của những phần tử của $\ker \varphi$ trong G thì cũng nằm trong $\ker \varphi$. Vì vậy $\ker \varphi$ là một tập con đóng của G .

Việc $\ker \varphi \leq G$ là một nhóm ma trận được suy ra từ mệnh đề 2.17

□

Lưu ý 2.28: $G / \ker \varphi$ có một tôpô thương tự nhiên mà không hiển nhiên là một tôpô mêtric. Vì thế $\bar{\varphi}$ luôn là một đồng phôi.

Lưu ý 2.29: Không phải mọi nhóm con ma trận chuẩn tắc đóng $N \triangleleft G$ của một nhóm ma trận G đều nâng lên thành một nhóm ma trận G / N ; có những ví dụ mà G / N là một nhóm Lie nhưng không phải là một nhóm ma trận. Đây là một trong những khác biệt quan trọng nhất giữa những nhóm ma trận và những nhóm Lie (ta sẽ thấy sau này là mọi nhóm ma trận đều là một nhóm Lie). Một hệ quả chắc chắn quan trọng là những nhóm ma trận có thương không phải là những nhóm ma trận và vì vậy không đúng cho những phép biểu diễn hữu hạn chiều; như vậy những nhóm này xuất hiện một cách thường xuyên trong vật lý lượng tử, nơi mà những phép biểu diễn hữu hạn chiều của chúng đóng một vai trò quan trọng.

7. Những tác động của nhóm liên tục

Trong lý thuyết nhóm thông thường, khái niệm về một tác động nhóm là cơ bản. Để hình thành công thức một cách phù hợp, nó bao gồm tất cả những điều sau. Một tác động μ của một nhóm G trên một tập X là một hàm $\mu: G \times X \rightarrow X$ mà ta thường viết $\mu(g, x) = gx$ nếu không có sự nhầm lẫn đáng kể nào, thỏa mãn những điều kiện sau với tất cả $g, h \in G$ và $x \in X$ và với ι là phần tử đồng nhất của G :

- $(gh)x = g(hx)$, nghĩa là $\mu(gh, x) = \mu(g, \mu(h, x))$
- $\iota x = x$

Có hai khái niệm quan trọng liên quan đến một tác động như vậy.

Với $x \in X$, sự ổn định của x là

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G : gx = x\} \subseteq G$$

Trong khi đó quỹ đạo của x là

$$\text{Orb}_G(x) = \{gx \in X : g \in G\} \subseteq X$$

Định lý 2.30: Cho G là một tác động trên X

a) Với $x \in X$, $\text{Stab}_G(x) \leq G$, nghĩa là $\text{Stab}_G(x)$ là một nhóm con của G .

b) Với $x, y \in X$, $y \in \text{Orb}_G(x)$ nếu và chỉ nếu $\text{Orb}_G(y) = \text{Orb}_G(x)$.

Với $x \in X$, có một song ánh

$$\varphi: G / \text{Stab}_G(x) \rightarrow \text{Orb}_G(x); \quad \varphi(g) = gx$$

Hơn nữa, đây là G -đẳng biến được hiểu theo nghĩa với mọi $g, h \in G$,

$$\varphi((hg)\text{Stab}_G(x)) = h\varphi(g\text{Stab}_G(x))$$

c) Nếu $y \in \text{Orb}_G(x)$, thì với bất kỳ $t \in G$ với $y = tx$,

$$\text{Stab}_G(y) = t\text{Stab}_G(x)t^{-1}$$

Với một nhóm tôpô thì sẽ có một khái niệm của tác động nhóm liên tục trên một không gian tôpô.

Định nghĩa 2.31: Cho G là một nhóm tôpô và X là một không gian tôpô. Khi đó một tác động nhóm $\mu: G \times X \rightarrow X$ là một tác động nhóm liên tục nếu hàm μ liên tục.

Trong định nghĩa này thì $G \times X$ có một tôpô tích. Khi G và X là những không gian metric thì điều này sẽ có được từ một metric phù hợp. Chi tiết của vấn đề này có thể được tìm thấy trong phần đầu của vấn đề về tập hợp.

Nếu X là Hausdorff thì mọi tập con có một phần tử $\{x\}$ đều đóng và $Stab_G(x) \leq G$ là một nhóm con đóng. Điều này cung cấp cho ta một cách thức hữu ích để tạo ra những nhóm con đóng.

8. hàm lũy thừa và logarit của ma trận

Cho $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ hoặc \mathbb{C} . Chuỗi lũy thừa

$$\text{Exp}(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n$$

$$\text{Log}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$$

Có bán kính hội tụ (r.o.c) tương ứng là ∞ và 1. Nếu $z \in \mathbb{C}$ thì chuỗi $\text{Exp}(z)$, $\text{Log}(z)$ hoàn toàn hội tụ khi $|z| < r.o.c$

Cho $A \in M_n(\mathbb{k})$. Chuỗi giá trị ma trận

$$\text{Exp}(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

$$\text{Log}(A) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n = A - \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3} A^3 - \frac{1}{4} A^4 + \dots$$

sẽ hội tụ với điều kiện $\|A\| < r.o.c$. Vì vậy $\text{Exp}(A)$ có nghĩa với mọi $A \in M_n(\mathbb{k})$ trong khi đó $\text{Log}(A)$ chỉ tồn tại nếu $\|A\| < 1$.

Mệnh đề 2.32: Cho $A \in M_n(\mathbb{k})$

a) Với $u, v \in \mathbb{C}$, $\text{Exp}((u+v)A) = \text{Exp}(uA)\text{Exp}(vA)$

b) $\text{Exp}(A) \in GL_n(\mathbb{k})$ và $\text{Exp}(A)^{-1} = \text{Exp}(-A)$

Chứng minh:

a) Khai triển chuỗi ta được:

$$\begin{aligned} \text{Exp}((u+v)A) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (u+v)^n A^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} A^n \end{aligned}$$

Bằng một loạt những thao tác thì điều đó là hợp lý do tất cả những chuỗi này đều hoàn toàn hội tụ,

$$\begin{aligned} \text{Exp}(uA)\text{Exp}(vA) &= \left(\sum_{r \geq 0} \frac{u^r}{r!} A^r \right) \left(\sum_{s \geq 0} \frac{v^s}{s!} A^s \right) \\ &= \sum_{\substack{r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{u^r v^s}{r! s!} A^{r+s} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{r=0}^n \frac{u^r v^{n-r}}{r! (n-r)!} \right) A^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u^r v^{n-r} \right) A^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} A^n \\ &= \text{Exp}((u+v)A) \end{aligned}$$

b) Từ phần (a),

$$I = \text{Exp}(0) = \text{Exp}((1+(-1))A) = \text{Exp}(A)\text{Exp}(-A)$$

Vì vậy $\text{Exp}(A)$ khả nghịch với nghịch đảo là $\text{Exp}(-A)$.

□

Sử dụng những chuỗi này ta định nghĩa hàm lũy thừa như sau

$$\exp : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_n(\mathbb{K}); \quad \exp(A) = \text{Exp}(A)$$

Mệnh đề 2.33: Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ giao hoán thì

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

Chứng minh: Một lần nữa ta khai triển chuỗi và biểu diễn một hệ quả của tất cả những thao tác có thể hợp lý.

$$\begin{aligned} \exp(A)\exp(B) &= \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} A^r \right) \left(\sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} B^s \right) \\ &= \sum_{\substack{r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{1}{r!s!} A^r B^s \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!(n-r)!} A^r B^{n-r} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} A^r B^{n-r} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (A+B)^n \\ &= \exp(A+B) \end{aligned}$$

Lưu ý rằng ta dùng tính giao hoán của A và B trong việc đồng nhất

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} A^r B^{n-r} = (A+B)^n$$

□

Định nghĩa hàm logarit

$$\log : N_{M_n(\mathbb{K})}(I; 1) \rightarrow M_n(\mathbb{K}); \quad \log(A) = \text{Log}(A-I)$$

Thì với $\|A-I\| < 1$,

$$\log(A) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (A-I)^n$$

Mệnh đề 2.34: Những hàm exp và log thỏa

a) Nếu $\|A-I\| < 1$ thì $\exp(\log(A)) = A$

b) Nếu $\|\exp(B)-I\| < 1$ thì $\log(\exp(B)) = B$

Chứng minh:

Những kết quả này dựa theo những sự đồng nhất hình thức giữa những chuỗi lũy thừa

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (X-I)^n \right)^m &= X \\ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m!} X^m \right)^n &= X \end{aligned}$$

Được chứng minh bằng cách so sánh hệ số.

□

Những hàm exp, log là liên tục và thực ra là khả vi vô hạn lần trên miền xác định của chúng. Vì sự liên tục của exp tại O, có một $\delta_1 > 0$ sao cho

$$N_{M_n(\mathbb{K})}(O; \delta_1) \subseteq \exp^{-1} N_{GL_n(\mathbb{K})}(I; 1)$$

Thực ra ta có thể lấy $\delta_1 = \log 2$ vì

$$\exp N_{M_n(\mathbb{K})}(O; r) \subseteq N_{M_n(\mathbb{K})}(I; e^r - 1)$$

Do đó ta có

Mệnh đề 2.35: Hàm lũy thừa \exp là đơn ánh khi thu hẹp xuống tập con mở $N_{M_n(\mathbb{K})}(O; \ln 2) \subseteq M_n(\mathbb{K})$, vì vậy nó là một vi đồng phôi địa phương tại O với nghịch đảo địa phương \log .

Đôi khi nó sẽ rất hữu ích cho việc có một công thức lấy đạo hàm của \exp tại $A \in M_n(\mathbb{K})$ bất kỳ. Khi $B \in M_n(\mathbb{K})$ giao hoán với A ,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(A + tB) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\exp(A + hB) - \exp(A)) = \exp(A)B = B \exp(A)$$

Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát thì phức tạp hơn.

Với một biến X , ta xét chuỗi

$$F(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} X^k = \frac{\exp(X) - 1}{X}$$

có bán kính hội tụ là vô cùng. Nếu ta có một toán tử tuyến tính Φ trên $M_n(\mathbb{C})$ ta có thể áp dụng sự hội tụ chuỗi những toán tử.

$$F(\Phi) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} \Phi^k$$

cho những phần tử của $M_n(\mathbb{C})$. Đặc biệt ta có thể xét

$$\Phi(C) = AC - CA = \text{ad}A(C)$$

Với

$$\text{ad}A : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}); \quad \text{ad}A(C) = AC - CA$$

Được xem như một toán tử \mathbb{C} -tuyến tính. Khi đó

$$F(\text{ad}A)(C) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} (\text{ad}A)^k(C)$$

Mệnh đề 2.36: Với $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ta có

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(A + tB) = F(\text{ad}A)(B) \exp(A)$$

Đặc biệt, nếu $A = O$ hay tổng quát hơn nếu $AB = BA$,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(A + tB) = B \exp(A)$$

Chứng minh:

Nếu $D = \frac{d}{ds}$ và $f(s)$ là một hàm trơn của biến số thực s thì

$$F(D)\big|_{s=0} f(s) = \int_0^1 f(s) ds \quad (2.2)$$

Khai triển Taylor của một hàm trơn g thỏa:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} D^k g(s) = g(s+1) - g(s)$$

Vì vậy lấy $g(s) = \int f(s) ds$ là một tích phân bất định của f ta được

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} D^k f(s) = g(s+1) - g(s)$$

Đánh giá tại $s = 0$ cho ta phương trình (2.2)

Bây giờ lưu ý rằng hàm giá trị ma trận

$$\varphi(s) = \exp(sA) B \exp((1-s)A)$$

Thỏa

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= \exp(sA)B \exp(A) \exp(-sA) \\
&= \exp(sadA)(B \exp(A)) \\
&= \exp(sadA)(B) \exp(A)
\end{aligned}$$

Khi với $m, n \geq 1$

$$(adA)^m(BA^n) = (adA)^m(B)A^n$$

Vì vậy

$$F(D)(\varphi(s)) = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{((s+1)^{k+1} - s^{k+1})}{(k+1)!} (adA)^k \right) (B) \exp(A)$$

Cho

$$\begin{aligned}
F(D)(\varphi(s))_{|s=0} &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} (adA)^k \right) (B) \exp(A) \\
&= F(adA)(B) \exp(A)
\end{aligned}$$

Chương III:

Đại số Lie của những nhóm ma trận

Ở chương này ta sẽ tìm hiểu về những khía cạnh đặc biệt của những nhóm ma trận mà nổi bật và khá phổ biến là khái niệm: đại số Lie. Đại số Lie của mỗi nhóm ma trận đều có những đặc trưng riêng và những đặc trưng đó thì được ứng dụng khá nhiều trong hình học. Như ở chương trước thì ta đã đề cập đến một vài nhóm ma trận đặc biệt thì ở chương này ta cũng sẽ tập trung vào đại số Lie của những nhóm ma trận đặc biệt đó.

1. Phương trình vi phân trong ma trận

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ là một khoảng mở trong \mathbb{R} với $a < b$; giả sử $a < 0 < b$. Ta sẽ dùng kí hiệu tiêu chuẩn

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt} \alpha(t).$$

Ta có phương trình vi phân đầu tiên

$$\alpha'(t) = \alpha(t) A \quad (3.1)$$

Với $\alpha : (a, b) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ là hàm khả vi.

Nếu $n = 1$ và $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ thì nghiệm tổng quát là $\alpha(t) = c.e^{At}$ với $\alpha(0) = c$. Do đó có một nghiệm duy nhất cho điều kiện biên này. Thật sự, nghiệm này được cho bởi chuỗi lũy thừa sau:

$$\alpha(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \alpha(0).$$

Định lý 3.1: Cho $A, C \in M_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ và $a < 0 < b$, phương trình vi phân (3.1) có nghiệm duy nhất $\alpha : (a, b) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ với $\alpha(0) = C$. Hơn nữa, nếu C khả nghịch thì với $t \in (a, b)$ đều xác định $\alpha(t)$. Do đó $\alpha : (a, b) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$.

Chứng minh:

Trước tiên ta giải phương trình với điều kiện biên $\alpha(0) = I$. Với $t \in (a, b)$, thì chuỗi:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (tA)^k = \exp(tA)$$

hội tụ, vì thế hàm

$$\alpha : (a, b) \rightarrow M_n(\mathbb{R}); \quad \alpha(t) = \exp(tA),$$

xác định và khả vi với

$$\alpha'(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = \exp(tA) A = A \exp(tA)$$

Do đó α thỏa mãn phương trình vi phân ở trên với điều kiện biên $\alpha(0) = I$. Và cũng cần lưu ý rằng khi $s, t, (s+t) \in (a, b)$ thì $\alpha(s+t) = \alpha(s) \alpha(t)$

Đặc biệt, điều đó cho thấy là $\alpha(t)$ luôn khả nghịch với $\alpha(t)^{-1} = \alpha(-t)$

Dễ thấy một nghiệm với $\alpha(0) = C$ là $\alpha(t) = C \exp(tA)$. Nếu β là nghiệm thứ hai thì khi đó $\gamma(t) = \beta(t) \exp(-tA)$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \beta'(t) \exp(-tA) + \beta(t) \frac{d}{dt} \exp(-tA) \\ &= \beta'(t) \exp(-tA) - \beta(t) \exp(-tA) A \\ &= \beta(t) A \exp(-tA) - \beta(t) \exp(-tA) A \\ &= 0 \end{aligned}$$

Do đó $\gamma(t)$ là hàm hằng với $\gamma(t) = \gamma(0) = C$. Vì vậy $\beta(t) = C \exp(tA)$ là nghiệm duy nhất với $\beta(0) = C$. Nếu C khả nghịch thì $C \exp(tA)$ xác định với mọi t .

2. Nhóm con một tham số

Cho $G \leq GL_n(\mathbb{K})$ là một nhóm ma trận và cho $\varepsilon > 0$ hoặc $\varepsilon = \infty$

Định nghĩa 3.2: Một nửa nhóm tham số trong G là một hàm liên tục $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ khả vi tại 0 và thỏa: $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ với $s, t, (s+t) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Và chúng tôi sẽ giới thiệu điều kiện cuối cùng như là tính chất đồng cấu.

Nếu $\varepsilon = \infty$ thì $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ được gọi là một nhóm tham số trong G hoặc một nhóm con tham số của G .

Chú ý rằng nếu γ là một nửa nhóm tham số trong G thì $\gamma(0) = I$.

Mệnh đề 3.3: Cho $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ là một nửa nhóm tham số trong G . Khi đó γ khả vi tại mọi điểm $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ và $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$.

Chứng minh: Cho $h \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\gamma(h)\gamma(t) = \gamma(h+t) = \gamma(t+h) = \gamma(t)\gamma(h)$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\gamma(t+h) - \gamma(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\gamma(h) - I) \gamma(t) \\ &= \gamma'(0) \gamma(t)\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có: $\gamma'(t) = \gamma(t) \gamma'(0)$

□

Mệnh đề 3.4: Cho $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ là một nửa nhóm tham số trong G . Khi đó có duy nhất một mở rộng là một nhóm tham số $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow G$ trong G . Tức là với $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$.

Chứng minh: Cho $t \in \mathbb{R}$, khi đó với m là số tự nhiên đủ lớn thì $\frac{t}{m} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Do đó:

$$\gamma\left(\frac{t}{m}\right), \gamma\left(\frac{t}{m}\right)^m \in G.$$

Tương tự với số tự nhiên thứ hai n , ta cũng có

$$\gamma\left(\frac{t}{n}\right), \gamma\left(\frac{t}{n}\right)^n \in G$$

Khi $mn \geq m, n$, ta có $\frac{t}{mn} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ và

$$\gamma\left(\frac{t}{n}\right)^n = \gamma\left(\frac{mt}{mn}\right)^n = \gamma\left(\frac{t}{mn}\right)^{mn} = \gamma\left(\frac{nt}{mn}\right)^m = \gamma\left(\frac{t}{m}\right)^m$$

Vì thế $\gamma\left(\frac{t}{n}\right)^n = \gamma\left(\frac{t}{m}\right)^m$ cho thấy là chúng ta đã định nghĩa một phần tử của G cho mọi số thực t . Từ đó định nghĩa một hàm:

$$\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow G; \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma\left(\frac{t}{n}\right)^n$$

với n đủ lớn.

Để thấy $\tilde{\gamma}$ là một nhóm tham số trong G .

□

Bây giờ chúng ta có thể xác định được dạng của tất cả các nhóm tham số trong G .

Định lý 3.5: Cho $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ là một nhóm tham số trong G . Khi đó nó có dạng

$$\gamma(t) = \exp(tA) \text{ với } A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ nào đó.}$$

Chứng minh: Lấy $A = \gamma'(0)$. Từ mệnh đề 3.3 ta có γ thỏa phương trình vi phân

$$\gamma'(t) = A, \gamma(0) = I$$

Từ định lý 3.1, nó có nghiệm duy nhất là $\gamma(t) = \exp(tA)$

□

Chú ý 3.6: Chúng ta không thể đảo ngược quá trình này và quyết định cho mọi $A \in M_n(\mathbb{K})$ là một nhóm tham số $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$; $\gamma(t) = \exp(tA)$ nhận giá trị trong G . Câu trả lời liên quan đến đại số Lie của nhóm G . Thực tế chúng ta cũng thường thắc mắc là mặc dù định nghĩa của một nhóm tham số chỉ liên quan đến sự khả vi cấp một, trong khi dạng tổng quát $\exp(tA)$ thì thường khả vi vô hạn lần và thật sự trong giải tích thì nó giống như một hàm theo biến t . Đó là một trong số rất nhiều đặc tính quan trọng của lý thuyết Lie, cụ thể là điều kiện khả vi cấp một và thậm chí tính liên tục thường dẫn đến những kết luận mạnh hơn nữa.

3. Đường cong, không gian tiếp xúc và đại số Lie

Trong mục này, Cho $G \leq GL_n(\mathbb{K})$ là một nhóm ma trận.

Định nghĩa 3.7: Một cung khả vi trong G là một hàm: $\gamma: (a, b) \rightarrow G \subseteq M_n(\mathbb{K})$ với đạo hàm $\gamma'(t)$ tồn tại tại mỗi $t \in (a, b)$.

Ở đây chúng ta định nghĩa đạo hàm giống như một phần tử của $M_n(\mathbb{K})$ bởi:

$$\gamma'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{1}{s-t} (\gamma(s) - \gamma(t)),$$

giới hạn này tồn tại.

Chúng ta thường giả sử $a < 0 < b$.

Định nghĩa 3.8: Không gian tiếp xúc với G tại $U \in G$ là:

$$T_U G = \{ \gamma'(0) \in M_n(\mathbb{K}) : \gamma \text{ là một cung khả vi trong } G \text{ với } \gamma(0) = U \}.$$

Định nghĩa 3.9: $T_U G$ là một không gian con thực sự của $M_n(\mathbb{K})$.

Chứng minh: Giả sử α, β là hai cung khả vi trong G với $\alpha(0) = \beta(0) = U$. Khi đó:

$$\gamma: \text{dom} \alpha \cap \text{dom} \beta \rightarrow G; \quad \gamma(t) = \alpha(t)U^{-1}\beta(t)$$

cũng là một cung khả vi trong G với $\gamma(0) = U$. Luật tích cho:

$$\gamma'(t) = \alpha'(t)U^{-1}\beta(t) + \alpha(t)U^{-1}\beta'(t),$$

Do đó: $\gamma'(0) = \alpha'(0)U^{-1}\beta(0) + \alpha(0)U^{-1}\beta'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0)$,

Điều đó cho thấy rằng: T_U đóng dưới phép cộng.

Tương tự, nếu $r \in \mathbb{R}$, và α là một cung khả vi trong G với $\alpha(0) = U$, khi đó $\eta(t) = \alpha(rt)$ xác định nhiều cung khác nhau, do đó: $\eta'(0) = r\alpha'(0)$

Chúng ta thấy rằng $T_U G$ đóng dưới tích vô hướng thực.

□

Định nghĩa 3.10: Số chiều của nhóm ma trận thực G là $\dim G = \dim_{\mathbb{R}} T_I G$.

Nếu G là phức, khi đó số chiều phức của nó là: $\dim_{\mathbb{C}} G = \dim_{\mathbb{C}} T_I G$.

Chúng ta thông qua ký hiệu $\mathfrak{g} = T_I G$ cho không gian con vector thực này của $M_n(\mathbb{K})$. Thật sự, \mathfrak{g} có một cấu trúc đại số thú vị hơn, cụ thể là đại số Lie thực.

Định nghĩa 3.11: Một \mathbb{K} - đại số Lie bao gồm một không gian vector \mathfrak{a} trên trường \mathbb{K} , được trang bị với một ánh xạ \mathbb{K} - tuyến tính $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$, cụ thể là cho $x, y, z \in \mathfrak{a}$,

(Đôi xứng lệch)

$$[x, y] = -[y, x]$$

(Đồng nhất Jacobi)

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Ở đây \mathbb{k} - tuyến tính có nghĩa là cho $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in \mathfrak{a}$ và $r_1, r_2, r, s_1, s_2, s \in \mathbb{k}$,

$$[r_1 x_1 + r_2 x_2, y] = r_1 [x_1, y] + r_2 [x_2, y]$$

$$[x, s_1 y_1 + s_2 y_2] = s_1 [x, y_1] + s_2 [x, y_2]$$

$[\cdot, \cdot]$ được gọi là dấu ngoặc Lie của đại số Lie \mathfrak{a} .

Ví dụ 3.12: Cho $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ và $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^3$ và đặt $[x, y] = x \times y$ là tích vector hoặc tích có hướng. Cho ba vector đơn vị e_1, e_2, e_3 ,

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3, [e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1, [e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2 \quad (3.2)$$

Khi đó \mathbb{R}^3 được trang bị với các phép toán trong ngoặc đó là một đại số \mathbb{R} -Lie. Thật sự ta có thể thấy sau đây, có một đại số Lie của $SO(3), SU(2)$.

Cho 2 ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, Hoán tử của chúng là $[A, B] = AB - BA$

Đó là hàm k - tuyến tính $M_n(\mathbb{k}) \times M_n(\mathbb{k}) \rightarrow M_n(\mathbb{k})$ thỏa những điều kiện của định nghĩa 3.11. Hay nói cách khác A, B giao hoán nếu $AB = BA$

Mệnh đề 3.13: $[A, B] = 0_n$ nếu và chỉ nếu A, B giao hoán chuyển mạch.

Giả sử \mathfrak{a} là không gian con \mathbb{k} - vector của $M_n(\mathbb{k})$ Khi đó \mathfrak{a} là một đại số con \mathbb{k} -Lie của

$M_n(\mathbb{k})$ nếu nó đóng dưới những hoán tử của những cặp của những phần tử trong \mathfrak{a} . Tức là nếu $A, B \in \mathfrak{a}$ thì $[A, B] \in \mathfrak{a}$. Hiển nhiên $M_n(\mathbb{k})$ là một đại số con \mathbb{k} -Lie của chính nó.

Định lý 3.14: Cho $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, nếu $G \leq GL_n(\mathbb{k})$ là một nhóm con ma trận thì \mathfrak{g} là một đại số con \mathbb{R} -Lie của $M_n(\mathbb{k})$. Nếu $G \leq GL_m(\mathbb{C})$ là một nhóm con ma trận và \mathfrak{g} là một không gian con \mathbb{C} của $M_m(\mathbb{C})$ thì G là một đại số con \mathbb{C} -Lie.

Chứng minh: Ta thấy là khi cho hai cung khả vi α, β trong G với $\alpha(0) = \beta(0) = I_n$, có một cung γ với $\gamma'(0) = [\alpha'(0), \beta'(0)]$.

Xét hàm:

$$F : \text{dom} \alpha \times \text{dom} \beta \rightarrow G; \quad F(s, t) = \alpha(s) \beta(t) \alpha(s)^{-1}$$

liên tục và khả vi với mỗi biến s, t . Lấy $s \in \text{dom} \alpha$, $F(s, \cdot)$ là một cung khả vi trong G với $F(s, 0) = I_n$. Lấy vi phân ta có:

$$\frac{dF(s, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \alpha(s) \beta'(0) \alpha(s)^{-1}$$

Và vì thế

$$\alpha(s) \beta'(0) \alpha(s)^{-1} \in \mathfrak{g}$$

Từ đó ta có \mathfrak{g} là một không gian con đóng của $M_n(\mathbb{k})$, khi giới hạn này tồn tại thì ta cũng có

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\alpha(s) \beta'(0) \alpha(s)^{-1} - \beta'(0)) \in \mathfrak{g}$$

Chúng ta dễ dàng sử dụng dạng ma trận với luật lấy vi phân của một hàm ngược

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t)^{-1}) = -\alpha(t)^{-1} \alpha'(t) \alpha(t)^{-1} \quad (3.3)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\alpha(s) \beta'(0) \alpha(s)^{-1} - \beta'(0) \right) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \alpha(s) \beta'(0) \alpha(s)^{-1} \\
&= \alpha'(0) \beta'(0) \alpha(0) - \alpha(0) \beta'(0) \alpha(0)^{-1} \alpha'(0) \alpha(0)^{-1} \quad (\text{do 3.3}) \\
&= \alpha'(0) \beta'(0) \alpha(0) - \alpha(0) \beta'(0) \alpha'(0) \\
&= \alpha'(0) \beta'(0) - \beta'(0) \alpha'(0) \\
&= [\alpha'(0), \beta'(0)]
\end{aligned}$$

Điều đó cho thấy là $[\alpha'(0), \beta'(0)] \in \mathfrak{g}$, do đó nó phải là dạng $\gamma'(0)$ cho một vài cung khả vi. Phần 2 chứng minh dễ dàng. □

Vì thế cho mỗi nhóm ma trận G thì có một đại số Lie $\mathfrak{g} = T_1 G$. Một dạng thích hợp của đồng cấu $G \rightarrow H$ giữa những nhóm ma trận phát triển lên thành một phép biến đổi tuyến tính $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ theo cấu trúc đại số Lie.

Định nghĩa 3.15: Cho $G \leq GL_n(\mathbb{K})$, $H \leq GL_m(\mathbb{K})$ là những nhóm ma trận và $\varphi: G \rightarrow H$ là ánh xạ liên tục. Khi đó φ được gọi là ánh xạ khả vi nếu với mỗi cung khả vi $\gamma: (a, b) \rightarrow G$ thì cung hợp $\varphi \circ \gamma: (a, b) \rightarrow H$ cũng khả vi, với đạo hàm:

$$(\varphi \circ \gamma)'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)),$$

Và nếu khi hai cung khả vi $\alpha, \beta: (a, b) \rightarrow G$ thỏa điều kiện:

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha'(0) = \beta'(0)$$

Khi đó:

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

Như vậy, φ là một đồng cấu vi phân nếu nó cũng là một đồng cấu nhóm. Một đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận mà cũng là một ánh xạ khả vi thì được gọi là đồng cấu Lie.

Sau đây, ta sẽ thấy sự thu hẹp trong định nghĩa mà thật sự không cần thiết lắm. Chúng ta nhớ rằng nếu $\varphi: G \rightarrow H$ là ánh xạ thu hẹp của ánh xạ khả vi $\Phi: GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_m(\mathbb{K})$ thì φ cũng là một ánh xạ khả vi.

Mệnh đề 3.16: Cho G, H, K là những nhóm ma trận và $\varphi: G \rightarrow H$, $\theta: H \rightarrow K$ là những ánh xạ đồng cấu, khả vi.

a) Với mỗi $A \in G$ có một phép biến đổi \mathbb{R} -tuyến tính $\varphi: T_A G \rightarrow T_{\varphi(A)} H$ được cho bởi

$$d\varphi_A(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

Với mỗi cung khả vi $\gamma: (a, b) \rightarrow G$ và $\gamma(0) = A$.

b) Ta có

$$d\theta_{\varphi(A)} \circ d\varphi_A = d(\theta \circ \varphi)_A.$$

c) Với ánh xạ thuần nhất $Id_G: G \rightarrow G$ và $A \in G$ thì:

$$dId_G = Id_{T_A G}$$

Chứng minh:

a) Định nghĩa của $d\varphi_A$ có ý nghĩa từ định nghĩa của sự khả vi, cho $X \in T_A G$ và cung γ bất kỳ với $\gamma(0) = A$, $\gamma'(0) = X$,

$(\varphi \circ \gamma)'(0)$ chỉ phụ thuộc vào X mà không phụ thuộc vào γ .

Những ánh xạ đồng nhất của (b) và (c) thì dễ dàng kiểm chứng. □

Nếu $\varphi: G \rightarrow H$ là một đồng cấu khả vi thì ta có $\varphi(I) = I$. $d\varphi_I: T_1 G \rightarrow T_1 H$ là một phép biến đổi tuyến tính mà được gọi là đạo hàm của φ và ký hiệu là:

$$d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}.$$

Định nghĩa 3.17: Cho $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ là những đại số Lie trên trường \mathbb{K} . Một phép biến đổi \mathbb{K} -tuyến tính $\Phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ là một đồng cấu của đại số Lie nếu

$$\Phi([x, y]) = [\Phi(x), \Phi(y)] \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

Định lý 3.18: Cho G, H là những nhóm ma trận và $\varphi: G \rightarrow H$ là một đồng cấu khả vi. Khi đó ánh xạ đạo hàm $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ là một đồng cấu của đại số Lie

Chứng minh: Ta sử dụng lại những ký hiệu trong định lý 3.14, cho hai cung khả vi α, β trong G với $\alpha(0) = \beta(0) = I$. Ta có thể sử dụng hàm hợp được cho bởi:

$$\varphi \circ F(s, t) = \varphi(F(s, t)) = \varphi(\alpha(s))\varphi(\beta(t))\varphi(\alpha(s))^{-1}$$

Dẫn đến:

$$d\varphi([\alpha'(0), \beta'(0)]) = [d\alpha'(0), d\beta'(0)]$$

□

4. Một vài đại số Lie của những nhóm ma trận

a. Những đại số Lie của $GL_n(\mathbb{R})$ và $GL_n(\mathbb{C})$: Chúng ta hãy bắt đầu với nhóm ma trận $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$.

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $\varepsilon > 0$, có một cung khả vi

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R}); \quad \alpha(t) = I + tA.$$

Cho $t \neq 0$, nghiệm của phương trình $\det(t^{-1}I + A) = 0$ có dạng $t = \frac{-1}{\lambda}$ với λ là một giá trị riêng khác 0 của A . Từ đó nếu:

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{|\lambda|} : \lambda \text{ là một giá trị riêng khác 0 của } A \right\}$$

Thì: $\text{im} \alpha \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, vì thế ta có thể xem α như một hàm $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$. Bằng cách tính đạo hàm ta có thể tìm được $\alpha'(t) = A$, vì thế $\alpha'(0) = A$. Điều đó cho thấy rằng $A \in T_I GL_n(\mathbb{R})$. Từ $A \in M_n(\mathbb{R})$ tùy ý, ta có:

$$\begin{cases} gl_n(\mathbb{R}) = T_I GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \\ \dim GL_n(\mathbb{R}) = n^2 \end{cases}$$

Tương tự:

$$\begin{cases} gl_n(\mathbb{C}) = T_I GL_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \\ \dim_{\mathbb{C}} GL_n(\mathbb{C}) = n^2 \\ \dim GL_n(\mathbb{C}) = 2n^2 \end{cases}$$

Cho $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$, giả sử $\alpha: (a, b) \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ là một cung nằm trong $SL_n(\mathbb{R})$ và thỏa $\alpha(0) = I$. Cho $t \in (a, b)$ ta có $\det \alpha(t) = 1$, vì thế

$$\frac{d(\det \alpha(t))}{dt} = 0$$

Bổ đề 3.19: Ta có:

$$\frac{d(\det \alpha(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \text{tr} \alpha'(0)$$

Chứng minh: Vì ta có $A \in M_n(k)$,

$$\text{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

Và nó thỏa phương trình $\partial = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0}$ trên những hàm có tính chất của phép lấy đạo hàm.

$$\partial(\gamma_1 \gamma_2) = (\partial \gamma_1) \gamma_2(0) + \gamma_1(0) \gamma_2' .$$

Đặt: $a_{ij} = \alpha(t)_{ij}$ và chú ý là khi $t = 0$ thì $a_{ij} = \delta_{ij}$.

Viết C_{ij} là ma trận phụ thu được từ $\alpha(t)$ bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j . Bằng cách mở rộng hàng thứ n ta thu được

$$\det \alpha(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{nj} \det C_{nj}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \partial \det \alpha(t) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \left((\partial a_{nj}) \det C_{nj} + a_{nj} (\partial \det C_{nj}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \left((\partial a_{nj}) \det C_{nj} + (\partial \det C_{nn}) \right) \end{aligned}$$

Cho $t = 0, \det C_{nj} = \delta_{jn}$ từ đó $\alpha(0) = I$. Do đó

$$\partial \det(\alpha(t)) = \partial a_{nn} + \partial \det C_{nn}$$

Ta lặp lại quá trình trên với $(n-1) \times (n-1)$ ma trận C_{nn} và v.v... Điều đó cho thấy rằng:

$$\begin{aligned} \partial \det(\alpha(t)) &= \partial a_{nn} + \partial a_{(n-1)(n-1)} + \partial \det C_{(n-1)(n-1)} \\ &\vdots \\ &= \partial a_{nn} + \partial a_{(n-1)(n-1)} + \cdots + \partial a_{11} \\ &= \text{tr} \alpha'(0) \end{aligned}$$

□

Vì thế ta có: $\text{tr} \alpha'(0) = 0$ và từ đó:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = T_I SL_n(\mathbb{R}) \subseteq \ker \text{tr} \subseteq M_n(\mathbb{R})$$

Nếu $A \in \ker \text{tr} \subseteq M_n(\mathbb{R})$ thì hàm:

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R}); \quad \alpha(t) = \exp(tA) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k$$

xác định với mọi $\varepsilon > 0$ và thỏa điều kiện biên:

$$\alpha(0) = I, \quad \alpha'(0) = A$$

Bổ đề 3.20: Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$ ta có:

$$\det \exp(A) = e^{\text{tr} A}.$$

Chứng minh bằng cách sử dụng phương trình vi phân: Xét cung

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times; \quad \gamma(t) = \det \exp(tA)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\det \exp((t+h)A) - \det \exp(tA)) \\ &= \det \exp(tA) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\det \exp(hA) - 1) \\ &= \det \exp(tA) \text{tr} A \\ &= \gamma \text{tr} A \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề 3.19 với cung $t \mapsto \det \exp(tA)$. Vì thế α thỏa phương trình vi phân tương tự và điều kiện ban đầu như cung $t \mapsto e^{t \text{tr} A}$. Như phần độc đáo của định lý 3.1:

$$\alpha(t) = \det \exp(tA) = e^{t \text{tr} A}$$

□

Chứng minh bằng cách sử dụng dạng chính tắc Jordan:

Nếu $S \in GL_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\det \exp(SAS^{-1}) &= \det(S \exp(A) S^{-1}) \\ &= \det S \det \exp(A) \det S^{-1} \\ &= \det \exp(A)\end{aligned}$$

Và

$$e^{tr SAS^{-1}} = e^{tr A}$$

Vì thế nó đủ để chứng minh đơn vị cho SAS^{-1} cho sự lựa chọn phù hợp ma trận S khả nghịch. Đó là ví dụ lý thuyết của dạng chính tắc Jordan, có một sự lựa chọn ma trận S phù hợp mà:

$$B = SAS^{-1} = D + N$$

Với D là đường chéo, N là tam giác trên ngặt và $N_{ij} = 0$ nếu $i \geq j$. Khi đó N lũy linh, tức là: $N^k = 0_n$ với k lớn.

Ta có:

$$\begin{aligned}\exp(B) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (D + N)^k \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k \right) + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} ((D + N)^{k+1} - D^{k+1}) \\ &= \exp(D) + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} N (D^k + D^{k-1}N + \dots + N^k)\end{aligned}$$

Vì $k \geq 0$ nên ma trận $N(D^k + D^{k-1}N + \dots + N^k)$ là tam giác trên ngặt, từ đó:

$$\exp(B) = \exp(D) + N',$$

Với N' là ma trận tam giác trên ngặt. Nếu $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, bằng cách tính định thức ta tìm được

$$\begin{aligned}\det \exp(A) &= \det \exp(B) \\ &= \det \exp(D) \\ &= \det \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \\ &= e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\end{aligned}$$

Từ đó $tr D = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, có nghĩa là

$$\det \exp(A) = e^{tr D}$$

□

Sử dụng bổ đề này với hàm α , ta có:

$$\begin{cases} sl_n(\mathbb{R}) = T_I SL_n(\mathbb{R}) = \ker tr \subseteq M_n(\mathbb{R}), \\ \dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1. \end{cases}$$

Làm việc trên \mathbb{C} ta cũng có:

$$\begin{cases} sl_n(\mathbb{C}) = T_I SL_n(\mathbb{C}) = \ker tr \subseteq M_n(\mathbb{C}), \\ \dim_{\mathbb{C}} SL_n(\mathbb{C}) = n^2 - 1, \\ \dim SL_n(\mathbb{C}) = 2n^2 - 2. \end{cases}$$

b. Đại số Lie của $UT_n(\mathbb{k})$ và $SUT_n(\mathbb{k})$: Cho $n \geq 1$ và $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, nhớ lại ma trận tam giác trên và những nhóm con lũy đơn của $GL_n(\mathbb{k})$. Đặt:

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow UT_n(\mathbb{R})$$

Là một cung khả vi với $\alpha(0) = I$. Khi đó $\alpha'(t)$ là ma trận tam giác trên, hơn nữa nếu sử dụng lý luận cho $GL_n(\mathbb{K})$ ta thấy rằng cho bất cứ ma trận tam giác trên $A \in M_n(\mathbb{K})$, có một cung:

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow UT_n(\mathbb{K}); \quad \alpha(t) = I + tA,$$

Với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước và $\alpha'(0) = A$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} ut_n(\mathbb{K}) = T_I UT_n(\mathbb{K}) = \text{tập hợp những ma trận tam giác trên trong } M_n(\mathbb{K}) \\ \dim ut_n(\mathbb{K}) = \binom{n+1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \end{cases}$$

Một ma trận tam giác trên $A \in M_n(\mathbb{K})$ là ma trận tam giác trên ngặt nếu tất cả phần tử trên đường chéo của nó bằng 0, tức là: $a_{ii} = 0$. Khi đó:

$$\begin{cases} sut_n(\mathbb{K}) = T_I SUT_n(\mathbb{K}) = \text{tập hợp những ma trận tam giác trên nghiêm ngặt trong } M_n(\mathbb{K}) \\ \dim sut_n(\mathbb{K}) = \binom{n}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \end{cases}$$

c. Đại số Lie của $O(n)$ và $SO(n)$: Đặt $O(n)$ là nhóm ma trận trực giao cấp $n \times n$, tức là:

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T A = I\} \leq GL_n(\mathbb{R})$$

Cho một cung $\alpha : (a, b) \rightarrow O(n)$ thỏa $\alpha(0) = I$ ta có:

$$\frac{d}{dt} \alpha(t)^T \alpha(t) = 0$$

Và vì thế:

$$\alpha'(t)^T \alpha(t) + \alpha(t)^T \alpha'(t) = 0$$

Điều đó có nghĩa là:

$$\alpha'(0)^T + \alpha'(0) = 0$$

Do đó ta có: $\alpha'(0)^T = -\alpha'(0)$, tức là $\alpha'(0)$ là đối xứng lệch. Do đó:

$$\mathfrak{o}(n) = T_I O(n) \subseteq Sk - Sym_n(\mathbb{R})$$

là tập hợp của những ma trận thực đối xứng lệch cấp $n \times n$.

Mặt khác, nếu $A \in Sk - Sym_n(\mathbb{R})$, với $\varepsilon > 0$, ta có thể xét cung:

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}); \quad \alpha(t) = \exp(tA).$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \alpha(t)^T \alpha(t) &= \exp(tA)^T \exp(tA) \\ &= \exp(tA^T) \exp(tA) \\ &= \exp(-tA) \exp(tA) \\ &= I \end{aligned}$$

Từ đó ta có thể xem α như một cung $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O(n)$. Từ $\alpha'(0) = A$, điều đó cho thấy là:

$$Sk - Sym_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{o}(n) = T_I O(n)$$

Và vì thế:

$$\mathfrak{o}(n) = T_I O(n) = Sk - Sym_n(\mathbb{R}).$$

Chú ý là nếu $A \in Sk - Sym_n(\mathbb{R})$ thì:

$$trA = trA^T = tr(-A) = -trA$$

Suy ra $trA = 0$. Bằng bổ đề 3.20 ta có:

$$\det \exp(tA) = 1$$

Từ đó: $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow SO(n)$ với $SO(n)$ là nhóm ma trận trực giao đặc biệt cấp $n \times n$. Vì thế ta có:

$$\mathfrak{so}(n) = T_I SO(n) = \mathfrak{o}(n) = T_I O(n) = Sk - Sym_n(\mathbb{R})$$

d. Đại số Lie của $U(n)$ và $SU(n)$: Bây giờ ta xét nhóm unitary cấp $n \times n$:

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = I\}$$

Cho một cung α trong $U(n)$ thỏa $\alpha(0) = I$, ta thu được:

$$\alpha'(0)^* + \alpha'(0) = 0$$

Và vì thế: $\alpha'(0)^* = -\alpha'(0)$, tức là $\alpha'(0)$ là ma trận Hermit lệch. Vì thế:

$u(n) = T_I U(n) \subseteq Sk - Herm_n(\mathbb{C})$ là tập hợp tất cả những ma trận Hermit lệch cấp $n \times n$.

Nếu $H \in Sk - Herm_n(\mathbb{C})$ thì cung:

$$\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}); \quad \eta(t) = \exp(tH)$$

Thỏa:

$$\begin{aligned} \eta(t)^* \eta(t) &= \exp(tH)^* \exp(tH) \\ &= \exp(tH^*) \exp(tH) \\ &= \exp(-tH) \exp(tH) \\ &= I \end{aligned}$$

Từ đó ta có thể xem η như một cung $\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U(n)$. Từ $\eta'(0) = H$ cho thấy là:

$$Sk - Herm_n(\mathbb{C}) \subseteq u(n) = T_I U(n)$$

Từ đó:

$$u(n) = T_I U(n) \subseteq Sk - Herm_n(\mathbb{C})$$

Nhóm unitary đặc biệt $SU(n)$ cũng được làm với cách tương tự. Và ta cũng có:

$$su(n) = T_I SU(n) \subseteq Sk - Herm_n(\mathbb{C})$$

Nhưng nếu $\eta : (a, b) \rightarrow SU(n)$ là một cung với $\eta(0) = I$ thì như trong sự phân tích cho $SL_n(\mathbb{R})$,

$$tr \eta'(0) = 0$$

Và:

$$Sk - Herm_n^0(\mathbb{C}) = \{H \in Sk - Herm_n(\mathbb{C}) : trH = 0\},$$

Điều đó cho ta: $G \leq GL_n(\mathbb{R})$. Mặt khác nếu $H \in Sk - Herm_n^0(\mathbb{C})$ thì cung:

$\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U(n); \quad \eta(t) = \exp(tH)$, nhận giá trị trong $SU(n)$ bởi bổ đề 3.20 và $\eta'(0) = H$. Từ đó:

$$su(n) = T_I SU(n) \subseteq Sk - Herm_n^0(\mathbb{C})$$

Chú ý 3.21: Sau đây ta sẽ thấy rằng cho một nhóm ma trận, những điều theo sau đây là đúng và có thể được dùng trong việc xác định đại số Lie của những nhóm ma trận như ở trên.

- Hàm $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow GL_n(\mathbb{R}); \quad \exp_G(X) = \exp(X)$, có ảnh trong G , $\exp_G \mathfrak{g} \subseteq G$, vì thế bình thường ta sẽ viết: $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ cho hàm mũ trong G và thỉnh thoảng thậm chí chỉ ghi \exp .

- Nếu G là compact và liên thông thì $\exp_G \mathfrak{g} = G$.
- Có một đĩa mở $N_g(O, r) \subseteq \mathfrak{g}$ mà trên đó \exp là đơn ánh và cho một đồng phôi $\exp : N_g(O, r) \rightarrow \exp N_g(O, r)$ với $\exp N_g(O, r) \subseteq G$ là một tập con mở thật sự.

5. Nhóm $SO(3)$ và $SU(2)$

Trong phần này ta sẽ thảo luận về nhóm $SO(3)$ và $SU(2)$ và đại số Lie của chúng. Đại số Lie là những không gian vector thực 3 chiều, có những ví dụ sau:

$$so(3): \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{su}(2): \quad H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Những ngoặc Lie không tầm thường là:

$$\begin{aligned} [P, Q] &= R, & [Q, R] &= P, & [R, P] &= Q \\ [H, E] &= F, & [E, F] &= H, & [F, H] &= E \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là đẳng cấu:

$$\varphi: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3); \quad \varphi(xH + yE + zF) = xP + yQ + zR \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Thỏa:

$$\varphi([U, V]) = [\varphi(U), \varphi(V)]$$

Do đó là một đẳng cấu của đại số \mathbb{R} -Lie. Vì thế những đại số Lie này giống như đại số. Điều đó cho thấy có thể có một mối quan hệ đồng cấu giữa những nhóm đó với nhau. Trước khi xét điều đó, chú ý đại số Lie của ví dụ 3.12, phép biến đổi \mathbb{R} -tuyến tính

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3); \quad xe_1 + ye_2 + ze_3 \mapsto xP + yQ + zR,$$

là một đẳng cấu của đại số \mathbb{R} -Lie bởi công thức (3.2).

Bây giờ ta sẽ xây dựng một đồng cấu Lie $SU(2) \rightarrow SO(3)$ mà đạo hàm của nó tại I là φ . Nhớ lại tác dụng liên hợp của Ad của $SU(2)$ trên $\mathfrak{su}(2)$ bởi:

$$Ad_A(U) = AUA^{-1} = AUA^* \quad (A \in SU(2), U \in \mathfrak{su}(2))$$

Khi đó mỗi Ad_A là một đẳng cấu \mathbb{R} -tuyến tính $\mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$.

Ta có thể định nghĩa một tích trong thực $(\quad | \quad)$ trên $\mathfrak{su}(2)$ bởi:

$$(X | Y) = -\text{tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{su}(2))$$

Giới thiệu những phần tử:

$$\widehat{H} = \sqrt{2}H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \widehat{E} = \sqrt{2}E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{F} = \sqrt{2}F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

Ta thu được một đẳng cấu \mathbb{R} -tuyến tính:

$$\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(2); \quad \theta(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\widehat{H} + y\widehat{E} + z\widehat{F} \quad (3.13)$$

Là một phép đẳng cự, từ $\widehat{H}, \widehat{E}, \widehat{F}$ là dạng cơ bản trực giao của $\mathfrak{su}(2)$ theo $(\quad | \quad)$, tức là:

$$(\widehat{H} | \widehat{H}) = (\widehat{E} | \widehat{E}) = (\widehat{F} | \widehat{F}) = 1$$

$$(\widehat{H} | \widehat{E}) = (\widehat{H} | \widehat{F}) = (\widehat{E} | \widehat{F}) = 0$$

Chú ý 3.22: Có lẽ sẽ tự nhiên hơn để nói về tích trong $(\quad | \quad)$, vì thế H, E, F là những vector đơn vị.

Điều đó làm cho nhiều công thức theo sau sẽ gọn hơn giống như ngoặc Lie trong $SU(2)$, và tương ứng với tích có hướng trong \mathbb{R}^3 . Tuy nhiên, sự chọn lựa của chúng ta ở $(\quad | \quad)$ phải đồng ý với một quy ước của $SU(n)$.

Mệnh đề 3.23: $(\quad | \quad)$ là một dạng song tuyến tính thực trong $\mathfrak{su}(2)$ và xác định dương. Nó có số chiều bất biến:

$$([Z, X] | Y) + (X | [Z, Y]) = 0 \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{su}(2))$$

Chứng minh:

Ta có \mathbb{R} -song tuyến tính giống như là một dạng đối xứng. Về vấn đề xác định dương, cần chú ý là: cho $x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ thì:

$$(x\widehat{H} + y\widehat{E} + z\widehat{F} | x'\widehat{H} + y'\widehat{E} + z'\widehat{F}) = xx' + yy' + zz'$$

Và đặc biệt:

$$\left(x\widehat{H} + y\widehat{E} + z\widehat{F} \middle| x\widehat{H} + y\widehat{E} + z\widehat{F} \right) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$$

Với dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 0$

Tính bất biến thì được kiểm tra bằng việc tính toán.

□

Cho $A \in SU(2)$ và $X, Y \in su(2)$,

$$\begin{aligned} (AXA^* | AYA^*) &= -tr(AXA^* AYA^*) \\ &= -tr(AXYA^*) \\ &= -tr(AXYA^{-1}) \\ &= -tr(XY) \\ &= (X | Y) \end{aligned}$$

Do đó Ad_A thật sự là một phép biến đổi tuyến tính trực giao với tích trong đó. Việc sử dụng những ma trận trực giao cơ sở $\widehat{H}, \widehat{E}, \widehat{F}$, ta có thể đồng nhất $su(2)$ với \mathbb{R}^3 và $(\quad | \quad)$ với tích trong được sử dụng, khi đó mỗi Ad_A tương ứng với một thành phần của $O(3)$ mà ta sẽ viết như là Ad_A . Và dễ dàng nhìn thấy hàm:

$$\overline{Ad}: SU(2) \rightarrow O(3); \quad \overline{Ad}(A) = Ad_A \in O(3)$$

Là một đồng cấu liên tục của những nhóm đó. Thật sự, $SU(2)$ là đường dẫn liên thông, giống như là $SO(3)$, vì thế từ: $\overline{Ad}(I) = I$,

$$\overline{Ad}SU(2) \subseteq SO(3)$$

Từ đó ta sẽ định nghĩa lại:

$$\overline{Ad}: SU(2) \rightarrow O(3); \quad \overline{Ad}(A) = Ad_A$$

Mệnh đề 3.24: Đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận:

$$\overline{Ad}: SU(2) \rightarrow O(3); \quad \overline{Ad}(A) = Ad_A,$$

là trơn, có $\ker \overline{Ad} = \{\pm I\}$ và là toàn ánh.

Chứng minh:

Ta sẽ cho một chứng minh trực tiếp: $\ker \overline{Ad}$ là toàn ánh để minh họa cho một vài khía cạnh hình học đặc biệt quan trọng của ví dụ này.

Ta có thể xem một thành phần của $su(2)$ giống như một vector trong \mathbb{R}^3 dựa trên 3 vector trực giao cơ sở $\widehat{H}, \widehat{E}, \widehat{F}$ với e_1, e_2, e_3 . Từ phương trình (2.11), những ngoặc không tầm thường của những vector cơ sở của chúng là:

$$[\widehat{H}, \widehat{E}] = \sqrt{2}\widehat{F}, \quad [\widehat{E}, \widehat{F}] = \sqrt{2}\widehat{H}, \quad [\widehat{F}, \widehat{H}] = \sqrt{2}\widehat{E}$$

Ngoại trừ $\sqrt{2}$, điều trên giống như tích có hướng trong \mathbb{R}^3 .

Mệnh đề 3.25: Cho $U_1 = x_1\widehat{H} + y_1\widehat{E} + z_1\widehat{F}, U_2 = x_2\widehat{H} + y_2\widehat{E} + z_2\widehat{F} \in su(2)$;

$$[U_1, U_2] = \sqrt{2} \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \widehat{H} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \widehat{E} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \widehat{F} \right)$$

Chứng minh:

Điều trên xuất phát từ công thức:

$$\begin{aligned} xe_1 + ye_2 + ze_3 &= (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3) \times (x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3) \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \end{aligned}$$

□

Ta có thể tính toán tương tự một tích của những thành phần trong $\mathfrak{su}(2)$ như là tích có hướng và tích vector. Tuy nhiên cần lưu ý một cách tổng quát: nếu $U_1, U_2 \in \mathfrak{su}(2)$ thì $U_1 U_2 \notin \mathfrak{su}(2)$.

Mệnh đề 3.26: Cho $U_1 = x_1 \hat{H} + y_1 \hat{E} + z_1 \hat{F}, U_2 = x_2 \hat{H} + y_2 \hat{E} + z_2 \hat{F} \in \mathfrak{su}(2)$

$$\begin{aligned} U_1 U_2 &= -\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{2} I + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{H} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{E} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \hat{F} \right) \right) \\ &= -\frac{(U_1 | U_2)}{2} I + \frac{1}{2} [U_1, U_2] \end{aligned}$$

□

Hệ quả 3.27: Nếu $U_1, U_2 \in \mathfrak{su}(2)$ là trực giao, tức là $(U_1 | U_2) = 0$ thì:

$$U_1 U_2 = \frac{1}{2} [U_1, U_2] \in \mathfrak{su}(2)$$

Tiếp theo ta sẽ kiểm tra ảnh hưởng của $A \in SU(2)$ giống như một phép biến đổi \mathbb{R} - tuyến tính trên $\mathfrak{su}(2)$ mà ta sẽ đồng nhất với \mathbb{R}^3 . Chú ý A có thể được viết duy nhất dưới dạng:

$$A = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix}$$

Với $u, v \in \mathbb{C}$ và $|u|^2 + |v|^2 = 1$. Điều này cho phép ta biểu diễn A dưới dạng:

$$A = \cos \theta I + S,$$

Với S là ma trận Hermit lệch và $\operatorname{Re} u = \cos \theta$ với $\theta \in [0, \pi]$ và vì thế $\sin \theta \geq 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} S^2 &= -\left((Imu)^2 + |v|^2 \right) I = -\sin^2 \theta I \\ (S | S) &= 2 \sin^2 \theta \quad (3.4). \end{aligned}$$

Và từ $A \in SU(2)$, ta có:

$$A^{-1} = A^* = \cos \theta I - S$$

Chú ý rằng cho bất kỳ $t \in \mathbb{R}$ thì:

$$Ad_A(tS) = A(tS)A^{-1} = tS$$

Mặt khác, nếu $U \in \mathfrak{su}(2)$ với $(S | U) = 0$, với kết quả trên ta có:

$$\begin{aligned} Ad_A(U) &= (\cos \theta I + S)U(\cos \theta I - S) \\ &= (\cos \theta U + SU)(\cos \theta I - S) \\ &= \cos^2 \theta U + \cos \theta SU - \cos \theta US - SUS \\ &= \cos^2 \theta U + \cos \theta [S, U] - SUS \end{aligned}$$

Tính chất của tích vector cho ta:

$$SUS = \frac{(S | S)}{2} U$$

Bằng phương trình (3.4), khi $(S | U) = 0$ ta có:

$$\begin{aligned} Ad_A(U) &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)U + \cos \theta [S, U] \\ &= (\cos 2\theta)U + \cos \theta [S, U] \\ &= (\cos 2\theta)U + \sin 2\theta \hat{S} \times U, \end{aligned}$$

Với $\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} S$ là độ dài đơn vị. Chú ý rằng U và $\hat{S} \times U$ trực giao với S , ta có thể thấy ảnh hưởng

của Ad_A trên U là quay nó trên mặt phẳng trực giao với S (và tạo bởi U và $\hat{S} \times U$) với góc θ .

Ta có thể nhìn thấy là với mỗi phần tử $R \in SO(3)$ có dạng Ad_A cho một vài $A \in SU(2)$. Điều đó là do giá trị riêng của R có modul bằng 1 và $\det R = 1$. Kết nối những điều trên thì cho ta thấy rằng phải có ít nhất một giá trị riêng của R bằng 1 với vector riêng v tương ứng, trong khi cái thứ 2 có dạng $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ với một vài giá trị φ . Bây giờ ta có thể lấy $A = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)I + S$ với $S \in su(2)$ được chọn tương ứng với một bội của v và $(S|S) = 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Nếu ta chọn $-\varphi$ thay cho φ ta sẽ thu được $-A$ thay cho A .

□

Lấy $B \in su(2)$. Khi đó cung:

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow SU(2); \quad \beta(t) = \exp(tB),$$

Sẽ phát triển thành cung:

$$\bar{\beta}: \mathbb{R} \rightarrow SO(3); \quad \bar{\beta}(t) = \overline{Ad}_{\beta(t)}.$$

Ta có thể phân biệt $\bar{\beta}$ tại $t = 0$ để có được và phần tử của $so(3)$ mà \mathbb{R}^3 được xác định với $su(2)$ bởi công thức:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}'(0)(X) &= \frac{d}{dt} \exp(tB) X \exp(-tB) \Big|_{t=0} \\ &= BX - XB = [B, X]. \end{aligned}$$

Ví dụ khi $B = H$,

$$[H, H] = 0, \quad [H, E] = F, \quad [H, F] = -E,$$

Từ đó ma trận H trên $su(2)$ quan hệ với 3 ma trận cơ sở H, E, F là:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Tương tự:

$$[E, H] = -F, \quad [E, E] = 0, \quad [E, F] = \widehat{H},$$

Cho ma trận:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

Và:

$$[F, H] = E, \quad [F, E] = -H, \quad [F, F] = 0,$$

Cho ma trận:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

Với ánh xạ đạo hàm tương ứng là:

$$d\overline{Ad}: su(2) \rightarrow so(3); \quad d\overline{Ad}(xH + yE + zF) = xR + yQ + zP,$$

Ngoại trừ những thay đổi trong thứ tự, rõ ràng có một đẳng cấu giữa 2 đại số Lie của chúng. Để tóm tắt, ta sẽ chứng minh điều sau đây.

Định lý 3.28: Cho $\overline{Ad}: SU(2) \rightarrow SO(3)$ là một đồng cấu Lie toàn ánh với $\ker \overline{Ad} = \{\pm I\}$. Hơn nữa, ánh xạ đạo hàm $d\overline{Ad}: su(2) \rightarrow so(3)$ là một đẳng cấu của đại số \mathbb{R} -Lie.

Chương IV:

Sự liên thông của những nhóm ma trận

Tính liên thông là một trong những tính chất thường được khảo sát trong tôpô nên phần cuối của luận văn này sẽ trình bày tính liên thông của những nhóm ma trận đặc biệt được đề cập ở chương 2.

1. Sự liên thông của các đa tạp

Định nghĩa 4.1: Một không gian tôpô X liên thông nếu như $X = U \cup V$ với $U, V \neq \emptyset$, thì $U \cap V \neq \emptyset$

Định nghĩa 4.2: Một không gian tôpô X liên thông đường nếu $\forall x, y \in X$, có một đường liên tục $p: [0, 1] \rightarrow X$ với $p(0) = x$ và $p(1) = y$.

X liên thông đường địa phương nếu mọi điểm được chứa trong một lân cận mở liên thông đường.

Kết quả sau là cơ bản cho giải tích thực.

Mệnh đề 4.3: Mọi khoảng $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ thì liên thông đường và liên thông. Đặc biệt, \mathbb{R} thì liên thông đường và liên thông.

Mệnh đề 4.4: Nếu X là một không gian tôpô liên thông đường thì X liên thông.

Chứng minh: Giả sử X không liên thông. Khi đó $X = U \cup V$ trong đó $U, V \subseteq X$ thì không rỗng và $U \cap V = \emptyset$. Lấy $x \in U$ và $y \in V$. Theo tính liên thông đường ở đây của X , có một ánh xạ liên tục $p: [0, 1] \rightarrow X$ với $p(0) = x$ và $p(1) = y$. Khi đó $[0, 1] = p^{-1}U \cup p^{-1}V$ biểu thị $[0, 1]$ như một hợp của các tập con mở không có phần tử chung nào. Nhưng điều này lại mâu thuẫn với dự liên thông của $[0, 1]$. Vì vậy X phải liên thông. □

Mệnh đề 4.5: Cho X là một không gian tôpô liên thông mà liên thông đường địa phương. Khi đó X là liên thông đường.

Chứng minh: Lấy $x \in X$, và đặt

$$X_x = \{y \in X : \exists p: [0, 1] \rightarrow X \text{ liên tục sao cho } p(0) = x \text{ và } p(1) = y\}$$

Khi đó với mỗi $y \in X_x$, có một lân cận mở liên thông đường U_y . Nhưng với mỗi điểm $z \in U_y$ có một đường liên tục từ tới z qua y , vì vậy $U_y \subseteq X_x$. Điều này cho thấy rằng

$$X_x = \bigcup_{y \in X_x} U_y \subseteq X$$

thì mở trong X . Tương tự, nếu $w \in X - X_x$, thì $X_w \subseteq X - X_x$ và nó thì cũng mở. Nhưng vì vậy khi đó thì

$$X - X_x = \bigcup_{w \in X - X_x} X_w$$

Vì vậy $X = X_x \cup (X - X_x)$, và vì vậy theo tính liên thông, $X_x = \emptyset$ hoặc $X - X_x = \emptyset$. Vì vậy X là liên thông đường. □

Mệnh đề 4.6: Nếu các không gian tôpô X và Y liên thông đường thì tích của chúng $X \times Y$ liên thông đường.

Hệ quả 4.7: Với $n \geq 1$, \mathbb{R}^n thì liên thông đường và liên thông.

Nó thì cũng hữu ích cho việc ghi nhận các kết quả tiêu chuẩn sau đây.

Mệnh đề 4.8:

i) Cho $n \geq 2$. Hình cầu đơn vị $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ liên thông đường. Trong $S^0 = \{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}$, các tập con $\{1\}$ và $\{-1\}$ thì liên thông đường. Tập hợp các vectơ khác 0 $\mathbb{R}_0^n \subseteq \mathbb{R}^n$ thì liên thông đường.

ii) Với $n \geq 1$, những tập hợp của số phức khác 0 và các vectơ quaternion $\mathbb{C}_0^n \subseteq \mathbb{C}^n$ và $\mathbb{H}_0^n \subseteq \mathbb{H}^n$ thì liên thông đường.

Mệnh đề 4.9: Mọi đa tạp đều liên thông đường địa phương. Vì vậy mọi đa tạp liên thông thì liên thông đường.

Chứng minh: Mọi điểm được chứa trong một lân cận mở đồng phôi với tập con mở nào đó của \mathbb{R}^n mà có thể xem như một đĩa mở liên thông đường. Còn phát biểu thứ hai được chứng minh dựa theo mệnh đề 4.5. □

Định lý 4.10: Cho M là một đa tạp liên thông và $N \subseteq M$ là một đa tạp con không rỗng mà cũng là một tập con đóng. Nếu $\dim N = \dim M$ thì $N = M$.

Chứng minh: Khi $N \subseteq M$ đóng thì $M - N \subseteq M$ mở. Nhưng $N \subseteq M$ thì cũng mở khi mọi phần tử được chứa trong một tập con mở của M nằm trong N ; vì vậy $M - N \subseteq M$ đóng. Khi M liên thông, $M - N = \emptyset$. □

Mệnh đề 4.11: Cho G là một nhóm Lie và $H \leq G$ là một nhóm con đóng. Nếu G/H và H liên thông, thì G cũng liên thông.

Chứng minh: Đầu tiên ta chú ý điều sau: với bất kỳ $g \in G$, ánh xạ tịnh tiến trái $L_g: H \rightarrow gH$ cho ta một đồng cấu giữa những không gian này, vì vậy gH liên thông khi H liên thông.

Giả sử rằng G không liên thông, và cho $U, V \subseteq G$ là những tập con mở không rỗng mà $U \cap V = \emptyset$ và $U \cup V = G$. Phép chiếu $\pi: G \rightarrow G/H$ là một ánh xạ mở toàn ánh, vì vậy $\pi U, \pi V \subseteq G/H$ là những tập con mở mà $\pi U \cup \pi V = G/H$. Khi G/H liên thông, có một phần tử gH nằm trong $\pi U \cap \pi V$. Trong G ta có

$$gH = (gH \cap U) \cup (gH \cap V)$$

trong đó $(gH \cap U), (gH \cap V) \subseteq gH$ là những tập con mở trong không gian tôpô con trên gH khi U, V mở trong G . Theo tính liên thông của gH , điều này có thể chỉ xảy ra nếu $gH \cap U = \emptyset$ hoặc $gH \cap V = \emptyset$, khi chúng là các tập con mở của U, V mà không có phần tử chung nào. Khi

$$\pi^{-1}gH = \{gh: h \in H\}$$

điều này là sai, vì vậy $(gH \cap U) \cap (gH \cap V) \neq \emptyset$ suy ra $U \cap V \neq \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với giả định gốc trên U, V . □

Mệnh đề 4.12: Cho G là một nhóm Lie và $H \leq G$ là một nhóm con đóng. Nếu G/H và H liên thông thì G liên thông đường.

2. Ví dụ của những nhóm ma trận liên thông đường

Trong phần này ta sẽ khảo sát tính liên thông đường của những nhóm ma trận quen thuộc.

Ví dụ 4.13: Với $n \geq 1$, $SL_n(\mathbb{R})$ liên thông đường.

Chứng minh: Với trường hợp thực, ta tiến hành bằng phương pháp quy nạp theo n . Lưu ý rằng $SL_1(\mathbb{R}) = \{1\}$ chắc chắn liên thông. Bây giờ giả sử rằng $SL_{n-1}(\mathbb{R})$ thì liên thông đường với $n \geq 2$ nào đó.

Nhớ lại rằng $SL_n(\mathbb{R})$ tác động liên tục trên \mathbb{R}^n bởi phép nhân ma trận. Xét hàm liên tục

$$f: SL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad f(A) = Ae_n$$

Ảnh của f là $\text{im} f = \mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n - \{0\}$ khi mọi vector $v \in \mathbb{R}_0^n$ có thể mở rộng thành một cơ sở

$$v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v$$

của \mathbb{R}^n , và ta có thể nhân v_1 bởi một đại lượng vô hướng thích hợp để đảm bảo rằng ma trận A_v với những vector này là các cột của nó có định thức bằng 1. Khi đó $A_v e_n = v$.

Lưu ý rằng $Pe_n = e_n$ nếu và chỉ nếu

$$P = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó Q có cấp $(n-1) \times (n-1)$ với $\det Q = 1$, 0 là $(n-1) \times 1$ vector không và w là một $1 \times (n-1)$ vector tùy ý. Tập hợp của tất cả những ma trận như vậy là sự ổn định của e_n , $\text{Stab}_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$, mà cũng là một nhóm con đóng của $SL_n(\mathbb{R})$. Tổng quát hơn, $Ae_n = v$ nếu và chỉ nếu

$$A = A_v P \text{ với } P \in \text{Stab}_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n) \text{ nào đó.}$$

Vì vậy không gian đồng nhất $SL_n(\mathbb{R})/Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ thì đồng phôi tới \mathbb{R}_0^n .

Khi $n \geq 2$, nó thì nổi tiếng rằng \mathbb{R}_0^n thì liên thông đường, vì vậy liên thông. Điều này suy ra rằng $SL_n(\mathbb{R})/Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ thì liên thông.

Nhóm con $SL_{n-1}(\mathbb{R}) \leq Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ thì đóng và ánh xạ được định nghĩa tốt

$$Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)/SL_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}; \quad \begin{bmatrix} Q & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix} SL_{n-1}(\mathbb{R}) \mapsto (wQ^{-1})^T$$

là một vi phôi vì vậy không gian đồng nhất $Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)/SL_{n-1}(\mathbb{R})$ thì đồng phôi tới \mathbb{R}^{n-1} . Do đó với giả thuyết quy nạp, $Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ thì liên thông đường. Ta có thể kết hợp điều này với sự liên thông của \mathbb{R}_0^n để kết luận rằng $SL_n(\mathbb{R})$ liên thông đường. □

Ví dụ 4.14: Với $n \geq 1$, $GL_n^+(\mathbb{R})$ liên thông đường.

Chứng minh: Khi $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n^+(\mathbb{R})$, nó đủ để thấy rằng $GL_n^+(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ liên thông đường. Nhưng với điều này ta có thể sử dụng định thức để định nghĩa một ánh xạ liên tục

$$\det : GL_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$$

là toàn ánh trên một không gian liên thông đường. Không gian đồng nhất $GL_n^+(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ thì vi phôi tới \mathbb{R}^+ và do đó liên thông đường. Vì vậy $GL_n^+(\mathbb{R})$ liên thông đường. □

Điều này cho thấy rằng

$$GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \cup GL_n^-(\mathbb{R})$$

là sự phân tích của $GL_n(\mathbb{R})$ thành hai thành phần liên thông đường.

Ví dụ 4.15: Với $n \geq 1$, $SO(n)$ liên thông đường. Do đó

$$O(n) = SO(n) \cup O(n)^-$$

là sự phân tích của $O(n)$ thành hai thành phần liên thông đường.

Chứng minh: Với $n = 1$, $SO(1) = \{1\}$. Vì vậy ta sẽ giả định rằng $n \geq 2$ và tiến hành bằng phương pháp quy nạp theo n . Do đó giả định rằng $SO(n-1)$ liên thông đường.

Xét tác động liên tục của trên \mathbb{R}^n bởi phép nhân bên trái. Sự ổn định của e_n là $SO(n-1) \leq SO(n)$ coi như là một nhóm con đóng của các ma trận có dạng

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

với $P \in SO(n-1)$ và 0 là ma trận không cấp $(n-1) \times 1$. Quỹ đạo của e_n là hình cầu đơn vị \mathbb{S}^{n-1} mà liên thông đường. Khi không gian quỹ đạo thì cũng vi phôi tới $SO(n)/SO(n-1)$ ta có được bước quy nạp. □

Ví dụ 4.16: Với $n \geq 1$, $U(n)$ và $SU(n)$ liên thông đường.

Chứng minh: Với $n = 1$, $U(1)$ là hình tròn đơn vị trong \mathbb{C} trong khi $SU(1) = \{1\}$, vì vậy cả hai đều liên thông đường. Giả định rằng $U(n-1)$ và $SU(n-1)$ thì liên thông đường với $n \geq 2$ nào đó.

Khi đó $U(n)$ và $SU(n)$ tác động trên \mathbb{C}^n bởi phép nhân ma trận và ta có:

$$Stab_{U(n)}(e_n) = U(n-1)$$

$$Stab_{SU(n)}(e_n) = SU(n-1)$$

Ta cũng có

$$Orb_{U(n)}(e_n) = Orb_{SU(n)}(e_n) = \mathbb{S}^{2n-1}$$

trong đó $\mathbb{S}^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ ký hiệu hình cầu đơn vị gồm những vectơ đơn vị. Khi \mathbb{S}^{2n-1} liên thông đường, ta có thể kết luận rằng $U(n)$ và $SU(n)$ thì cũng vậy, điều này cho ta chứng minh được bước quy nạp. □

3. Những thành phần liên thông đường của một nhóm Lie

Cho G là một nhóm Lie. Ta nói hai phần tử $x, y \in G$ được nối với nhau bởi một đường trong G nếu có một đường liên tục $p: [0,1] \rightarrow G$ với $p(0) = x$ và $p(1) = y$. Ta ký hiệu là: $x \sim_G y$

Bổ đề 4.17: \sim_G là một mối quan hệ tương đương trên G .

Cho $g \in G$, ta có thể xét lớp tương đương của g , thành phần liên thông đường của g trong G ,

$$G_g = \{x \in G : x \sim_G g\}.$$

Mệnh đề 4.18: Thành phần liên thông đường của phần tử đồng nhất là một nhóm con chuẩn tắc vừa đóng vừa mở của G , $G_1 \triangleleft G$; từ đó nó là một nhóm con Lie đóng của chiều $\dim G$.

Thành phần liên thông đường G_g thống nhất với lớp của g theo G_1 , $G_g = gG_1 = G_1g$ và là một đa tạp con đóng của G .

Chứng minh: Theo mệnh đề 4.9, G_g chứa một lân cận mở của g trong G . Điều đó cho thấy rằng mọi thành phần là một đa tạp con thật sự của G với số chiều bằng với $\dim G$. Lý luận được sử dụng trong chứng minh của mệnh đề 4.5 cho thấy mỗi G_g thật sự là một tập vừa đóng vừa mở trong G .

Lấy $x, y \in G_1$. Khi đó có những đường liên tục $p, q: [0,1] \rightarrow G$ với $p(0) = 1 = q(0)$, $p(1) = x$ và $q(1) = y$. Đường tích là:

$$r: [0,1] \rightarrow G; \quad r(t) = p(t)q(t)$$

có $r(0) = 1$ và $r(1) = xy$. Vì thế $G_1 \leq G$. Cho $g \in G$, đường:

$$s: [0,1] \rightarrow G, \quad s(t) = gp(t)g^{-1}$$

có $s(0) = 1$ và $s(1) = gxg^{-1}$, từ đó $G_1 \triangleleft G$. Nếu $z \in gG_1 = G_1g$, thì $g^{-1}z \in G_1$ và vì thế có một đường liên tục $h: [0,1] \rightarrow G$ với $h(0) = 1$ và $h(1) = g^{-1}z$. Thì đường:

$$gh: [0,1] \rightarrow G; \quad gh(t) = g(h(t))$$

có $gh(0) = g$ và $gh(1) = z$. Vì thế mỗi lớp gG_1 thì liên thông đường, do đó $gG_1 \subseteq G_g$. Để có được đẳng thức, giả sử g được nối bởi một đường $k: [0,1] \rightarrow G$ trong G đến $w \in G_g$. Thì đường $g^{-1}k$ liên thông 1 tới $g^{-1}w$, vì thế $g^{-1}w \in G_1$, cho $w \in gG_1$. Điều đó cho thấy là: $G_g \subseteq gG_1$

□

Nhóm thương G/G_1 là nhóm các thành phần liên thông đường của G , mà ta sẽ ký hiệu là $\pi_0 G$.

Ví dụ 4.19: Ta có các nhóm của những đường thành phần sau:

$$\pi_0 SO(n) = \pi_0 SL_n(\mathbb{R}) = \pi_0 SU(n) = \pi_0 U(n) = \pi_0 SL_n(\mathbb{C}) = \pi_0 GL_n(\mathbb{C}) = \{1\}$$

$$\pi_0 O(n) \cong \pi_0 GL_n(\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}.$$

Ví dụ 4.20: Cho

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \leq SO(3)$$

Và lấy $G = N_{SO(3)}(T) \leq SO(3)$ là chuẩn hóa của nó. Thì T và G là những nhóm con Lie của $SO(3)$ và $\pi_0 G \cong \{\pm 1\}$.

Chứng minh: Ta có:

$$N_{SO(3)}(T) = T \cup \left\{ \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} = T \cup \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} T$$

Chú ý rằng T thì đẳng cấu đến đường tròn đơn vị,

$$T \cong \mathbb{T} ; \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow e^{\theta i}$$

Điều đó chứng tỏ rằng T thì liên thông đường và abel khi \mathbb{T} là như vậy. Hàm:

$$\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^\times; \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}\right) = a_{33}$$

liên tục với

$$\varphi^{-1}\mathbb{R}^+ = T, \quad \varphi^{-1}\mathbb{R}^- = T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

do đó chúng là các tập con vừa đóng vừa mở. Điều đó cho thấy rằng các thành phần liên thông đường của G là:

$$G_I = T, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} T.$$

Do đó: $\pi_0 G \cong \{\pm 1\}$

Chú ý rằng $N_{SO(3)}(T)$ tác động bởi liên hợp trên T và thật ra mọi phần tử của $T \triangleleft N_{SO(3)}(T)$ tác động tầm thường nếu T là abel. Từ đó $\pi_0 G$ tác động trên T với sự tác động của lớp không tầm thường được cho

$$\text{bởi liên hợp theo ma trận } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

mà tương ứng với đồng cấu ngược trên đường tròn đơn vị $\mathbb{T} \cong T$.

□

Ví dụ 4.21: Cho $T = \{x1 + yi : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\} \leq Sp(1)$, nhóm của những quaternion đơn vị. Lấy $G = N_{Sp(1)}(T) \leq Sp(1)$ là chuẩn hóa của nó. Khi đó T và G là những nhóm con Lie của $Sp(1)$ và $\pi_0 G \cong \{\pm 1\}$.

Chứng minh: Ta có:

$$G = T \cup \{xj - yk : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\} = T \cup jT$$

T là một đẳng cấu đến đường tròn đơn vị nên liên thông đường và abel. Hàm:

$$\theta: G \rightarrow \mathbb{R}; \quad \theta(t1 + xi + yj + zk) = y^2 + z^2,$$

liên tục và:

$$\theta^{-1}(0) = T, \quad \theta^{-1}(1) = jT$$

Từ đó những thành phần liên thông đường của G là T, jT . Vì thế $\pi_0 G \cong \{\pm 1\}$.

Sự tác động liên hợp của G trên T có mọi phần tử của T tác động một cách tầm thường, vì thế $\pi_0 G$ tác động trên T . Sự tác động của lớp không tầm thường được cho bởi liên hợp với j ,

$$j(x1 + yi)j^{-1} = x1 - yi$$

tương ứng với ánh xạ ngược trên đường tròn đơn vị $\mathbb{T} \cong T$.

Kết luận

1. Nội dung của luận văn

Chương I: Nhắc lại một vài kiến thức cơ bản về đại số và giải tích.

Chương II: Cho ta một vài kết quả quan trọng: $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K})$ là những nhóm dưới phép nhân ma trận, và cũng chính là không gian mêtric trên chuẩn sup. Liên quan đến mêtric đó là một tôpô tự nhiên được xây dựng trên $M_n(\mathbb{K})$. Sau khi có được cấu trúc tôpô ta tiến hành khảo sát tính liên tục của một số hàm quan trọng như: hàm liên đới, hàm định thức, hàm vết, ... và bên cạnh đó là tính chất đóng, mở của $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K})$. Tiếp đến, thông qua định nghĩa nhóm tôpô ta đi đến kết luận: mỗi nhóm $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K})$ là một nhóm tôpô với ánh xạ nhân và ánh xạ ngược. Sau đó, ta đưa ra định nghĩa về nhóm ma trận, nhóm con ma trận và đưa ra một vài ví dụ quan trọng về nhóm ma trận như: nhóm ma trận tam giác trên $UT_n(\mathbb{K})$ và nhóm ma trận đơn lũy $SUT_n(\mathbb{K})$, nhóm ma trận trực giao $O(n)$ và nhóm ma trận trực giao đặc biệt $SO(n)$, nhóm ma trận unita $U(n)$ và nhóm ma trận unita đặc biệt $SU(n)$. Sau cùng ta đưa ra những định nghĩa quan trọng được dùng để hỗ trợ cho kiến thức ở những chương sau như: định nghĩa về tính đồng cấu liên tục của những nhóm ma trận, những tác động của nhóm liên tục, định nghĩa hàm lũy thừa và hàm logarit của ma trận.

Chương III: Phát biểu và chứng minh định lý duy nhất nghiệm cho phương trình vi phân cấp 1 của ma trận. Tiếp đến ta đưa ra định nghĩa nhóm con một tham số, mối quan hệ đặc biệt giữa đường cong, không gian tiếp xúc và đại số Lie; thông qua đó ta giới thiệu một vài đại số Lie của những nhóm ma trận quen thuộc được đề cập ở chương II: đại số Lie của nhóm ma trận tuyến tính tổng quát $GL_n(\mathbb{K})$, đại số Lie của nhóm ma trận tam giác trên $UT_n(\mathbb{K})$ và nhóm ma trận đơn lũy $SUT_n(\mathbb{K})$, đại số Lie của nhóm ma trận trực giao $O(n)$ và nhóm ma trận trực giao đặc biệt $SO(n)$, đại số Lie của nhóm ma trận unita $U(n)$ và nhóm ma trận unita đặc biệt $SU(n)$. Và cuối cùng, ta khảo sát mối quan hệ đặc biệt giữa hai nhóm $SO(3)$ và $SU(2)$.

Chương IV: Thông qua định nghĩa và một vài kết quả quan trọng về tính liên thông, liên thông đường mà ta đã biết trong tôpô đại cương, ta định nghĩa sự liên thông của một đa tạp và qua đó ta đưa ra ví dụ của những nhóm ma trận quen thuộc có tính chất liên thông đường như: $SL_n(\mathbb{R}), GL_n^+(\mathbb{R}), SO(n), U(n), SU(n)$. Sau cùng, ta đưa ra định nghĩa những thành phần liên thông đường của một nhóm Lie, kèm theo đó là một vài ví dụ quan trọng.

2.Hướng nghiên cứu mới.

Thông qua những kiến thức nền mà ta đã có trong luận văn này về đại số Lie của nhóm các ma trận thì ta cũng muốn nghiên cứu về đại số Lie trên những nhóm khác như: nhóm các đa thức hay nhóm các không gian vector,... và qua đó ta cũng đặt câu hỏi về tính liên thông của một vài nhóm đặc biệt đại diện cho những nhóm đó.

□

Tài liệu tham khảo

- [1] J.F.Adams, Lectures on Lie Groups, University of Chicago Press (1969).
- [2] J.F.Adams, Lectures on Exceptional Lie Groups, University of Chicago Press (1996).
- [3] R.Carter, G.Segal, I.Macdonald, Lectures on Lie Groups and Lie algebras, Cambridge University Press, (1995).
- [4] M.L.Curtis, Matrix Groups, Springer-Verlag (1984).
- [5] R.Howe, Very basic Lie theory, Amer. Math. Monthly 90 (1983) 600 – 623; correction: Amer. Math. Monthly 91 (1984) 247.
- [6] I.R.Porteous, Topological geometry, Van Nostrand Reinhold Co. (1969).
- [7] J – P.Serre, Complex Semisimple Lie Algebras, Springer – Verlag (1987).
- [8] S.Sternberg, Group Theory and Physics, Cambridge University Press (1994).
- [9] F.W.Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer – Verlag (1983).
- [10] Hoàng Xuân Sính, Đại số đại cương, Nhà xuất bản Giáo dục (1972).
- [11] Đặng Thế Cấp, Giải tích hàm, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (2009).
- [12] Khu Quốc Anh – Nguyễn Anh Kiệt – Tạ Mân – Nguyễn Doãn Tuấn, Bài tập Đại số tuyến tính và Hình học giải tích, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội (1999).